

十二年國民基本教育課程綱要  
綜合型高級中等學校

課程手冊

數學領域

中 華 民 國 一 〇 八 年 五 月



# 目次

數學領域課程發展與教學實施.....	1
(一) 發展沿革與特色.....	1
(二) 學習重點與核心素養呼應說明.....	5
(三) 學習重點說明.....	14
(四) 教學單元建議.....	18
(五) 議題融入說明.....	20
(六) 教學單元示例.....	22
(七) Q&A.....	33
附錄 1 新舊課程綱要差異比較 .....	36
附錄 2 新舊課程綱要之課程實施銜接分析與建議 .....	37



## 數學領域課程發展與教學實施

為了讓各界了解十二年國民基本教育如何進行各領域課程發展與教學實施，本手冊就發展沿革與特色、學習重點與核心素養呼應說明、學習重點說明、教學單元建議、議題融入說明、教學單元示例、Q&A 等七大面向進行相關說明。

### (一) 發展沿革與特色

#### 1. 研修背景

##### (1) 綜合型高級中等學校數學領域課程綱要的演變歷程

綜合高級中學自 85 學年度試辦，於民國 88 年 7 月正式納入《高級中學法》，與普通高級中學、單類科高級中學、實驗高級中學並列成為學校四種類型之一，至今已有二十餘年，其間歷經幾次課程綱要的修訂，奠定了綜合型高級中等學校數學課程發展的基礎。

民國 85 年 8 月公布「試辦綜合高中實驗課程實施要點」，並於 85 學年度實施，規劃部定科目六十四學分，其中包含數學 I～IV，各 3 學分，共計 12 學分。民國 91 年 5 月公布「綜合高級中學課程綱要」，並於 91 學年度實施，為綜合高級中學部頒課程綱要的首版，確立高級中學和高級職業學校之外的第三類型後期中等教育課程類型，課程延續 85 年公布實驗課程之規範，仍維持部定科目數學 I～IV，各 3 學分，共計 12 學分。

教育部於 93 年 2 月發布「後期中等教育共同核心課程指引總綱」做為普通高級中學、高級職業學校、綜合高級中學與五年制專科學校前三年發展共同核心課程綱要之指引。依據部頒的課程指引，綜合高級中學與其他後期中等學制必須依循該指引，分別發展出各自的共同科目綱要，再橫向統整其他學制之課程。因此，配合部頒「後期中等教育共同核心課程指引總綱」之規範，修訂部定必修科目及學分。民國 94 年 8 月公布「綜合高級中學暫行課程綱要」，並自 95 學年度起實施，其中部定科目數學□、□，各 4 學分，共計 8 學分。民國 97 年 5 月公布「綜合高級中學課程綱要」，並自 99 學年度起實施，此次修訂數學領域仍規劃部定科目數學□、□，各 4 學分，共計 8 學分。

95 學年度起實施的「課程暫行綱要」，因為有後期中等教育共同核心課程的指引，高級中學、高級職業學校的數學學習內容差異不大，分流後的課程銜接較無執行上的困難。然而，自 99 學年度開始實施的數學科課程綱要，因高級中學、綜合高級中學、高級職業學校數學課程綱要未做橫向統整，致使綜合高級中學專門學程學生數學課程與專業類科課程無法銜接，而影響教師教學及學生學習。就現行綜合型高級中等學校數學領域課程綱要而言，數學教學重學科知識教授與演算訓練，不易運用於生活中，課程內容出現分流專門學程銜接斷層且無法與專業科目連結，種種問題皆為數學領綱亟需研修的因素。

##### (2) 強化數學領域之理念、目標與核心素養

世界主要國家在新一波的數學教育改革中，大多朝向數學素養的培養，著重學生能將學校所學應用於日常生活中，運用數學思考的能力，解決實際所面臨的問題，並於過程中累積溝通討論的經驗，培養學生欣賞數學的美及對於數學應用的正向態度，是為素養教育所強調的情意、態度面向。

在基本理念上，十二年國民基本教育之課程發展本於全人教育的精神，以「自發」、「互

動」及「共好」為理念，強調學生是自發主動的，學校教育應善誘學生的學習動機與熱情，引導學生開展自我與他人、社會、自然的各種互動能力，並協助學生應用及實踐所學、體驗生命意義，願意致力於社會、自然與文化的永續發展，共同謀求彼此的互惠共好。數學應以應用為主，鏈結生活情境、強調方法應用與問題解決，不宜只重知識結構而忽略認知發展與經驗建構歷程。數學概念與概念間的學習，應建立在學生的經驗背景之上，因此，要培養學生從不同面向分析問題、辨識問題、解決問題，以增進未來就業、終身學習及自我發展能力，體現務實致用、適性揚才之理念，成為自發主動具有社會適應力與應變力的終身學生，並注重城鄉差距與個別差異，確保學習的公平正義，促進性別地位實質平等，以及對於群體差異的多元包容與尊重，覺察環境議題與關注海洋生態，為國家永續發展奠定良好基礎。

十二年國民基本教育之數學教育首要目標為提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度；其次，發展相關的數學能力，運用工具解題的能力，以及欣賞數學的藝術特質。領域核心素養著重學生能於日常生活中運用數學思維，把問題轉換成數學問題，並能運用相關的知識與技能解決數學問題，溝通數學想法，欣賞數學以簡馭繁與結構嚴謹之美。

## 2. 研修目標

數學應是一種工具學科，是其他學科學習的基礎，並且是形塑國民理性推論與批判思考素養的關鍵領域，本領域須因應時代更迭、各學科的演進而對數學需求的轉變、未來社會生存所需的能力，以及現行課程綱要實施產生的問題與時俱進研修，調整課程綱要的理念、目標、架構與學習內容等，以提昇下一代的學習表現，配合其他學科的需求，為學生的升學與職涯發展做好準備，實現總綱核心素養培育之全人教育理想。

綜合型高級中等學校數學領域課程綱要之研修目標如下：

### (1) 數學學習應重視經驗建構與學習鷹架

學習是一種認知發展的過程，尤其數學教學更應著重於經驗的建構與生活情境的鏈結，數學教學更需營造出一個可以經驗驗證的學習鷹架，並能應用在生活境況的問題解決，以促進提昇有效的教學與學習。原來的綜合高級中學教育擔負著學習準備與專業技能訓練的功能，隨著時代的進步與產業社會結構的變遷，綜合型高級中等學校的教育功能定位為多元試探、彈性學習、適性分流的終身學習準備教育，數學更需與專業學習與生活經驗緊密聯結，並且要能運用於生活情境的問題解決，不宜只重知識結構而忽略認知發展過程與經驗建構的歷程及學習鷹架的輔助。

### (2) 數學學習應銜接認知發展與學習一貫

數學的每一個概念、定義、定理、公式等都是下一階段數學能力的養成基礎，教師應隨時注意培養學生的邏輯思考能力，強化推理的訓練。綜合型高級中等學校會在高二分流學術學程和專門學程，所以數學領域課程設計需兼顧不同學程學生需求，銜接認知發展與學習一貫之目標。

### (3) 數學學習應強化基礎能力與問題解決

數學是一種工具學科，是其他學科學習的基礎，並且是形塑國民理性推論與批判思考素養

的關鍵領域，且須因應時代更迭、各學科的演進而對數學需求的轉變、未來社會生存所需的能力。問題即是數學的核心，學習數學就是學習如何解決問題，解題的意義在於運用已有的數學知能，以程序性的方式做運算或圖表來訓練及培養學生有能力解決非典型的數學問題，並應用學科學習及日常生活當中。因此，數學領綱應鬆解數學的本位主體，以學生的認知建構取代數學的知識結構，並配合其他學科學習需求與應用為參照。

#### **(4) 數學學習應關注差異起點與有效學習**

以學生為中心的學習歷程，其實是從看見「差異」才開始，每位學生都有不同的學習鷹架，差異化教學就是教師回應學生學習需求的方式，教師應視各種不同的狀況運用多元的教學方式，為學生創造不同的學習機會與增進學習動機，有效教學及有效學習必須相輔相成。

### **3. 研修特色**

綜合型高級中等學校數學領域課程綱要之研修特色如下：

#### **(1) 強化各學習階段的縱向連貫與各領域橫向統整**

為落實十二年國民基本教育課程的理念與目標及教育學習階段的縱向連貫與橫向統整，綜合型高級中等學校數學課程綱要係以「核心素養」做為課程發展之主軸，配合各學習階段的重點，規劃連貫且統整的課程內容，並以「啟發生命潛能」、「陶養生活知能」、「促進生涯發展」及「涵育公民責任」的總體目標為課程規劃的依歸。以裨益各教育階段間的連貫以及各領域/科目間的統整。

#### **(2) 共構普通型及技術型高級中等學校數學課程綱要**

綜合型高級中等學校十年級數學課程綱要，係參考技術型高級中等學校十年級 B 版本數學課程綱要與普通型高級中等學校十年級數學課程綱要，以最大可能之共構，紮根數學基本能力，為十一年級分流學術學程及專門學程之學習，奠定學習與應用之基礎。十一年級分流之後，學術學程採用普通型高級中等學校數學課程綱要，專門學程採用技術型高級中等學校數學課程綱要，並可依差異或類科需求做適度的彈性調整。

#### **(3) 以學習學科及問題解決之應用工具為導向**

本著彈性及人本的精神，與統整、試探、分化與專精的理念，重視學生的差異起點、多元探索及適性分流的需求，綜合型高級中等學校數學課程綱要，特別強化知識螺旋的學習建構，體現從基本的數、量、形與算術、符號代數、數形轉換、抽象數學的認知、認識數學結構與思維方式，建立數學概念、學習解決問題的方法，進而培養數學應用與建模能力，期使學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的知能，能將數學轉化成解決問題的應用工具。

#### **(4) 納入數學軟體與科技工具的使用與觀念**

學習工具對於數學教學助益極大。除了傳統教具如：圓規、三角板、方格紙、…等，資訊時代的計算機、電腦、網路、多媒體、行動工具等都是有用的學習工具。本次學習重點與實施要點納入重視計算工具的有效運用。計算工具教學應從計算機開始，逐漸引導學生使用各種高階工具。數學是一種規律的科學，計算機及電腦可以協助落實探究活動，惟因計算機的計算有一定的誤差，應強調其使用時機及侷限，培養學生使用計算機的正确態度。學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算而降低學習效率，可適當使用計算機，執行複雜數字、統

計數據、及三角比等的計算。

#### 4. 研修重點

世界主要國家的數學研修大多在強化學生問題解決、生活應用能力，與能夠深化學習及樂於學習數學的態度與素養之提倡。十二年國民基本教育綜合型高級中等學校數學領域課程綱要之研修，也有相似的進化與提倡，主張數學應是一種應用的工具、是一種認知的建構、是學習的基礎，更是培養理性推論、批判思考與體現全人教育理想的重要介面。其研修重點如下：

##### (1) 時間分配

第一學年每學期 4 學分，每週授課 4 節。

##### (2) 學習重點

數學領域課程綱要的學習重點是依據數學領域之基本理念、課程目標與核心素養等項目發展而來，並與核心素養進行雙向檢核，以瞭解二者的對應情形；此學習重點係由「學習表現」與「學習內容」所組成，主要用以引導課程設計、教材發展、教科書審查及學習評量等，並配合教學加以實踐。

本領域之教學強調以學生為中心的概念，學生學習表現重視認知（概念的了解、程序的執行、問題的解決、連結與應用）、技能（工具的應用）與情意（信念的養成），希望以具體表現來呼應核心素養。這些向度藉由教育理論的描述，作為教師進行教學時的重要步驟與指標。

學習內容則是涵蓋領域之重要事實、概念、原理、原則、技能與後設認知等知識。學習內容是本領域重要且基礎的內容，地方政府、學校或出版社得依其專業需求與特性，將學習內容做適當的轉化，以發展出因地制宜、符合需求的教材。

##### (3) 實施要點

本領域依據教育部 103 年公布之《十二年國民基本教育課程綱要總綱》實施要點之規範，從「課程發展」、「教材編選」、「教學實施」、「教學資源」及「學習評量」五大向度，提出轉化課程理念目標與培養核心素養之具體作為、注意事項、所需資源和相關規範等。



## (二) 學習重點與核心素養呼應說明

「核心素養」是社會成員共同的素養，也是各個學習領域都應具備的素養。不同的學習領域或專門職業仍有其「專門素養」，「核心素養」並非用來取代「專門素養」，「素養」強調的是「知識、能力、態度」的整合，也就是說「素養」除了「知識、能力」之外，相當強調「態度」這個情意層面的展現。透過三面九項的「核心素養」，學生可以變得更加自律自主，更能與他人互動溝通，也更能參與公民社會。「核心素養」分三面九項敘述，但並非各自獨立，而是必須彼此支援、環環相扣。

數學領域的「學習重點」(涵括「學習表現」與「學習內容」)可以視為學科的「專門素養」，在「教學」上應考量學習表現與學習內容之結合，引導學生習得相應的核心素養，並妥善運用於學習歷程當中。

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。 2-V-1 能正確使用數學軟體與科技工具，協助認知、問題解決等技能。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。	A-10-3 除法定理。 A-10-6 直線方程式、圓方程式。 S-10-1 直線與圓的關係。	數 C-U-A2 藉由單元之間數學觀念的統整，強化生活情境與問題理解，學習由不同面向分析問題與解決問題，並將生活問題經由觀察，找出相關性，做成數學推測或建立數學模型，以進一步歸納演繹找到問題的解決方法。	1.目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「系統思考與解決問題」上有所成長。 2.可透過題目引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在教師授課提問時或學生彼此討論中，持續強化思辨能力，適時帶入觀念。 3.期待學生能將「系統思考」與「解決問題」的相關認知，於生活中實踐應用。 4.與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。 5.紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
<p>1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。</p> <p>1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。</p>	<p>N-10-4 數列與級數。</p> <p>A-10-6 直線方程式、圓方程式。</p>	<p>數 C-U-A2</p> <p>藉由單元之間數學觀念的統整，強化生活情境與問題理解，學習由不同面向分析問題與解決問題，並將生活問題經由觀察，找出相關性，做成數學推測或建立數學模型，以進一步歸納演繹找到問題的解決方法。</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「系統思考與解決問題」上有所成長。</li> <li>2. 可透過題目引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在教師授課提問時或學生彼此討論中，持續強化思辨能力，適時帶入觀念。</li> <li>3. 期待學生能將「系統思考」與「解決問題」的相關認知，於生活中實踐應用。</li> <li>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
<p>1-V-1 能了解數學的概念、運算與關係。</p> <p>1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。</p> <p>1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。</p>	<p>A-10-1 式的運算。</p> <p>A-10-4 多項式不等式。</p> <p>A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。</p> <p>R-10-1 多項式函數的圖形。</p> <p>R-10-2 三角函數的圖形。</p>	<p>數C-U-B1</p> <p>能辨識問題與數學的關聯，具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養。運用數學知識、技能、精確地使用適當的符號，在兼顧性別平等、尊重包容及環境變遷的條件下，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，以數學思維做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能連結抽象符號執行操作程序，靈活運用數學知識、技能與符號，進行經驗、思考、價值與情意之表達，呈現數學操作或推論的過程並能理性地與他人公平溝通與解決問題。</p>	<p>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「符號運用與溝通表達」上有所成長。</p> <p>2. 數學的學習，一向是在問題或教師所提供的各類情境中，讓學生認識並操作描述、演算及預測的方法，並掌握解釋、判斷、推論等表達策略，因此，數學學習原本就與本項素養關係密切。</p> <p>3. 期待學生不僅能在課堂上進行指定問題的學習，也能在生活中，藉由運算和自己溝通，或以合宜而有效的方法和其他人溝通。</p> <p>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</p> <p>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</p>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
<p>1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。</p> <p>3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。</p>	A-10-8 平面向量的運算。	<p>數 C-U-B1</p> <p>能辨識問題與數學的關聯，具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養。運用數學知識、技能、精確地使用適當的符號，在兼顧性別平等、尊重包容及環境變遷的條件下，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，以數學思維做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能連結抽象符號執行操作程序，靈活運用數學知識、技能與符號，進行經驗、思考、價值與情意之表達，呈現數學操作或推論的過程並能理性地與他人公平溝通與解決問題。</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「符號運用與溝通表達」上有所成長。</li> <li>2. 數學的學習，一向是在問題或教師所提供的各類情境中，讓學生認識並操作描述、演算及預測的方法，並掌握解釋、判斷、推論等表達策略，因此，數學學習原本就與本項素養關係密切。</li> <li>3. 期待學生不僅能在課堂上進行指定問題的學習，也能在生活中，藉由運算和自己溝通，或以合宜而有效的方法和其他人溝通。</li> <li>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。	N-10-3 三角比，任意角的正弦、餘弦與正切。 A-10-5 直線的斜率與正切。 A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。 R-10-2 三角函數的圖形。	數 C-U-B2 能夠運用科技工具，包含知道其適用性與限制，並有效解決日常實際問題，與專業領域內的實務問題。以數學理解為基礎，能識讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「科技資訊與媒體素養」上有所成長。</li> <li>2. 可透過教材題本引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在學習活動中適時應用科技媒體，或拿媒體上所傳播的訊息進行討論，實為最好的方式。</li> <li>3. 期待學生能善用科技媒體，了解其效益與侷限。同時，對於媒體訊息要有反思與辨偽的能力。</li> <li>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
2-V-1 能正確使用數學軟體與科技工具，協助認知、問題解決等技能。	A-10-8 平面向量的運算。	數 C-U-B2 能夠運用科技工具，包含知道其適用性與限制，並有效解決日常實際問題，與專業領域內的實務問題。以數學理解為基礎，能識讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「科技資訊與媒體素養」上有所成長。</li> <li>2. 可透過教材題本引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在學習活動中適時應用科技媒體，或拿媒體上所傳播的訊息進行討論，實為最好的方式。</li> <li>3. 期待學生能善用科技媒體，了解其效益與侷限。同時，對於媒體訊息要有反思與辨偽的能力。</li> <li>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。	R-10-2 三角函數的圖形。	數 C-U-B3 藉由繪圖操作使學生具備藝術感知、欣賞、創作與鑑賞的能力，進而創作與發揮創意。利用幾何圖形與曲線之變化，運用線條的韻律、造形的構成、對稱、平衡等，並能於生活中對於美善的人事物進行鑑賞。藉由日常情境中自然界的圖像與媒體的視覺，從中了解美善的人事物，並能進行賞析、建構與分享。	<ol style="list-style-type: none"> <li>1.目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「藝術涵養與美感素養」上有所成長。</li> <li>2.可透過教材題本引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在學習活動中適時融入，或引導學生實際觀賞各類藝術展演，實為最好的方式。</li> <li>3.期待學生能讓自己的生活有情意，有品味，甚至將美感經驗應用在職場上。</li> <li>4.與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5.紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。	S-10-2 任意角和極座標。	<p>數 C-U-B3</p> <p>藉由繪圖操作使學生具備藝術感知、欣賞、創作與鑑賞的能力，進而創作與發揮創意。利用幾何圖形與曲線之變化，運用線條的韻律、造形的構成、對稱、平衡等，並能於生活中對於美善的人事物進行鑑賞。藉由日常情境中自然界的圖像與媒體的視覺，從中了解美善的人事物，並能進行賞析、建構與分享。</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「藝術涵養與美感素養」上有所成長。</li> <li>2. 可透過教材題本引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在學習活動中適時融入，或引導學生實際觀賞各類藝術展演，實為最好的方式。</li> <li>3. 期待學生能讓自己的生活有情意，有品味，甚至將美感經驗應用在職場上。</li> <li>4. 與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。</li> <li>5. 紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。</li> </ol>



數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。	D-10-1 集合。 D-10-2 有系統的計數。 D-10-3 古典機率。	數 C-U-B3 藉由繪圖操作使學生具備藝術感知、欣賞、創作與鑑賞的能力，進而創作與發揮創意。利用幾何圖形與曲線之變化，運用線條的韻律、造形的構成、對稱、平衡等，並能於生活中對於美善的人事物進行鑑賞。藉由日常情境中自然界的圖像與媒體的視覺，從中了解美善的人事物，並能進行賞析、建構與分享。	1.目標是讓學生在「數學專門素養」的學習過程中，同時在「藝術涵養與美感素養」上有所成長。 2.可透過教材題本引介相關知識，但未必要特地提供此類主題的篇章。在學習活動中適時融入，或引導學生實際觀賞各類藝術展演，實為最好的方式。 3.期待學生能讓自己的生活有情意，有品味，甚至將美感經驗應用在職場上。 4.與其他核心素養適度搭配，使課程於進行中，自然的學習核心素養。 5.紙筆評量有其限度，宜透過多元評量了解學生在情意態度上的狀況。

### (三) 學習重點說明

本學習重點說明乃提供教科書編輯及教學現場教師參考，以引導教師進行課程設計、教材發展等，並透過教學活動加以實踐。

數學領域學習重點		單元名稱	學習目標	備註
學習表現	學習內容			
1-V-1 能了解數學的概念、運算與關係。	1.N-10-1 有理數與實數。  2.N-10-2 絕對值。 3.R-10-1 多項式函數的圖形。 4.R-10-3 函數 $f(x)$ 符號。	坐標系與函數圖形	1.能理解有理數、無理數與實數在數線上的表示法，熟悉四則運算，能用以解決應用問題。 2.能理解絕對值方程式、絕對值不等式的意義與運算。 3.能理解多項式函數的意義，認識其圖形的特徵及意義。 4.能了解基本函數的意義及圖形。	1.無理數的估算不列為評量的直接命題。  2.絕對值不等式以 $ x-a >b$ 和 $ x-a <b$ 為原則。
	1.N-10-3 三角比，任意角的正弦、餘弦與正切。 2.A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。 3.S-10-2 任意角和極坐標。	三角函數	1.能理解三角比值的意義及三角函數定義。 2.能理解正弦定理、餘弦定理與簡易三角測量。 3.能理解斜角與方向角的關聯，並能用距離與斜角描述位置。	1.根據圖形之測量而估算廣義角三角比。 2.任意角範圍，初步以 $-180$ 度至 $360$ 度。
	1.A-10-1 式的運算。 2.A-10-3 除法原理。	式的運算	1.能理解多項式的運算原理及基本運算。 2.能理解多項式除法原理及運算。	除式僅作 $(x-a)$ 即可，不必推廣。
	A-10-5 直線的斜率與正切。	直線方程式	能理解直線斜角及斜率之意義及運算。	
	A-10-6 直線方程式、圓方程式。	圓與直線	能了解直線方程式、圓方程式。	
	A-10-8 平面向量的運算。	平面向量	能理解向量與向量運算的幾何意義。	以位置向量為主。
	1.D-10-1 集合。	排列、組合、古典機率	1.能認知集合窮舉式與描述式定義，並了解子集、交集、聯集、餘集，屬於與包含關係。	1.銜接國民中學經驗。

數學領域學習重點		單元名稱	學習目標	備註
學習表現	學習內容			
	2.D-10-2 有系統的計數。		2.能理解有系統的窮舉、樹狀圖、加法原理、乘法原理，並了解如何應用於直線排列與組合。	2.以古典機率之所需為教學目標。
1-V-2能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。	1.N-10-1 有理數與實數。	坐標系與函數圖形	1.能熟悉有理數、無理數與實數在數線上的表示法，並能執行其四則運算。 2.能做絕對值方程式與絕對值不等式之運算。 3.能畫多項式函數的圖形。	
	2.N-10-2 絕對值。			
	3.R-10-1 多項式函數的圖形。			
	N-10-3三角比，任意角的正弦、餘弦與正切。	三角函數	能估算三角比值及做三角函數運算。	
	1.A-10-1 式的運算。	式的運算	1.能執行多項式的運算。 2.能解一元二次方程式。 3.能圖解多項式不等式。	
	2.A-10-2 多項式基本概念。			
	3.A-10-4 多項式不等式。			
A-10-6 直線方程式、圓方程式。	圓與直線	能計算點到直線的距離並判別直線與圓關係。	可計算平行線的距離。	
A-10-8 平面向量的運算。	平面向量	能操作向量的基本運算與內積。	以線性組合為主要目標。	
D-10-2 有系統的計數。	排列、組合、古典機率	能使用有系統的窮舉、樹狀圖、加法原理、乘法原理、直線排列與組合。	應包含二項式展開作為組合的應用範例。	
1-V-3能形成、表達與解決數學問題。	1.N-10-1 有理數與實數。 2.R-10-1 多項式函數的圖形。	坐標系與函數圖形	1.熟悉實數四則運算，並能解決數學問題。 2.熟悉多項式函數圖形的特徵，並能圖解其數學問題。	
	N-10-4 數列與級數。	數列與級數	可察覺數列的規律性並以一般式表示，熟悉級數的求和公式，且能以數學歸納法說明。	遞迴關係以一階為原則；數學歸納法應先

數學領域學習重點		單元名稱	學習目標	備註
學習表現	學習內容			
				發現規律，不必過度練習。
	S-10-1 直線與圓的關係。	圓與直線	能計算點到直線距離，並能據以判斷圓與直線關係。	不含兩圓關係。
	1.D-10-1 集合。 2.D-10-2 有系統的計數。 3.D-10-3 古典機率。	排列、組合、古典機率	1.能做集合的運算及使用文氏圖解集合。 2.能使用有系統的窮舉、樹狀圖、加法原理、乘法原理，解決排列與組合的問題。 3.能計算事件的機率與期望值。	
1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。	1.A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。 2.S-10-2 任意角和極坐標。 3.R-10-2 三角函數的圖形。	三角函數	1.能將三角函數的對應關係、正弦定理及餘弦定理，應用於簡易測量。 2.能應用極坐標計算兩點間的距離。 3.能描繪三角函數的圖形，並將其週期現象連結於物質的波動。	建議三角測量融入適當課題中教授。
	S-10-1 直線與圓的關係。	圓與直線	能應用圓與直線關係，解決不等式的問題。	
	R-10-3 函數 $f(x)$ 符號。	坐標系與函數圖形	能應用基本函數圖型的概念，建立數學模型。	
2-V-1 能正確使用數學軟體與科技工具，協助認知、問題解決等技能。	A-10-5 直線的斜率與正切。 1.A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。 2.S-10-2 任意角和極坐標。 3.R-10-2 三角函數的圖形。	直線方程式  三角函數	能使用計算器協助了解斜角與斜率的變化關係。  1.能使用計算器或電腦描繪三角函數圖形，以了解三角函數的週期與值域。 2.能理解斜角與方向的關聯，能用方向和距離描述位置。 3.能理解三角函數所描述的週期現象及其典型應用。	
3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗	N-10-3 三角比，任意角的正弦、餘弦與正切。	三角函數	能理解三角比值及三角函數的意義與應用。	

數學領域學習重點		單元名稱	學習目標	備註
學習表現	學習內容			
數學的價值。	N-10-4 數列與級數。	數列與級數	能察覺並發現數列的規律性，並能以一般式表示，熟悉級數的求和公式，並能以數學歸納法用於數學論證。	
	1.N-10-5 邏輯。 2.D-10-3 古典機率。	排列、 組合、 古典機率	1. 能認識命題及其否定，兩命題的或、且、推論關係。 2. 能理解古典機率的定義與性質，期望值，並能用以處理應用問題。	

#### (四) 教學單元建議

教科書出版業者宜參照本教學單元建議進行教科書編輯，實際授課節數得依課程銜接與學生學習之需要彈性調整。

建議開設學分數：第一學年每學期各 4 學分，合計 8 學分。

年級	單元主題	學習內容條目	建議節數	備註
十年級	坐標系與函數圖形	N-10-1 有理數與實數。 N-10-2 絕對值。 R-10-1 多項式函數的圖形。 R-10-3 函數 $f(x)$ 符號。	18	1. 定義科學記號數字的有效位數。 2. 不涉及一般的線對稱與點對稱。 3. 認識 $f(x)$ 之函數符號與 $f(x-h)$ 、 $f(-x)$ 的圖形關係。
	直線方程式	A-10-5 直線的斜率與正切。 A-10-6 直線方程式、圓方程式。	18	1. 呼應國民中學的知識。 2. 包含計算點到直線的距離、平行線的距離。
	圓與直線	A-10-6 直線方程式、圓方程式。 S-10-1 直線與圓的關係。	12	不含兩圓關係。搭配表達不等式的解區域。
	式的運算	A-10-1 式的運算。 A-10-2 多項式基本概念。 A-10-3 除法原理。 A-10-4 多項式不等式。	24	1. 綜合除法之除式僅作 $x-a$ 即可。 2. 不等式的解區間，不做區間的集合運算。
十年級	三角函數	N-10-3 三角比，任意角的正弦、餘弦與正切。 A-10-7 正弦、餘弦定理、三角測量。 S-10-2 任意角和極坐標。 R-10-2 三角函數的圖形。	20	1. 廣義角之範圍，以-180 度至 360 度為限。 2. 三角測量不設單元。
	平面向量	A-10-8 平面向量的運算。	12	位置向量為主，以線性組合為主要目標。

年級	單元主題	學習內容條目	建議節數	備註
	數列與級數	N-10-4 數列與級數。	16	1.連結國民中學的等差數列和等比數列。 2.遞迴關係以一階為主。
	排列、組合、古典機率	N-10-5 邏輯。 D-10-1 集合。 D-10-2 有系統的計數。 D-10-3 古典機率。	24	1.排列與組合，以供應古典機率之所需。 2.二項式展開作為組合的應用範例。

### (五) 議題融入說明

教師教學時，除涵蓋於數學領域之教材內容外，可透過數學領域內容之連結、延伸、統整與轉化，進行議題之融入，亦可將人物、典範、習俗或節慶等加入教材，或採隨機教學，並於作業、作品、展演、參觀、社團與團體活動中，以多元方式融入議題。經由討論、對話、批判與反思，使教室成為知識建構與發展的學習社群，增進議題學習之品質。

進行議題教育時，透過本領域之學習重點與議題實質內涵之連結、延伸、統整與轉化，培養學生對議題探究、思辨與實踐的能力。性別平等教育、人權教育、環境教育與海洋教育四項議題融入本領域課程綱要「學習重點」之示例，請參見「數學領域課程綱要」之附錄二。

下表係針對環境教育融入本領域課程綱要「學習重點」之示例進一步說明，作為教材編選與教學實施之參考。

議題	學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點示例	說明
環境教育	環境倫理	環U2理解人為破壞對其他物種與棲地所帶來的生態不正義，進而支持相關環境保護政策。	1-V-1 能了解數學的概念、運算與關係。 1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。 1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。 1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。 N-10-5 邏輯。	1.結合其他領域學科，針對資源耗竭與生物多樣性消失，以及社會不正義和環境不正義等，能提出估計公式，並舉出實例提供學生演算，增進其對環境的重視。 2.能以統計資料提出範例，讓學生據以思考分析、製作圖表，加深其對居住環境的進一步體認。
	永續發展	環U5採行永續消費與簡樸生活的的生活型態，促進永續發展。	1-V-1 能了解數學的概念、運算與關係。 1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。 2-V-1 能正確使用數學軟體與科技工具，協助認知、問題解決等技能。 R-10-1 多項式函數的圖形。	1.結合其他領域學科，增進能源基本概念；發展正確能源價值觀；養成節約能源的思維、習慣和態度。 2.能以統計資料提出範例，讓學生據以製作圖表，加深其對永續發展的進一步體認。
	氣候變遷	環U7收集並分析在地能源的消耗與排碳的趨勢，思考因地制宜的解決方案，參與集體的行動。	1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。 1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗	1.結合其他領域學科，認識與理解人類生存與發展所面對的環境危機與挑戰；探究氣候變遷（如：防洪設施、降雨率、土壤含水率...等）。



議題	學習主題	實質內涵	融入課程綱要 學習重點示例	說明
			數學的價值。 D-10-3古典機率。 R-10-3函數 $f(x)$ 符號。	2.能以統計資料提出範例，讓學生據以製作圖表，加深其對氣候變遷的進一步體認。
	災害防救	環U9分析實際監測數據，探究天然災害頻率的趨勢與預估。	1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。 1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。 D-10-3古典機率。 R-10-3函數 $f(x)$ 符號。	1.結合其他領域學科，認識天然災害成因；養成災害風險管理與災害防救能力；強化防救行動之責任、態度與實踐力。 2.能以統計資料提出範例，讓學生據以製作圖表，加深其對災害防救的進一步體認。
	能源資源永續利用	環U13了解環境成本、汙染者付費、綠色設計及清潔生產機制。	1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。 1-V-3 能形成、表達與解決數學問題。 3-V-1 能從日常生活與學科學習經驗中體驗數學的價值。 R-10-1多項式函數的圖形。	1.結合其他領域學科，認識與理解人類生存與發展所面對的環境危機與挑戰；能提出估計公式，並舉出實例提供學生演算，增進其執行綠色、簡樸與永續的生活行動。 2.能以統計資料提出範例，讓學生據以製作圖表，加深其對環境永續利用的進一步體認。

## (六) 教學單元示例

本教學單元示例乃供教科書編輯及教學現場教師參考，以結合十二年國民基本教育課程綱要發展之理念進行相關課程教學。

<b>領域：數學</b>		<b>教學年級：十年級</b>
課程設計原則與教學理念說明：		
<ol style="list-style-type: none"> <li>1.本單元主要是讓學生對有限項等差級數、等比級數有基礎的理解，以便能轉化應用於專業科目，讓學生體會數列與級數在實務中的實用性，能自然運用於日常生活中，提升解決問題之能力。</li> <li>2.先備知識：學生需了解「數列」的意義及表示法等概念，並能從實例觀察出數列的規律性。教師在教授本單元時，要先了解學生起點行為，若有能力落差，應隨時補救。</li> <li>3.教材設計：教材應有適切的範例與習題，並貼近學生的生活經驗。在範例之後應有隨堂練習，供學生在課堂上演練，並幫助教師檢核學生的學習情況。習題的設計應由淺入深編排，緊扣學習的主題與生活經驗的建構。</li> <li>4.教學活動：教學活動：教師應規劃多元適性之教學活動，例如：小組討論、運算演示…等，提供學生學習、計算、歸納、證明、作圖、應用、演算、提問、討論的機會，以增強學生邏輯思維能力、空間想像力以及運用所學知識分析問題、解決問題、連貫和運用。</li> <li>5.學習評量：應兼顧形成性評量、診斷性評量、總結性評量，採用紙筆測驗、演算、證明、作圖、應用等題型之評量、檔案評量等多元彈性的評量方式。</li> <li>6.診斷與補救：教師應依據學習評量結果與分析，診斷學生的學習狀態，調整教材教法與教學進度，並提供學習輔導與差異化教學。對於學習待加強之學生，應調整教材教法並進行補救教學；對於學習精熟之學生，則應提供加深加廣的學習活動。</li> </ol>		
<b>核心素養、學習重點、單元學習目標、議題融入對應情形</b>		
<b>核心素養</b>		數 C-U-A2 藉由單元之間數學觀念的統整，強化生活情境與問題理解，學習由不同面向分析問題與解決問題，並將生活問題經由觀察，找出相關性，做成數學推測或建立數學模型，以進一步歸納演繹找到問題的解決方法。
<b>學習重點</b>	<b>學習表現</b>	1-V-2 能彈性、精確、有效率且合適地執行數學程序。 1-V-4 能連結並應用數學方法，解決日常或相關學科問題。
	<b>學習內容</b>	N-10-4 數列與級數。
<b>議題融入</b>		性 U7 批判科技、資訊與媒體的性別意識形態，並尋求改善策略。 人 U2 探討國際人權議題，並負起全球公民的和平與永續發展責任。 人 U8 說明言論自由或新聞自由對於民主社會運作的重要性。 環 U3 探討臺灣二十一世紀議程的內涵與相關政策。 環 U5 採行永續消費與簡樸生活的生活型態，促進永續發展。

單元主題：有限項等差級數、等比級數		節數：2 節
教學資源/設備需求：投影機、電腦		
單元學習目標	1.能了解「級數」的意義。 2.能引導學生自己推導出等差以及等比級數的前 $n$ 項的總和公式。 3.能了解符號 $\Sigma$ 的性質。 4.會使用 $\Sigma$ 去表示級數的和，並能直接利用 $\Sigma$ 簡化計算級數的求和。	
教學準備	1.起點行為的診斷了解。 2.認知建構的生活物件。 3.學習成效的評量工具。	
相關科目之連結	自然科學領域、綜合活動領域、社會領域、健康與體育領域。	

教學活動		教具/ 教學方法	議題實質 內涵	備註
教師活動	學生 活動			
<p><b>壹、準備階段</b></p> <p>【日常生活中級數的概念】</p> <p>先回顧等差數列與等比數列，藉由以下兩題題目，讓同學建立級數的概念，藉此引起學生的學習動機</p> <p>1.父親第一天給小明 1 元的零用錢，以後每天比前一天多 1 元，小明都沒有花用，存起來，則一周(七天)後，小明有多少元？</p> <p>2.父親第一天給小明 1 元的零用錢，以後每天加倍給付，小明都沒有花用，存起來，則一周(七天)後，小明有多少元？</p> <p><b>貳、發展階段</b></p> <p>一、溫故知新：</p> <p>確認學生還記得何謂等差、等比數列</p> <p>二、教學內容及例題演練：</p> <p>(一) 級數的定義</p> <p>1.級數：將數列 <math>\{a_n\}</math> 的各項依序以「+」號連結起來所成的式子。</p> <p>2.一般用 <math>S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n</math> 來表示前 <math>n</math> 項和。</p> <p>【例題1】</p> <p>寫出下列所描述的級數 (<math>n</math> 為正整數)：</p> <p>(1) 一般項 <math>a_n = \frac{1}{n^2}</math></p> <p>(2) 首項為 1，公差為 2 的等差級數</p> <p>(3) 首項為 2，公比為 -3 的等比級數</p> <p>(4) 一般項 <math>a_n = 1 + 2 + \dots + n</math></p>			環 U5 採行永續消費與簡樸生活的生活型態，促進永續發展。	

<解法>

$$(1) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$(2) 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + \cdots$$

$$(3) 2 + 2 \times (-3) + 2 \times (-3)^2 + \cdots + 2 \times (-3)^{n-1} + \cdots$$

$$(4) \text{ 因為 } a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

依題意

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots$$

$$+ (1+2+\cdots+n) + \cdots$$

所以級數為

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} + \cdots$$

**【例題2】**

求下列級數的前 $n$ 項和：

$$(1) 2 + 2 + 2 + \cdots + 2$$

$$(2) 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^{n+1}$$

<解法>

(1) 觀察級數的每一項都是2，則有

$$S_n = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n \text{ 個 } 2} = 2n$$

(2) 由  $S_1 = 1$

$$S_2 = 1 + (-1) = 0$$

$$S_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

若 $n$ 是奇數， $n=2m-1$ ， $m$ 是正整數，則

$$S_{2m-1} = [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots + [1 + (-1)] \\ + 1 = 0 + 0 + \cdots + 1 = 1$$

若 $n$ 是偶數， $n=2m$ ， $m$ 是正整數，則

$$S_{2m} = [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots + [1 + (-1)] \\ = 0$$

## (二) 等差數列與等差級數求和公式

一數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_{n+1} - a_n = d$  ( $d$  為定值)，稱為等差數列，其中  $d$  稱為公差：

1.  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， $n$  為正整數

2.  $a, x, b$  形成等差數列， $x = \frac{a+b}{2}$  稱為

$a$  與  $b$  的等差中項或算術平均數。

3. 等差級數 (又稱算術級數) 求和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \times n \\ &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \end{aligned}$$

### 【等差級數求和公式推導】

利用高斯提出的方法求等差級數的前  $n$  項和，

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \\ + S_n &= [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \cdots + a_1 \\ \hline 2S_n &= [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \cdots + [2a_1 + (n-1)d] \end{aligned}$$

$$\text{得 } S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

### 【例題3】

求下列級數的前  $n$  項和：

(1)  $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

(2)  $2+5+8+\cdots+(3n-1)$

<解法>

(1) 首項為1，公差為2的等差級數，其前  $n$  項和為

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3+5+\cdots+(2n-1) \\ &= \frac{n[1+(2n-1)]}{2} \\ &= \frac{n \times 2n}{2} = n^2 \end{aligned}$$

(2) 首項為2，公差為3的等差級數，其前  $n$  項和為

$$\begin{aligned} S_n &= 2+5+8+\cdots+(3n-1) \\ &= \frac{n[2+(3n-1)]}{2} \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} \end{aligned}$$

## (三) 等比數列與等比級數求和公式

一數列  $\{a_n\}$  滿足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$  ( $r$  為定值), 稱

為等比數列, 其中  $r$  稱為公比:

1.  $a_n = a_1 r^{n-1}$ ,  $n$  為正整數

2.  $a, x, b$  形成等比數列,  $x = \pm\sqrt{ab}$  為  $a$  與  $b$  的等比中項, 而  $a$  與  $b$  的幾何平均數是  $\sqrt{ab}$

3. 等比級數 (又稱幾何級數) 求和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ &= \begin{cases} na_1 & , \text{當 } r = 1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} & , \text{當 } r \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**【等比級數求和公式推導】**

(1) 當  $r = 1$  時,

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n\text{個}} = na_1$$

(2) 當  $r \neq 1$  時, 由

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ - rS_n &= a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline (1-r)S_n &= a_1 - a_1 r^n \\ \text{得 } S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \end{aligned}$$

**【例題4】**

求下列級數的前  $n$  項和:

(1)  $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

(2)  $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

<解法>

(1) 首項為1, 公比為2的等比數列, 其前  $n$  項和為

$$S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

(2) 首項為1, 公比為  $-\frac{1}{3}$  的等比數列, 其前  $n$  項和為

$$S_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

**【例題5】**

一級數的前  $n$  項和為

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \text{ 求這級數的一般項 } a_n.$$

<解法>

$$(1) a_1 = S_1 = 2$$

(2) 對正整數  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)[(n+2) - (n-1)] \\ &= \frac{1}{3}n(n+1) \times 3 \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

當  $n=1$  時,

$$a_1 = 1 \times (1+1) = 2 \text{ 也成立}$$

由 (1) (2) 得知這級數的一般項

$$a_n = n(n+1)$$

**(四)  $\Sigma$  符號**

1. 定義:  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ; 其中

符號「 $\Sigma$ 」讀作sigma或summation, 表示「和」的意思。

2. 多項式  $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  亦可以縮寫

成  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ , 只是要記得把  $x^0$  看成是1。

**【例題6】**

把下列級數用  $\Sigma$  符號表示:

$$(1) 1+2+3+\cdots+n$$

$$(2) 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$$

$$(3) 1+2+2^2+\cdots+2^{100}$$

<解法>

$$(1) \sum_{k=1}^n k$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

$$(3) \sum_{k=0}^{100} 2^k$$

$\Sigma$ 用法要點：

- 1.注意各項中哪些符號是不變的，哪些符號隨著項數作有規律的改變，請注意下標、係數、指數、一般項等等。
- 2.注意哪些隨著項數改變的項是從多少到多少？
- 3.假設式中第 $n$ 項 $a_n$ 已經寫明，那只要把第 $n$ 項改寫成第 $k$ 項，寫成 $\sum_{k=1}^n a_k$ 即可。

### (五) $\Sigma$ 的運算性質

$$1. \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$2. \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$3. \text{對常數 } c, \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

#### 【例題7】

$$\text{已知 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 15, \sum_{k=1}^{10} b_k = 20,$$

$$\text{求 } \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3b_k + 2k + 1) \text{ 的值。}$$

<解法>

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3b_k + 2k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (2a_k) - \sum_{k=1}^{10} (3b_k) + \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 3 \sum_{k=1}^{10} b_k + (3 + 5 + \cdots + 21) \\ &= 2 \times 15 - 3 \times 20 + \frac{10 \times (3 + 21)}{2} \\ &= 30 - 60 + 120 \\ &= 90 \end{aligned}$$



【例題8】

求級數  $\sum_{k=1}^n (3 \times 2^k + 2)$  的值。

<解法>

$$\begin{aligned} \text{由 } \sum_{k=1}^n 2^k &= 2 + 2^2 + \dots + 2^n \\ &= \frac{2(1-2^n)}{1-2} \\ &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3 \times 2^k + 2) &= \sum_{k=1}^n (3 \times 2^k) + \sum_{k=1}^n 2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^n 2^k + \sum_{k=1}^n 2 \\ &= 3 \times (2^{n+1} - 2) + 2n \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 6 \end{aligned}$$

三、舉實際生活例子：

【例題9】

某次網球比賽共有128位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪，在第一輪被淘汰的選手可獲得1萬元，在第二輪被淘汰的選手可獲得2萬元，在第k輪被淘汰的選手可獲得 $2^{k-1}$ 萬元，而冠軍可獲得128萬元，試問比賽全部獎金共多少萬元？

<解法>

第一輪需發出  $64 \times 1$  萬元，

第二輪需發出  $32 \times 2$  萬元，

⋮

共需發出

$$64 \times 1 + 32 \times 2 + 16 \times 4 + 8 \times 8 +$$

$$4 \times 16 + 2 \times 32 + 1 \times 64 + 128$$

$$= 64 \times 7 + 128$$

$$= 576$$

所以共需576萬元

人U8 說明  
言論自由  
或新聞自  
由對於民  
主社會運  
作的重  
要性。

環U5 採行  
永續消費  
與簡樸生  
活的生活  
型態，促進  
永續發展。

**【例題10】**

小明參加某銀行零存整付的專案，他從1月初開始到12月底，每個月初存入銀行1萬元，月利率1%複利計算，試問一年之後，小明領出來的錢為多少元？(近似值到元， $(1.01)^{12}$ 的近似值為1.12683)

<解法> 本利和

$$\begin{aligned} &= 1 \times (1+0.01)^{12} + 1 \times (1+0.01)^{11} \\ &\quad + \cdots + 1 \times (1+0.01) \\ &= \frac{1.01[1-(1.01)^{12}]}{1-1.01} \\ &\approx \frac{1.01(1-1.12683)}{-0.01} \\ &= 12.80983 \text{ (萬元)} \\ &\approx 128098 \text{ (元)} \end{aligned}$$

**【例題11】**

某鎮人口逐年成長，且成一等比數列，已知10年前該鎮人口25萬，現有30萬，求距今20年後應有幾萬人口？

<解法>

10年前  $\rightarrow a_1$

$\vdots$

1年前  $\rightarrow a_{10}$

現在  $\rightarrow a_{11}$

1年後  $\rightarrow a_{12}$

$\vdots$

20年後  $\rightarrow a_{31}$

$$\begin{cases} a_1 = 25 \\ a_{11} = a_1 r^{10} = 25 \times r^{10} = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^{10} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore a_{31} = a_1 r^{30} = a_1 (r^{10})^3$$

$$= 25 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$= 43.2 \text{ 萬}$$

環U5 採行  
永續消費  
與簡樸生  
活的生活  
型態，促進  
永續發展。

環U5 採行  
永續消費  
與簡樸生  
活的生活  
型態，促進  
永續發展。

**【例題12】**

有一球從81公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{1}{3}$ 再落下，當它第五次著地時，共經過幾公尺。

<解法>

球最先落下經過81公尺，因每次反彈的高度為前高度的 $\frac{1}{3}$

第一次著地所經過的距離為81公尺

第二次著地所經過的距離為

$$2 \times 81 \times \frac{1}{3} \text{ 公尺}$$

第三次著地所經過的距離為

$$2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ 公尺}$$

第四次著地所經過的距離為

$$2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \text{ 公尺}$$

第五次著地所經過的距離為

$$2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \text{ 公尺}$$

所求距離和

$$= 81 + 2 \times 81 \times \frac{1}{3} + 2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$+ 2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 81 + 162 \left[ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right]$$

$$= 81 + 162 \times \frac{\frac{1}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right]}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 81 + 162 \times \frac{40}{81}$$

$$= 81 + 80$$

$$= 161$$

參、綜合階段：

**【重點複習】**

1. 等差以及等比數列的前 $n$ 項的總和公式
2. 使用 $\Sigma$ 去表示級數的和
3. 直接利用 $\Sigma$ 簡化計算級數的求和

學習評量（教師依適性適能教學需求，選擇合宜項目融入教學設計流程，進行評量與檢核）

一、實作評量

教師觀察 隨堂測驗 小組合作 問題與回答 討論與發表

二、檔案評量

學習單 作業 資料彙整與觀摩 其他

## (七) Q&A

本 Q&A 乃預設實施十二年國民基本教育課程綱要所可能面臨之問題，以解決教科書編輯及教學現場教師相關教學疑慮。

### Q1：為何要進行綜合型高級中等學校數學領域課程綱要的修訂？

- A1：1.綜合型高級中等學校十年級的數學領域課程綱要，係與技術型高級中等學校十年級數學課程綱要及普通型高級中等學校課程綱要採最大可能之共構，紮根數學基本能力，為十一年級分流學術學程及專門學程之學習，奠定學習與應用之基礎。
- 2.數學概念間的學習，應建立在學生的經驗背景之上，培養學生從不同面向分析問題、辨識問題、解決問題，增進未來升學、就業、終身學習及自我發展能力。
- 3.學校需要發展差異化、多元化及彈性的學校本位課程，以因應各校各學程的差異需求。
- 4.教學應以學生為中心，學習表現重視認知（概念的了解、程序的執行、問題的解決、連結與應用）、技能（工具的應用）與情意（信念的養成），強調具體展現與呼應核心素養。
- 5.學習內容涵蓋領域之重要事實、概念、原理原則、技能與後設認知等知識。學校或出版社得依其專業需求與特性，將學習內容做適當的轉化，以發展適當的教材。

### Q2：綜合型高級中等學校數學領域課程綱要的修訂理念為何？

- A2：1.在學生經驗背景下，強化數學概念與概念間的應用學習。
- 2.強化務實致用之理念，培養學生自主探索、思考的終身學習能力。
- 3.注重城鄉差異與正視學習起點，提供所有學生學習數學的公平機會與學會之可能。
- 4.深化以數學作為問題解決工具之應用能力與素養。

### Q3：綜合型高級中等學校數學領域課程綱要的修訂特色是什麼？

- A3：1.綜合型高級中等學校十年級的數學領域課程綱要，係參考普通型高級中等學校與技術型高級中等學校十年級B版本數學領域課程綱要，以最大可能之共構，紮根數學基本能力，為十一年級分流學術學程及專門學程之學習，奠定學習與應用之基礎。
- 2.以建立學生數學核心素養為主。
- 3.以培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的知能、應用工具為導向。
- 4.強化十二年國民基本教育學習階段的縱向連貫與橫向統整。
- 5.學習重點與實施要點納入數學軟體工具與科技工具的使用與觀念。

### Q4：綜合型高級中等學校數學領域課程綱要的修訂重點為何？

- A4：1.與99課程綱要數學的必修學分數相同（8學分），但強化十二年國民基本教育數學領域核心素養之具體內涵。
- 2.以學生為中心，考量學生的數學能力發展需求，安排不同節奏的教學進度與內容。
- 3.將性別平等、人權教育、環境教育及海洋教育四項議題融入教學。
- 4.強化尊重多元、同理關懷、公平正義及永續發展的核心價值理念。
- 5.深化適性學習、差異化教學、有效教學與多元評量之理念。

### Q5：教材編選與教學實施如何調整？

#### A5：1.教材編選

- (1) 教材編選所選擇的範例與練習題，應顧及日常生活與一般學科、專業群科中現實技術問題的應用，以連結專業學科之課程學習。
- (2) 教材內容需衡量與國民中學數學及未來進入大學、技專校院所需之研究或技術數學能力的縱向銜接，並提供高層次認知思考能力之學習素材或媒材，讓學生從體驗中習得運用知識解決問題之能力。
- (3) 納入可實際使用數學軟體工具的例題與隨堂練習。
- (4) 單元或章的習題，宜由淺入深，重視差異化學習，依不同能力層次，編列單一概念練習與應用題、概念間轉化的練習與應用題，以配合差異化的教學。
- (5) 範例與習題宜增加教導學生如何使用數學軟體、科技工具及進行演算。

#### 2.教學實施

- (1) 教師備課時應分析學生學習經驗、族群文化特性、教材性質與教學目標、符合學生技術應用需求的學習內容，並依學科、群科的不同，適時規劃多元之教學活動，提供不同學生學習、觀察、計算、歸納、證明、作圖、應用、演算、討論與問題解決的機會，以增強學習的理解、連貫和運用。
- (2) 提供學生更多參與互動及力行實踐的機會，以強化學生主動學習的角色。
- (3) 配合不同領域與類型的技術應用基本能力，教師應引導學生學習如何學習及後設認知策略。

### Q6：學習評量如何實施？

A6：1.教與學的評量，不應只有紙筆測驗，宜採多元方式評量（如：實作評量、檔案評量、...等）。

2.學習評量宜實施診斷性評量與學生轉銜評估，藉此瞭解學生學習狀況，以利實施差異化分析，作為教學方法、教學進度及教材的調整依據。

3.在學習評量上，要加入使用數學軟體工具的實作評量題，以提升學生使用的能力。

### Q7：綜合型高級中等學校分流後，有哪些學習單元需開設銜接教學？

A7：1.分流學術學程之學生，在綜合型高級中等學校十年級與普通型高級中等學校十年級的數學學習單元差異如下表。

課程類型	綜合型高級中等學校	普通型高級中等學校
單元主題	平面向量	一維、二維數據分析

「一維、二維數據分析」需要銜接教學。

2.分流專門學程之學生，在綜合型高級中等學校十年級與技術型高級中等學校十年級數學學習單元差異如下表。

課程類型	綜合型高級中等學校	技術型高級中等學校 A 版本	技術型高級中等學校 B 版本	技術型高級中等學校 C 版本
單元主題	三角函數 (sin、cos、tan)	三角函數 (sin、cos、tan)	三角函數 (sin、cos、tan)	三角函數 (sin、cos、tan、cot、sec、csc)
	數列與級數、數學歸納法	數列與級數	數列與級數	數列與級數
	平面向量	無	平面向量	平面向量
	排列、組合、古典機率	無	無	排列組合

C 版本之「三角函數」的部份內容需要銜接教學；A、B 兩版本不需銜接教學。

## 附錄 1 新舊課程綱要差異比較

本處之差異比較乃為提供教科書編輯及教學現場教師參考，以了解新舊課程綱要於「學習單元主題」規劃之差異。

領域/版別：數學/綜合型高級中等學校

年級	新課程綱要 學習單元主題	99 課程綱要 學習單元主題	備註
十	坐標系與函數圖形	數與式	1.將數與多項式切割並適度由數的觀點導入函數圖形關係。 2.接續介紹直線與圓的圖形與方程式之對應關係。 3.將指數、對數函數移至第二學年課程。
	直線方程式	多項式函數	
	圓與直線	指數、對數函數	
	式的運算		4.三角函數以三角比內容順應國際趨勢納入第一學年課程。 5.配合自然學科、實作或專業科目需求，將平面向量納入第一學年課程。 6.數據分析為學術學學生所需銜接教學之單元。
	三角函數	數列與級數	
	平面向量	排列組合	
	數列與級數	機率	
	排列、組合、古典機率	數據分析	



## 附錄 2 新舊課程綱要之課程實施銜接分析與建議

### 一、新課程綱要之課程實施銜接分析

數學領域課程綱要研修採取「減法原則」銜接所產生的問題極小，都可以在課堂內調整達到銜接目的，詳細請參見下面分析及建議。

### 二、新課程綱要之課程實施銜接建議

十二年國民基本教育數學領域課程綱要（九升十年級）概念銜接與補充建議表

主題	學習表現/學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國民基本教育	九年一貫	
<b>N-8-6</b> 等比數列	等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。	八年級新增	無	十年級於 N-10-4 講解遞迴數列時融入課程中，不需再另外實施銜接教學。
<b>S-9-5</b> 直角三角形的三角比	對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。	九年級新增	無	十年級於 N-10-3 條目定義任意角的 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 三角比時融入課程中，不需再另外實施銜接教學。
<b>S-9-13</b> 空間中的線與平面	長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂與平行關係。	九年級新增	無	十年級 A-10-5 條目講解直線方程式時融入課程中，不需再另外實施銜接教學。
<b>備註</b>	新課程綱要在十年級的課程內容有絕對值、科學記號的運算、二次函數配方、百分位數，但九年一貫的國民中學學生已習完這些單元，預估可以省下六節課，故 N-8-6、S-9-5、S-9-13 之學習內容可以融入相關課程，不需再另外實施銜接教學。			