目 錄 contents

第 *1* 章

機率與統計

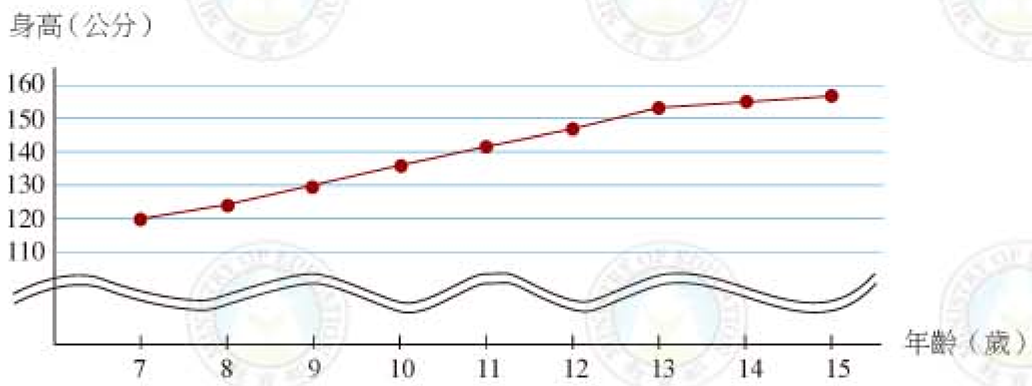
1-1 資料的統計與分析

身邊有許多物品的人，為了避免雜亂無章，經常要整理這些東西，分門別類。同樣的，對於我們收集到的資料或資訊，尤其當要轉述給同學或其他人知道時，更是要下一番整理的功夫，才能夠以較簡潔、有條理、有重點的方式來呈現。

我們曾經學過很多初步的統計圖表，可以協助我們達到這些目的，其中包括呈現類別的長條圖、呈現相對比例的圓形圖、呈現有序變化的折線圖（圖 1-1(a)、(b)、(c)）。在這一章，我們想深入處理有次序性的資料。

(a) 三年級畢業旅行地點調查長條圖

(b) 台灣姓氏分布圓形圖



(c) 美華身高折線圖

圖 1-1

在第四冊時，我們介紹過數列的概念：a_1、a_2、a_3、⋯、a_m，這顯然是一種有次序的資料，我們可以將自己每個月的體重、每個月的身高、每年的存款數等等依照時間的順序記成一個數列，然後用折線圖來呈現它的變化。班上同學的數學成績、兄弟姊妹的數目、閱讀課外書籍的數目，也可以依照座號順序，記錄成數列的形式。不過依座號順序所製的折線圖似乎沒有什麼意義，因為看不出這些資料和座號順序的變化有什麼關係。

上述這些類資料所成的數列，不像等差數列有明顯的公式，如何讀出這些資料的重要資訊呢？例如怎麼知道班上每位同學大概有多少兄弟姊妹呢？

表 1-1

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
兄弟姊妹數（人）	2	1	1	2	0	3	1	0	1	2	0	0	1	1	2

表 1-1（或附錄一）是仁山國中三年甲班學生的調查資料，依照座號順序記錄每一位同學的兄弟姊妹（不包含自己）數目。我們把兄弟姊妹數目相同的同學當成同一類，依照數目大小，做成下面的表 1-2 與折線圖（圖 1-2）。

表 1-2

	資料值（人）	0	1	2	3
兄弟姐妹數					
人數	次數（人）	4	6	4	1
人數/總人數	相對次數	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

資料數＝15

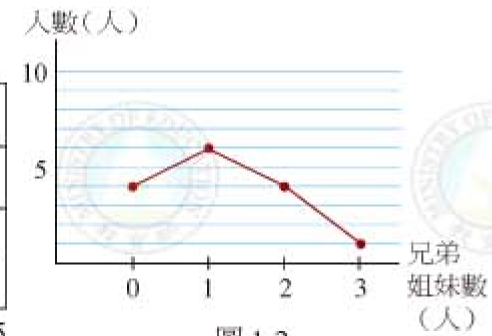


圖 1-2

注意到，數目大小也是一種次序，因此這是我們從原始的班級資料，整理出來的另一種有序資料（這樣的表 1-2 稱為**相對次數分配表**）。這個依資料值大小排序資料的折線圖，顯然要有意思多了，我們注意到大部分同學，家裡都只有 0 到 2 個兄弟姊妹。另外，表中的**相對次數**指的是該筆資料次數（即人數）相對於總資料數（即總人數）所佔的比率，能夠方便我們做資料的比較，相對次數可用分數表示，也常用百分數表示。

請先取出附錄一，將表 1-2 的數據記錄到附錄一的次數分配表格中。再翻到附錄二，這是該班同學三月份所閱讀的課外書籍數資料（表 1-3）。

表 1-3

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
書籍數	1	4	2	1	2	0	2	2	0	1	2	7	0	2	1

隨・堂・練・習

1. 依照書籍數目的順序，重新整理這份資料，並利用附錄二表格的前三列，做出相對次數分配表。

2. 利用附錄三表格的前三列，如 1. 做出相對次數分配表。

眾數、中位數、平均數

什麼樣的值，可以代表一份資料呢？底下以表 1-1 的資料來說明三種常用的指標。

（一）眾數

由次數分配表（表 1-2）知道，有 1 個兄弟姊妹的人數最多，這時我們就稱 1（人）是這份資料的**眾數**。也就是說，我們用次數最多的資料值來代表這份資料。注意到，依照定義，一份資料可能有好幾個眾數。例如班上選班長時，並不能排除最高票有兩人以上的可能。

（二）中位數

從表 1-1 或表 1-2，可以將兄弟姐妹數由小到大寫成下面的 15 項數列：

0、0、0、0、1、1、1、1、1、1、2、2、2、2、3

▲

位於最中間的是第 8 項，它剛好把這份資料依序切成前後兩半，前後筆數比是 7 ： 7 = 1 ： 1，因此該項的資料值 1 稱為這份資料的**中位數**。

若資料數是偶數時，如何取中位數呢？下表是智水國中三年 B 班兄弟姊妹數的原始資料。

表 1-4

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兄弟姊妹數（人）	1	2	0	2	4	1	2	2	1	1	0	2

我們將該班資料依序寫成下面數列：

0、0、1、1、1、1、2、2、2、2、2、4

▲

若要將這份資料切分成 1 ： 1 的比例，則切分的位置會落在第 6 項和第 7 項之間。這種情況，我們約定這份資料的中位數是第 6 項和第 7 項資料值的平均，也就是 $\frac{1+2}{2}=1.5$。

（三）平均數

將資料值全部加起來再平均所得的值，稱為**平均數**。例如從表 1-1，我們將每人兄弟姊妹數目加起來，再除以總人數 15，得到

$$\frac{2+1+1+2+0+3+1+0+1+2+0+0+1+1+2}{15}=\frac{17}{15}$$

這表示班上每位同學，平均來說約有 1 個兄弟姊妹。

平均數除了用原始資料來算外，也可以用次數分配表來算。如表 1-2 就是上例的次數分配表，可將各欄的資料值（兄弟姊妹數）乘以次數（人數），全部加總後，再除以資料數（總人數）。其計算如下：

$$\frac{(0\times 4)+(1\times 6)+(2\times 4)+(3\times 1)}{15}=\frac{17}{15}$$

例 1 Example

計算智水國中三年 B 班學生兄弟姊妹的平均數。

解題說明

依照附錄三的次數分配表計算如下：

$$\frac{0\times2+1\times4+2\times5+4\times1}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

所以智水國中三年 B 班的兄弟姊妹平均數為 $\frac{3}{2}$ 人。

底下，我們練習這三個指標的計算。

隨．堂．練．習

右表（附錄二）是仁山國中三年甲班三月閱讀資料的相對次數分配表，求該資料的眾數、中位數、平均數。

資料值(本)	0	1	2	4	7
次數（人）	3	4	6	1	1
相對次數	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

資料數＝15

眾數、中位數、平均數，讓我們很快大致理解資料分佈的狀況，也因此可以很快的掌握兩份資料的比較。

例如前述關於國中班級兄弟姊妹數目的兩份統計資料顯示，仁山國中三年甲班資料的眾數是 1 人，而智水國中三年 B 班資料的眾數是 2 人；三甲的中位數是 1 人、三 B 的中位數是 1.5 人；三甲的平均數約是 1.1 人，三 B 的平均數是 1.5 人。由這三項指標，可以一致的發現，智水國中三年 B 班的學生比仁山國中三年甲班的學生有更多的兄弟姊妹。

一般統計的資料可能很複雜，筆數可能很大，但是眾數、中位數、平均數只是三個數字，卻可以讓我們大概掌握資料的面貌，不是很奇妙嗎？

調整資料值的影響

如果在表 1-2 的例子中，把學生自己也算進去，也就是當作每個學生家中孩子數目的統計表（表 1-5），那麼這個新資料的眾數、中位數、平均數會怎麼變化呢？

表 1-5

資料值	0＋1	1＋1	2＋1	3＋1
次數	4	6	4	1

例 2 Example

計算表 1-5 的眾數、中位數、平均數，並和表 1-2 的眾數、中位數、平均數做比較。

解題說明

比較兩表，可知新的資料值只是舊資料值（原來的兄弟姊妹數）加 1，但是第二列的次數（人數）並沒有任何改變。

(1)兩表中，最多人數的群組都是第二組，因此新的眾數是舊的眾數加 1，也就是 2。

(2)兄弟姊妹數加 1，完全不影響資料排序的狀況，因此新的中位數是舊的中位數加 1，也就是 2。

(3) 新的平均數計算如下，由分配律知新的資料總和為

$$\begin{aligned}&(0+1)\times4 && 0\times4+1\times4\\ +&(1+1)\times6 && +1\times6+1\times6\\ +&(2+1)\times4 \quad = && +2\times4+1\times4\\ +&(3+1)\times1 && +3\times1+1\times1\end{aligned}$$

因此新舊資料總和的差正好是

$$1\times(4+6+4+1)=1\times15$$

所以新平均數與舊平均數的差是 $\frac{1\times15}{15}=1$，因此新平均數為 $\frac{17}{15}+1=2\frac{2}{15}$。

將原來能夠代表兄弟姊妹數目的值，加上代表自己的 1 ，就得到能夠代表全家孩子數目的值，這是很合理的結果。

由例題 2 的說明知道，如果我們將原來次數分配表中的每一個資料值加上一個定數 A ，做為新的資料值，則

新的眾數＝舊的眾數＋ A

新的中位數＝舊的中位數＋ A

新的平均數＝舊的平均數＋ A

隨．堂．練．習

若改變附錄三的資料值為每個學生家裡的孩子數目，求新資料的眾數、中位數、平均數。

另一種常見的資料變化方式，是將資料值乘以一個定數。例如某家出版社為了鼓勵學生閱讀，贈送折價點數，每閱讀一本書就贈送 3 點。因此我們可以將仁山國中三年甲班的閱讀書籍數次數分配表（附錄二），改成折價點數的記錄表（表 1-6）。

表 1-6

資料值	0×3	1×3	2×3	4×3	7×3
次數	3	4	6	1	1

資料數＝ 15

例 3 Example

計算表 1-6 的眾數、中位數、平均數，並和附錄二的眾數、中位數、平均數做比較。

解題說明

比較兩表，可知新的資料值是原來書籍數目乘以 3 ，但是第二列的次數並沒有任何變化。

(1)兩表中，最多人數的群組都是第三組，因此新的眾數是舊的眾數 2 乘以 3 ，也就是 6 。

(2)書籍數乘以 3 ，不會影響資料排序的狀況，因此新的中位數是舊的中位數 2 乘以 3 ，也就是 6 。

(3) 由乘法結合律知，新資料的資料值總和為

$$\begin{aligned}&(0\times3)\times3\\+&(1\times3)\times4\\+&(2\times3)\times6\\+&(4\times3)\times1\\+&(7\times3)\times1\end{aligned}\quad=\quad\begin{aligned}&(0\times3)\times3\\+&(1\times4)\times3\\+&(2\times6)\times3\\+&(4\times1)\times3\\+&(7\times1)\times3\end{aligned}$$

由分配律知，新總和是舊總和的 3 倍，因此新平均數等於舊平均數 1.8 乘以 3 ，也就是 5.4 。每人平均可得 5.4 的折價點數。

上面的例題說明，如果我們將原來次數分配表中的每一個資料值乘以一個正數 B ，做為新的資料值，則

新的眾數＝舊的眾數 $\cdot$ B

新的中位數＝舊的中位數 $\cdot$ B

新的平均數＝舊的平均數 $\cdot$ B

隨·堂·練·習

(1)利用附錄四表格的前三列，完成相對次數分配表。

(2)若每本書的閱讀點數為 5，將附錄四的資料值改為閱讀點數，計算新資料的眾數、中位數、平均數。

例 4 Example

若某年四月，美國紐約地區的日均溫資料顯示，其眾數為華氏 73 度，中位數為華氏 75.2 度，平均數為 73.4 度。若將該日均溫資料由華氏度數改成攝氏度數，問其眾數、中位數、平均數為多少？

解題說明

注意到，我們手上並沒有原來的日均溫資料。華氏度數（F）轉成攝氏度數（C）的公式為：

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$

我們可以將這個資料的轉換過程，想成將原始資料先減 32，然後再乘以 $\frac{5}{9}$。由於前面的內容已經說明，將資料加一個數或乘一個數，各個指標也跟著加該數或乘該數。因此以攝氏度數為單位的新資料各項指標為：

$$眾數=\frac{5}{9}\times(73-32)\fallingdotseq 22.8(°C)$$

$$中位數=\frac{5}{9}\times(75.2-32)=24(°C)$$

$$平均數=\frac{5}{9}\times(73.4-32)=23(°C)$$

隨·堂·練·習

仁山國中國三女學生的身高平均數為 1.56 公尺，若將身高資料改以公分表示，問身高平均數為多少？

例 5 Example

求資料「5908、5922、5894、5899、5880」的平均數。

解題說明

直接計算看起來很複雜，但是我們可以將這筆資料想成是

$8+5900$、$22+5900$、$-6+5900$、$-1+5900$、$-20+5900$

也就是想成資料「8、22、−6、−1、−20」加上定數 5900，因此，其平均數等於 8、22、−6、−1、−20 的平均數再加上 5900。但 8、22、−6、−1、−20 的平均數為 $\frac{(30-27)}{5}=0.6$，因此 5908、5922、5894、5899、5880 的平均數就是 $0.6+5900=5900.6$。

隨·堂·練·習

求資料「0.00555、0.00559、0.0054、0.00547、0.0056」的平均數。

三個指標的比較

雖然表 1-2（附錄一）的三個指標看起來很一致，數值大致都是 1，但在其他例子中可能很不一樣。

例如附錄四中智水國中三年 B 班學生三月份的閱讀資料顯示，這份資料的眾數是 0，中位數是 1，但平均數是 3。從眾數來看，感覺像是大家都不太看書，從平均數看起來，則像是每一個人讀了 3 本課外書，兩者的感覺差異很大。這表示我們在使用這些指標時，仍然要小心，最好能綜合使用。

眾數、中位數、平均數哪一個指標比較重要，實在是見仁見智。

（一）眾數關心的是資料中次數最多的資料值，以此來代表整份資料的情況。例如表 1-7 是廷聰父親上班公司的月薪分配表。我們可以看到眾數是每月 20000 元，表示在不同月薪的層級當中，領有月薪 20000 元的人數最多。

表 1-7　廷聰父親公司每月薪資統計表

資料值（元）	20000	30000	40000	100000	200000
次數（人）	48	36	12	3	1
相對次數	0.48	0.36	0.12	0.03	0.01

資料數＝100

眾數的一個好處是，它不會受到其他極端資料值變化的影響，例如廷聰父親的公司如果將四個高階主管的薪水都加薪 100 %，則該公司的眾數依然不變，維持原來的 20000 元。另外，例如在處理資料數很多的資料時，如果只有幾筆資料的數據錯得很離譜，通常也不會影響眾數。

眾數還有一個好處，就是可以處理非數值的資料，例如我們常說台灣居民的最大姓氏是陳，就是使用眾數的想法（參見圖 1-1(b)）。處理這種資料時，中位數與平均數都派不上用場。

（二）中位數強調以排序中心位置的資料值來代表整份資料。例如廷聰父親公司薪資資料的中位數是第二級員工的 30000 元。中位數和眾數一樣，也不會受到其他極端資料值變化的影響。例如廷聰父親的公司如果將高階主管的薪水都加薪 100 %，該公司的中位數依然不變。大筆資料中如果有一兩筆資料的數據錯得很離譜，也不太會影響中位數。

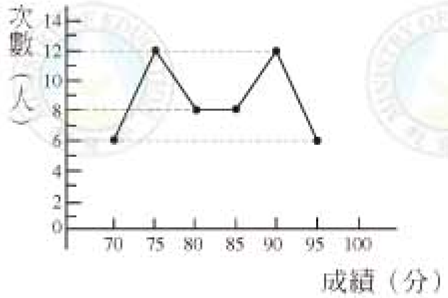
但是資料一定要有次序，才能使用中位數。至於眾數和平均數則都不受這個限制，這是因為眾數只關心次數的多寡，而平均數則是用加法來累積資料值，和資料的次序無關。

（三）由於平均數關心的是資料值的平均，因此平均數和資料值的改變息息相關，這是平均數的特性。以表 1-7 為例，本來的平均值是 30200，但是如果四個高階主管都加薪 100 %，整個平均值會提高到 35200。這時，應該用平均數還是眾數、中位數來代表廷聰父親公司的薪資狀況，就要依使用者的目的來決定。

例 6 Example

右圖是小克班上同學工藝成績折線圖。根據圖中的數據，判斷該班平均工藝成績為幾分。

(A)75　(B)77.5　(C)82.5　(D)90



解題說明

注意到這個折線圖是一個線對稱圖形，對稱點的資料值（例如 70 和 95）的中點位於對稱軸，也就是成績是 $\frac{80+85}{2}=82.5$ 的鉛直線上。因此平均數等於

$$\frac{(70+95)\cdot 6+(75+90)\cdot 12+(80+85)\cdot 8}{6\cdot 2+12\cdot 2+8\cdot 2}$$

$$=\frac{82.5\cdot(6\cdot 2+12\cdot 2+8\cdot 2)}{6\cdot 2+12\cdot 2+8\cdot 2}=82.5$$

事實上，只要觀察到這六個點，兩兩互為對稱點，就知道答案是 82.5。

隨·堂·練·習

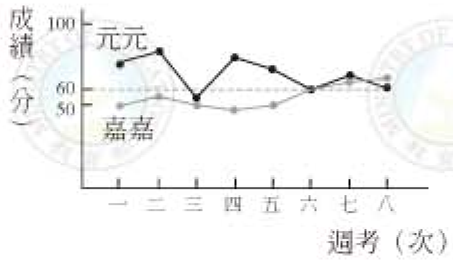
右圖為元元與嘉嘉本學期八次週考的成績折線圖。根據右圖，判斷下列敘述何者正確。

(A) 兩人每次週考成績相差最多為 60 分

(B) 兩人每次週考成績相差最少為 60 分

(C) 嘉嘉這八次週考的平均分數超過 60 分

(D) 元元這八次週考的平均分數超過 60 分



各位同學注意到，例題 6 和隨堂練習中雖然都是折線圖，卻是兩種統計圖。例題 6 的圖形是由次數分配表畫出來的折線圖，成績在橫軸；隨堂練習則是類似圖 1-1(c) 的原始資料折線圖，成績在縱軸。

「平均數×資料數＝資料值總和」這個性質，讓平均數有更好的應用。底下討論將兩份資料合併時，對眾數、中位數、平均數的影響。

假設我們要把仁山國中三年甲班和智水國中三年 B 班兄弟姊妹數的資料合併在一起計算，很顯然，即使知道仁山國中三年甲班有 15 人、智水國中三年 B 班有 12 人，我們還是不能從仁山國中三年甲班資料的眾數是 1、中位數是 1，智水國中三年 B 班資料的眾數是 2、中位數是 1.5，來決定合併資料的眾數和中位數。

動·動·腦

1. 設計兩份資料，使得資料合併後的眾數，不是先前任一份資料的眾數。

2. 設計兩份資料，使得資料合併後的中位數，不是先前任一份資料的中位數，也不是這兩個中位數的平均。

但是平均數就不一樣了，以上例來說，仁山國中三甲資料的筆數是 15，平均數是 $\frac{17}{15}$；智水國中三 B 資料的筆數是 12，平均數是 $\frac{18}{12}$，因此

第一份資料值總和＝$\frac{17}{15}\cdot 15$

第二份資料值總和＝$\frac{18}{12}\cdot 12$

因此，合併資料的平均數等於

$$\frac{\frac{17}{15}\cdot 15+\frac{18}{12}\cdot 12}{15+12}=\frac{17}{15}\cdot\frac{15}{15+12}+\frac{18}{12}\cdot\frac{12}{15+12}$$

$$=\frac{35}{27}\doteqdot 1.3$$

由上可知，若有兩份同類型的資料，第一份資料數為 N_1，平均數為 d_1；第二份資料數為 N_2，平均數為 d_2，則兩份資料合併後的平均數為

$$\frac{d_1N_1+d_2N_2}{N_1+N_2}=d_1\cdot\frac{N_1}{N_1+N_2}+d_2\cdot\frac{N_2}{N_1+N_2}$$

這表示求兩份資料合併的平均數時，只需要知道 N_1 ： N_2 的比例就夠了。當然，這個想法也可以推廣到更多份資料的情況。

例 7 Example

甲、乙、丙三國中舉行國三數學聯合考試，各校平均成績依序為 82.3 、 75.6 、 80.2 。若三校國三生之人數比例依序為 3 ： 4 ： 3，求合起來的總平均成績。

解題說明

由於三校國三生人數比例依序為 3 ： 4 ： 3，因此總平均成績為

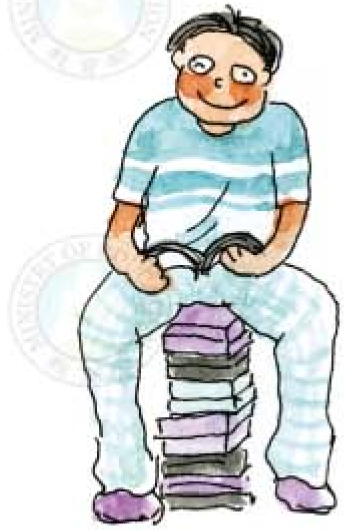
$$82.3\cdot\frac{3}{3+4+3}+75.6\cdot\frac{4}{3+4+3}+80.2\cdot\frac{3}{3+4+3}$$

$$=\frac{1}{10}\cdot(246.9+302.4+240.6)=\frac{1}{10}\cdot 789.9=78.99$$

若用四捨五入法取到小數點後一位，則三校成績總平均約為 79.0 。

隨・堂・練・習

將附錄二和附錄四的資料值合併，求合併後資料的平均數（用四捨五入法取到小數點後一位）。



動・動・腦

有一個班級段考，國文平均是 82.5 分、英文平均是 87.3 分、數學平均是 80 分、自然平均是 74.6 分，問全班學生這四科的平均成績是多少分？

摘要

1. 從原始資料可以整理成次數分配表或折線圖。
2. 眾數、中位數、平均數可以代表一份資料集中的情況。
3. 當資料值加上一個數或乘以一個正數時，其眾數、中位數、平均數也會做相對應的改變。
4. 只要知道各份資料的平均數以及各資料數的相對比例，就可以求出合併資料的平均數。

1-1 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

(　　) (1)一份資料只有一個眾數。

(　　) (2) 平均數一定比中位數大。

(　　) (3)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其眾數為 50 公尺，則面積的眾數一定是 50^2 平方公尺。

(　　) (4)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其中位數為 50 公尺，則面積的中位數一定是 50^2 平方公尺。

(　　) (5)測量一個正方形農地的邊長 10 次，得到 10 個數據，若其平均數為 50 公尺，則面積的平均數一定是 50^2 平方公尺。

(　　) (6)一份資料的中位數是 10 ，若將其中一筆資料由 20 改成 40 ，則其中位數變大。

(　　) (7)一份資料的平均數是 10 ，若將其中一筆資料由 20 改成 40 ，則其平均數變大。

2. 某一組資料有八個正整數，已知其中七個數為 1 ， 6 ， 3 ， 5 ， 2 ， 2 ， 6 。下列哪一個數不可能是這一組資料的中位數？

(A) 3　(B) 3.5　(C) 4　(D) 4.5

3. 有一筆資料如右圖，

(1)在右表中填入相對次數。

（用百分率表示）

資料值	10	20	30	40	50
次數	10	40	20	8	2
相對次數					

資料數＝ 80

(2) 此資料之眾數＝________，

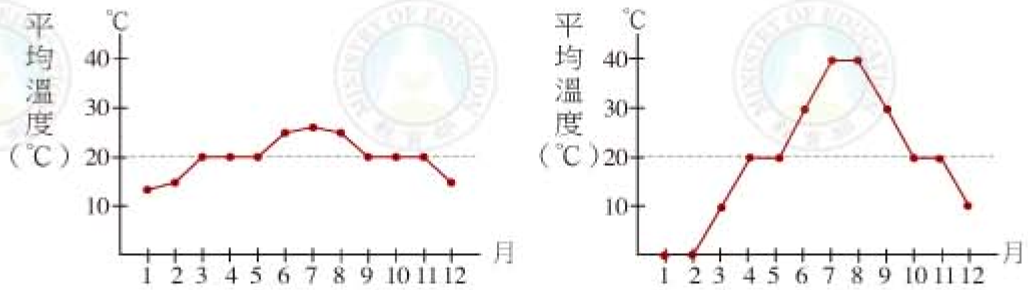
中位數＝________，平均數＝________。

4. 右表為三個班級上月閱讀書籍的平均數，求三班資料合併的平均數。

班別	3A	3B	3C
人數	36	30	34
平均數	2.4	1.8	2

1-2 資料的分佈

雖然眾數、中位數、平均數可以大致表示資料的集中位置，但是有時候這並不足夠。例如假設有人選擇到甲地或乙地定居，附錄五和附錄六中，甲、乙兩地的月平均氣溫資料，可以製成如下的折線圖（圖 1-3(a) 和 (b)）



(a) 甲地月均溫折線圖　　(b) 乙地月均溫折線圖

圖 1-3

就這兩份資料而言，這兩地的眾數、中位數、平均數都是攝氏 20 度，似乎天氣都很怡人。但是如果仔細看這兩個折線圖，卻發現甲地氣溫的確四季如春，乙地則有酷暑和寒冬。這是因為甲地的月平均氣溫起伏不大，但是乙地的月平均氣溫卻有很大的變化。

因此，問題是如何像眾數、中位數、平均數一樣，用簡單的數字來描述資料離散或差距的程度。從上面的例子知道，我們可以求出資料中最大值和最小值的差（稱為**全距**），來代表資料間的差距程度。

例如甲地月平均最高溫是 26 度，月平均最低溫是 14 度，所以全距是 $26 - 14 = 12$ 度。而乙地的月平均最高溫是 40 度，月平均最低溫是 0 度，全距是 $40 - 0 = 40$ 度，這樣我們一眼就可以看出這兩地的溫度狀況差距很大，甲地的全年溫度變化幅度只有 12 度，因此氣溫穩定，而乙地的變化幅度高達 40 度，溫度變動較劇烈。

隨・堂・練・習

1. 求出仁山國中三年甲班(附錄一)和智水國中三年B班(附錄三)學生兄弟姊妹數的資料的全距。

2. 求出仁山國中三年甲班(附錄二)和智水國中三年B班(附錄四)三月閱讀書籍數資料的全距。

雖然全距可以讓我們看出整個資料變化最大的幅度,但是有時這並不是我們的目的。例如智水國中三年B班的學生閱讀資料顯示全距高達26本書,但這是因為該班有一位非常喜歡閱讀的學生,這似乎不能代表這個班的一般閱讀狀況。我們是不是可以找到比較好的指標,來排除這一類特殊的情況呢?

一個合理的想法是,將該班的資料值依序寫下來,然後模仿取中位數的想法,標出資料由左往右$\frac{1}{4}$和$\frac{3}{4}$的位置。其中標$\frac{1}{4}$的位置把資料切成兩部分,左右比例是1:3(圖1-4),而標$\frac{3}{4}$的位置則把資料切成兩部分,左右的比例是3:1。

0、0、0、0、0、1、1、1、1、2、4、26

$\frac{1}{4}$ 第一個4分位數　$\frac{1}{2}$ 中位數　$\frac{3}{4}$ 第三個4分位數

圖 1-4

運用中位數的類似想法,我們把切在$\frac{1}{4}$的這個數定成$\frac{0+0}{2}=0$,稱為**第一四分位數**(記成Q_1),切在$\frac{3}{4}$的這個數定成$\frac{1+2}{2}=1.5$,稱為**第三四分位數**(記成Q_3),而**第二四分位數** Q_2 就是中位數。然後將第三四分位數和第一四分位數的差 $Q_3-Q_1=1.5-0=1.5$,稱為**四分位距**。1.5本書籍的差距,顯然更能代表上面這個例子中多數人的差距狀況。

隨・堂・練・習

計算附錄五和附錄六甲乙兩地溫度的四分位距。

當資料數是4的倍數加1時,這個想法仍然有效,以圖1-5為例:

2、2、3、3、3、4、5、6、7

$\frac{1}{4}$ Q_1　$\frac{1}{2}$ Q_2　$\frac{3}{4}$ Q_3

圖 1-5

圖上標$\frac{1}{4}$和$\frac{3}{4}$的位置,可以將資料分割成1:3和3:1的比例,因此這份資料的Q_1是3、Q_3是5,而四分位距是$5-3=2$。

雖然定義四分位數和四分位距的想法,原則上合理又清楚。但是在資料筆數不是4的倍數或4的倍數加1時,卻會碰到問題,例如回到仁山國中三年甲班閱讀書籍數的資料時,就會發現找不出適當的點,可以將資料分割成1:3或3:1的比例,這和中位數的情況不一樣。

為了一勞永逸，我們底下介紹**相對累積次數分配表**的方法，以它來討論並解決這個問題。

表 1-8 是仁山國中三年甲班閱讀課外書的次數分配表，但在下方多增加兩列。第三列的第一格仍然記錄讀 0 本書的人數有 3 人；第二格則記錄讀 0 本書與讀 1 本書的人數總和 7 人，依次累加上去。最後一列則計算第三列人數佔總人數的比率（稱為**相對累積次數**，有時以百分比表示）。依表 1-8，也可以做出相對累積次數折線圖（圖 1-6）

表 1-8

資料值	0	1	2	4	7
次數	3	4	6	1	1
累積次數	3	7	13	14	15
相對累積次數	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	1

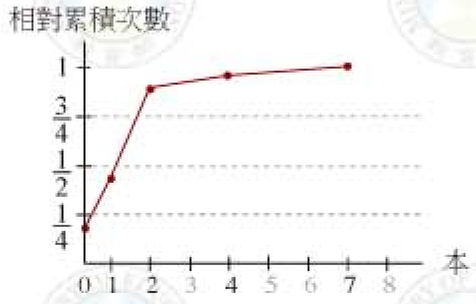


圖 1-6

圖 1-6 顯示，佔 $\frac{1}{4}$ 比例的資料是在第一組（0 本）和第二組（1 本）之間，佔 $\frac{3}{4}$ 比例的在第二組（1 本）和第三組（2 本）之間。問題是，第一個四分位數到底要取成 0、1 或其他數？第三個四分位數也有一樣的問題。

為了敘述方便，我們先將上面的相對累積次數分配表，用符號來表示，例如 a_i 表示第 i 個資料值，n_i 表示資料值 a_i 出現的次數，l_i 表示從 a_1 到 a_i 的累積次數，而 q_i 表示相對累積次數，因此 $q_i=\frac{l_i}{N}$，N 表示資料的總筆數，如表 1-9。

表 1-9

資料值	a_1	a_2	a_3	…	a_m
次數	n_1	n_2	n_3	…	n_m
累積次數	l_1	l_2	l_3	…	$l_m=N$
相對累積次數	q_1	q_2	q_3	…	$q_m=1$

以表 1-8 為例，我們有

$$a_1=0，a_2=1，a_3=2，a_4=4，a_5=7$$
$$n_1=3，n_2=4，n_3=6，n_4=1，n_5=1$$
$$l_1=3，l_2=7，l_3=13，l_4=14，l_5=15$$
$$q_1=\frac{3}{15}，q_2=\frac{7}{15}，q_3=\frac{13}{15}，q_4=\frac{14}{15}，q_5=1$$

利用相對累積次數 q_i，Q_1 和 Q_3 的取法如下：

第一四分位數 Q_1 的取法：

(1) 如果 q_i 等於 $\frac{1}{4}$（此時 N 是 4 的倍數），約定 $Q_1=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$。

(2) 否則，如果 $q_{i-1}<\frac{1}{4}<q_i$（或 $\frac{1}{4}<q_1$），則 $Q_1=a_i$（或 $Q_1=a_1$）。

第三四分位數 Q_3 的取法：

(1) 如果 q_i 等於 $\frac{3}{4}$，約定 $Q_3=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$

(2) 否則，如果 $q_{i-1}<\frac{3}{4}<q_i$（或 $\frac{3}{4}<q_1$），則 $Q_3=a_i$（或 $Q_3=a_1$）。

我們先練習怎麼計算。為了清楚呈現，我們將表 1-8 利用上述記號轉寫成表 1-10，當同學熟悉後，就可以從相對累積次數分配表直接看出來。

由於 $q_1=\frac{3}{15}<\frac{1}{4}<q_2=\frac{7}{15}$

所以 $Q_1=a_2=1$

由於 $q_2=\frac{7}{15}<\frac{3}{4}<q_3=\frac{13}{15}$

所以 $Q_3=a_3=2$

四分位距 $=Q_3-Q_1=2-1=1$

表 1-10

a_i	0	1	2	4	7
n_i	3	4	6	1	1
l_i	3	7	13	14	15
q_i	$\frac{3}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	1

例 1 Example

右表（附錄四）是智水國中三年 B 班的閱讀資料。做出相對累積次數分配表，並求出 Q_1 和 Q_3 的值。

資料值（本）	0	1	2	4	26
次數（人）	5	4	1	1	1

解題說明

相對累積次數分配表如右。

資料值（本）	0	1	2	4	26	a_i
次數（人）	5	4	1	1	1	
累積次數（人）	5	9	10	11	12	
相對累積次數	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1	q_i

資料數＝12

因為 $\frac{1}{4}<\frac{5}{12}$，所以

$$Q_1=a_1=0$$

因為 $q_2=\frac{3}{4}$，所以

$$Q_3=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$$

例 1 所得的 Q_1 和 Q_3 的值和 24 頁所得的值一樣。

隨・堂・練・習

右表是 25 頁圖 1-5 資料的次數分配表，完成相對累積次數分配表，並求 Q_1 和 Q_3 的值。將所得的值和 25 頁的結果比較。

資料值	2	3	4	5	6	7
次數	2	3	1	1	1	1
累積次數						
相對累積次數						

盒狀圖

為了能比較清楚的呈現資料集中和差距的程度，經常將資料畫成簡易盒狀圖，如例 2 所示：

例 2 Example

右表是甲地月均溫的次數分配表，試做出該筆資料的盒狀圖。

資料值（℃）	14	15	20	25	26
次數	1	2	6	2	1

解題說明

要做出盒狀圖，須先算出中位數（Q_2）、Q_1 及 Q_3。本題相對累積次數分配表如右，得中位數＝20。

資料值（℃）	14	15	20	25	26	a_i
次數	1	2	6	2	1	
累積次數	1	3	9	11	12	
相對累積次數	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{11}{12}$	1	q_i

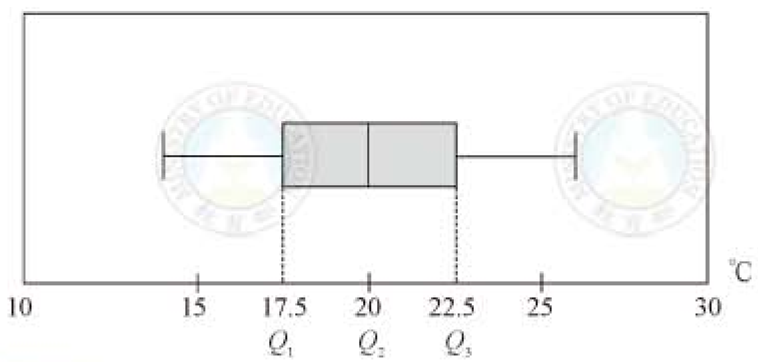
因為 $q_2=\frac{1}{4}$，所以

$$Q_1=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{15+20}{2}=17.5$$

因為 $q_3=\frac{3}{4}$，所以

$$Q_3=\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{20+25}{2}=22.5$$

畫成盒狀圖如下：



盒狀圖中，長方形盒的左緣對應的是 Q_1、右緣是 Q_3，因此長方形盒的水平長度就是四分位距 $Q_3 - Q_1$；盒中的直線段對應的是中位數 Q_2；穿越盒子的水平線段，最左端是資料的最小值，最右端是資料的最大值，因此其長度就是全距。

盒狀圖強調以中位數為「中心」，畫出邊長為四分位距的長方形盒，依照四分位距的定義，可以知道盒子包含了約 50 %的資料範圍。

隨．堂．練．習

右表是附錄六乙地月均溫資料的次數分配表，求眾數、中位數、平均數，並在附錄六上畫出盒狀圖。

資料值(℃)	0	10	20	30	40
次數	2	2	4	2	2

由於盒狀圖把許多統計指標都表現出來，因此很適合用來做資料比較，例如圖 1-7 是甲乙兩地月均溫資料的盒狀圖比較。

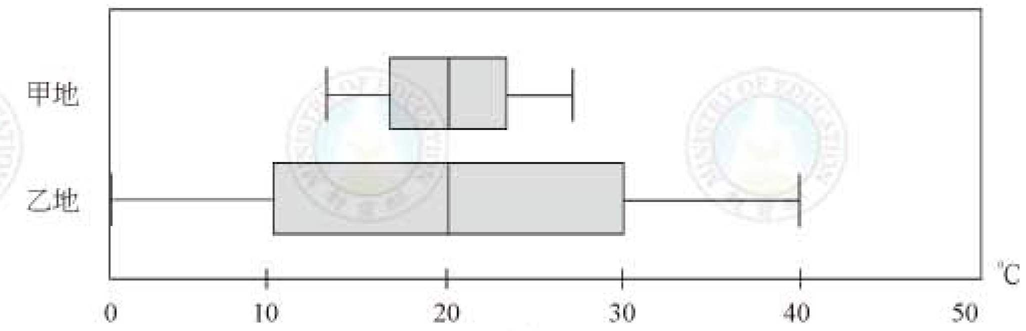


圖 1-7

比較兩圖知道，甲乙兩地的中位數雖然一樣是 20 ℃，但甲地氣溫比較集中在中位數附近，而乙地的月均溫分布則較分散，事實上從圖 1-7 很容易就看出，甲地月均溫的範圍整個落在乙地的盒狀範圍內，乙地的氣溫差距顯然遠大於甲地氣溫差距。

隨．堂．練．習

翻到附錄一和附錄三中，製作仁山三甲和智水三 B 兄弟姊妹數資料的盒狀圖。

由隨堂練習可以注意到兩件事，首先盒狀圖的盒子不見得會對中位數對稱，而且其最小值、Q_1、Q_2、Q_3、最大值，其中某些數有時可能會重複。

動．動．腦

如果將計算 Q_1 的規則中的 $\frac{1}{4}$ 換成 $\frac{1}{2}$，說明這就是取中位數的規則。

百分位數

前面計算 Q_1 和 Q_3 的規則，其實可以用到更廣的情況。

當我們的資料值很多時，例如全國國三同學的身高資料、體重資料或者基測的分數資料，在這些情況中，資料的相對次數，或相對累積次數一般都用百分率來表示，因此很自然的我們會考慮以相對應的百分位數，來分析資料的分佈狀況。

和四分位數的情況一樣，利用相對累積次數分配表，求第 k 百分位數的規則是（其中 $k=1$、2、……、99）：

(1) 如果有 q_i 正好等於 $\frac{k}{100}$，則第 k 百分位數 $=\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$。

(2) 如果 $q_{i-1}<\frac{k}{100}<q_i$（或 $\frac{k}{100}<q_1$），則第 k 百分位數 $=a_i$（或 a_1）。

最常用的百分位數為第 10 百分位數、第 25 百分位數（即 Q_1）、第 50 百分位數（即中位數）、第 75 百分位數（即 Q_3）、第 90 百分位數，其中第 10 百分位數和第 90 百分位數可視為和大部分資料差異比較大的指標，也就是說，資料值少於第 10 百分位數或大於第 90 百分位數的情況，是比較偏離「正常」的情形。

當要用盒狀圖表示以百分位數處理的資料時，有時也不妨再標示第 10 百分位數和第 90 百分位數的位置。例如圖 1-8 是某國中男女生體重的盒狀圖。其中黑圓點表示第 10 和第 90 百分位數。

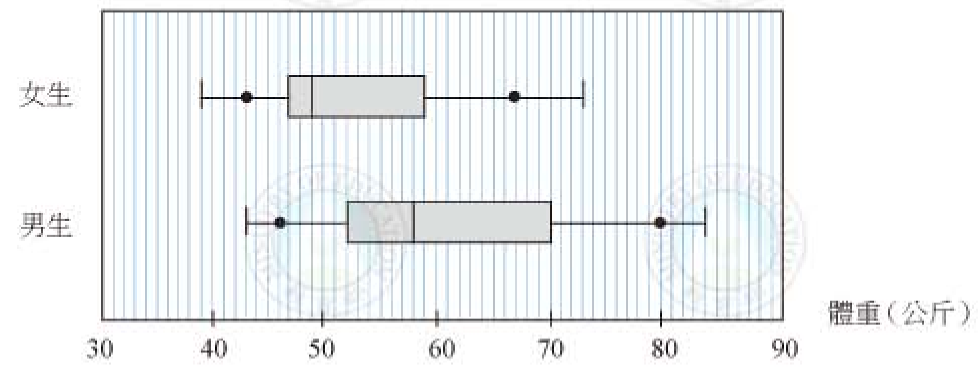


圖 1-8

隨．堂．練．習

由圖 1-8 盒狀圖，回答下列問題

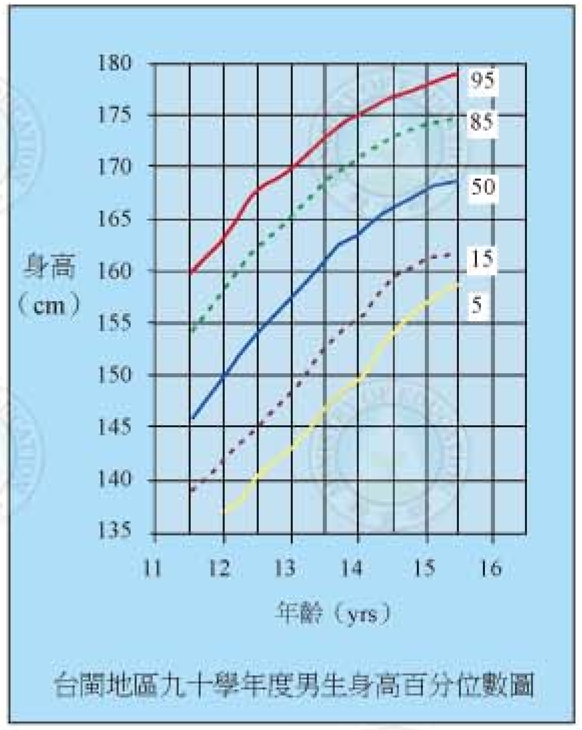
(1)男生體重的中位數約為______ 公斤，

女生體重的中位數約為______ 公斤。

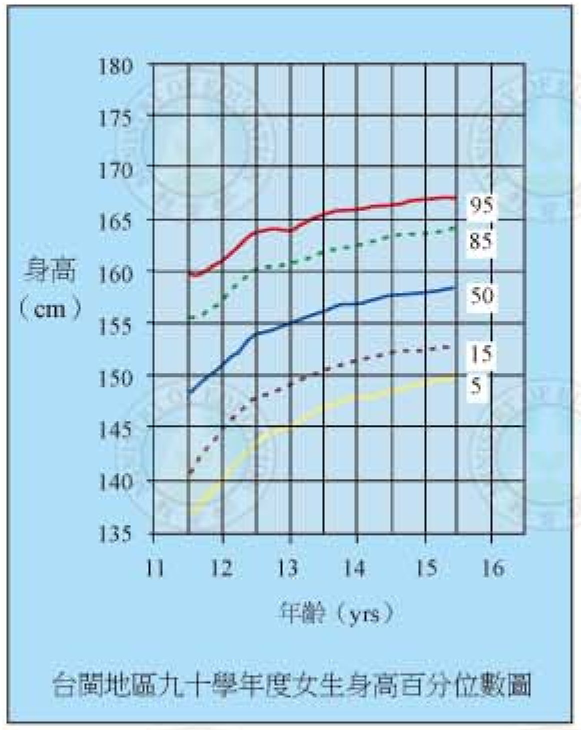
(2)女生體重的四分位距大約是多少？

(3)男生第 90 百分位數約為______ 公斤，第 10 百分位數約為______ 公斤，兩者的差距大約是______ 公斤。

(4)由圖 1-8 可否驗證一般「男生體重比女生重」的說法？你還看出什麼？



(a)



(b)

圖 1-9 （資料來源：教育部）

依照情境的不同，也可以選用其他的百分位數。例如圖 1-9 是 2001 年台灣學生身高調查的百分位數圖，由圖 1-9(a) 中 15 歲的縱軸可大致讀出

第 5 百分位數：約 157 公分　第 15 百分位數：約 161 公分
第 50 百分位數：約 168 公分　第 85 百分位數：約 174 公分
第 95 百分位數：約 178 公分

由此可知，台閩地區 15 歲男生的身高中位數約為 168 公分，而在 161 公分和 174 公分之間的人大概佔 15 歲男生的 85 %－ 15 %＝ 70 %，至於矮於 157 公分或高於 178 公分的人則各約佔 5 %。

隨．堂．練．習

試解讀圖 1-9(b) 中台閩地區 15 歲女生的身高百分位數圖：

第 5 百分位數：約_____ 公分　第 15 百分位數：約______公分
第 50 百分位數：約_____ 公分　第 85 百分位數：約_____ 公分
第 95 百分位數：約_____ 公分

動．動．腦

如果像第 9 頁一樣，我們將資料值同加一個數，或同乘以一個正數，問這對四分位數、百分位數、全距、四分位距等，會有什麼影響？

以上中位數、四分位數、百分位數、全距、四分位距的指標，都是基於排序的想法。有沒有一種資料分佈差距的指標是像平均數一樣，是以資料值的量來考慮的呢？有的，但是因為計算稍微繁瑣一點，要等到各位高中時才會學習。

簡化製表

翻到附錄七，這裡是某國中班上三十位同學的數學段考成績，我們注意到班上許多同學的成績都不一樣，即使將該資料整理畫成次數折線圖時，仍然有兩個明顯的缺點：(1) 有很多分數的次數或相對次數是空的；(2) 每個分數的次數都不超過 2 次。這樣的折線圖似乎看不出什麼意義。

基於成績相差不多應該視為相同的想法，我們經常把分數分成幾組來重新製作統計圖表。例如在分析考試成績時，可以將分數每 10 分歸成一組（其中 10 為**組距**），也就是 0 到 10 分一組、 10 分到 20 分一組、 20 分到 30 分一組，依此類推，一直到 90 分到 100 分這一組，但為了避免資料的重複，我們必須特別註明邊界點（10 、 20 、…、 90）的處理方式，如下例解題說明所示：

例 3 Example

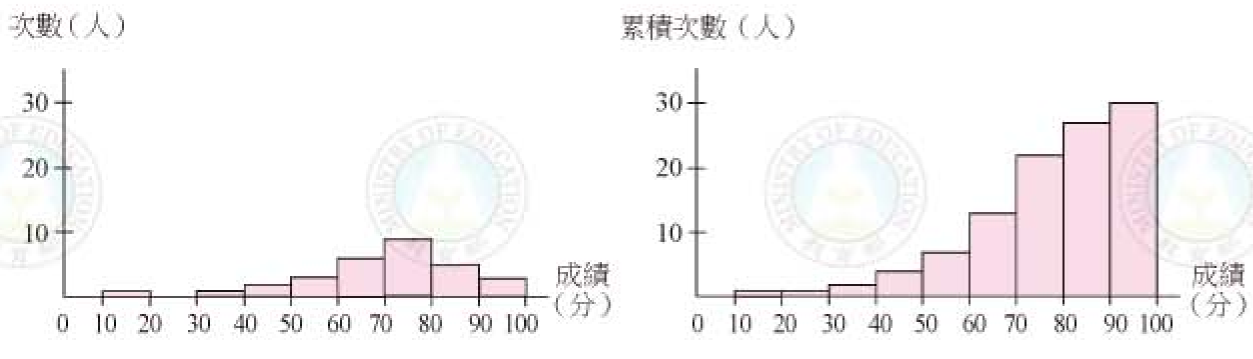
取出附錄七的學生成績資料，完成相對累積次數分配表。

解題說明

將原始資料做點數，再製作相對累績次數分配表，得

資料值 (a)	$0\le a<10$	$10\le a<20$	$20\le a<30$	$30\le a<40$	$40\le a<50$	$50\le a<60$	$60\le a<70$	$70\le a<80$	$80\le a<90$	$90\le a\le 100$
次數	0	1	0	1	2	3	6	9	5	3
相對次數	0	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$
累積次數	0	1	1	2	4	7	13	22	27	30
相對累積次數	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{22}{30}$	$\frac{27}{30}$	1

利用分組方式整理原始資料時，經常使用很類似長條圖的直方圖來表示資料的次數（相對次數）或累積次數（相對累積次數），如圖 **1-10**(a) 和 (b)。

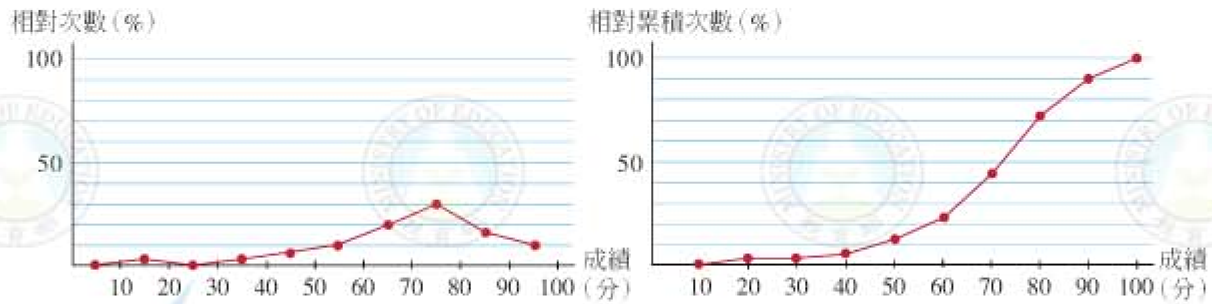


(a) 次數直方圖　(b) 累積次數直方圖

圖 1-10

使用直方圖而不是長條圖，是為了強調這些資料值（如成績）的連續性，因此才將長方形的底畫成整組的寬度，讓圖形有連續的感覺。

我們也可以用折線圖來表示分組的統計資料。製作次數（相對次數）折線圖時，經常取各組範圍的中點（稱為**組中點**），來表示該組的資料值（圖 1-11(a)），但若要作累積次數（相對累積次數）折線圖時，則通常是以各組的右端點來作為折點，這樣才能表現出各組累積的特性。



$20\le a<30$ 的組中點是 $\dfrac{20+30}{2}=25$

(a) 相對次數折線圖　(b) 相對累積次數折線圖

圖 1-11

將原始資料做分組統計時，為了讓資料的代表性不失真，通常組距要相等（在例題 3 中的組距為 10，下面的隨堂練習中為 1）。至於分組的範圍，除了一定要包含所有資料之外，分組的下限、上限、以及組距的取法就比較有彈性，要依使用上的需要而定。例如例題 3 中，由於成績固定從 0 到 100 分，很多老師會認為，不論學生成績怎麼分佈，固定使用 10 分或 20 分為一組的分組方式最適當，可以用來比較各次考試的結果，但是下面隨堂練習中的分組方式就見仁見智了。

隨．堂．練．習

翻到附錄八，這是台灣恆春氣象站 2007 年 6 月 4 日的全天氣溫記錄。依附錄指定的分組方式，完成相對累積次數分配表，並作出其相對次數分配直方圖與折線圖，以及相對累積次數分配直方圖與折線圖。

當資料可能取值的範圍比資料數多時，分組做統計比較自然，也比較可以掌握資料的分佈。但是因為我們將不同的資料值分在一組裡，因此這兩節所談的統計指標如眾數、平均數、中位數、四分位距等，就不能從分組的相對累積次數分配表看出來。解決的方法有兩種，一種是另外計算原始資料的中位數、平均數、四分位距等，再標在統計圖表上。

另外一種常用方法，就是用各組的組中點來代表該組的資料值，將各組的筆數當作這個資料值的次數，並用這個新的相對累積次數分配表計算中位數、平均數、四分位距等指標，作為原始資料中位數、平均數、四分位距的大致估計值，也可以以此製作盒狀圖，了解資料大概的分佈狀況。

例 4 Example

承續例 3，以組中點代表該組的資料值，製作次數分配表，求中位數、平均數、Q_1、Q_3、全距、四分位距，並製作盒狀圖。

解題說明

由例 3 可做成以組中點為資料值的相對累積次數分配表：

資料值 (a)	$0\le a<10$	$10\le a<20$	$20\le a<30$	$30\le a<40$	$40\le a<50$	$50\le a<60$	$60\le a<70$	$70\le a<80$	$80\le a<90$	$90\le a\le100$
組中點（新資料值）	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
次數	0	1	0	1	2	3	6	9	5	3
累積次數	0	1	1	2	4	7	13	22	27	30
相對累積次數	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{22}{30}$	$\frac{27}{30}$	1

這些以組中點為新資料值的資料，最大值是 95，最小值是 15，另外

由於 $\frac{7}{30}<\frac{1}{4}<\frac{13}{30}$，$\frac{13}{30}<\frac{1}{2}<\frac{22}{30}$，$\frac{22}{30}<\frac{3}{4}<\frac{27}{30}$

因此 中位數 $Q_2=75$、$Q_1=65$、$Q_3=85$

所以 全距 $=95-15=80$，四分位距 $=Q_3-Q_1=20$

最後計算平均數

$$15\cdot\frac{1}{30}+35\cdot\frac{1}{30}+45\cdot\frac{2}{30}+55\cdot\frac{3}{30}+65\cdot\frac{6}{30}+75\cdot\frac{9}{30}+85\cdot\frac{5}{30}+95\cdot\frac{3}{30}$$

$$=\frac{2080}{30}=69\frac{1}{3}\doteqdot 69.3$$

下圖為以組中點來代表分組資料，所製成的盒狀圖。

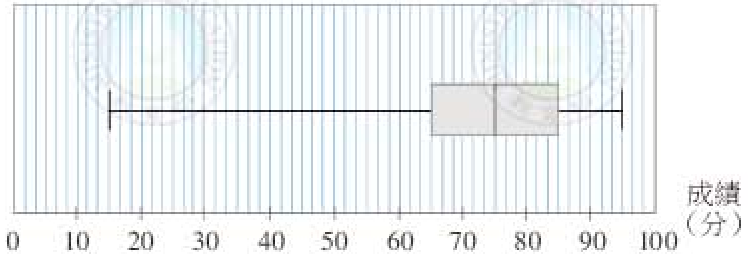


圖 1-12

隨．堂．練．習

翻到附錄八，以組中點代表分組的資料值，繪成相對累積次數分配表。求中位數、平均數、Q_1、Q_3、全距、四分位距，並依此製作盒狀圖。

摘要

1. 利用相對累積次數分配表，可以大概知道資料的相對位置，用全距與四分位距可以知道資料的差距或離散程度。
2. 當資料值的範圍很大時，也常用百分位數來描述某資料值在全體資料中的位置。
3. 利用盒狀圖可以表現資料的各種統計指標，如中位數、Q_1、Q_3、全距、四分位距。
4. 利用分組的相對累積次數分配表可以簡化原始資料的處理，甚至釐清資料的結構。

1-2 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

（　　）(1)累積次數的最後一欄就是資料總數。

（　　）(2)相對累積次數的最後一欄必是 1%。

（　　）(3)如果相對累積次數都不等於 $\frac{1}{4}$，則這份資料沒有 Q_1。

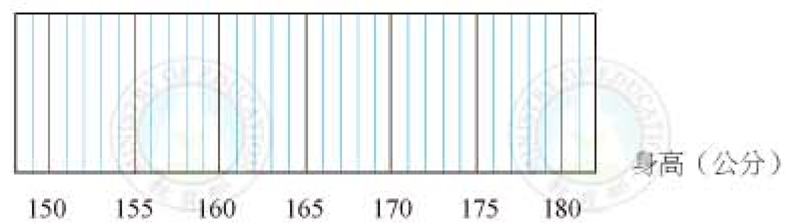
2. 右圖是警察統計目擊者口中的強盜身高的相對累積次數分配表。

身高（公分）	155	160	165	170	175
累積次數	1	11	22	28	30
相對累積次數					

(1)在右表填入相對累積次數。

(2)求其眾數、中位數、平均數、Q_1、Q_3、四分位距。

(3)在下圖中完成此資料的盒狀圖。



3. 下表為某次大型考試之國、英、數成績之累積次數分配表（局部），參加人數 5000 人。

分數	250	251	252	253	254	255
累積次數	4340	4400	4423	4460	4492	4516
相對累積次數（%）						

(1)完成該表中的相對累積次數，並求第 88 、 89 、 90 百分位數。

(2)由此表可以決定第 86 和第 91 百分位數嗎？

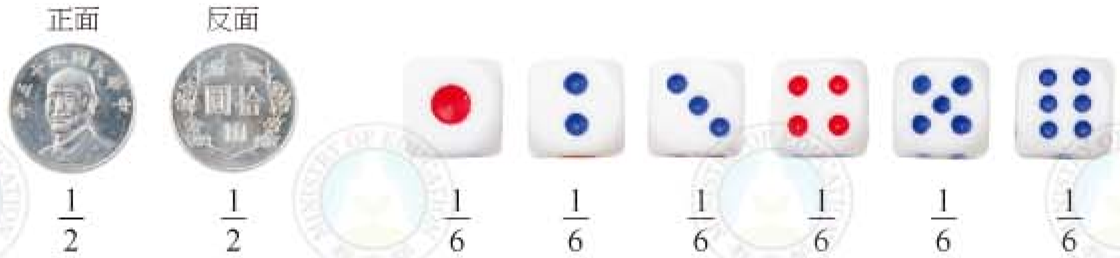
1-3 機率

每天早上出門時，我們會根據當時的天氣概況，猜測今天會不會下雨，再決定要不要帶傘出門。在生活中，我們經常要對一些還**未**發生的事件做預測，以作為某些決策的根據。當然預期的情形不一定會發生，有些事情發生的機會較大，有些發生的機會較小，例如氣象預報下雨機會是 90 %時，表示下雨的機會很大，但是不一定真的會下雨；若下雨機會預報是 10 %，表示下雨的機會很小，但是有時卻會下雨。在數學上，對於一個事件發生機會的大小，經常用一個數值來表示，這個數值稱作該事件會發生的**機率**。機率愈大表示事件發生的機會就愈大，機率愈小表示事件發生的機會就愈小。機率的英文是 probability ，所以一般用 P 來表示事件的機率。

歷史上，數學家研究機率問題，開始於中世紀 歐洲（如義大利）所流行的擲骰子賭博遊戲。人們在擲骰子的遊戲中，常因對賭局中某些事件發生機會的大小有錯誤的理解，而做出不正確的判斷。因此，能正確的計算出機率的大小，就變成一個重要的問題。

在簡單的賭博遊戲規則中，最重要的是公平原則：遊戲中的每一種結果出現的機會大小要相等。例如，向上擲一個銅板落地後，它有 2 個結果：正面（即有人頭的那一面）朝上，或反面朝上。公平原則要求的是，正面朝上的機會和反面朝上的機會要相等。否則，擲銅板的遊戲方式就有詐騙的嫌疑。同樣的，玩擲骰子時，則要求這個骰子的材質是均勻的，如此每個面出現（即朝上）的機會就會相等，這樣才算是公平的賭局。

我們怎麼用數字來表示機會呢？以最簡單的銅板為例，我們常說銅板出現正面和反面的機率各一半一半，這是因為正面和反面各佔所有可能情況的一半（圖 1-13(a)），因此我們說出現正面的機率是$\frac{1}{2}$，出現反面的機率是$\frac{1}{2}$。



(a) (b)

圖 1-13

又例如擲骰子時，結果共有 1、2、3、4、5、6 六種情形，出現 1 點的情形，佔所有可能情況的$\frac{1}{6}$（圖 1-13(b)），所以出現 1 點的機率是$\frac{1}{6}$，同樣的，出現 2 點的機率也是$\frac{1}{6}$。又例如，由於偶數點佔了所有情況的$\frac{3}{6}$，因此擲骰子時，擲出偶數點的機率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，也就是說有一半的可能性會擲出偶數點。

有時候，有人會開玩笑說「擲出 7 點的機率是多少？」由於這不可能發生，因此機率就是 0。還有人會說：「不管怎樣，我丟出的點數百分之百是 1 點到 6 點中的一種。」，由於 1 點到 6 點是全部的點，佔了全部的$\frac{6}{6}$，因此像這種一定會發生的結果，機率就是 1（也就是百分之百的意思）。

這些各式各樣的情況，通常稱為「事件」，我們會說擲骰子時，「出現 1 點」的事件發生的機率是$\frac{1}{6}$；「出現偶數點」的事件發生的機率是$\frac{1}{2}$；「出現 7 點」的事件發生的機率是 0。

注意到，在上面的計算中，我們做了一個基於對稱性的合理假設，我們假設銅板出現正面或反面的結果的可能性相同；骰子出現 1、2、3、4、5、6 的結果的可能性相同。

在本節，我們將在每一種結果發生的機會均相等的假設下，來討論機率。由上述銅板和骰子的例子可知，某一事件發生的機率可以定義為

$$\text{某一事件發生的機率}=\frac{\text{此事件所含結果的個數}}{\text{所有可能結果的個數}}$$

例 1 Example

1. 擲一個骰子，會出現 1 點或 2 點的機率是多少？
2. 擲一個骰子，會出現奇數點的機率是多少？

解題說明

1. 如前所述，擲一個骰子，出現的點數有 1、2、3、4、5、6 等 6 個結果，而出現 1 點或 2 點的事件有 2 種可能，所以

   出現 1 點或 2 點的機率$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

2. 擲一個骰子，會出現奇數點的事件有 3 種可能，即出現 1 點、3 點或 5 點。因此

   出現奇數點的機率$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

隨・堂・練・習

擲一個骰子，出現點數是 3 的倍數的機率是多少？出現點數不是 3 的倍數的機率是多少？

另一種常在機率中討論的問題，是假設在袋子中裝了很多大小、形狀、重量、觸感都一樣的球（但顏色可能不一樣），在這種情況，我們合理的假設任取一球的可能性都一樣，因此可以計算機率。

例 2 Example

袋子裡裝有 6 顆紅球， 4 顆白球，現在任意取出一球，

(1) 求該球是紅球的機率。

(2) 求該球不是紅球的機率。

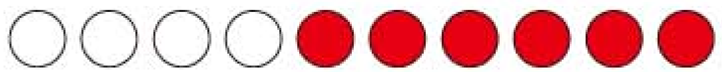
(3) 求該球是紅球或是白球的機率。

(4) 求該球會是綠球的機率。

解題說明

(1)袋子裡共有 10 顆球，這 10 顆球中任何 1 顆都有可能被拿出，如下圖，所以共有 10 種可能，其中結果是紅球的有 6 種。因此

$$該球是紅球的機率 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



(2)若取出的球不是紅球，換句話說，也就是取出的是白球，這有 4 種可能，所以

$$該球不是紅球的機率 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(3)因為袋子裡的球只有紅球或白球，所以拿出來的球不是紅球就是白球，因此

$$該球會是紅球或白球的機率 = \frac{10}{10} = 1$$

(4)因為袋子裡沒有綠球，所以拿出的球絕對不可能是綠球，也就是取出綠球的可能性是 0 。因此該球是綠球的機率 = 0 。

再強調一次，由機率的定義，知道機率（P）的值在 0 與 1 之間，或記成 $0 \leq P \leq 1$ 。若某事件發生的機率是 1 ，就表示這個事件一定會發生，例如例 2 的 (3) 。若某事件發生的機率是 0 ，就表示這個事件一定不會發生，如例 2 的 (4) 。

隨・堂・練・習

袋子裡裝有 4 顆紅球， 3 顆白球， 3 顆黑球，假設取出任一球的機會都一樣，現拿出一顆球，

(1) 求該球是白球的機率。

(2) 求該球不是白球的機率。

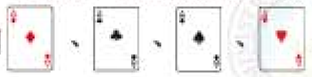
(3) 設該球是紅球的機率為 a ，該球不是紅球的機率為 b ，求 $a+b$ 。

撲克牌也常用來討論機率，我們假設均勻洗牌後，取出任一張的機率都一樣。

例 3 Example

一副撲克牌有 52 張，均勻洗牌後抽出一張，求該牌為 A 的機率。

解題說明

由於一副撲克牌有 4 種花色，因此一副撲克牌共有 4 張 A，所以抽出一張 A 的情形共有 4 種可能，即  4 種。因此

$$P=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

其中 P 表示所抽的牌是 A 的機率。

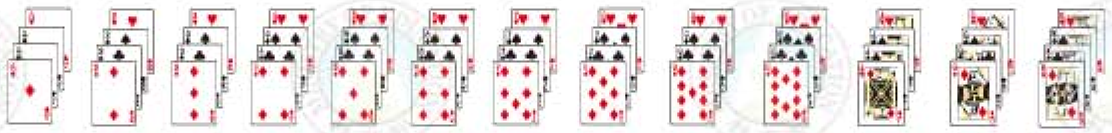


圖 1-14

我們注意到例 3 還有另外一種做法。由於撲克牌有 4 種花色，而且每一種點數這 4 種花色各有一張，若將同點數不同花色的牌疊成一疊（圖 1-14），想成我們只看點數，不看花色，由於每一疊的張數都一樣，則抽出一張牌時，是 13 種點數中任一種點數的機會都一樣，有 13 種可能，所以抽到 A 的機率是

$$P=\frac{1}{13}$$

隨・堂・練・習

一副撲克牌有 52 張，均勻洗牌後抽出一張牌，分別求出該牌是 3 點、4 點或 5 點的機率。

例 4 Example

擲一枚銅板兩次，求第 1 次及第 2 次都出現正面的機率。

解題說明

擲一枚銅板兩次，共有多少種可能的結果呢？將每次擲銅板的可能結果都寫下來，就可以計算出總共有幾種可能的結果。例如，若第一次擲出的是正面，第二次擲出的是反面，記為（正,反）。而（反,正）則表示第一次出現的是反面，第二次出現的是正面。

用上面的記錄方式，我們發現擲兩次銅板會出現的結果是：

（正,正）、（正,反）、（反,正）、（反,反）

4 種可能。由於每次丟擲時，出現正面、反面的機率都一樣，因此上面這 4 種情形出現的可能也都一樣。因此

$$出現（正,正）的機率 =\frac{1}{4}$$

隨・堂・練・習

擲一枚銅板二次，求二次出現不同面的機率。

由例 4，我們發現用符號來記錄事件，對計算很有幫助。另外擲兩次銅板，有四個可能結果：（正,正）、（正,反）、（反,正）、（反,反），也可用下面的**樹狀圖**來說明：

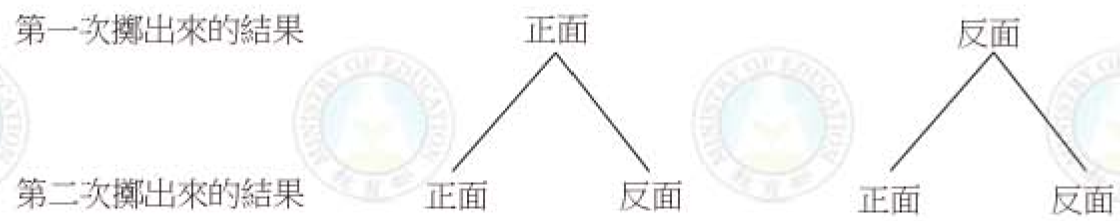


圖 1-15

由圖 1-15 知道，第一次擲出的任一種結果，在第二次時，均有 2 種可能性和它配對（即正面和反面）。由於第一次擲出時有 2 個可能的結果，所以擲銅板兩次總共有 $2 \times 2 = 4$ 種可能的結果。

動・動・腦

如果同時擲兩枚銅板，是否可以利用圖 1-15 來說明所有可能出現的結果？

我們再舉一個例子說明：假如兩個袋子分別裝有 4 個紅球和 3 個藍球，現從兩個袋子中各拿出 1 個球，問共有幾個可能的結果？

將第一個袋子的 4 個球，分別用❶、❷、❸、❹來標示。

將第二個袋子的 3 個球，分別用①、②、③來標示。

這樣，我們就可用（❷、①）表示從第 1 個袋子拿出的是❷號球，第 2 個袋子拿出的是①號球，以此類推。

所以，分別從兩個袋子各拿一個球的可能有：

（❶、①）、（❶、②）、（❶、③）

（❷、①）、（❷、②）、（❷、③）

（❸、①）、（❸、②）、（❸、③）

（❹、①）、（❹、②）、（❹、③）

或者用樹狀圖來表示：

圖 1-16

由圖 1-16 知道，第一個袋子拿出的任何一個球，第二袋均有 3 個可能的球和它配對，所以總共有 $4 \times 3 = 12$ 個可能的結果。

隨・堂・練・習

將一枚銅板連擲三次，利用樹狀圖來表示所有的可能性。

例 5 Example

有兩個袋子，每個袋子中都裝了 4 個紅球、 5 個白球，現在從兩個袋子各取出一球，試問

(1) 兩球為同一顏色的機率是多少？

(2) 兩球為不同顏色的機率是多少？

解題說明

(1)由於每一袋子各裝有 9 個球，因此各拿出一球的所有可能共有

$9 \times 9 = 81$ 種。

現在要求兩球同一顏色，可分成兩種情況：同為紅色或同為白色。同為紅色共有 $4 \times 4 = 16$ 種可能；同為白色共有 $5 \times 5 = 25$ 種可能。因此

$$P = \frac{16 + 25}{81} = \frac{41}{81}$$

⑵從兩個袋子各拿出一球，顯然這兩個球不是同色就是不同色 。因為全部有 81 種可能的結果，而同色的情形有 41 種可能的結果，所以不同色的情形有 $81-41=40$ 種可能的結果。因此

$$P=\frac{40}{81}$$

隨．堂．練．習

連擲一粒骰子兩次，出現的點數均為偶數的機率是多少？均為奇數的機率為多少？這兩個機率是否相等？

前面提到的擲骰子遊戲是引起數學家研究機率的動機之一。擲骰子遊戲常有一些迷思，會誘導人們做出錯誤的判斷。舉一個例子來說，擲兩次骰子，出現的點數總和等於 7 的機率大呢？還是等於 8 的機率大呢？由於兩顆骰子點數和為 7 的的可能組合有 1 和 6 、 2 和 5 、 3 和 4 等 3 種，而點數和為 8 的可能組合有 2 和 6 、 3 和 5 、 4 和 4 等 3 種。那麼它們的機率相同嗎？

例 6 Example

連擲一粒骰子兩次，出現點數和是 7 的機率是多少？出現點數和是 8 的機率是多少？

解題說明

將骰子連擲兩次，共有 $6\times 6=36$ 種結果。點數和是 7 的共有 6 種情形：

$$(1,6)、(2,5)、(3,4)、(4,3)、(5,2)、(6,1)$$

其中 $(1,6)$ 表示第一次擲出 1 點，第二次擲出 6 點，依此類推。所以

$$\text{點數和是 7 的機率}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

點數和是 8 的共有 5 種情形：

$$(2,6)、(3,5)、(4,4)、(5,3)、(6,2)$$

所以

$$\text{點數和是 8 的機率}=\frac{5}{36}$$

在解題說明裡，我們注意到 1 和 6 是點數和為 7 的組合，但是包含了兩種不同的情況，$(1,6)$ 表示第一次骰子出現的點數為 1 ，第二次骰子出現的點數為 6 ；而 $(6,1)$ 表示第一次骰子出現的點數為 6 ，第二次骰子出現的點數為 1 ，所以 $(1,6)$ 和 $(6,1)$ 是兩種不同的結果。

隨．堂．練．習

連擲一粒骰子兩次，出現點數和是 5 的機率是多少？出現點數和是 6 的機率是多少？

動．動．腦

連擲一粒骰子兩次，問出現的點數總和為多少時的機率最大？

統計的資料也和機率有關。舉例來說，附錄二仁山國中三年甲班的課外閱讀資料顯示，有$\frac{3}{15}$的學生在三月份沒有閱讀課外書，有$\frac{4}{15}$的學生讀了1本書，讀2本書的學生佔$\frac{6}{15}$，其他的情況都是$\frac{1}{15}$。現在如果校長隨便在班上指定一個學生，他選到的學生在三月份讀了1本書的機率是多少？讀超過3本書的機率又是多少？

資料值	0	1	2	4	7
次數	3	4	6	1	1
相對次數	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

資料數＝15

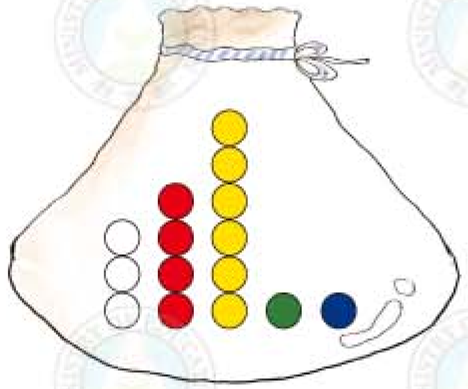


圖 1-17

我們可以想像，這個問題就像抽球問題一樣（圖 1-17），一個袋子中裝了15顆摸起來一模一樣的球，其中有3顆白球（0本書）、4顆紅球（1本書）、6顆黃球（2本書）、1顆綠球（4本書）、1顆藍球（7本書）。

因此在校長沒有故意偏袒哪一個學生的情況下，選定一個學生，就像在袋子中任意選一顆球一樣。所以選到的學生讀了1本書的機率就等於選到紅球的機率，也就是$\frac{4}{15}$。而選到的學生讀超過三本書的情況，就相當於抽到的是綠球或藍球的情況，因此機率是$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$。

例 7 Example

右表是仁山國中三年級女生的身高統計表，如果任意選定一個國三女學生，依據此表，回答下列問題：

(1)她的身高大於或等於160公分的機率是多少？

(2)她的身高介於150公分和170公分之間的機率大概是多少？

(3)她的身高大於190公分的機率是多少？

身高分組 (a)	$140\leq a<150$	$150\leq a<160$	$160\leq a<170$	$170\leq a<180$	$180\leq a<190$
相對次數	$\frac{63}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{24}{300}$	$\frac{3}{300}$

解題說明

(1) 由表可知，有三組身高資料值大於或等於160公分，因此機率是

$$\frac{60}{300}+\frac{24}{300}+\frac{3}{300}=\frac{87}{300}=0.29$$

(2)由於「介於」的意思不是很清楚，但我們可以用常識將它解釋為第二組和第三組的資料，因此機率大概是

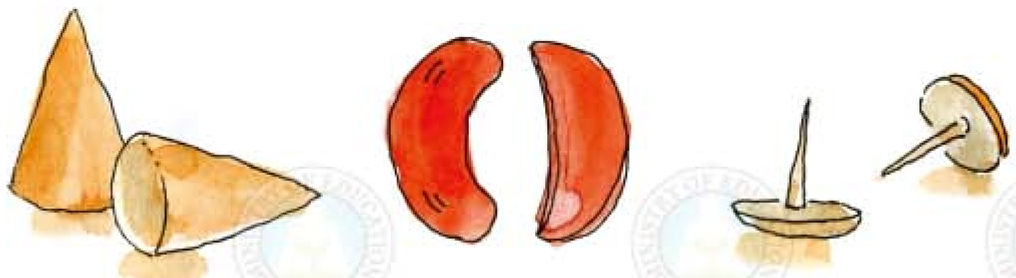
$$\frac{150}{300}+\frac{60}{300}=\frac{210}{300}=0.7$$

(3)依表中記錄沒有任何人高於190公分，因此機率是0。

隨·堂·練·習

由附錄五和附錄六的統計資料，若任意選擇某個月到乙地去旅行，其月平均溫度會高於攝氏 35 度或者低於攝氏 15 度的機率是多少？如果是到甲地呢？

在第一節我們提過，由於銅板或骰子形狀對稱，因此我們相信銅板出現正面或反面的機率各為 $\frac{1}{2}$，而骰子出現 1 、 2 、 3 、 4 、 5 或 6 點的機率各為 $\frac{1}{6}$。但是像圓錐、爻杯、圖釘、…這些不對稱的東西，丟擲的結果雖然也有兩種狀態，但是直覺上機率很可能不會各是 $\frac{1}{2}$，那麼它們的機率應該是多少呢？



雖然我們沒有辦法完全確定它們的機率，但是上面的例子給我們一個提示。例如，我們可以一直丟擲某個圖釘，然後將「正」和「側」結果記錄下來，例如下表是庭聰的記錄，其中 ○ 表示「正」，× 表示「側」。

○	○	○	×	×	○	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	○	○
○	○	○	×	×	×	○	○	○	×	○	○	○	×	×	○	×	○	○	×

依此先做出次數分配表（表 1-11），並計算「正」和「側」兩種結果出現的相對次數。這樣我們可以假設圖釘出現正面的機率是 0.6 ，而出現側面的機率是 0.4 。

表 1-11

資料值	正	側
次數	24	16
相對次數	0.6	0.4

$N = 40$

隨·堂·練·習

右表是美華丟圖釘的統計表，○表示「正」，×表示「側」，依據這份資料，計算丟圖釘出現「正」與出現「側」的機率。

○	○	×	×	×
○	○	×	○	○
×	○	×	×	○
○	×	×	○	×
○	○	×	×	○

各位同學一定發現這兩份表的機率並不一樣，事實上，全班同學各丟 100 次圖釘的結果，也可能大家都不一樣。這其實是機率有趣的地方，因為即使一枚非常公正的銅板，也有可能連續丟出 100 次正面啊！

我們前面提到公平的遊戲原則是要求每一種結果出現的機會大小相等，但我們如何檢驗每一種結果出現的機會確實是相等呢？例如擲一個銅板，若只擲一次，則無論出現的是正面或反面，我們都無法判定它們出現的機會是不是相等。但是如果我們連擲 10 次，正面出現 6 次，反面出現 4 次，我們會比較相信出現正面的機會和出現反面的機會相差不是很大。若我們連擲 100 次或更多次，正面出現的相對次數和反面出現的相對次數相差極小，我們就更相信出現正面的機會大約和出現反面的機會相等。

若銅板的材料不均勻，那麼我們投擲這枚銅板可能有表 1-12 的結果：

表 1-12

擲銅板次數（N）	10	50	100	200	500	1000	5000
出現正面次數	6	27	62	119	299	601	3002
出現正面的相對次數	$\frac{6}{10}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{62}{100}$	$\frac{119}{200}$	$\frac{299}{500}$	$\frac{601}{1000}$	$\frac{3002}{5000}$

我們發現出現正面的相對次數都大於$\frac{1}{2}$，而且投擲銅板的次數越多，出現正面的相對次數越來越靠近$\frac{3}{5}$。這時，我們比較確定出現正面次數的機會應大於出現反面的次數。依照表 1-12 ，很自然的，我們會說擲這枚銅板一次，出現正面的機率大概是$\frac{3}{5}$，它很可能是一個不公平的銅板。

同樣的道理，丟一個圖釘 40 次也許太少，但是如果丟了 1000 次後，「正」、「側」出現的相對次數越來越固定，譬如大約 0.62 和 0.38 ，我們就有理由，利用這個數值來作為以後丟擲這個圖釘的機率。

至於連續擲這個圖釘兩次，都出現「側」的機率要如何計算呢？這個問題要留待高中數學才會繼續討論。

摘要

假設每個結果出現的機會相等，則事件發生的機率可定義成：

$$事件發生的機率=\frac{此事件所含結果的個數}{所有可能結果的個數}$$

1-3 自我評量

1. 下列敘述，正確的打「○」，錯誤的打「×」。

（　）(1)一個圓柱體，共有「底面朝下」、「底面朝上」、「側邊」三種情況，因此丟出「側邊」的機率是$\frac{1}{3}$。

（　）(2)丟擲一枚公正的銅板，因為出現正反面的機率各為$\frac{1}{2}$，因此每丟 2 次，一定會出現一次正面。

（　）(3)丟擲一個公正的骰子 120 次， 3 點的面會出現 20 次。

（　）(4)丟擲一枚公正的硬幣 10000 次，絕對不可能全部都是正面。

（　）(5)丟擲一枚公正的硬幣 100 次，出現 100 次正面的機率，比出現 50 次正面的機率小。

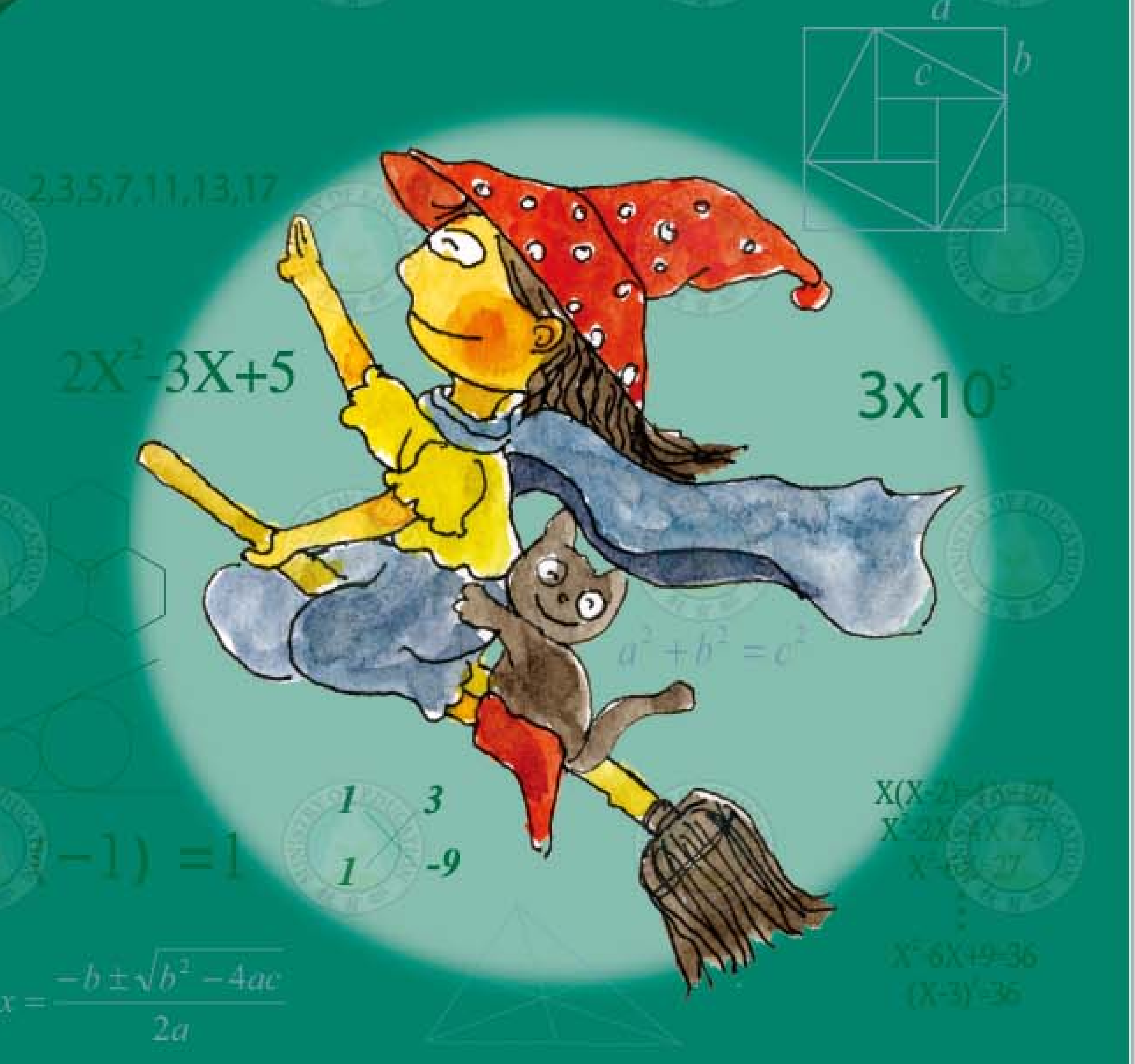
（　）(6)小明丟擲一枚公正的硬幣四次，如果第一、二、三次都出現正面，則第四次出現正面的機率會略小於出現反面的機率。

2. 一袋子中有 4 顆球，標記的號碼為 1 、 2 、 3 、 4 。已知每顆球被取出的機會相同，若第一次從袋中取出一球後放回，第二次從袋中再取出一球，則第二次取出球的號碼比第一次大的機率為何？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{3}{8}$　(D) $\frac{7}{12}$

第 2 章

回顧與前瞻



2-1 數與量

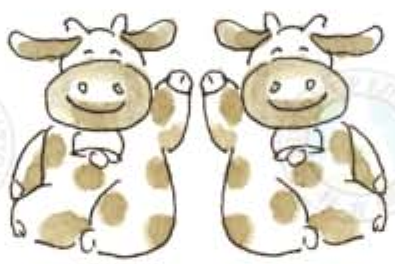
前言

很快的，國中三年已經快過去了。在這最後一冊的最後一章，我們要回顧這三年的數學，幫助同學整理到目前為止所學到的數學知識。

國中的數學大致可以分成數、代數、幾何三個部分，本章將用三節的篇幅複習其中的主要概念和性質。另外在書末的附錄九，我們還提供一個國中數學概念的圖表，標示各數學概念的相對位置與彼此的關係。希望同學能更清楚感受到數學是一個整體的知識，而不是零散孤立的技巧。

當然，複習不是單純的重新學習，由於各位對這些概念有基本的認識，所以複習時，不但要提升鳥瞰的高度，還要融會貫通這些數學題材彼此的關係。因此在這一章，我們特別選用一些基測的考題，編織在複習的說明之中，做為複習的例題、隨堂練習與習作，希望同學可以更能體會基本數學概念的重要性與關連。

另外，第四節則提供了一些比較綜合性、課本上沒看過的問題。各位第一次接觸這些陌生的問題時，可能會覺得摸不著頭腦，但是只要靜下心，思考問題敘述中的數量或圖形關係後，就可以用學過的數學知識來解題。當你了解做法後，一定會恍然大悟，原來只要應用一些基本的數學概念，就可以解決這些看起來陌生的問題。



本書所有選擇題和基測一樣，都只有一個答案。有些問題的選項也許看起來複雜，但是只要能先找出正確的答案，就可以不用在意其他的選項，我們建議同學先從自己熟悉、有把握的部分開始思考。

數、符號與運算規則

從小學以來，我們學過很多種數，在這一節，我們要來回顧這個數字王國。

在國中以前，數字王國有三種居民，一種是我們最熟悉、用來計數的數，也就是 1 、 2 、 3 、…這樣的自然數以及 0 ；一種是用在分配、比率、量度用的分數，例如「每人分 $\frac{1}{4}$ 」、「存款增加 $\frac{15}{100}$ 」、「西瓜重 $4\frac{1}{5}$ 公斤」等；另外一種是在測量上常用到的小數，例如「河寬 34.125 公尺」、「西瓜重 4.2 公斤」、「木桶容量 5.5 公升」、「開車 3.2 小時」等等。

這三種數彼此有關，譬如自然數 3 可以想成分數 $\frac{3}{1}$ 、 $\frac{6}{2}$ 等，也可以想成小數 3.0 ，甚至 3.00 。而分數和小數彼此之間也經常可以轉換，例如 $4\frac{1}{5}$ 和 4.2 其實是一樣的。

$$\frac{a}{b}=a\div b$$

這三種數看起來雖然不一樣，但都可以表示在數線上，當然在數線上，$4\frac{1}{5}$ 和 4.2 表示同一個點的坐標。有了數線，就好像擁有了數字王國的整體地圖，讓我們知道自然數、分數、小數雖然種類不同，但都是數（圖 2-1）。

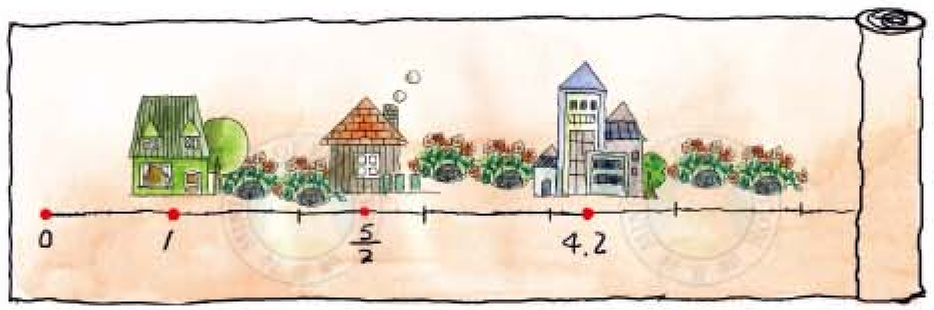


圖 2-1

數字王國的居民彼此交往，依賴四種基本的運算：加、減、乘、除。這四種運算必須遵守數字王國的憲法—「運算規則」，例如加法交換律、乘法交換律、乘法對加法的分配律等，不然數的世界就會陷入混亂。

各種分配律

$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$　　$a \cdot (b-c)=a \cdot b-a \cdot c$

$(b+c) \cdot a=b \cdot a+c \cdot a$　　$(b-c) \cdot a=b \cdot a-c \cdot a$

例 1 Example

求 $536 \times 0.52-364 \times 0.48+364 \times 0.52-536 \times 0.48$ 的值。

(A) 0　(B) 20　(C) 36　(D) 40

解題說明

原式 $=536 \times (0.52-0.48)+364 \times (0.52-0.48)$　分配律

$=(536+364) \times (0.52-0.48)$

$=900 \times 0.04=36$

答：(C)。

隨．堂．練．習

$7\frac{1}{3} \div 1\frac{2}{5}$ 可表示成下列哪一個式子？

(A) $7 \times \frac{1}{3} \div 1 \times \frac{2}{5}$　(B) $(7+\frac{1}{3}) \div (1+\frac{2}{5})$

(C) $7+\frac{1}{3} \div 1+\frac{2}{5}$　(D) $(7 \times \frac{1}{3}) \div (1 \times \frac{2}{5})$

答：

在國一時，我們發現無論是數字或運算規則，用符號來表示後，會變得更簡潔，更清晰，而符號的運算也遵守數的所有運算規則。

例 2 Example

有甲、乙兩個完全相同的杯子，各裝不同量的水，若把甲杯中 $\frac{1}{5}$ 的水倒進乙杯，則兩杯的水位等高，設甲杯原來的水量為 a，乙杯原來的水量為 b，求 $\frac{b}{a}$。

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{4}{5}$　(D) $\frac{5}{4}$

解題說明

由題意知，甲杯倒到乙杯後，剩下來的水量有 $\frac{4}{5}a$，而乙杯的水量也由 b 增加 $\frac{a}{5}$，即 $b+\frac{a}{5}$，

因此　$\frac{4}{5}a=\frac{a}{5}+b$

即　$\frac{3}{5}a=b$

得　$\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$

答：(B)。

隨．堂．練．習

某校有 $\frac{2}{5}$ 的學生參加大隊接力比賽，有 $\frac{1}{4}$ 的學生參加大會舞表演，有 $\frac{1}{8}$ 的學生前兩項活動都有參加。下列何者可用來表示該校學生中「參加大隊接力比賽卻沒有參加大會舞表演」的比例？

(A) $1-\frac{1}{4}$　(B) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$　(C) $1-\frac{1}{8}$　(D) $\frac{2}{5}-\frac{1}{8}$

答：

重要的是，這些數的運算規則彼此有關，例如，我們可以利用倒數的概念，將乘法和除法結合起來。若 a 為不等於 0 的數，則 a 的倒數是 $\frac{1}{a}$。

例如，$\frac{2}{3}$ 的倒數是 $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$

而 0.03 的倒數是 $\dfrac{1}{\frac{3}{100}}=1\div\frac{3}{100}=\frac{100}{3}$，

或者也可寫成

$$\frac{1}{0.03}=\frac{1\times100}{0.03\times100}=\frac{100}{3}$$

利用倒數，除法就能用乘法表示：

$$b\div a=b\cdot\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$$

因此一些以前學過的公式就能透過乘法運算規則來理解。例如我們可以利用倒數說明

$$a\div b\div c=a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}=a\cdot\frac{1}{b\cdot c}=a\div(b\cdot c)$$

因此對於乘、除的所有運算規則，我們只要記得最基本的乘法交換律、結合律、分配律就足夠了。

隨・堂・練・習

計算 $6\frac{3}{8}\div(\frac{7}{11}+2)$ 的過程，下列哪一個是正確的？

(A) $\frac{9}{4}\div(\frac{7}{11}+2)=\frac{9}{4}\times\frac{11}{7}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}$　(B) $\frac{9}{4}\div(\frac{7+22}{11})=\frac{9}{4}\times\frac{11}{29}$

(C) $\frac{51}{8}\div(\frac{7}{11}+2)=\frac{51}{8}\times\frac{11}{7}+\frac{51}{8}\times\frac{1}{2}$　(D) $\frac{51}{8}\div(\frac{7+22}{11})=\frac{51}{8}\times\frac{11}{29}$

答：

例 3 Example

已知 n 滿足 $\frac{n}{7.24}=\frac{16.13}{8.13}$。若將 n 描在數線上，則下列哪一個數在數線上的位置最接近 n？

(A) 12.24　(B) 13.13　(C) 14.25　(D) 15.24

解題說明

因為 $\frac{16.13}{8.13}<2$ 且靠近 2，所以 $n=\frac{16.13}{8.13}\times7.24$ 小於且靠近 $7.24\times2=14.48$，可以猜測答案為 (C)14.25。

直接計算 $\frac{16.13}{8.13}\times7.24\fallingdotseq14.36$，答案為 (C)。

答：(C)。

熟練這些基本運算，是國一數學課程的核心之一，特別是分配律。利用分配律，我們可以得到乘法公式，尤其是下面的常用公式：

和平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

差平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

例 4 是應用平方差的例子。

例 4 Example

$(69\frac{17}{23})\times(70\frac{6}{23})=a+b$，若 a 為正整數，而 $0<b<1$，求 a。

(A) 3583　(B) 3584　(C) 4899　(D) 4900

解題說明

由觀察知 $\frac{17}{23}+\frac{6}{23}=1$，所以

$$(69\frac{17}{23})\times(70\frac{6}{23})=(70-\frac{6}{23})\times(70+\frac{6}{23})$$

$$=4900-(\frac{6}{23})^2$$

由於 $0<(\frac{6}{23})^2<1$，因此 $a=4900-1=4899$。

答：(C)。

隨·堂·練·習

已知 $119\times21=2499$，求 $119\times21^3-2498\times21^2$ 的值。

(A) 431 (B) 441 (C) 451 (D) 461

答：

負數

到了國中之後，數字王國有了新的變化。首先，我們發現數字王國的另一邊，竟然對稱的住著一批稱為負數的住民，每個正數如「$\frac{5}{2}$」，都有一個相反數如「$-\frac{5}{2}$」，而每個負數如「-4.3」，也有一個相反數如「4.3」，好像鏡子或雙胞胎一樣。

負數的出現，解決了小的數怎麼減大的數的問題，例如 $1-3=-2$。剛學習負數時，我們花了很大的力氣，來瞭解正數和負數、負數和負數彼此之間要如何做加、減、乘、除的運算，結果發現這些數之間不但仍然有加、減、乘、除的運算，而且並沒有破壞原來正數的計算方式，甚至連四則運算的規則也都保持。也就是說，負數的加入，只是擴充了原來整個數字王國的版圖和法律，卻沒有破壞它。

$-(-a)=a$	$(-1)\times(-1)=1$
$a-b=a+(-b)$	$-(a+b)=-a-b$

上面第一列的兩個公式，都是「負負得正」的規則。

例 5 Example

下列敘述何者正確？

(A) $2^3-(-2^3)=0$　(B) $2^4-(-2^4)=0$

(C) $(-2^3)-(-2^3)=0$　(D) $(-2)^4-(-2^4)=0$

解題說明

$2^3-(-2^3)=2^3+2^3\neq0$

$2^4-(-2^4)=2^4+2^4\neq0$

$(-2^3)-(-2^3)=0$

$(-2)^4-(-2^4)=2^4+2^4\neq0$

答：(C)。

隨·堂·練·習

求 $(-\frac{1}{7})\div\frac{1}{42}\times\frac{5}{6}\div(-\frac{5}{8})$ 的值。

(A) 8 (B) -8 (C) $\frac{288}{25}$ (D) $-\frac{288}{25}$

答：

例 6 Example

計算 $11-3^2\times[2-(-3)^2]+6$ 的值。

(A) -82 (B) -8 (C) 28 (D) 80

解題說明

$$11-3^2\times[2-(-3)^2]+6=11-9\times(2-9)+6$$
$$=11+63+6=80$$

答：(D)。

隨·堂·練·習

求 $-9\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\times[\frac{7}{4}-(\frac{3}{8}-\frac{1}{2})]$的值。

(A) -10 (B) $-\frac{99}{10}$ (C) $-\frac{17}{2}$ (D) $-\frac{43}{5}$

答：

多了負數的好處是，加法和減法可以想成同一種運算，這是因為 $a-b=a+(-b)$。這就像乘法和除法可以想成同一種運算一樣：$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}$。這麼一來，原本許多繁複的運算規則就可以化繁為簡，寫得更清楚簡單，例如

$$a-(b+c)=a+(-(b+c))=a+(-b)+(-c)=a-b-c$$
$$(a-b)\cdot c=(a+(-b))\cdot c=a\cdot c+(-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$$

所以學了負數後，只要能掌握加法和乘法的運算規則，所有其它的運算規則都可由此推演出來，底下就是這些規則：

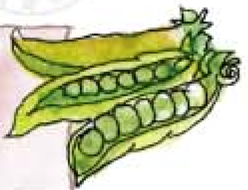
交換律：$a+b=b+a$

$a\cdot b=b\cdot a$

結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$



我們發現，將原來的數字王國擴張後，數和數之間的運算不僅沒有變得更繁複，事實上是變得更簡潔，更能達到以簡馭繁的目的。

隨·堂·練·習

下列哪一個式子是錯誤的？

(A) $\frac{2}{25}+\frac{3}{35}+\frac{4}{45}=\frac{3}{35}+\frac{2}{25}+\frac{4}{45}$ (B) $\frac{2}{25}-\frac{3}{35}-\frac{4}{45}=\frac{2}{25}-\frac{4}{45}-\frac{3}{35}$

(C) $\frac{2}{25}\times\frac{3}{35}\times\frac{4}{45}=\frac{4}{45}\times\frac{3}{35}\times\frac{2}{25}$ (D) $\frac{2}{25}\div\frac{3}{35}\div\frac{4}{45}=\frac{3}{35}\div\frac{2}{25}\div\frac{4}{45}$

答：

例 7 Example

在算式 $21-(-\frac{50}{87}\ \square\ 24)^2$ 的 $\square$ 中，填入下列哪一個運算符號，計算出來的值是最小的？

(A) $+$ (B) $-$ (C) $\times$ (D) $\div$

解題說明

由題意知，本題是在問那種記號會讓 $(-\frac{50}{87}\ \square\ 24)^2$ 最大，這相當於問絕對值 $|-\frac{50}{87}\ \square\ 24|$ 何時最大。

顯然 $|-\frac{50}{87}+24|<|-\frac{50}{87}-24|=24+\frac{50}{87}$

而 $|-\frac{50}{87}\times24|=24\times\frac{50}{87}<24+\frac{50}{87}$

$|-\frac{50}{87}\div24|=\frac{50}{87\times24}<24+\frac{50}{87}$

所以 $\square$ 內放入「$-$」號，會使得 $21-(-\frac{50}{87}\ \square\ 24)^2$ 最小。

答：(B)。

隨．堂．練．習

若 $1999^2 - 2000^2 = 1333 \times a$，求 a。

(A) 1　(B) -1　(C) 3　(D) -3

答：

數線

至於做為數字王國地圖的數線，也只要將原來的正數數線對稱的擴充到原點 O 的左邊，如此就可以將正負數全部紀錄在數線上（圖 2-2）。

圖 2-2

我們知道，互為相反數的兩數在數線上對原點對稱，且這兩數的絕對值相等，相當於數線上這兩數與原點 O 的距離相等。推廣這個性質，可以得到 a、b 兩點的距離等於 $|a-b|$。另外，數的大小關係相當於數線上的右和左的關係，越右邊的數越大，越左邊的數越小。

(1) a 與 b 的距離 $= |a-b|$。

特別的，絕對值 $|a|$ 表示 a 到原點的距離。

(2) $A(a)$ 與 $B(b)$ 的中點坐標是 $\frac{a+b}{2}$。

例 8 Example

如右圖，數線上有相異四點 A、B、C、D，分別表示 32、$4x-8$、$3x+7$、43 四個數。若 x 為一個正整數，且 A、B、C、D 的位置如圖所示，求 x 的值。

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13

解題說明

由圖知 $32 < 4x-8$，$3x+7 < 43$，

由 $32 < 4x-8$，得 $40 < 4x$，即 $10 < x$，

由 $3x+7 < 43$，得 $3x < 36$，即 $x < 12$，

因為 x 為整數，所以 $x = 11$。

答：(B)。

隨．堂．練．習

右圖為五個車站 P、O、Q、R、S 在某一筆直道路上的位置。今有一公車距離 P 站 4.3 公里，距離 Q 站 0.6 公里，則此公車的位置會在哪兩站之間？

單位（公里）

(A) R 站與 S 站　(B) P 站與 O 站

(C) O 站與 Q 站　(D) Q 站與 R 站

答：

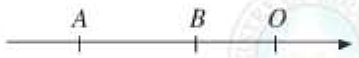
例 9 Example

在數線上，O 為原點，A 點的坐標為 a，B 點的坐標為 b，利用下面三個已知條件，判斷 A、B、O 三點在數線上的位置關係。

已知條件：

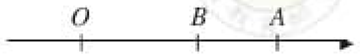
(1) $a+b<0$　(2) $a-b>0$　(3) $ab>0$

下列圖形何者正確？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

解題說明

由 $ab>0$，知道 a、b 同號。

再由 $a+b<0$，知道 a 和 b 都為負數。

因此，A、B 均在 O 點的左邊。

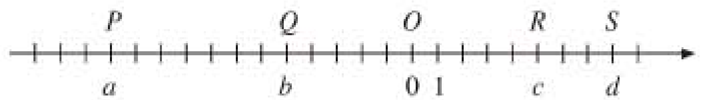
由 $a-b>0$，得 $a>b$，即 A 在 B 的右邊。

因此由左至右，三點的順序為 B、A、O。

答：(C)。

隨．堂．練．習

在下圖的數線上，O 為原點，數線上的點 P、Q、R、S 所表示的數分別為 a、b、c、d。請問下列哪一個大小關係是不正確的？



(A) $|a|<|d|$

(B) $|b|=|c|$

(C) $|a|>|b|$

(D) $|0|<|b|$

答：

科學記號

數字王國裡有一些很大的數和很小的數，很難讓大家認識它們，所以利用指數律和正負數的性質，我們設計了一種變裝的方式，稱為科學記號，讓它們看起來比較像常用的數。其中指數律指的是下列的規則：

指數律：

$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n\times m}$

$(a\times b)^n = a^n \times b^n$

$a^n \div a^m = a^{n-m}$

在這些指數律中，n 和 m 都是正整數或 0。若 a 不為 0，則我們約定 $a^0=1$。在第四個指數律中，我們另外還要求 $n\geq m$，而且 $a\neq 0$。至於指數是負數的指數律，將在高中課程學到。

底下是科學記號的記法：

科學記號：

$a\times 10^n$

其中 $1\leq a<10$，n 為整數。

作為 10 的指數的 n，可以是正整數（這時 $a\times 10^n$ 大於或等於 10），可以是 0，也可以是負整數（這時 $a\times 10^n$ 在 0 和 1 之間）。仔細觀察，可以發現 n 和 $a\times 10^n$ 的位數很有關係。

例10 Example

用科學記號可將 1234 表示成「1.234×10^3」。若 A 的科學記號可表示成「1.23456×10^8」，則 A 為幾位數？

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

解題說明

因為 10^8 是 1 後面加 8 個 0，是一個 9 位數，所以 1.23456×10^8 為 9 位數。

答：(D)。

隨．堂．練．習

下列哪一個數值最小？

(A) 9.5×10^{-9} (B) 2.5×10^{-9} (C) 9.5×10^{-8} (D) 2.5×10^{-8}

答：

隨．堂．練．習

下列何者為 $\frac{2}{25}$ 的科學記號？

(A) 8×10^{-1} (B) 8×10^{-2} (C) 2.3×10^{-1} (D) 2.3×10^{-2}

答：

平方根與根號數

到了國二時，藉由畢氏定理或正方形面積和邊長關係的討論，數的王國又多了許多神秘的新住民，也就是頭上帶著華麗帽子的根號數如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{\frac{2}{3}}$、$-\sqrt{3}$ 等。

這些數雖然不是分數、也不是小數，但是幸好這些數可以表示成線段的長度（例如直角三角形的斜邊長），所以我們仍然可以將根號數表示在數線上（圖 2-3）。

圖 2-3

由正方形面積與邊長的關係，我們發現了底下的不等式，而且可以用這個性質來比較根號數的大小：

$$a > b > 0，則 \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

上面的公式也告訴我們如何運用十分逼近法，來求根號數的近似值，例如用四捨五入法，可求得 $\sqrt{2}$ 在小數第 2 位的近似值是 1.41。

另外，我們也有一些關於根式的計算性質：

若 $a > 0$，$b > 0$，則 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$，$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，

若 $a > 0$，$b > 0$，則 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$。

認識了 $\sqrt{2}$，讓我們可以解出方程式 $x^2 = 2$，知道其解為 $\pm\sqrt{2}$。事實上，對任意正數 $a > 0$，$\pm\sqrt{a}$ 都是 a 的平方根。

例11 Example

若 a 、 b 為方程式 $(x-29)^2=247$ 的兩根，則下列敘述何者正確？

(A) a 為 247 的平方根　(B) $a+b$ 為 247 的平方根

(C) $a+29$ 為 247 的平方根　(D) $29-b$ 為 247 的平方根

解題說明

因為 $29-b=-(b-29)$，所以

$$(29-b)^2=(-(b-29))^2=(-1)^2\times(b-29)^2$$
$$=(b-29)^2=247$$

因此， $29-b$ 是 247 的平方根。

答：(D) 。

隨．堂．練．習

下列有關 $\sqrt{10}$ 的敘述，何者不正確？

(A) $\sqrt{10}$ 是方程式 $x^2=10$ 的一個解

(B) 在數線上可以找到坐標為 $\sqrt{10}$ 的點

(C) $\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

(D) $\sqrt{10}<4$

答：

例12 Example

已知 a 、 b 為方程式 $(\frac{2}{5}x+1)^2=680$ 的兩根，且 $a>b$，利用右表，求 $\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b$ 之值最接近下列哪一數？

(A) 0　(B) 2　(C) 37　(D) 52 。

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
2	1.14	4.472
5	2.236	7.071
34	5.831	18.439
68	8.246	26.077

解題說明

由方程式得 $\frac{2}{5}x+1=\pm\sqrt{680}$，即 $\frac{2}{5}x=-1\pm\sqrt{680}$，但已知 $a>b$，

所以　$\frac{2}{5}a=-1+\sqrt{680}$， $\frac{2}{5}b=-1-\sqrt{680}$

因此　$\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=-1+\sqrt{680}-(-1-\sqrt{680})=2\sqrt{680}$

由表知道 $\sqrt{680}\fallingdotseq 26.077$，所以 $2\sqrt{680}$ 最接近 $26\times2=52$ 。

答：(D) 。

隨．堂．練．習

比較 $\frac{5}{2}$，$\sqrt{\frac{5}{2}}$，$\frac{5}{\sqrt{2}}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 四數的值，何者最大？

(A) $\frac{5}{2}$　(B) $\sqrt{\frac{5}{2}}$　(C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

答：

更重要的是，根號數這些新的數和數的王國的其他數遵守一樣的四則運算規則，其中包括由分配律所得到的乘法公式。例如，利用平方差公式，可以化簡下列的根式：

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-4}=\sqrt{5}-2$$

例13 Example

若一矩形其兩邊分別為 $2+\sqrt{2}$ 及 $1+2\sqrt{2}$，求此矩形的面積。

解題說明

$$\text{矩形面積}=(2+\sqrt{2})\cdot(1+2\sqrt{2})$$
$$=2+2\cdot2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2(\sqrt{2})^2$$
$$=2+4\sqrt{2}+\sqrt{2}+4=6+5\sqrt{2}$$

隨・堂・練・習

若一矩形的面積為 4，已知其一邊為 $1+\sqrt{2}$，求另一邊的長度。

在數學上，數字王國住民的擴充，也可以看成是因應解方程式的需要所得到的結果。例如國小所學的數，沒有辦法解像 $x+8=5$ 的方程式。但引進了負數後，所有一元一次方程式就都有解了。另外，用一般的分數並不能解像 $x^2=2$ 這類的方程式，但引進了根號數後，$x^2=2$ 這類的方程式就可解了。同樣，我們還可以追問有沒有面積為 $\sqrt{2}$ 的正方形？這相當於問 $x^2=\sqrt{2}$ 的解是什麼？依照開根號的意義，這個數應該記成 $\sqrt{\sqrt{2}}$。我們自然會問像 $\sqrt{\sqrt{2}}$、$\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 這樣的數究竟是怎樣的數？在高中我們將會學習這些數，因此會再度擴充數字王國的領域，這樣的擴充可以無窮無盡的做下去嗎？在往後的數學課程裏，大家還會碰到這個問題。

因數與倍數

關於自然數的問題，在國中階段還學過兩個比較特殊的課題，一個是和因數、倍數有關的課題，包括最大公因數和最小公倍數。其中最重要的是質數、兩數互質、質因數分解等概念。

> 若兩數沒有共同的質因數，則此兩數互質。
>
> 若 a, b 為兩自然數，則
>
> $$(a, b)\cdot[a, b]=a\cdot b$$

例14 Example

下列四個數中，哪一個與 55 互質？

(A) 21 (B) 30 (C) 35 (D) 77

解題說明

因為 $55=5\times 11$ 有兩個質因數 5 和 11，而 $21=3\times 7$，由於兩數沒有共同質因數，所以 21 和 55 互質。

答：(A)。

隨・堂・練・習

將 231192 做質因數分解後可得 $2^a\times 3^2\times c^2\times 19$，求 $a+c$。

(A) 10 (B) 14 (C) 16 (D) 20

答：

例15 Example

將 182 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 84 與 98 的兩長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$。若 $\overline{AB}=\overline{EF}$ 且 $\overline{EF}>10$，求 $\overline{AB}$。

(A) 12 (B) 14 (C) 17 (D) 21

解題說明

因為長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$ 有一邊一樣長，所以此邊長必為 84 和 98 的公因數，由短除法知

$$\begin{array}{r|rr} 7 & 84 & 98 \\ \hline 2 & 12 & 14 \\ \hline & 6 & 7 \end{array}$$

$\overline{AB}=\overline{EF}=14$ $\overline{EF}>10$

答：(B)。

隨・堂・練・習

小娟想用 60 塊邊長為 1 的正方形紙板，緊密地拼成面積為 60 的長方形，則此長方形的周長最小可為多少？

(A) 30 (B) 32 (C) 45 (D) 60

答：

例16 Example

甲、乙、丙三家新聞台每天中午 12 ： 00 同時開始播報新聞，其中：
甲台每播報 10 分鐘新聞後就接著播廣告 2 分鐘；
乙台每播報 8 分鐘新聞後就接著播廣告 1 分鐘；
丙台每播報 15 分鐘新聞後就接著播廣告 3 分鐘。

⑴ 在 12 ： 47 時，三家新聞台進行的內容為何？
(A) 甲：廣告；乙：新聞；丙：新聞
(B) 甲：新聞；乙：廣告；丙：新聞
(C) 甲：新聞；乙：新聞；丙：廣告
(D) 三家新聞台皆正在播報新聞

⑵ 三家新聞台在下列哪一個時間廣告同時結束？
(A)12 ： 33
(B)12 ： 39
(C)13 ： 12
(D)14 ： 00

解題說明

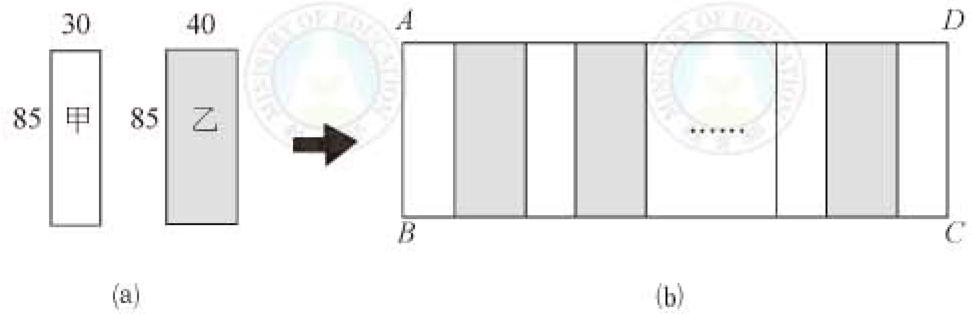
⑴甲台新聞＋廣告的時間＝ 12 分，乙台新聞＋廣告的時間＝ 9 分，丙台新聞＋廣告的時間＝ 18 分。由於 47 ÷ 12 餘 11 ，47 ÷ 9 餘 2 ，47 ÷ 18 餘 11 ，所以 12 ： 47 時甲台為廣告時間，乙、丙均為新聞時間。
答：(A) 。

⑵因為〔 12 , 9 , 18 〕＝ 36 ，且 13 ： 12 與 12 ： 00 差距 72 分，72 是 36 的倍數，所以在 13 ： 12 時，三台廣告會同時結束。
答：(C) 。

3	12	9	18
3	4	3	6
2	4	1	2
	2	1	1

隨．堂．練．習

有甲、乙兩種長方形紙板各若干張，其中甲的長為 85 公分，寬為 30 公分；乙的長為 85 公分，寬為 40 公分，如圖 (a) 所示。今依同種紙板不相鄰的規則，將所有紙板由左至右緊密排成圖 (b) 的長方形 $ABCD$ ，則下列哪一個選項可能是 $\overline{AD}$ 的長度？



(a)　　(b)

(A) 770 公分　(B) 800 公分　(C) 810 公分　(D) 980 公分

答：

數列

另一個課題是數列。我們學習觀察一個數列，並找出它的規律。其中我們特別學過常用的等差數列和等差級數的問題。

首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，前面 n 項的和為 S_n ，

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

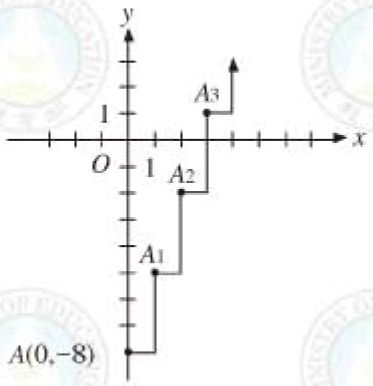
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ 或 } S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

例17 Example

如右圖，在坐標平面上，小明從 $A(0,-8)$ 出發，每天皆向右走 1 單位，向上走 3 單位。第一天由 A 點走向 A_1 點，第二天由 A_1 點走向 A_2 點，⋯。求小明第九天會到達下列哪一點？

(A) (8,16)　(B) (8,19)

(C) (9,16)　(D) (9,19)



解題說明

由題意知，$A_1, A_2, \cdots A_9$ 的 x 坐標與 y 坐標各自形成一等差數列。

A_1 的 x 坐標是數列的首項 1，公差為 1，而 A_9 的 x 坐標是第 9 項，顯然 A_9 的 x 坐標為 9。

A_1 的 y 坐標是數列的首項 -5，公差為 3，A_9 的 y 坐標是第 9 項，所以 A_9 的 y 坐標為 $-5+(9-1)\times 3=19$。

答：(D)。

隨・堂・練・習

從 -41、-16、25、66 四個數中刪掉一個數，剩下的三個數由小而大，依序排列為一等差數列。請問刪掉的是哪一個數？

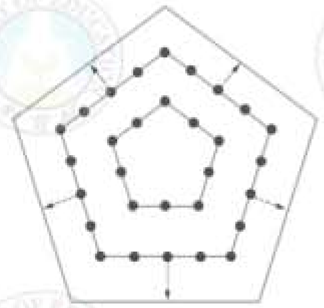
(A) -41　(B) -16　(C) 25　(D) 66

答：

例18 Example

如右圖，有一些學生排出正五邊形的隊形，由內而外共排了 6 圈，且學生人數剛好排完。已知最內圈每邊 3 人，往外每圈每邊增加 2 人（即由內向外算起第 2 圈每邊 5 人，第 3 圈每邊 7 人，⋯）。請問此隊形的學生共有多少人？

(A) 210　(B) 240　(C) 285　(D) 630



解題說明

因為每一圈的人數比前一內圈的人數增加 $2\times 5=10$ 人，所以這是等差數列，其中首項 $=10$，公差 $=10$，要求的是前 6 項的總和：

$$S_6=10\cdot 6+\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 10=210$$

答：(A)。

隨・堂・練・習

求等差級數 $4+7+10+\cdots+100$ 的和為何？

(A) 1568　(B) 1664　(C) 1716　(D) 1768

答：

2-1 自我評量

1. 求 $(1+\frac{1}{3})\div(\frac{1}{3}-1)\times\frac{3}{8}$ 之值為何？

 (A) $-\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{8}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{16}{3}$

答：

2. 將 25920 分解成 $a^3\times b^4\times c$，而且 a、b、c 三正數中任兩數互質，求 $a+b$。

 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10

答：

3. $\sqrt{258}$ 介於哪兩個整數之間？

 (A) 14,15 (B) 15,16 (C) 16,17 (D) 17,18

答：

4. 下列那一選項中的兩數互質？

 (A) 14、35 (B) 20、21 (C) 22、33 (D) 42、51

答：

5. 若數列 a、b、c 為等差數列，公差為 2，則下列敘述何者錯誤？

 (A) 數列 $a+5$、$b+5$、$c+5$ 也是等差數列

 (B) 數列 $5a$、$5b$、$5c$ 也是等差數列

 (C) 數列 $a-1$、$b-1$、$c-1$ 也是等差數列

 (D) 數列 a^2、b^2、c^2 也是等差數列

答：

2-2 代數

乘法公式與多項式

代數，顧名思義，就是以符號來代表數的學問。我們學習了很多數學問題後，久了就會發現，除了使用的數字不同外，感覺上好像都在做類似的問題。最能看出這種相似性的，就是使用符號來代表數。當各位同學習慣後，一定會發現以符號來記錄與溝通，比用口語敘述要清楚多了。

有了符號代表數後，我們會愈來愈感受到某些運算規則的重要性，例如交換律、結合律、分配律，其中分配律更是乘法公式的基礎，由此我們得到「和平方」、「差平方」、「平方差」三個公式，即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

計算時，我們要學習先觀察，然後再利用這些運算規則來簡化計算的過程，使得計算能夠更快，又不會錯誤。

例 1 Example

阿裕與小譚同時進入職棒隊，兩人年薪相同。小譚第一年表現良好，第二年加薪 8 %，後來因受傷表現欠佳，第三年減薪 8 %；阿裕表現平平，年薪一直不變。請問第三年的年薪誰比較多？

(A) 阿裕較多 (B) 小譚較多

(C) 兩人一樣多 (D) 無法判斷

解題說明

設原來的年薪為 a 元，則

小譚第三年年薪 $= a\times(1+8\%)(1-8\%)$

$$= \left(1-\left(\frac{8}{100}\right)^2\right)a < a$$

答：(A)。

或許有些同學的做法是先算出 $(1+8\%)(1-8\%)=\frac{108}{100}\times\frac{92}{100}=\frac{9936}{10000}$，再給答案。但注意到，上面的解題說明根本沒有將 $(1+8\%)(1-8\%)$ 的值真的算出來，就得到答案。這樣的做法，不是更好嗎？這是同學們該學習的方向。

理解這些計算規則，不僅能讓我們更懂得如何計算，使得做數學更有趣。另外，我們還能利用這些規則做更深的數學，如解方程式等等。

例 2 Example

若 $\frac{3x-2y}{6}+\frac{2x-4y}{3}-\frac{x-2y}{2}=10^5$，求 $x-y$ 的值。

(A) 0　(B) 1　(C) 10^5　(D) 1.5×10^5

解題說明

先從化簡方程式左邊的式子做起：

$$\frac{3x-2y}{6}+\frac{2x-4y}{3}-\frac{x-2y}{2}=\frac{3x-2y+2(2x-4y)-3(x-2y)}{6}$$

$$=\frac{4x-4y}{6}=\frac{2}{3}(x-y)$$

所以 $\frac{2}{3}(x-y)=10^5$，得 $x-y=\frac{3}{2}\times10^5=1.5\times10^5$。

答：(D)。

隨・堂・練・習

化簡 $\left(\frac{5}{3}x-\frac{25}{6}y\right)-\left(\frac{20}{3}x-\frac{11}{12}y\right)$ 之後，可得下列哪一個結果？

(A) $-5x-\frac{13}{4}y$　(B) $-60x-39y$

(C) $-70x-14y$　(D) $-\frac{25}{3}x-\frac{61}{12}y$

答：

例 3 Example

計算 $\frac{1}{389}+\frac{390\times388}{389}-379$ 的值。

(A) 1　(B) 10　(C) $\frac{1}{389}$　(D) $\frac{12}{389}$

解題說明

觀察 $\frac{390\times388}{389}=\frac{(389+1)(389-1)}{389}$

$$=\frac{(389)^2-1}{389}$$

$$=389-\frac{1}{389}，$$

所以 $\frac{1}{389}+\frac{390\times388}{389}-379=389-379=10$。

答：(B)。

隨・堂・練・習

求 $2001\times2002-1999\times2004$ 的值。

(A) 6　(B) 16　(C) 26　(D) 36

答：

我們甚至可以推廣分配律的想法，如下面的例子所示。

例 4 Example

運用分配律，計算 $(a+b)^3$。

解題說明

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\\&=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)\\&=a^2\cdot(a+b)+2ab\cdot(a+b)+b^2\cdot(a+b)\\&=a^2\cdot a+a^2\cdot b+2ab\cdot a+2ab\cdot b+b^2\cdot a+b^2\cdot b\\&=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\&=a^3+(1+2)a^2b+(2+1)ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

隨·堂·練·習

計算 $(b+1)(b^2-b+1)$。

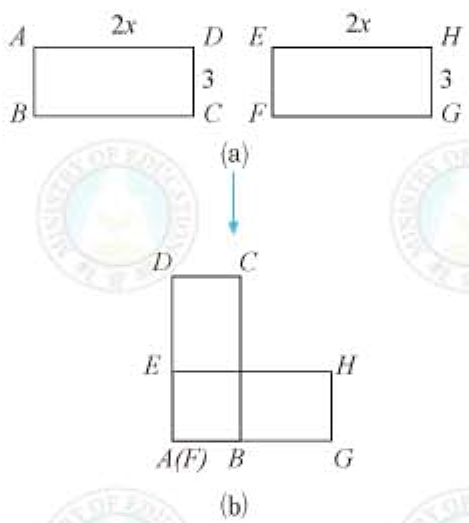
有了符號代表數，我們更進一步模仿數的十位進制，因而有多項式的概念。例如，368 用十進位可表示成 $3\times10^2+6\times10+8$。若將 10 用 x 來代表，就有二次多項式 $3x^2+6x+8$，其中 $3x^2$ 是二次項，係數為 3，$6x$ 是一次項，係數為 6，8 為常數。

多項式有許多概念和數類似，不但都有加減乘除四則計算，而且都能用直式做計算，而多項式的因式、倍式、因式分解就相等於數的因數、倍數和因數分解。

(1) 被除式＝除式×商式＋餘式。

(2) 可以用乘法公式和十字交乘法來做因式分解。

例 5 Example

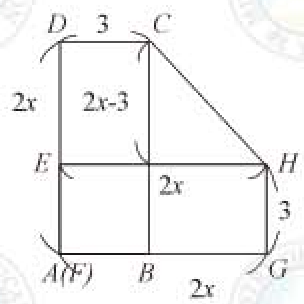


如右圖(a)，四邊形 $ABCD$、$EFGH$ 均是長為 $2x$、寬為 3 的矩形。今將兩個矩形作部分疊合，使得 E 點在 $\overline{AD}$ 上，B 點在 $\overline{FG}$ 上，如圖(b)所示。若連接 C、H，則五邊形 $AGHCD$ 的面積為何？

(A) $4x^2-\dfrac{9}{2}$　(B) $4x^2+\dfrac{9}{2}$

(C) $2x^2+6x-\dfrac{9}{2}$　(D) $2x^2+6x+\dfrac{9}{2}$

解題說明



由右圖知，$CDEH$ 為一梯形，因此

梯形 $CDEH$ 面積 $=\dfrac{(3+2x)(2x-3)}{2}=\dfrac{4x^2-9}{2}$

$=2x^2-\dfrac{9}{2}$

矩形 $AGHE$ 面積 $=2x\cdot3=6x$

所以五邊形 $AGHCD$ 面積 $=2x^2+6x-\dfrac{9}{2}$。

答：(C)。

隨．堂．練．習

若多項式 A 除以 $2x+1$ 得商式為 $3x-4$，餘式為 5，則 $A=$？

(A)$6x^2-5x-4$ (B)$6x^2-5x-9$

(C)$6x^2+5x+1$ (D)$6x^2-5x+1$

答：

例 6 Example

下列哪一個選項為〔$(2x^2+x-3)-(-x^2-3x+4)$〕$\div(x-1)$的商式？

(A)$3x-7$ (B)$3x+7$ (C)$x-1$ (D)$x+1$

解題說明

因 $2x^2+x-3-(-x^2-3x+4)=2x^2+x-3+x^2+3x-4$

$=3x^2+4x-7$，

由十字交乘法，得

$3x^2+4x-7=(3x+7)(x-1)$

$$\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 1 & -1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-3+7=4} \end{array}$$

因此原式除以$(x-1)$的商式為 $3x+7$。

當然這個問題也可以用除法直式來計算。

答：(B)。

隨．堂．練．習

已知有一多項式除以 $x-2$ 得商式為 $2x-3$，餘式為 3，若此多項式除以 $2x+3$，得商式為何？

(A)$x+5$ (B)$x-5$ (C)$x+2$ (D)$x-2$

答：

例 7 Example

若 $481x^2+2x-3$ 可因式分解成$(13x+a)(bx+c)$，其中 a、b、c 均為整數，則下列敘述何者正確？

(A)$a=1$ (B)$b=468$ (C)$c=-3$ (D)$a+b+c=39$

解題說明

由題意，知 13 是 481 的因數，計算得 $481=13\times37$。

由十字交乘法，得

$481x^2+2x-3=(13x-1)(37x+3)$

$$\begin{array}{cc} 13 & -1 \\ 37 & 3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{39-37=2} \end{array}$$

因此 $a=-1$，$b=37$，$c=3$。

答：(D)。

隨．堂．練．習

已知 $3x^2-x-10=(3x+5)(x-2)$，請問下列哪一個敘述是正確的？

(A)$3x^2-x-10$ 為 $x-2$ 的倍式 (B)$x-2$ 為 $3x^2-x-10$ 的倍式

(C)$3x+5$ 為 $3x^2-x-10$ 的倍式 (D)$3x^2-x-10$ 為 $3x+5$ 的因式

答：

數量關係與列式

當我們要解決數學問題時，有兩個重要的步驟，

(1) 發掘問題中各個項目應該遵守的數量關係，並列成方程式。

(2) 解這個方程式，再檢查解是否合於題意。

雖然在小學我們已經開始學習這樣的解題步驟，但是在國中學了以符號代表數的想法後，更是讓我們的解題百寶箱如虎添翼。

例如，如果小明和爸爸的年齡相差 32 歲，問什麼時候爸爸的年齡是小明的 2 倍？在這裡，最基本的數量關係是爸爸和小明年齡差 32 歲是固定的，利用這一點，就可以解決這個問題。

在小學時，我們可能畫成下面的線段圖（圖 2-4）：

圖 2-4

由圖 2-4 很容易知道，當爸爸年紀是小明的 2 倍時，小明的年齡正好等於兩人年齡的差，也就是 32 歲，因此當時爸爸 64 歲。

到了國中，我們會先假設當小明 x 歲時，爸爸的年齡是小明的 2 倍，也就是 $2x$。但因為小明和爸爸的年齡相差 32 歲，所以此時爸爸的年齡是 $x+32$ 歲。因此可列成方程式：

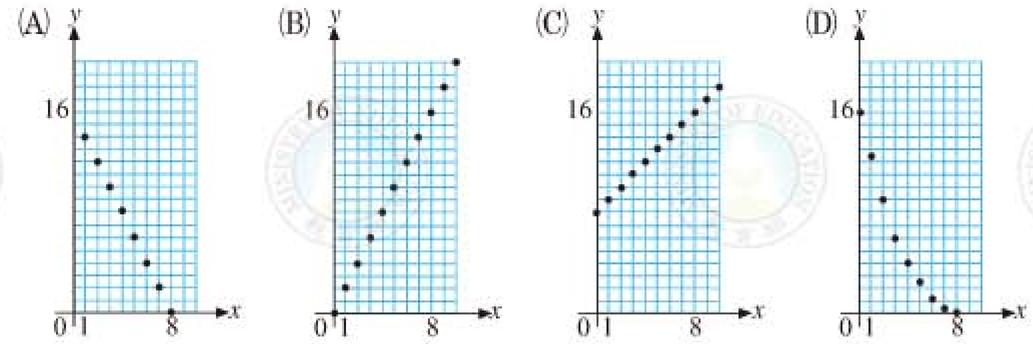
$$x+32=2x$$

再利用等量公理解題，得 $x=32$。

這兩種方法各有各的好處，都值得學習。但是隨著數學問題的敘述越來越複雜，我們會發現，利用符號來代表未知數的想法，越來越重要。

隨．堂．練．習

將兩兄妹的年齡分別以 y、x 表示。若在 2004 年時，兄妹兩人的年齡分別為 16 歲、 8 歲，則下列哪一個圖形為兩人年齡的關係圖？



答：

例 8 Example

甲、乙兩店賣豆漿，每杯售價均相同。已知甲店的促銷方式是：每買 2 杯，第 1 杯原價，第 2 杯半價。乙店的促銷方式是：每買 3 杯，第 1 、 2 杯原價，第 3 杯免費。例如，分別在甲、乙兩店購買豆漿 5 杯，均需 4 杯的價錢。若東東想買豆漿 24 杯，則下列哪一個方式花的錢最少？

(A) 在甲店買 24 杯

(B) 在乙店買 24 杯

(C) 在甲店買 12 杯，在乙店買 12 杯

(D) 在甲店買 6 杯，在乙店買 18 杯

解題說明

首先注意到 24 是 2 、 3 的公倍數。因此較省錢的方式一定是在甲店買 2 的倍數杯，在乙店買 3 的倍數杯。如此，設一杯的價錢為 a 元，若在甲店買 2 的倍數杯，則每杯的價錢為

$$(a+\frac{a}{2})\div 2=\frac{3}{4}a$$

若在乙店買了 3 的倍數杯，則促銷每杯價格為

$$2a\div 3=\frac{2}{3}a$$

因為 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$，所以 24 杯均在乙店買，花的錢最少。

答：(B)。

隨．堂．練．習

已知花生糖 1 顆 2 元，梅子糖 2 顆 1 元。若小詩買花生糖及梅子糖共 60 顆，花了 60 元，則此兩種糖果的數量關係為何？

(A) 花生糖和梅子糖一樣多　(B) 花生糖比梅子糖多 30 顆

(C) 花生糖比梅子糖少 20 顆　(D) 花生糖比梅子糖少 30 顆

答：

比例關係

在國中這階段，我們學過最重要的數量關係之一，是由比例關係得到的數量關係。

例 9 Example

兩個罐子裝有相同重量的酒精溶液，其中水與酒精的重量比分別為 3 ： 1 和 1 ： 1，若將這兩罐溶液全倒入一個較大的容器中且沒有溢出，則後來所得的混合液中，水與酒精的重量比為何？

(A)2 ： 1　(B)3 ： 2　(C)4 ： 1　(D)5 ： 3

解題說明

設每罐有重量 x 的酒精溶液，其中一罐水與酒精重量比為 3 ： 1，則水重為 $\frac{3}{4}x$，酒精重為 $\frac{1}{4}x$。另一罐水重為 $\frac{1}{2}x$，酒精重為 $\frac{1}{2}x$。

相加後水重 $=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{4}x$

相加後酒精重 $=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{4}x$

所以　水重：酒精重 $=\frac{5}{4}x:\frac{3}{4}x=5:3$

答：(D)。

隨．堂．練．習

下列四個敘述甲與乙關係的選項中，哪一個與其他三個不同？

(A) 甲是乙的 $\frac{b}{a}$ 倍　(B) 甲：乙 $=a:b$

(C) 甲的 a 倍等於乙的 b 倍　(D) 甲：乙的比值為 $\frac{b}{a}$

答：

例10 Example

已知甲、乙、丙三人的錢數比為 $3:5:6$。若丙分別給甲、乙兩人各 30 元後，甲、乙、丙的錢數比變為 $7:11:10$，則此三人共有多少元？

(A)420　(B)630　(C)840　(D)1260

解題說明

可設甲的錢為 $3a$ 元，乙為 $5a$ 元，丙為 $6a$ 元。由題意知

$$(3a+30):(5a+30):(6a-60)=7:11:10$$

由 $(3a+30):(5a+30)=7:11$，得

$$11(3a+30)=7(5a+30)$$

外項乘積等於內項乘積

化簡得　$2a=330-210=120$

解得　$a=60$

所以 $3a+30=210$，$5a+30=330$，$6a-60=300$。

代入驗算知 $210:330:300=7:11:10$，因此 $a=60$ 的確是本問題的解，

所以三人共有 $(3+5+6)\times 60=840$ 元。

答：(C)。

隨．堂．練．習

小格想要煮一鍋 30 人份的玉米湯，他依據右圖的食譜內容到市場選購材料。請問下列哪一種材料的數量買得太少？

(A) 玉米醬（100g／罐）11 罐

(B) 雞蛋 8 個

(C) 絞肉 45 兩

(D) 奶油 75 克

答：

例11 Example

若 $2a:3b:4c=9:12:14$，求 $a:b:c$。

解題說明

令 $2a=9r$，$3b=12r$，$4c=14r$，得

$$a=\frac{9}{2}r，b=4r，c=\frac{14}{4}r=\frac{7}{2}r$$

因此 $a:b:c=\frac{9}{2}r:4r:\frac{7}{2}r=9:8:7$。

隨．堂．練．習

小宏家中有一座老舊長方體水塔，其長為 3 公尺，寬為 2.5 公尺、高為 1.5 公尺，現在想依照原有長、寬、高的比例擴建一座新水塔，若新水塔的長比原來的多了 0.6 公尺，則下列關於新水塔的敘述哪一個是正確的？

(A) 高為 2.4 公尺　(B) 高為 2 公尺

(C) 寬為 3.1 公尺　(D) 寬為 3 公尺

答：

從比例關係，我們發展了正比和反比概念。正比的概念，從國小就開始學習，因此大家較熟悉。至於反比的例子，可以下面的公式為例：

$$距離=速度\times時間$$

$$三角形面積=\frac{1}{2}\times底\times高$$

在第一個公式中，當距離固定時，速度和時間的乘積是一個定數，因此速度與時間成反比；而第二個公式則表示，當三角形面積固定時，底與高的乘積也是一個定數，因此底與高成反比。關於反比的例子以及相關的解題，還可以參考第二冊的正比與反比一節。

例12 Example

玉玲、美華、淑慧跑步的速度是 8 ： 7 ： 10 ，若跑同樣的距離，三人所用的時間連比是多少？

解題說明

由於距離固定，所以速度和時間成反比，因此

玉玲所用的時間：美華所用的時間 $= \frac{1}{8} : \frac{1}{7}$

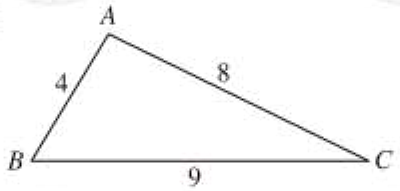
美華所用的時間：淑慧所用的時間 $= \frac{1}{7} : \frac{1}{10}$

亦即玉玲、美華、淑慧所用的時間連比 $= \frac{1}{8} : \frac{1}{7} : \frac{1}{10}$

$= 35 : 40 : 28$

隨・堂・練・習

如右圖，△ ABC 其三邊分別為 4 、 8 、 9 ，求其三邊對應高的連比。



函數與圖形

正比和反比是一種我們稱為函數關係的特別例子。只要兩組量 x 和 y 之間，知道 x 的值可以決定 y 的值，我們就說 y 是 x 的函數。至於 y 是 x 的哪一種函數，通常可用 x 的代數式來表示，例如若函數 $y = 2 - x^2$ ，表示當 $x = 1$ 時， $y = 2 - 1^2 = 1$ ；當 $x = 0$ 時， $y = 2 - 0^2 = 2$ 等。

隨・堂・練・習

下表為某公路離甲地不同里程處的速限。

里程 a（公里）	$a \leq 30$	$30 < a \leq 50$	$50 < a \leq 110$	$110 < a \leq 330$
速限 b（公里/小時）	70	90	100	110

根據此表，下列敘述何者正確。

(A)當 $a = 30$ 時，速限為 90 公里/小時。 (B)當 $a = 110$ 時，速限為 110 公里/小時。

(C)里程 a 是速限 b 公里/小時的函數。 (D)速限 b 公里/小時是里程 a（公里）的函數。

答：

以正比函數和反比函數為例，它們的函數可以表示為

正比函數： $y = cx$ ，其中 c 是常數。

反比函數： $y = \frac{c}{x}$ ，其中 c 是常數。

由於在一般應用上，很少見到 c 是負數的例子，所以我們在國中大多數只討論 c 是正數的情況。

當 y 是 x 的函數時，我們常用滿足函數關係的數對 (a,b) 代表坐標平面上的點坐標。當 x 用不同的數值代入時，就可以在坐標平面上繪出函數的圖形（圖 2-5 和圖 2-6）。

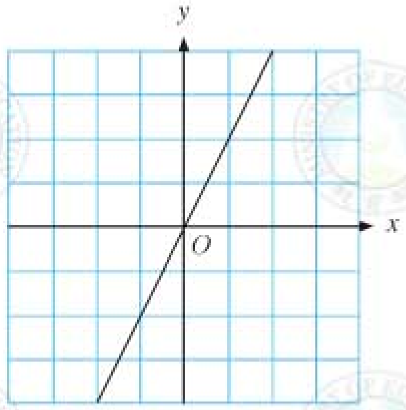


圖 2-5 $y=2x$ 的函數圖形

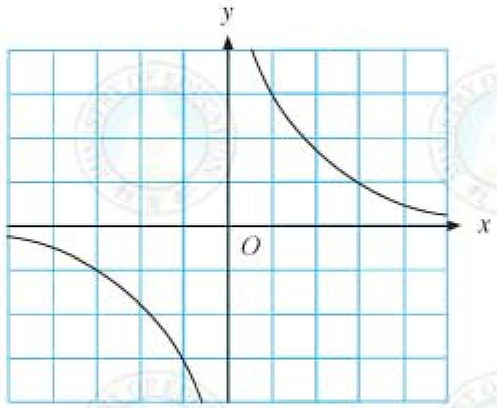


圖 2-6 $y=\frac{3}{x}$的函數圖形

由圖 2-5 知道，正比函數的圖形是通過原點的直線。圖 2-6 裡有二條曲線，右上方是表示當 $x>0$ 時，$y=\frac{3}{x}$的圖形，而左下方是表示當 $x<0$ 時，$y=\frac{3}{x}$的圖形。反比函數圖形在高中數學課程才會討論到。

在常用的情況，也就是 $x>0$ 而且 $c>0$ 時，正比的函數關係是，隨著 x 的變大，y 的值也會跟著變大；而反比的函數關係則是，隨著 x 的值變大，y 的值則變小。

接下來，我們來看其他常用的函數：

（一）常數函數：$y=a$。

這表示不管 x 的值是多少，y 的值都是 a，例如圖 2-7 是 $y=-2$ 的圖形。

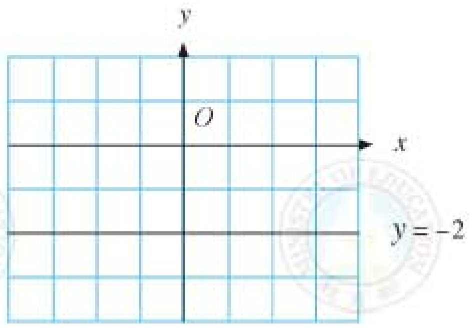


圖 2-7 $y=-2$ 的函數圖形

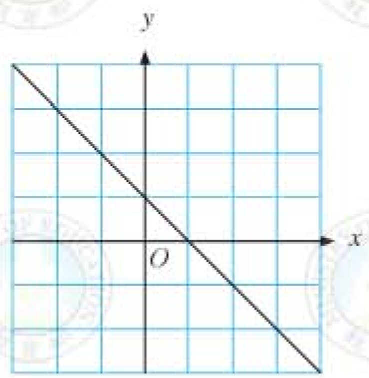


圖 2-8 $y=-x+1$ 的函數圖形

（二）一次函數：$y=ax+b$，其中 a、b 是常數，$a\neq 0$。

一次函數圖形都是一條直線，如上頁圖 2-8。

隨．堂．練．習

設上一頁圖 2-8 是 $y=ax+b$ 的圖形，求 $a+b$。

(A)1 (B) -1 (C)2 (D)0

答：

隨．堂．練．習

在坐標平面上，下列哪一點在方程式 $3x-2y=7$ 的圖形上？

(A) $(-3,-8)$　(B) $(-1,5)$

(C) $(-2,1)$　(D) $(-2,-1)$

答：

一般一次函數都可以想成一種比例關係，例如 $y=2x+1$，可以寫成 $y-1=2x$，即

$$(y-1):x=2:1$$

這個比例關係，也可以用函數圖形解釋如圖 2-9。這正是在第五冊中，藉由泰利斯的故事，談過的相似三角形的關係。我們也曾經利用這個想法，說明為什麼一次函數的圖形是一條直線。

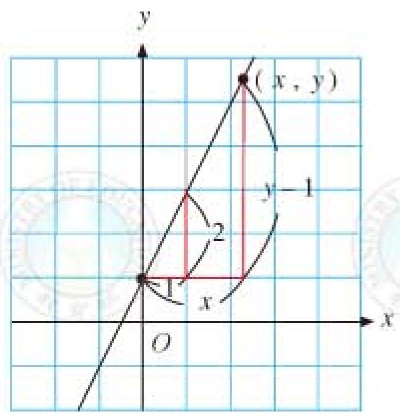
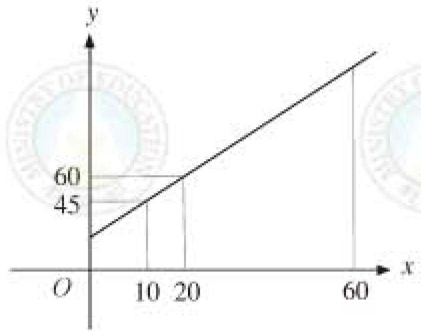


圖 2-9

103

例13 Example

右圖為一次函數 $y = ax + b$ 的圖形，若 $x = 60$ 時，求 y 的值。



解題說明

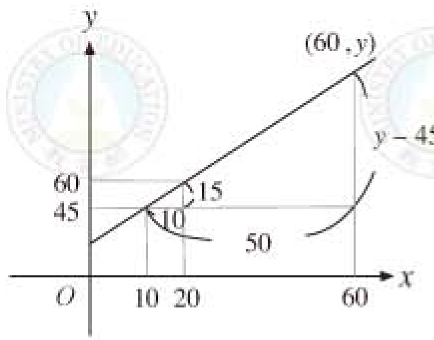
如右圖，在上圖中作垂直、水平線，則有下列比例式：

$50 : 10 = (y - 45) : 15$

因此 $10(y - 45) = 50 \times 15$

化簡得 $y - 45 = 75$

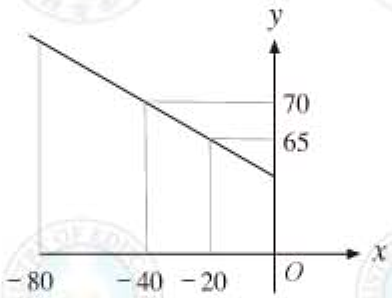
解得 $y = 120$



當然，同學也可以代入 $x = 10$ 和 20，再求出 a 與 b。

隨・堂・練・習

如右圖，此為某一次函數的圖形，求當 $x = -80$ 時所對應的 y 值。

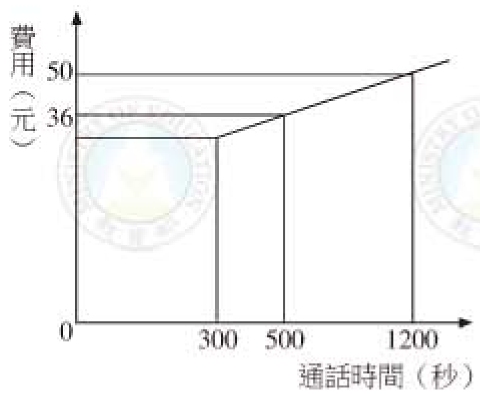


有時函數的圖形可能是一條以上直線合成的，如例 14 所示。

例14 Example

右圖是某電信公司的通話費計算方式：300 秒以內只繳基本費，超過 300 秒之後的費用，與通話時間成線型函數關係，則基本費是多少元？

(A)26　(B)28　(C)30　(D)32



解題說明

設基本費為 a 元，由圖知該線型函數圖形通過 $(300, a)$。由圖知

$(36 - a) : (50 - a)$

$= (500 - 300) : (1200 - 300)$

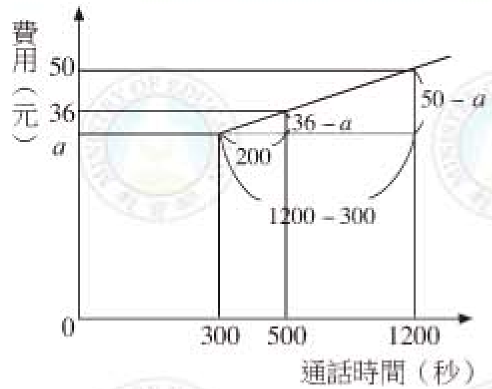
$= 200 : 900 = 2 : 9$

得 $9(36 - a) = 2(50 - a)$

即 $7a = 224$

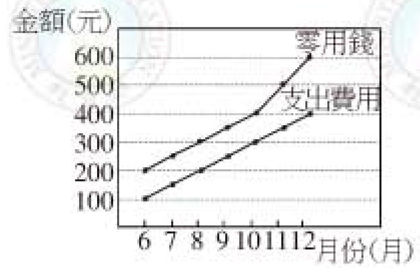
解得 $a = 32$

答：(D)。

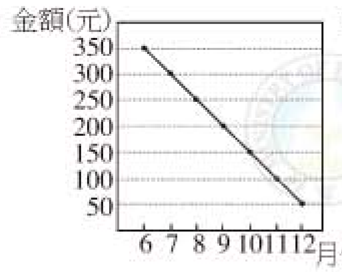


隨・堂・練・習

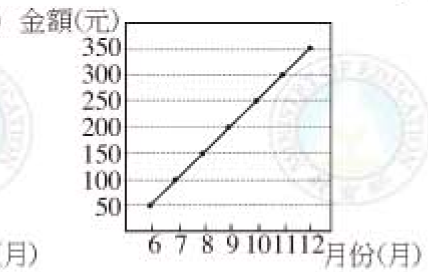
右圖為小華 6~12 月份每月的零用錢與支出費用折線圖。若小華將每月剩餘金額儲存起來，則下列何者可為小華 6~12 月份每月所存金額的折線圖？



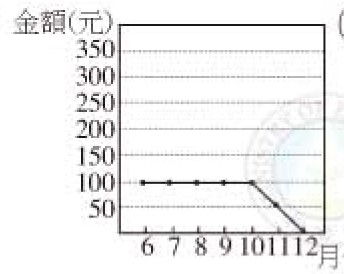
(A)



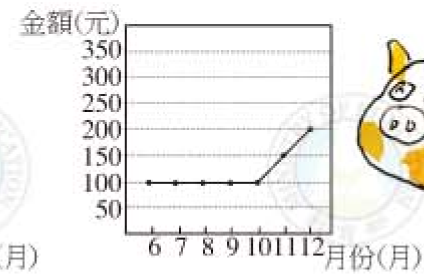
(B)



(C)



(D)



答：

（三）二次函數：$y=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 是常數，$a\neq 0$。

記得繪製二次函數圖形時，和一次函數圖形的情況很不一樣。由於一次函數的圖形是直線，我們只要找出圖形上兩點就可以輕易作圖。但是在繪製二次函數的圖形時，我們需要理解二次函數的一些性質，例如拋物線開口朝上還是朝下（圖 2-10）、圖形的對稱軸、還有最高點或最低點的位置，其中最高點或最低點的 y 坐標，稱為此函數的最大值或最小值。

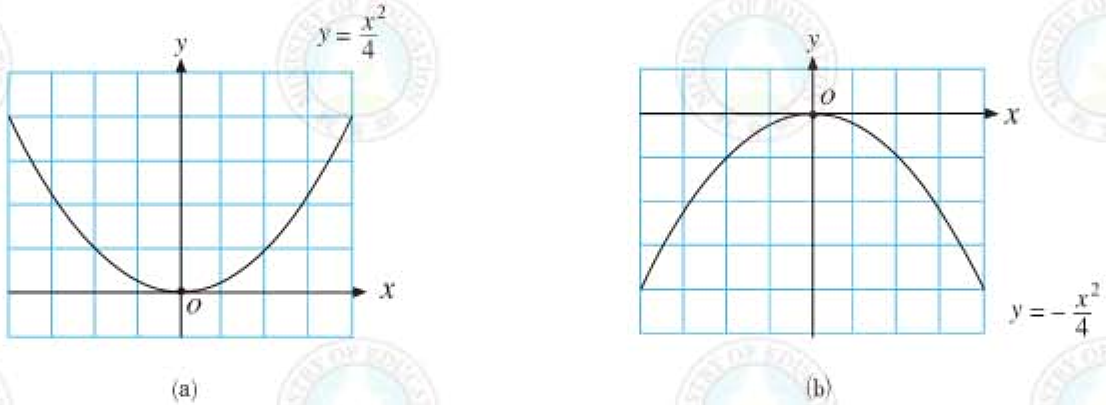


圖 2-10

一般來講，二次函數均可用配方法化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，此時圖形的對稱軸為鉛直線 $x=h$。

> 若 $a>0$，則圖形開口向上，並且最低點是 (h,k)，
> 此時函數的最小值是 k。
> 若 $a<0$，則圖形開口向下，並且最高點是 (h,k)，
> 此時函數的最大值是 k。

例 15 Example

在坐標平面上，有一個二次函數圖形交 x 軸於 $(-4,0)$、$(2,0)$ 兩點，今將此二次函數圖形向右移動 h 單位，再向下移動幾個單位後，發現新的二次函數圖形與 x 軸相交於 $(-1,0)$、$(3,0)$ 兩點，則 h 的值為何？

(A)0　(B)1　(C)2　(D)4

解題說明

由於圖形交 x 軸於 $(-4,0)$、$(2,0)$，所以對稱軸是過點 $(-4,0)$ 與點 $(2,0)$ 中點的鉛直線 $x=\frac{-4+2}{2}=-1$。圖形向右移動 h 單位後，對稱軸變為 $x=-1+h$。但因新的二次函數圖形與 x 軸相交於 $(-1,0)$、$(3,0)$，所以新圖形的對稱軸為 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，因此 $-1+h=1$，得 $h=2$。

答：(C)。

隨．堂．練．習

下列哪一個二次函數，其圖形的對稱軸為 $x=2$？

(A) $y=(x+2)^2+4$　(B) $y=-(x-2)^2+1$

(C) $y=x^2-2$　(D) $y=x^2-2x+2$

答：

例 16 Example

若用配方法，將二次函數 $y=-2x^2-4x+1$ 寫成 $y=-2(x-h)^2+k$ 的形式，求 $h+k$。

(A)2　(B)4　(C) -4　(D) -2

解題說明

$$\begin{aligned}由\ -2x^2-4x&=-2(x^2+2x)\\&=-2(x^2+2x+1-1)\\&=-2((x+1)^2-1)\\&=-2(x+1)^2+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}得\quad y&=-2x^2-4x+1\\&=-2(x+1)^2+2+1\\&=-2(x+1)^2+3\end{aligned}$$

所以 $h=-1$，$k=3$，因此 $h+k=2$。

答：(A)。

隨・堂・練・習

下列哪一個二次函數，其圖形和 $y=4x^2-8x$ 的圖形有相同的頂點？

(A) $y=2x^2-4x$　(B) $y=-2(x+1)^2$

(C) $y=2(x+1)^2+4$　(D) $y=-2(x-1)^2-4$

答：

由上述這些例子，可以發現一件事：只要在「$y=$」的等號右邊指定某個 x 的代數式，就可以得到一種特別的函數關係。由於函數很常用，所以若能用符號表示敘述會更簡潔。數學上經常用 $f(x)$、$g(x)$…等表示等號右邊 x 的代數式，並用 $y=f(x)$，表示由 $f(x)$ 所決定的函數關係。例如我們說函數 $y=f(x)$，其中 $f(x)=3x+5$，就是表示一次函數 $y=3x+5$。

如上所述，$f(x)$ 經常表示一個含有 x 的代數式，但是 $f(x)$ 的值是多少，就要看 x 用什麼代入。例如若 $f(x)=2x^2$，將 $x=1$ 代入 $2x^2$ 得到 2，這時 $f(1)$ 就是 2。也就是說，若 $f(x)=2x^2$，則 $f(1)=2\cdot 1^2=2$。同樣的，$f(2)=2\cdot 2^2=8$；$f(3)=2\cdot 3^2=18$。

利用 $f(x)$ 來代表 x^2-1、$x+1$、x^3 等等代數式，就好像在國一時，我們學習用 x 來表示 -3、$\frac{2}{3}$、2.457 一樣，只是感覺起來比較抽象。

例17 Example

若 $f(x)=-4x^2+5$，求 $f(0)$、$f(\frac{1}{2})$、$f(-0.25)$ 的值。

解題說明

本題只要將 $x=0$、$\frac{1}{2}$、-0.25 分別代入代數式 $f(x)=-4x^2+5$ 即可。

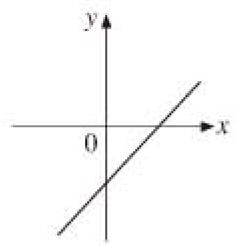
所以
$$f(0)=-4\cdot 0^2+5=5$$
$$f(\tfrac{1}{2})=-4(\tfrac{1}{2})^2+5=-4\cdot\tfrac{1}{4}+5=4$$
$$f(-0.25)=-4(-0.25)^2+5=-4\cdot(-\tfrac{1}{4})^2+5=4\tfrac{3}{4}$$

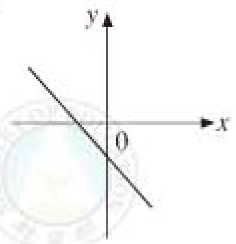
隨・堂・練・習

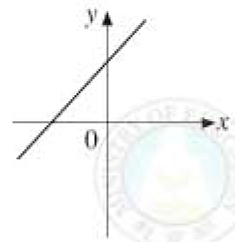
若 $g(x)=-x+8$，求 $g(-1)$、$g(1)$、$g(8)$、$g(-8)$ 的值。

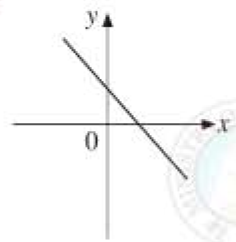
例18 Example

若一次函數 $f(x)=ax-3$，其中 $a>0$，則下列哪一個選項可能是此函數圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)


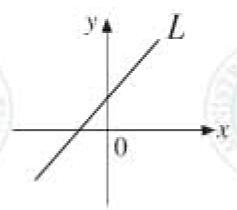
解題說明

由於 $a>0$，這表示 x 越大時 y 越大，所以 $y=ax-3$ 的圖形是從坐標平面的左下方到右上方的直線，因此只有 (A) 和 (C) 才有可能是答案。另外，將 $x=0$ 代入，得 $y=-3$。因此圖形會通過 $(0,-3)$ 點，所以答案為 (A)。

答：(A)。

隨・堂・練・習

如右圖，直線 L 為一次函數 $y=f(x)$ 的圖形，其中 $f(x)=ax+b$，下列那一個選項是正確的？



(A) $ab>0$　(B) $ab=0$

(C) $ab<0$　(D) $a+b<0$

答：

就如一次函數或二次函數一樣，函數 $y=f(x)$ 的圖形也能在坐標平面描繪出來。例如，若 $x=1$ 代入，得 $f(1)=2$，我們就會將 $(1,2)$ 描在坐標平面上，表示這是 $y=f(x)$ 函數圖形上的一點。當 x 用不同的值代入，就會在平面上描繪出函數 $y=f(x)$ 的圖形。相反的，我們也能從函數的圖形，找出函數的值，例如假設圖 2-11 為某函數 $y=f(x)$ 的圖形：

由圖形，可以看到 $y=f(x)$ 的圖形通過 $(-4,3)$，這表示 $f(-4)=3$；同樣的，圖形通過 $(0,1)$、$(2,2)$，表示 $f(0)=1$，$f(2)=2$。

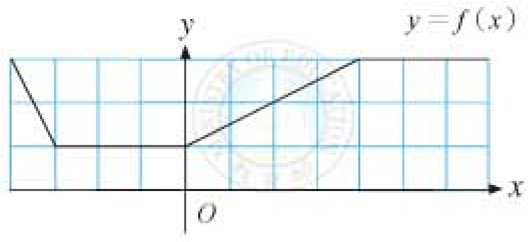


圖 2-11

例 19 Example

在坐標平面上，函數 $y=f(x)$ 的圖形經過 $(-1,4)$、$(0,3)$、$(1,0)$、$(2,1)$、$(3,2)$、$(4,7)$ 六個點，求 $f(-1)+f(1)+f(2)+f(4)$ 的值。

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 12

解題說明

由上面的說明知道，$f(-1)=4$、$f(1)=0$、$f(2)=1$、$f(4)=7$。所以

$$f(-1)+f(1)+f(2)+f(4)=4+0+1+7=12$$

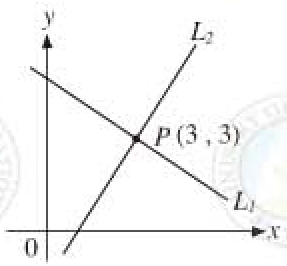
答：(D)。

隨・堂・練・習

如右圖，在坐標平面上，L_1 為 $y=f(x)$ 的一次函數圖形，L_2 為 $y=g(x)$ 的一次函數圖形，L_1、L_2 相交於 $P(3,3)$。若 $a>3$，則下列敘述何者正確？

(A) $f(a)-g(a)=a$　(B) $f(a)-g(a)=3$

(C) $f(a)=g(a)$　(D) $f(a)<g(a)$



答：

綜合上面所述，函數通常可用 $y=f(x)$ 的符號來表示，其中 $f(x)$ 表示一個給定的代數式。由 $y=f(x)$ 的符號意義，可以理解到當 x 所代入的值不同時，則 y 的值也會變化。在數學上，x 稱為函數 $y=f(x)$ 的自變數，y 稱為函數 $y=f(x)$ 的應變數（圖 2-12）。

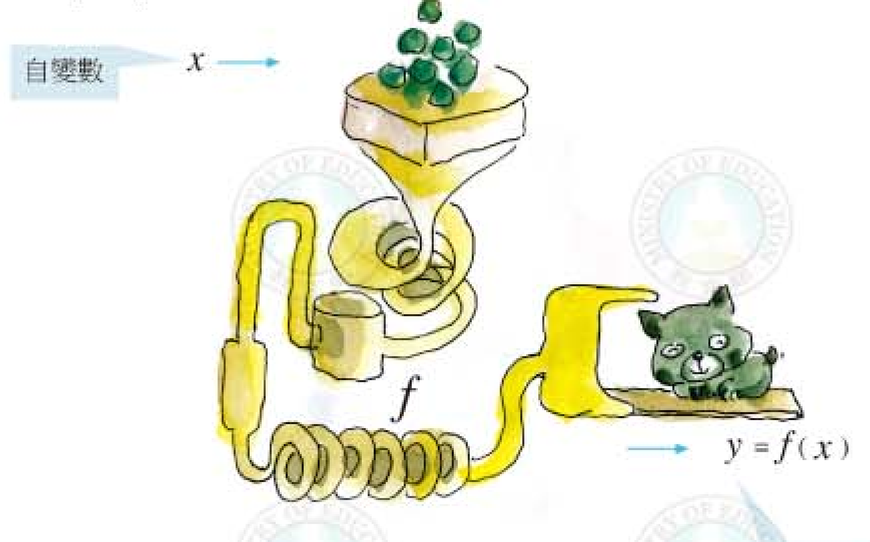
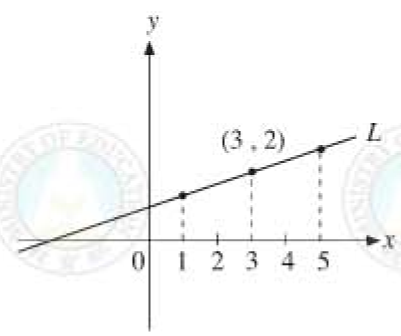


圖 2-12

例 20 Example

如右圖，L 是一次函數 $y=f(x)$ 的圖形，今將函數 f 的自變數與應變數間的對應關係列在下表。請問對於下列有關 a、b、c、d 大小的判斷中，何者錯誤？



自變數 x	......	0	1	3	5	......
應變數 $f(x)$	......	a	b	c	d	......

(A) $a=0$　(B) $b>0$　(C) $c=2$　(D) $d>2$

解題說明

由上表知 $f(0)=a$，另外由上圖知直線 L 和 y 軸的交點是在原點的上方，所以 $f(0)>0$，即 $a>0$。

答：(A)。

隨·堂·練·習

已知線型函數 $f(x)=ax+b$，其對應關係如右表。求 $A+B$。

x	…	1	2	3	4	…
$f(x)$	…	3	A	3	B	…

(A)4　(B)6　(C)8　(D)12

答：

方程式

我們提過在用代數方法解決生活或數學問題時，通常分成兩個步驟：

(一)觀察問題中的數量關係並列式。

(二)解方程式，並檢驗解是否滿足題意。

底下先看列式的例子：

例21 Example

已知某捐血中心四月的捐血人數比三月減少 30 人，其中男性人數四月比三月增加 $\frac{1}{5}$，女性人數四月比三月減少 $\frac{1}{7}$。若三月的捐血人數為 2040 人，且男性有 x 人，則下列哪一式子可表示三、四月份捐血人數的差異？

(A) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}(2040-x)=-30$　(B) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}(2040-x)=30$

(C) $\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}(2040-x)=-30$　(D) $\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}(2040-x)=30$

解題說明

由題意知，三月女性捐血人數為 $(2040-x)$ 人。在四月中男性捐血人數增加 $\frac{1}{5}x$，而女性減少 $\frac{1}{7}(2040-x)$，因此總共增加人數為

$$\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}(2040-x)$$

由題意知總共減少 30 人，也就是增加 (-30) 人，得

$$\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}(2040-x)=-30$$

答：(A)。

隨·堂·練·習

安安與家人到游泳池游泳，買 2 張全票與 3 張學生票共付了 155 元。設學生票每張 x 元，全票每張比學生票貴 15 元，則下列哪一個式子可用來表示題目中的數量關係？

(A) $155-3x=2(x+15)$　(B) $155-3x=2(x-15)$

(C) $155-3(x-15)=2x$　(D) $155-3(x+15)=2x$

答：

例22 Example

哥哥與弟弟各有數張紀念卡。已知弟弟給哥哥 10 張後，哥哥的張數就是弟弟的 2 倍；若哥哥給弟弟 10 張，兩人的張數就一樣多。設哥哥的張數為 x 張，弟弟的張數為 y 張，依題意下列何者正確？

(A) $\begin{cases}2(y-10)=x\\ y=x-10\end{cases}$　(B) $\begin{cases}y-10=2x\\ y=x-10\end{cases}$

(C) $\begin{cases}y-10=2x\\ x-10=y+10\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2(y-10)=x+10\\ x-10=y+10\end{cases}$

解題說明

由題意知，若弟弟給哥哥 10 張後，則弟弟剩下 $(y-10)$ 張，而哥哥的張數變成 $x+10$，得 $2(y-10)=x+10$。

若哥哥給弟弟 10 張後，則哥哥剩下 $(x-10)$ 張，而弟弟的張數變成 $y+10$，得 $x-10=y+10$。

答：(D)。

隨．堂．練．習

某人帶了 400 元到市場買水果，如果他買 3 個蘋果、5 個水梨，則剩下 30 元；如果他買 5 個蘋果、4 個水梨，則剛好把錢用完。設蘋果每個 x 元，水梨每個 y 元，則依題意可列出下列哪一組聯立方程式？

(A) $\begin{cases} 5x+3y=430 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 3x+5y=430 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 5x+3y=370 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} 3x+5y=370 \\ 5x+4y=400 \end{cases}$

答：

例 23 Example

創創家有 10 人，守守家有 8 人，兩家人一同看表演，該場表演的票價如右圖所示。若創創家的總票價比守守家少 60 元，則創創家的半票比守守家的半票多幾張？

(A)0　(B)2　(C)4　(D)6

解題說明

解法（一）

設創創家的半票有 x 張，守守家的半票有 y 張，

則創創家所花的錢為 $60(10-x)+30x$，

守守家所花的錢為 $60(8-y)+30y$，

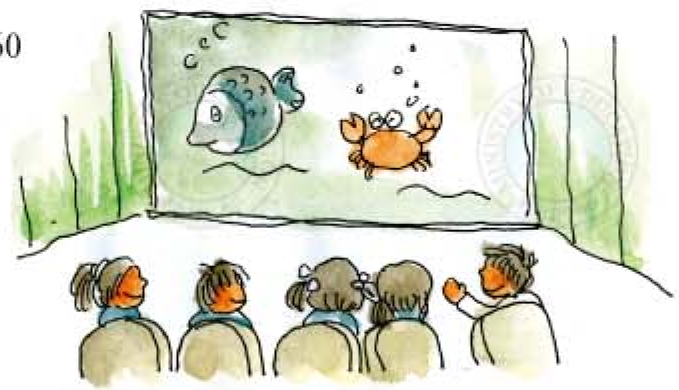
由題意知　$(60(10-x)+30x)+60$

$=60(8-y)+30y$，

合併化簡得 $660-30x=480-30y$

因此 $30(x-y)=660-480=180$，

得 $x-y=6$。



解法（二）

設創創家比守守家多買 x 張半票。所以若先扣掉創創家買的 2 張半票，則創創家和守守家同樣都買 8 張票，但是所花的錢卻比守守家所花的錢少 $60+30\times 2=120$（元）。這個價差是由於創創家比守守家多買了 $(x-2)$ 張半票（或者說，守守家比創創家多買了 $(x-2)$ 張全票），但因為全票和半票一張差 30 元，所以 $(x-2)\cdot 30=120$。

解得 $x=6$

答：(D)。

隨．堂．練．習

小華和小明到同一個早餐店買饅頭和米漿。已知小華買了 5 個饅頭和 5 杯米漿；小明買了 7 個饅頭和 3 杯米漿，且小華花的錢比小明少 10 元。關於饅頭與米漿的價錢，下列敘述何者正確？

(A)2 個饅頭比 2 杯米漿多 10 元　(B)2 個饅頭比 2 杯米漿少 10 元

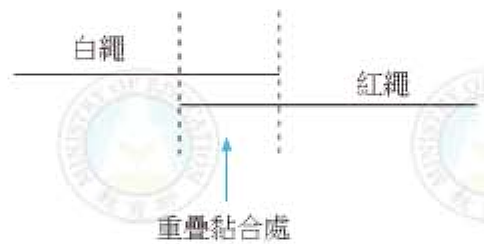
(C)12 個饅頭比 8 杯米漿多 10 元　(D)12 個饅頭比 8 杯米漿少 10 元

答：

有些問題可以用一元一次方程式或二元一次聯立方程式兩種方法來列式。一般來講，用二元一次聯立方程式比較容易列式，但計算需要多花些時間。下面的例 24 就是這樣的例子。

例 24 Example

如右圖，將一白繩的 $\frac{3}{8}$ 與一紅繩的 $\frac{1}{3}$ 重疊並以膠帶黏合，形成一條長為 238 公分的繩子。求未黏合前，兩繩長度相差多少公分？



(A)14　(B)17　(C)28　(D)34

解題說明

解法（一）

設白繩為 x 公分，紅繩為 y 公分，

因為重疊處為白繩的 $\frac{3}{8}$，也是紅繩的 $\frac{1}{3}$，所以 $\frac{3}{8}x = \frac{1}{3}y$，

黏合後總長度為 $x + \frac{2}{3}y = 238$，將上面兩式化簡得二元一次方程組：

$$\begin{cases} 9x - 8y = 0 \dots\dots\dots\dots (1) \\ 3x + 2y = 714 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \times 4$ 得　$21x = 714 \times 4$

即　$x = 34 \times 4$

由 (1) 得　$y = \frac{9}{8}x = \frac{9}{8} \times 34 \times 4 = 17 \times 9$

因此　$y - x = 17 \times 9 - 34 \times 4 = 17$

解法（二）

設白繩疊合處長度為 x 公分，則白繩長為 $\frac{8}{3}x$ 公分，而紅繩長為 $3x$ 公分。

黏合後的長度為 $\frac{5}{3}x + x + 2x$ 公分，因此

$$\frac{5}{3}x + 2x + x = 238$$

化簡得　$\frac{14}{3}x = 238$

解得　$x = \cancelto{17}{238} \times \frac{3}{\cancelto{1}{14}} = 17 \times 3 = 51$

但兩繩相差 $3x - \frac{8}{3}x$ 公分，故得

$$3x - \frac{8}{3}x = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot 51 = 17$$

答：(B)。

隨・堂・練・習

若二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 3y = 29 \end{cases}$ 的解為 $x = a$，$y = b$，則 $a + b =$？

(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

答：

隨・堂・練・習

若 $x : y = 2 : 1$，且 $2x + y = 20$，求 $(x - 1) : (y + 1)$ 的比值。

(A) $\frac{1}{2}$　(B)2　(C) $\frac{7}{5}$　(D) $\frac{5}{7}$

答：

解一元二次方程式時，除了用等量公理外，二次方程式的解法有兩種：第一種是因式分解法，第二種是用配方法，另外由配方法還可以得到公式解。

$ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解為

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

其中 $b^2 - 4ac$ 稱為判別式。

例25 Example

對於方程式 $(2x + 5)(x + 1) = (3x - 2)(x + 1)$ 根的敘述，下列何者正確？

(A) 方程式只有一根，而且這個根是正數。

(B) 方程式有兩根，而且兩根的正、負號相同。

(C) 方程式一根為正數，一根為負數。

(D) 方程式無解。

解題說明

本題可以直接用等量公理來討論：

若 $x+1=0$，即 $x=-1$，則方程式兩邊等於 0，所以 $x=-1$ 是一個解

若 $x+1\neq 0$，則兩邊除以 $x+1$ 得 $2x+5=3x-2$，解得 $x=7$，

所以方程式的根為 -1、7。

答：(C)。

隨・堂・練・習

若 a、b 為方程式 $x(3x+7)=0$ 的兩根，且 $a>b$，求 $b-a$。

(A) $\frac{7}{3}$　(B) $\frac{3}{7}$　(C) $-\frac{7}{3}$　(D) $-\frac{3}{7}$

答：

例26 Example

若一元二次方程式 $x^2-2x-323=0$ 的兩根為 a、b，且 $a>b$，求 $2a+b$。

(A) -53　(B) 15　(C) 55　(D) 21

解題說明

由於 323 的因數分解不容易做，因此可用公式法求解：

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2+4\cdot(323)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 324}}{2}=\frac{2\pm 36}{2}$$

得 $a=19$，$b=-17$，因此 $2a+b=21$。

答：(D)。

本題也可以利用配方法化成

$$(x-1)^2=324$$

兩種做法基本上是一樣的。

隨・堂・練・習

下列哪一個選項為方程式 $4x^2-16x+15=0$ 的兩根？

(A) $\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$　(B) $\frac{3}{2}$、$-\frac{5}{2}$

(C) $-\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$　(D) $-\frac{3}{2}$、$-\frac{5}{2}$

答：

例27 Example

樂樂以配方法解 $2x^2-bx+a=0$，可得 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$，求 a。

(A) -6　(B) -3　(C) 6　(D) 3

解題說明

解法（一）

由公式解得 $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4\cdot 2\cdot a}}{4}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-8a}}{4}=\frac{b}{4}\pm\frac{\sqrt{b^2-8a}}{4}$

將公式解和 $x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ 比較，得

$$\begin{cases}\frac{b}{4}=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)\\ \frac{\sqrt{b^2-8a}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdots\cdots\ (2)\end{cases}$$

由 (1) 得 $b=6$，將 (2) 兩邊平方得 $b^2-8a=60$，解得

$$a=\frac{b^2-60}{8}=\frac{36-60}{8}=\frac{-24}{8}=-3$$

解法（二）

直接將 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ 兩邊平方，得

$$(x-\frac{3}{2})^2=(\pm\frac{\sqrt{15}}{2})^2=\frac{15}{4}$$

但因為 $(x-\frac{3}{2})^2=x^2-3x+\frac{9}{4}$，

故原式為　$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$

即　$x^2-3x-\frac{6}{4}=0$

兩邊乘 2 得　$2x^2-6x-3=0$

和原方程式　$2x^2-bx+a=0$ 比較，得 $a=-3$，$b=6$。

答：(B)。

隨・堂・練・習

將一元二次方程式 $x^2-6x-5=0$ 化成 $(x+a)^2=b$ 的形式，求 b。

(A) -4　(B) 4　(C) -14　(D) 14

答：

例28 Example

已知方程式 $x^2-5625=0$ 的兩根為 ± 75，則下列何者可為方程式 $x^2+6x-5616=0$ 的解？

(A) $x=69$　(B) $x=72$　(C) $x=77$　(D) $x=81$

解題說明

將原式寫成　$x^2+6x=5616$

兩邊加 3^2 配方得　$x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2=5616+3^2$

即　$(x+3)^2=5616+9=5625$

由題意得　$x+3=\pm 75$

解得 $x=-3\pm 75$，即 $x=72$、-78。

答：(B)。

隨・堂・練・習

已知 $x^2-6x+b=0$ 可配方成 $(x-a)^2=7$ 的型式，請問 $x^2-6x+b=2$ 可配方成下列何種型式？

(A) $(x-a)^2=5$　(B) $(x-a)^2=9$

(C) $(x-a+2)^2=9$　(D) $(x-a+2)^2=5$

答：

一元一次不等式

另外和解方程式有關的是一元一次不等式。一元一次不等式的所有解，稱為該不等式解的範圍，一般來講，一元一次不等式的解有無窮多個，所以通常要用數線上的線段來表示解的範圍。解不等式時要注意不等符號有沒有包括等號，底下列出的不等式性質，是利用等量公理得到的：

假設 a、b、c 為任意三數，

(1) 若 $a>b$，則 $a+c>b+c$。

(2) 若 $a>b$ 且 $c>0$，則 $a\cdot c>b\cdot c$。

(3) 若 $a>b$ 且 $c<0$，則 $a\cdot c<b\cdot c$。

例29 Example

$x=-1$ 不是下列哪一個不等式的解？

(A) $2x+1\leq -3$　(B) $2x+10\geq -3$

(C) $-2x+1\leq 3$　(D) $-2x+1\geq 3$

解題說明

由於 $2\cdot(-1)+1=-1\leq -3$ 是錯的，故選 (A)。

答：(A)。

隨・堂・練・習

$x = -3$ 可為下列哪一個不等式的解？

(A) $5 \leq 4 - 2x$　(B) $3x + 5 \geq -1$

(C) $-2x - 3 \geq 4$　(D) $-3 \leq -x - 8$

答：

例30 Example

有甲、乙兩個箱子，甲箱重 47 公斤，其重量比乙箱的 3 倍還重，且比乙箱的 4 倍還輕。若乙箱重 x 公斤，依題意可得到下列哪一個關係式？

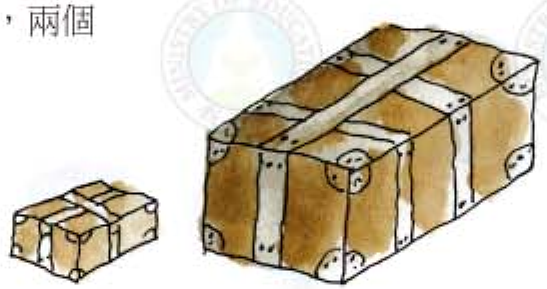
(A) $x > \frac{47}{2}$　(B) $x < \frac{47}{2}$　(C) $\frac{47}{4} < x < \frac{47}{3}$　(D) $\frac{47}{3} < x < 47$

解題說明

由題意知，$47 > 3x$，且 $47 < 4x$，兩個不等式同時可解出：

$$\frac{47}{3} > x，x > \frac{47}{4}$$

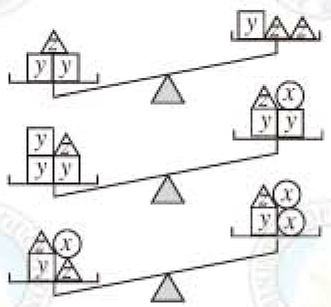
合併得　$\frac{47}{4} < x < \frac{47}{3}$



答：(C)。

隨・堂・練・習

右圖是將積木放在等臂天平上的三種情形。若一個球形、方形、錐形的積木重量分別以 x、y、z 表示，則 x、y、z 的大小關係為何？



(A) $x > y > z$　(B) $y > z > x$

(C) $y > x > z$　(D) $z > y > x$

答：

例31 Example

右下圖是測量一物體體積的過程：

步驟一：將 300ml 的水裝進一個容量為 450ml 的杯子中。

步驟二：將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。

步驟三：同樣的玻璃珠再加上兩個放入水中，結果水滿溢出。

根據以上過程，推測一顆玻璃珠的體積在下列哪一範圍內？（$1ml = 1cm^3$）

(A) $30cm^3$ 以上，$50cm^3$ 以下

(B) $50cm^3$ 以上，$70cm^3$ 以下

(C) $70cm^3$ 以上，$90cm^3$ 以下

(D) $90cm^3$ 以上，$110cm^3$ 以下

解題說明

設一個玻璃珠的體積為 $x\ cm^3$，由題意知 $300 + 3x < 450$，$300 + 5x > 450$，可解出

$3x < 150$，即 $x < 50$

$5x > 150$，即 $x > 30$

答：(A)。

隨・堂・練・習

小君帶 200 元到文具行購買每枝 17 元的鉛筆和每枝 30 元的原子筆。若小君買的鉛筆比原子筆多 3 枝，則小君最多可買到幾枝原子筆？

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

答：

同學可參考第二冊課本，複習不等式，並能將解的範圍畫在數線上。

2-2 自我評量

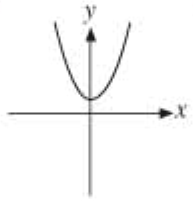
1. 下列四個敘述，哪一個是正確的？

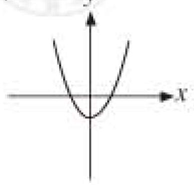
(A)$3x$ 表示 $3+x$　(B)x^2 表示 $x+x$

(C)$3x^2$ 表示 $3x \cdot 3x$　(D)$3x+5$ 表示 $x+x+x+5$

答：

2. 已知二次函數 $y=ax^2+k$，其中 $a<0$，$k>0$，下列哪一個選項可能是此二次函數的圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)


答：

3. 錢包內有佰元鈔票 x 張，拾元硬幣 y 個，請問錢包內有多少元？

(A)$x+y$　(B)$10x+y$　(C)$100x+10y$　(D)$110(x+y)$

答：

4. $x=1$，$y=1$ 為下列哪一個二元一次聯立方程式的解？

(A) $\begin{cases} 19x-11y=30 \\ 21x+4y=25 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 37x+17y=20 \\ 16x-15y=31 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 15x+17y=32 \\ 16x-11y=27 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} 29x-18y=11 \\ 23x+17y=40 \end{cases}$

答：

5. $x=2$ 不是下列哪一個方程式的解？

(A)$3(x-2)=0$　(B)$2x^2-3x=2$

(C)$(x-2)(x+2)=0$　(D)$x^2-x+2=0$

答：

6. 已知方程式 $(\frac{x}{3}-1)(x+2)=0$ 的兩根為 a、b，其中 $a>b$，則下列哪一個選項是正確的？

(A)$3a=6$　(B)$2b=6$　(C)$a+b=1$　(D)$a-b=-1$

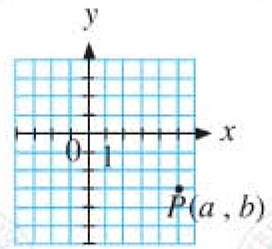
答：

7. 坐標平面上，若點 $(-4,2)$ 在直線 $3x+ay=4$ 上，求 a。

(A)-8　(B)$-\frac{3}{2}$　(C)4　(D)8

答：

8. 如右圖，若坐標平面上 P 點的坐標為 (a,b)，求 $a-b$。



(A)8　(B)2　(C)-2　(D)-8

答：

9. 右圖為一平面圖。若以學校為原點作一坐標平面，其中學校到游泳池的方向為 x 軸的正向，學校到新生大樓的方向為 y 軸的負向，則圖書館在此平面的第幾象限？

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

答：

2-3 幾何

舉目望去，生活周遭充滿了形形色色，由點、線、面、體等要素為基礎所構成的幾何形體，如三角形、多邊形、圓、立方體、柱體等，當人們要製作幾何形體或者利用幾何形體時（如建築、鑲嵌、設計），必須要去測量這些幾何要素，因此發展出長度、角度、面積、體積的概念。

由於人類視覺的特性，對於具有平行、垂直、對稱特質的圖形，感受特別強，因此很容易從一般的幾何形體中辨認出一些特別顯眼的圖形。

動・動・腦

下列這些我們常用到的幾何形體，哪些有線對稱的特性？哪些有平行的特性？哪些有垂直的特性？

正三角形、等腰三角形、直角三角形、正方形、矩形、
平行四邊形、菱形、梯形、等腰梯形、正多邊形、圓。

以正三角形為例，在視覺上我們覺得這個圖形有明顯的對稱性質，它有三條對稱軸（各邊的中垂線），因此雖然正三角形的定義，是三邊都相等的三角形，但其實我們早已感覺到它的三個角應該也都相等。只要知道三角形內角和是 180 度，我們甚至能推論出它的三個角都是 60 度。

國中的幾何學和國小很不同的地方在於，過去所有平面圖形的角度或長度性質，我們通常都要透過測量來決定，我們也許隱隱約約知道某些性質應該正確，但卻不知道竟然可以利用簡單的推理，就可以知道這些性質的正確性。

這中間有一個很大的差異，小學時的測量只能測量一些手邊的圖形，舉例來說，光靠測量，即使不考慮測量的誤差，我們也許不知道為什麼世界上所有平行四邊形的對角必須相等，對邊必須相等。但是在國中，我們卻能清楚的依靠證明或推理，來說明這樣的性質。

這種情況很像在代數中，靠著符號代表數的想法，我們可以從已知的運算規則，推論出許多性質、解決問題一樣。也就是說，除了嘗試錯誤、計算或測量特別的個例之外，我們在國中裡還學到，憑著清楚的思考可以從一些已知的事實，推理出其他的性質。

幾何圖形中的角

關於幾何圖形的度量，有兩個基本的定理，一個處理圖形的角度，另一個處理圖形的邊長。處理圖形角度的基本定理是

三角形內角和是 180 度。

或者，我們也可以記得這個定理更基本的形式：

多邊形外角和是 360 度。

前者在應用上比較直接好用，後者則可以一次決定多邊形的內角和公式。底下則是一些關於角常用的性質：

(1) 對頂角相等。

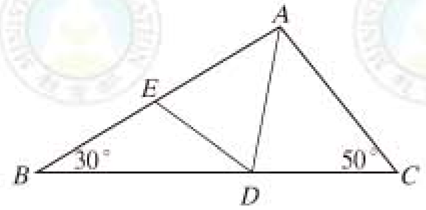
(2) 三角形任一外角等於其兩內對角的和。

(3) 等腰三角形兩底角相等。

例 1 Example

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=30^\circ$，$\angle ACB=50^\circ$，且 D、E 兩點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$ 上。若 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的平分線，$\overline{AD}=\overline{AE}$，求 $\angle AED$。

(A)50° (B)60° (C)65° (D)80°



解題說明

由題意知，

$\angle BAC=180^\circ-30^\circ-50^\circ=100^\circ$ 三角形內角和為 180°

$\angle EAD=100^\circ\times\frac{1}{2}=50^\circ$

因為 $\overline{AE}=\overline{AD}$，所以 $\angle AED=\angle ADE$， 等腰三角形兩底角相等

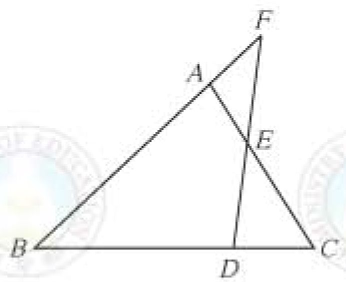
因此 $\angle AED=\dfrac{180^\circ-50^\circ}{2}=65^\circ$ 三角形內角和為 180°

答：(C)。

隨・堂・練・習

如右圖，$\triangle ABC$ 中，D 點在 $\overline{BC}$ 上，F 點在直線 AB 上，$\overline{DF}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點。若 $\angle B=40^\circ$，$\angle C=55^\circ$，$\angle DEC=43^\circ$，求 $\angle F$。

(A)40° (B)42° (C)43° (D)55°

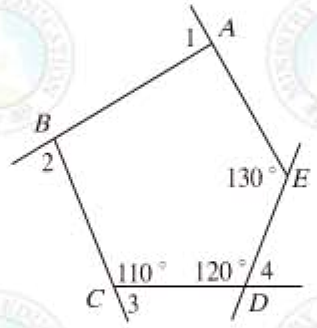


答：

例 2 Example

如右圖，多邊形 $ABCDE$ 為五邊形。若 $\angle AED=130^\circ$，$\angle EDC=120^\circ$，$\angle DCB=110^\circ$，求 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$。

(A)360° (B)310° (C)240° (D)180°



解題說明

$\angle E$ 的外角 $=180^\circ-130^\circ=50^\circ$，由

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+50^\circ=360^\circ$ 多邊形外角和為 360°

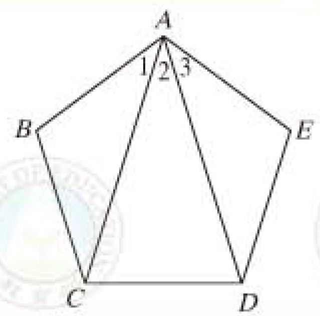
得 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ-50^\circ=310^\circ$

答：(B)。

由外角和公式，可得 n 邊形內角和為 $180^\circ\times(n-2)$。因此，正 n 邊形的內角為 $180^\circ\times\dfrac{n-2}{n}$。

隨・堂・練・習

如右圖，有一正五邊形 $ABCDE$，求 $\angle 2$。



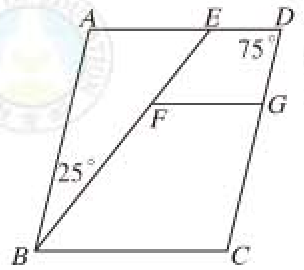
三角形內角和是 180 度，最直接的應用，是平行線的截角及判別性質：

當兩平行線被一直線所截時，其同位角相等，內錯角相等，同側內角互補。

當兩直線被一直線所截時，若同位角相等，內錯角相等，同側內角互補，三者有一成立，則此兩直線平行。

例 3 Example

如右圖，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，
$\overline{ED} \parallel \overline{FG}$，$\angle D = 75^\circ$，$\angle ABE = 25^\circ$。
求 $\angle GFB + \angle GCB$。
(A)155° (B)210° (C)235° (D)270°



解題說明

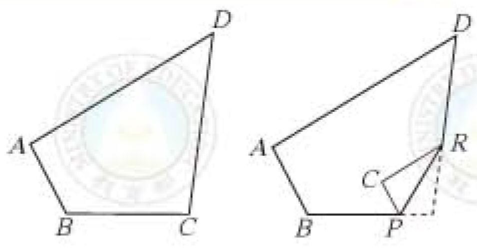
由上圖知，只要能算出 $\angle FGC$ 以及 $\angle FBC$，就能由四邊形內角和為 360° 算出答案。

因為 $\angle ABC = \angle D = 75^\circ$　**平行四邊形對角相等**
所以 $\angle FBC = 75^\circ - 25^\circ = 50^\circ$，
另外 $\angle FGC = \angle D = 75^\circ$　**平行線同位角相等**
因此 $\angle GFB + \angle GCB = 360^\circ - 50^\circ - 75^\circ$　**四邊形內角和為 360°**
$= 235^\circ$

答：(C)。

隨·堂·練·習

圖(a)是四邊形紙片 $ABCD$，其中 $\angle B = 120^\circ$，$\angle D = 50^\circ$。若將其右下角向內摺出一個 $\triangle PCR$，恰使 $\overline{CP} \parallel \overline{AB}$，$\overline{RC} \parallel \overline{AD}$，如圖(b)所示，求 $\angle C$。
(A)80° (B)85° (C)95° (D)110°



圖(a)　圖(b)

答：

畢氏定理

能幫助我們計算圖形邊長的基本定理是畢氏定理(圖 2-13)。

> 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，$\angle C$ 為直角，
> 則斜邊長的平方等於兩股的平方和，即
> $$c^2 = a^2 + b^2$$

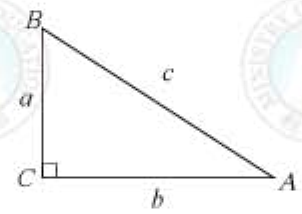


圖 2-13

畢氏定理不但帶我們走入根號數的世界，而且讓我們對平面圖形有更多的理解。例如由畢氏定理，我們可以得到 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 直角三角形或 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 直角三角形的三邊連比。

> $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角形的三邊長比例為　$1 : \sqrt{3} : 2$
> $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 三角形的三邊長比例為　$1 : 1 : \sqrt{2}$

更進一步可以得到正三角形的高及面積的公式(圖 2-14)。

$$高 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$面積 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

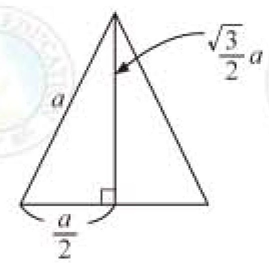
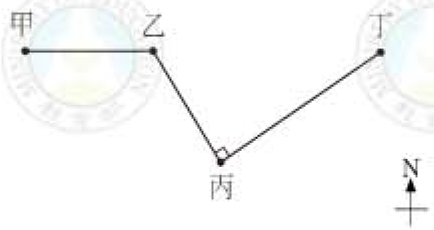


圖 2-14

例 4 Example

如右圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可到達丁地，則此車程需多少分鐘？



(A)19.5 (B)24 (C)25 (D)28

解題說明

設車速每分鐘跑 a 公尺，

則 $\overline{甲乙}=8a$，$\overline{乙丙}=8a$，$\overline{丙丁}=15a$。

由畢氏定理，得

$$\overline{乙丁}=\sqrt{(15a)^2+(8a)^2}=\sqrt{289a^2}=\sqrt{(17a)^2}=17a$$

由 $\overline{甲丁}=\overline{甲乙}+\overline{乙丁}=8a+17a=25a$，

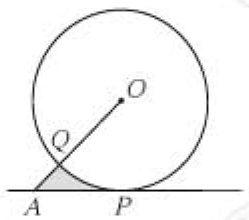
因此需要 $=\dfrac{25a}{a}=25$（分）。

答：(C)。

如果同學注意到當速度固定時，時間和距離成正比，則也可以用時間的值直接計算。

隨・堂・練・習

如右圖，$\overline{AP}$ 切圓 O 於 P 點，$\overline{AP}=4$、$\overline{AO}=4\sqrt{2}$，求灰色部分的面積。

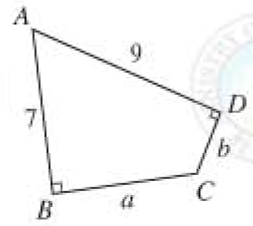


(A)$8-2\pi$ (B)$8-4\pi$ (C)$16-2\pi$ (D)$16-4\pi$

答：

例 5 Example

如右圖，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$、$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CD}=b$，$\overline{AD}=9$，求 $(a+b)(a-b)$。



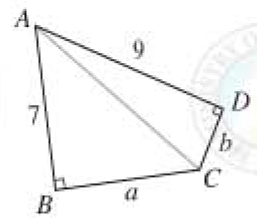
(A)16 (B)32 (C)63 (D)130

解題說明

由於 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

所以不需要直接求出 a 和 b，只要能算出 a^2-b^2 即可。

如右圖，作 $\overline{AC}$，則△ABC 與△ACD 皆為直角三角形，



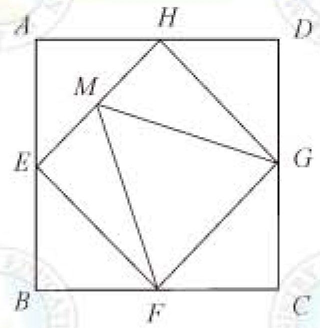
由 $\overline{AC}^2=7^2+a^2$，$\overline{AC}^2=9^2+b^2$ 畢氏定理

兩式相減得 $a^2-b^2=9^2-7^2=32$。

答：(B)。

隨・堂・練・習

如右圖，四邊形 $ABCD$ 為一正方形，E、F、G、H 為四邊中點。若 M 為 $\overline{EH}$ 中點，$\overline{MF}=4$，求△MFG 的面積。



(A)$2\sqrt{3}$ (B)$4\sqrt{3}$ (C)$\dfrac{32}{5}$ (D)$\dfrac{32}{9}$

答：

全等

圖形如果大小形狀都一樣，則稱為全等。就像數的相等一樣，這是幾何圖形中最基本的關係。判斷圖形是否全等，是幾何學的基本功夫，目的則是協助我們瞭解幾何圖形中的邊或角的關係。例如利用等腰三角形底邊的高將該三角形分成兩個全等的三角形，就知道等腰三角形的底角相等。

如果不依賴視覺，要判斷圖形是否全等，最基本的方法是透過平移、旋轉或翻轉後再疊合比較。對於很複雜的圖形，這也許是唯一的方法。但是對於簡單的幾何圖形，我們可以依靠簡單的推理或操作，將全等的判別轉換成圖形邊角關係的性質。

最簡單的例子是圓，我們並不需要將圓移來移去疊合，因為我們知道只要兩圓半徑相等，這兩圓一定全等。

至於像三角形、四邊形這些多邊形的圖形，由疊合的經驗知道，只要相對應的邊長和夾角都相等，這兩個圖形就全等。

我們學過下列幾種三角形的全等性質：

SAS 全等性質：若兩三角形的兩邊與其夾角對應相等，則此兩三角形全等。

ASA 全等性質：若兩三角形的兩角與其夾邊對應相等，則此兩三角形全等。

AAS 全等性質：若兩三角形的兩角及其中一角的對邊對應相等，則此兩三角形全等。

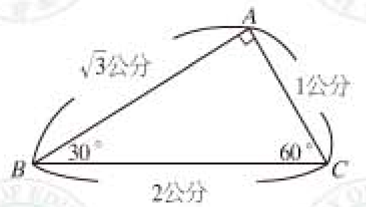
SSS 全等性質：若兩三角形三邊對應相等，則此兩三角形全等。

RHS 全等性質：若兩直角三角形的斜邊和一股對應相等，則此兩直角三角形全等。

這些性質的特色是，我們只要考慮恰當的三個邊角條件，就能判斷兩三角形是否全等，這是三角形特殊的地方，從四邊形以上的多邊形就沒有這麼簡單的全等性質。

例 6 Example

甲、乙、丙、丁四位同學分別想依下列的條件作出一個與△ABC 全等的三角形，如右圖所示。已知四人所用的條件如下：



甲：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，$\angle B=30^\circ$

乙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，$\angle B=30^\circ$

丙：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{AC}=1$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分

丁：$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 公分，$\overline{BC}=2$ 公分，$\angle A=90^\circ$

若發現其中一人作出的三角形沒有與右圖的△ABC 全等，則此人是誰？

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

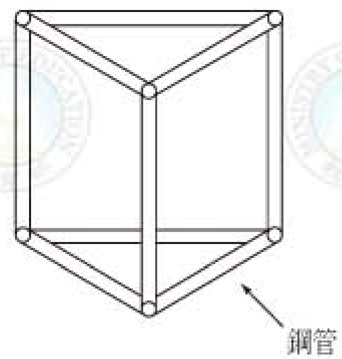
解題說明

乙、丙、丁所做的三角形均和△ABC 全等，其根據的全等性質分別為 SAS 、 SSS 、 RHS 全等性質。

答：(A)。

隨・堂・練・習

阿俊拼裝完成了直角柱形燈架，如右圖所示。他共用了 9 支鋼管，其中 30 公分長的有 4 支，40 公分長的有 3 支， 50 公分長的有 2 支。請問此燈架的三角形底面三邊長分別為多少？



(A)30 公分、 30 公分、 50 公分

(B)30 公分、 30 公分、 40 公分

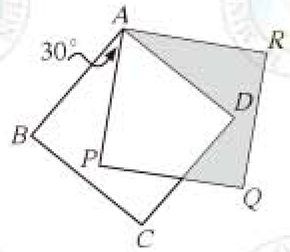
(C)30 公分、 40 公分、 50 公分

(D)40 公分、 40 公分、 50 公分

答：

由於三角形的全等性質特別簡明，因此做幾何問題時，我們經常透過做輔助線將圖形分割成若干三角形來思考。

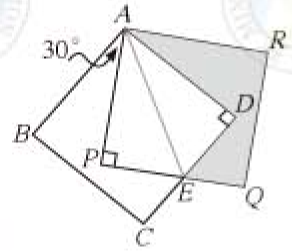
例 7 Example



如右圖，兩全等正方形 $ABCD$ 與 $APQR$ 重疊。若 $\angle BAP=30^\circ$，$\overline{AB}=6\sqrt{3}$，求圖中灰色部分面積。

(A)48　(B)54　(C)$81-18\sqrt{3}$　(D)$108-36\sqrt{3}$

解題說明



令 $\overline{PQ}$ 和 $\overline{CD}$ 相交的點是 E，由於

$\angle P=\angle D=90^\circ$

$\overline{AP}=\overline{AD}$，$\overline{AE}=\overline{AE}$

所以　$\triangle APE\cong\triangle ADE$　**RHS 全等性質**

由於　$\angle PAD=90^\circ-\angle BAP=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

得　$\angle PAE=30^\circ$

所以 $\triangle APE$ 是 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，因此三邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$。

得　$\overline{PE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{AP}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=6$

因此　四邊形 $APED$ 的面積 $=(\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times6)\times2=36\sqrt{3}$

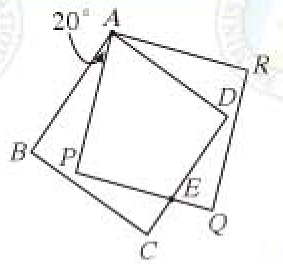
正方形 $APQR$ 的面積 $=6\sqrt{3}\times6\sqrt{3}=108$

得　灰色部分面積 $=108-36\sqrt{3}$

答：(D)。

事實上，$\overline{AE}$ 為圖形的線對稱軸。

隨·堂·練·習



如右圖，四邊形 $ABCD$、$APQR$ 為兩全等正方形，相交於 E 點。若 $\angle BAP=20^\circ$，求 $\angle PEC$。

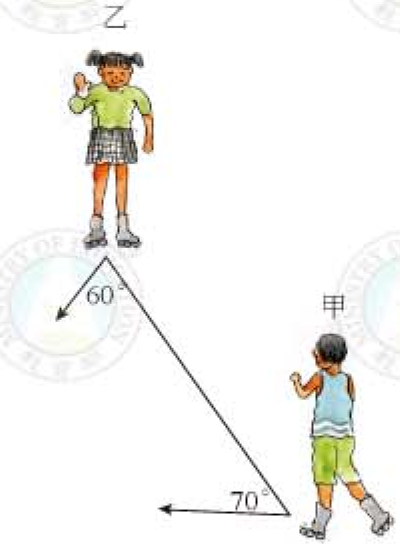
(A)60°　(B)65°　(C)70°　(D)75°

答：

利用這些全等定理，我們知道三角形有一些特別的邊角關係，例如

> 三角形兩邊和大於第三邊。
>
> 三角形的大邊對大角，大角對大邊。

例 8 Example



如右圖，甲、乙兩人在同一水平面上溜冰，且乙在甲的正東方 200 公尺處。已知甲、乙分別以東偏北 70°、西偏北 60° 的方向直線滑行，而後剛好相遇，因而停止滑行。對於兩人滑行的距離，下列敘述何者正確？

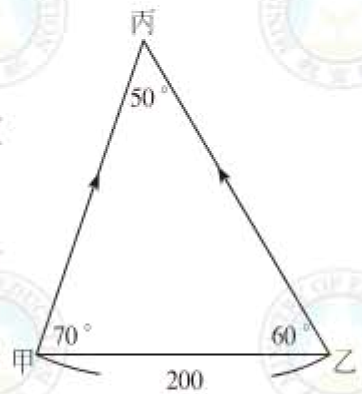
(A) 乙滑行的距離較長

(B) 兩人滑行的距離一樣長

(C) 甲滑行的距離小於 200 公尺

(D) 乙滑行的距離小於 200 公尺

解題說明



如右圖，由大角對大邊得乙滑行的距離較長。事實上，若甲和乙在丙處相遇（右下圖），則在丙的角度為 50°，所以 $\overline{甲丙}>\overline{甲乙}=200$，$\overline{乙丙}>\overline{甲乙}=200$，因此甲、乙兩人滑行的距離均大於 200 公尺。

答：(A)。

隨．堂．練．習

在△ABC 中，$\overline{AB} < \overline{AC}$，$\overline{AH} \perp \overline{BC}$，且 H 在 $\overline{BC}$ 上，下列哪一個選項是正確的？

(A) $\angle B = \angle C$　(B) $\angle B < \angle C$
(C) $\angle BAH = \angle CAH$　(D) $\angle BAH < \angle CAH$

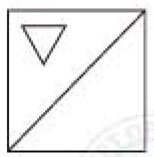
答：

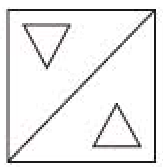
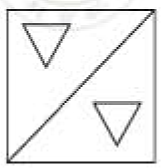
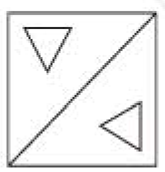
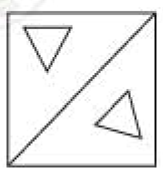
線對稱

當然在討論全等的概念時，不能忘了重要的線對稱概念。由於線對稱圖形的對稱軸兩側的部分會互相全等，因此對稱軸越多，邊角關係就越特別。而這樣的幾何圖形（例如圓、正多邊形、等腰三角形、矩形、菱形、等腰梯形），也因為它特殊的對稱性，經常是應用上常見的幾何形體。

例 9 Example

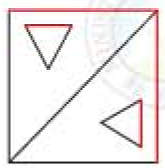
右圖是小方畫的正方形風箏圖案，且他以圖中的對角線為對稱軸，在對角線的下方畫一個三角形，使得新的風箏圖案成為線對稱圖形，下列哪個圖形是此線對稱圖形？



(A)

(B)

(C)

(D)


解題說明

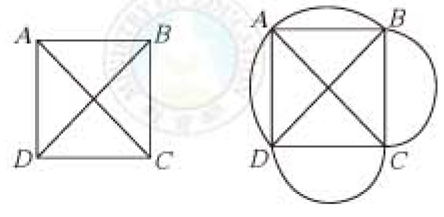
由右圖知道，三角形有一邊（紅色邊）和正方形的一邊（紅色邊）平行，因此其對稱圖形也有一樣的性質。



答：(C)。

隨．堂．練．習

如圖 (a)，四邊形 $ABCD$ 為正方形。若分別以 $\overline{BD}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為直徑畫三個半圓，如圖 (b) 所示。判斷圖 (b) 中哪一線段是該圖形的對稱軸？



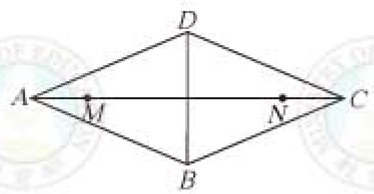
(a)　(b)

(A) $\overline{BC}$　(B) $\overline{BD}$　(C) $\overline{AB}$　(D) $\overline{AC}$

答：

例 10 Example

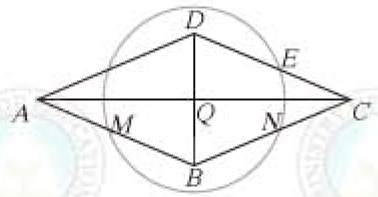
如右圖，四邊形 $ABCD$ 為一菱形，M、N 兩點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AC} = 20$，$\overline{BD} = 10$，$\overline{MN} = 18$。若在菱形的四邊上找一點 O，使得 $\angle MON$ 為直角，則滿足上述條件的 O 點共有幾個？



(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

解題說明

令 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BD}$ 的交點為 Q，如右圖，以 Q 為圓心，$\dfrac{\overline{MN}}{2} = 9$ 為半徑作圓。



由於 $\overline{QD} = \dfrac{\overline{BD}}{2} = 5 < 9$，$\overline{QC} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = 10 > 9$，

所以 D 在圓 Q 內部，C 在圓 Q 外部。因此圓 Q 與 $\overline{CD}$ 只交於一點 E，

而且 $\angle MEN = 90$　直徑所對圓周角為直角

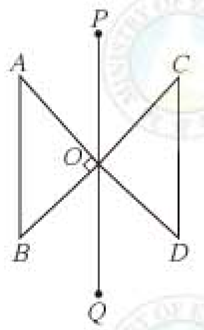
由圓內角大於圓周角和圓外角小於圓周角的性質知道，$\overline{CD}$ 上非 E 的其他點皆不滿足題意。

再利用圓和菱形的線對稱性質，知道圓 Q 和菱形 $ABCD$ 交於四點。

答：(B)。

隨．堂．練．習

如右圖，有一線對稱圖形，直線 PQ 為對稱軸，A、B 的對稱點分別為 C、D。若 $\angle AOB=90^\circ$，$\angle B>\angle A$，且 $\angle BOQ>\angle AOP$，關於 D 點的位置，下列敘述何者正確？



(A) A、O、D 三點在同一直線上，且 $\overline{OD}=\overline{OA}$。
(B) A、O、D 三點在同一直線上，且 $\overline{OD}=\overline{OB}$。
(C) $\overline{PQ}$ 為 $\angle BOD$ 的平分線，且 $\overline{OD}=\overline{OA}$。
(D) $\overline{PQ}$ 為 $\angle BOD$ 的平分線，且 $\overline{OD}=\overline{OB}$。

答：

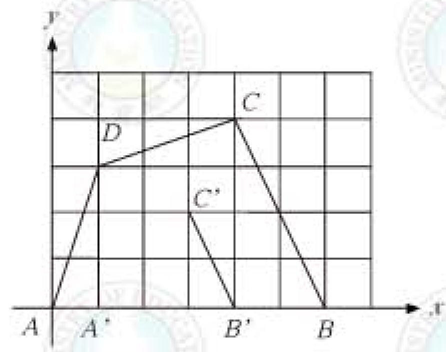
相似

如果有兩個圖形，將其中一個圖形縮放若干倍後，會和另一個圖形全等，則這兩個圖形稱為相似，也就是形狀相同的意思。例如，任意兩圓會相似，因為以兩圓半徑的比值 $\frac{r_2}{r_1}$ 作為縮放倍數，可以將以 r_1 為半徑的圓縮放成一個半徑為 r_2 的圓。

由於將圖形縮放 k 倍後的結果會 (1) 保持角度；(2) 將直線映到直線；(3) 將線段長變成 k 倍，因此利用多邊形的全等性質，我們知道兩個多邊形相似，則其對應角必須相等，對應邊必須成比例；而且反過來，如果兩多邊形的對應角相等，而且對應邊成比例，則該兩多邊形相似。

例 11 Example

如右圖，有一四邊形 $ABCD$ 的頂點坐標分別為 $A(0,0)$、$B(6,0)$、$C(4,4)$、$D(1,3)$。如果畫另一四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $ABCD$ 相似，且其頂點坐標分別為 $A'(1,0)$、$B'(4,0)$、$C'(3,2)$，$D'(s,t)$，求 $s+t$。



(A) 2　(B) 3　(C) $\frac{7}{2}$　(D) 4

解題說明

由圖知，$A'B'C'D'$ 是 $ABCD$ 縮小 $\frac{1}{2}$ 倍的圖形，因此

D' 和 A' 的 x 坐標差 $=s-1=\frac{1}{2}\cdot(1-0)=\frac{1}{2}\cdot$（$D$ 和 A 的 x 坐標差）

D' 和 A' 的 y 坐標差 $=t-0=\frac{1}{2}\cdot(3-0)=\frac{1}{2}\cdot$（$D$ 和 A 的 y 坐標差）

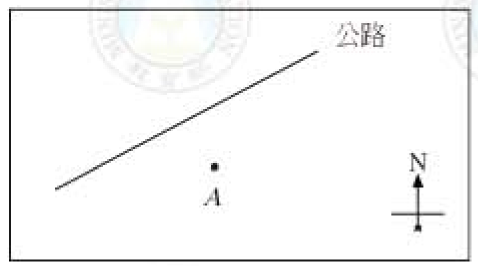
因此　$s=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$t=\frac{3}{2}$

所以　$s+t=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

答：(B)。

隨．堂．練．習

如右圖，有 A 村與一條直線型的公路，今以 A 村為基準點，向北走 4 公里可到達公路。若由 A 村向東走 6 公里，再向北走 6 公里也可到達公路，則由 A 村向西走多少公里可到達公路？

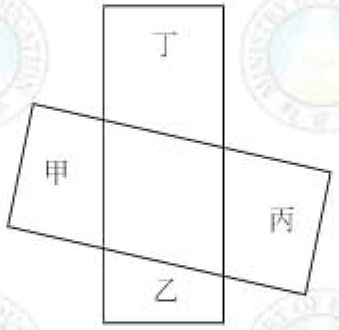


(A) 4　(B) 6　(C) 9　(D) 12

答：

例12 Example

如右圖，有兩全等長方形玻璃板放置在一起，其中分成甲、乙、丙、丁四塊梯形及一塊平行四邊形。若甲、乙、丙、丁的面積比為 4：3：5：6，關於此四梯形的關係，下列敘述何者正確？



(A) 甲乙相似　(B) 甲丙相似

(C) 乙丁相似　(D) 甲乙丙丁均不相似

解題說明

甲、乙、丙、丁均不相似。

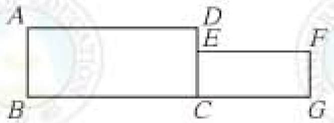
因為若甲、乙相似，則甲連接兩個直角的邊會對應到連接乙的兩個直角的邊。但因為這兩對應邊長度相等，因此甲、乙若相似，則各對應邊的比值為 1，因此甲、乙必須全等，則甲、乙面積相等，其面積比為 1：1，但這和已知條件不符。

同樣的道理，可以說明甲、乙、丙、丁任兩個梯形均不可能相似。

答：(D)。

隨．堂．練．習

如右圖，有兩相似長方形 $ABCD$、$ECGF$，且 $\overline{AD}$ 的對應邊為 $\overline{EF}$。若 $\overline{AB}=6$，$\overline{FG}=4$，$\overline{BG}=25$，求兩長方形的面積和。



(A)115　(B)120　(C)125　(D)130

答：

由於三角形全等性質特別簡單，因此判別三角形相似的性質也很容易：

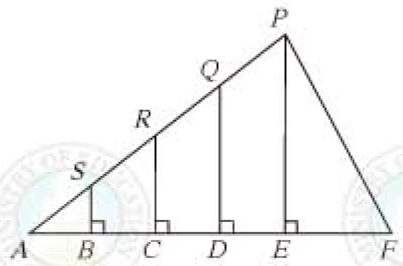
AA 相似性質：若兩三角形有兩組對應角相等，則此兩三角形相似。

SAS 相似性質：若兩三角形有一組對應角相等，且夾此角的兩對應邊成比例，則此兩三角形相似。

SSS 相似性質：若兩三角形三組對應邊成比例，則此兩三角形相似。

例13 Example

如右圖，S、R、Q在$\overline{AP}$上，B、C、D、E在$\overline{AF}$上，其中$\overline{BS}$、$\overline{CR}$、$\overline{DQ}$、$\overline{EP}$皆垂直於$\overline{AF}$，且$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若$\overline{PE}=2$，求$\overline{BS}+\overline{CR}+\overline{DQ}$。



(A)$\frac{3}{2}$　(B)2　(C)$\frac{5}{2}$　(D)3

解題說明

因為 $\overline{BS}:\overline{PE}=\overline{AB}:\overline{AE}$，得 $\overline{BS}=\overline{PE}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，

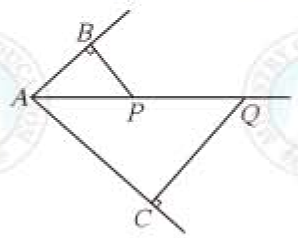
同理 $\overline{CR}=\overline{PE}\times\frac{1}{2}=1$，$\overline{DQ}=\overline{PE}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$，

所以 $\overline{BS}+\overline{CR}+\overline{DQ}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$。

答：(D)。

隨．堂．練．習

如右圖，$\overline{AQ}$為$\angle BAC$的角平分線，P在$\overline{AQ}$上，且$\overline{PB}\perp\overline{AB}$、$\overline{QC}\perp\overline{AC}$。若$\overline{PB}=3$、$\overline{QC}=9$、$\overline{AP}=5$，求$\overline{PQ}$。

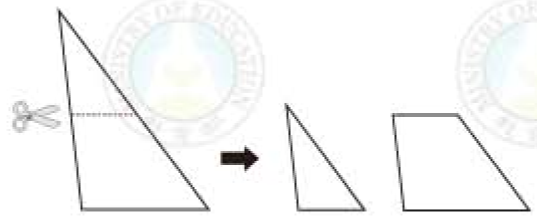


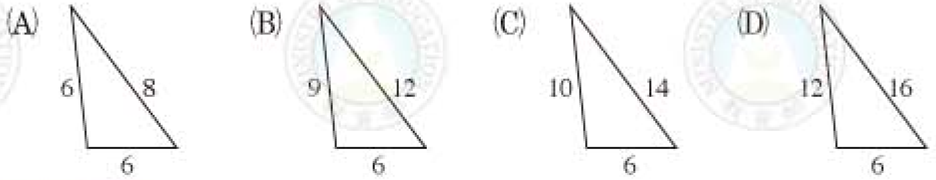
(A)7　(B)10　(C)12　(D)15

答：

例14 Example

如右圖，將一個大三角形剪成一個小三角形及一個梯形。若梯形上、下底的長分別為 6 、 14 ，兩腰長為 12 、 16 ，則下列哪一選項中的數據表示此小三角形的三邊長？





解題說明

由右圖知，小三角形和大三角形相似，

AA 相似性質

對應邊成比例

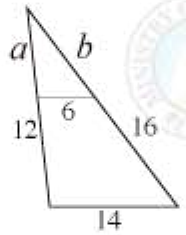
$a:(a+12)=6:14$

得 $14a=6(a+12)$，化簡得 $8a=72$，解得 $a=9$。

同理，由 $b:(b+16)=6:14$，

得 $14b=6(b+16)$，化簡得 $8b=96$，$b=12$。

答：(B)。

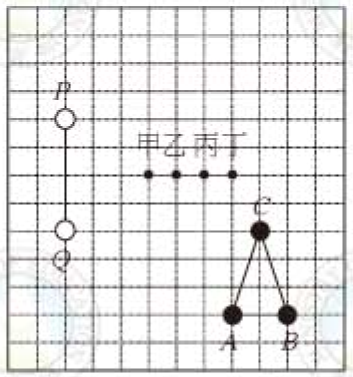


隨．堂．練．習

如右圖，棋盤上有 A 、 B 、 C 三個黑子與 P 、 Q 兩個白子。第三個白子 R 應放在下列哪一個位置，才會使得 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$？

(A) 甲　(B) 乙　(C) 丙　(D) 丁

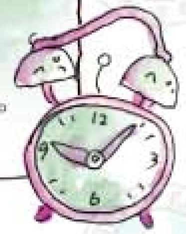
答：



相似三角形有一個特別常用的應用，也就是若用一組平行線去截兩直線，則其截線段會成比例。其中比較特別的應用是：

(1) 三角形兩邊中點連線平行於第三邊，且其長為第三邊之一半。

(2) 梯形兩腰中點連線平行於上下兩底，且其長為上下底長和之半。



例15 Example

如右圖，四邊形 $ABCD$ 為四邊不互相平行的四邊形，

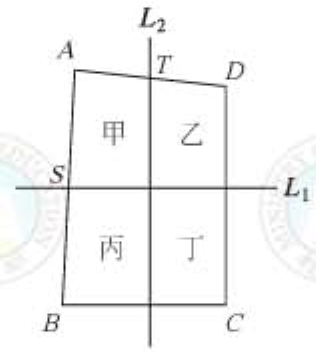
已知：(1) S 、 T 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 的中點

(2) 直線 L_1 過 S 點與 $\overline{BC}$ 平行

(3) 直線 L_2 過 T 點與 $\overline{CD}$ 平行

若 L_1 與 L_2 將四邊形 $ABCD$ 分成甲、乙、丙、丁四個四邊形，則其中哪一個與四邊形 $ABCD$ 相似？

(A) 甲　(B) 乙　(C) 丙　(D) 丁



解題說明

上面的圖可以用下面的方式重畫（如右圖）。

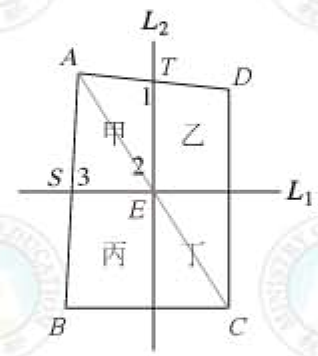
首先連 $\overline{AC}$ 與 L_1 交於 E 點，

由於 $L_1 // \overline{BC}$，得到 E 是 $\overline{AC}$ 的中點，

而且 $\overline{SE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

接著過 E 作 $\overline{CD}$ 的平行線，此線會交於 $\overline{AD}$ 的中點 T，因此此平行線就是 L_2，並且

$\overline{TE}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}$



故得 $\overline{AT}:\overline{TE}:\overline{ES}:\overline{SA}=\overline{AD}:\overline{DC}:\overline{CB}:\overline{BA}$

現將此圖標上∠1、∠2、∠3，則

$\angle 1=\angle D$ 同位角相等

$\angle 3=\angle B$ 同位角相等

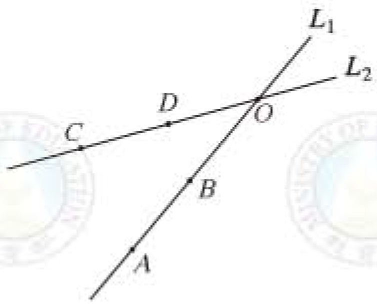
$\angle A=\angle A$ 共角

所以 $\angle 2=\angle C$ 四邊形內角和為 360°

由於對應角相等，對應邊成比例，因此甲相似於 $ABCD$。

答：(A)。

隨・堂・練・習



如右圖，兩直線 L_1、L_2 相交於 O 點，其中 A、B 兩點在 L_1 上，C、D 兩點在 L_2 上。已知 $\overline{CD}$ 上有一點 P，且 M、N 分別是 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 的中點。今將 P 點沿 $\overline{CD}$ 自 C 移向 D 點，則關於 $\overline{MN}$、$\triangle PAB$ 的變化，下列敘述何者正確？

(A) $\overline{MN}$ 的長度越來越長 (B) $\overline{MN}$ 的長度越來越短

(C) $\triangle PAB$ 的面積越來越大 (D) $\triangle PAB$ 的面積越來越小

答：

接著說明梯形兩腰中點的連線長為梯形上下兩底和的一半。如圖 2-15，取 E 是 $\overline{AB}$ 的中點，過 E 做 $\overline{AD}$ 的平行線，分別交 $\overline{AC}$ 於 M，交 $\overline{DC}$ 於 F。由平行線截線性質，知

$$\overline{DF}:\overline{FC}=\overline{AM}:\overline{MC}=\overline{AE}:\overline{EB}=1:1$$

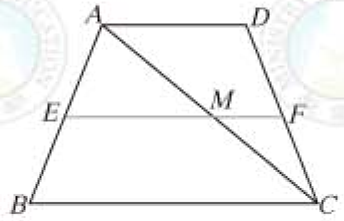


圖 2-15

所以 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，同時

$$\overline{EM}=\frac{1}{2}\overline{BC}，\overline{MF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$$

所以 $\overline{EF}=\overline{EM}+\overline{MF}=\dfrac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{AD})$

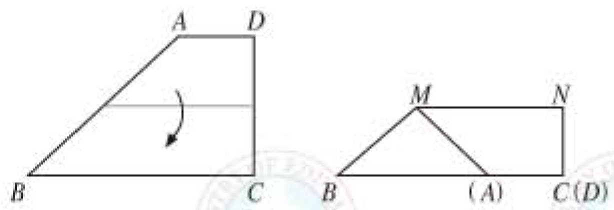
因此得証。

隨・堂・練・習

如圖(a)，有一梯形 $ABCD$，其中 $\angle C=\angle D=90^\circ$，且 $\overline{AD}=6$，$\overline{BC}=18$，$\overline{CD}=12$。若將 $\overline{AD}$ 疊合在 $\overline{BC}$ 上，出現摺線 $\overline{MN}$，如圖(b)所示，求 $\overline{MN}$。

(A)9 (B)12 (C)15 (D)21

答：



(a) (b)

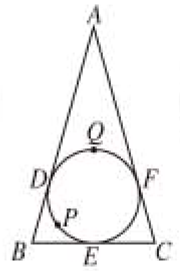
圓

和其他常見的幾何圖形比起來，圓顯得很特殊，因為它是彎曲的圖形。圓有非常豐富的對稱性，這在理解圓的性質時扮演重要的角色。另外一方面，我們經常討論和圓有關的直線圖形，例如弦、切線、公切線，因為透過直線或線段，我們才能將前面所學的很多幾何圖形和圓結合起來。

和圓有關的角是圓心角和圓周角，圓心角和所對圓弧的度數基本上是一樣的概念。而圓周角的度數等於所對弧的一半，因此有一個令人意外的性質：相對於一弦同側的所有圓周角都相等。例如，直徑所決定的圓周角一定是直角。

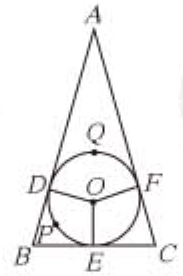
例16 Example

如右圖，$\triangle ABC$ 的內切圓分別切 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 於 D、E、F 三點，其中 P、Q 兩點分別在 $\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DF}$ 上。若 $\angle A = 30^\circ$，$\angle B = 80^\circ$，$\angle C = 70^\circ$，求 $\overset{\frown}{DPE}$ 弧長與 $\overset{\frown}{DQF}$ 弧長的比值。



(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{8}{7}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

解題說明



連圓心 O 和 D、E、F 之間的線段，得

$\angle DOF = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$\angle DOE = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

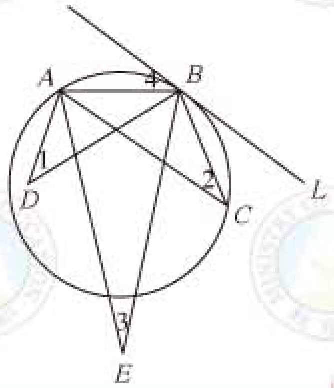
由於弧長和弧度數成正比，

所以 $\overset{\frown}{DPE}$ 弧長：$\overset{\frown}{DQF}$ 弧長 $= 100 : 150 = 2 : 3$。

答：(A)。

隨・堂・練・習

如右圖，A、B、C 三點在圓上，D 點在圓內，E 點在圓外，L 為過 B 點之切線。根據 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的位置，判斷下列哪一個角的角度最大？

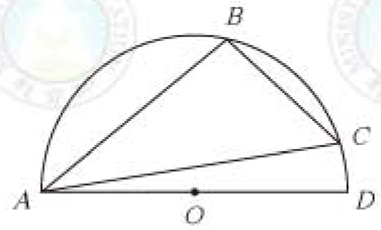


(A) $\angle 1$ (B) $\angle 2$ (C) $\angle 3$ (D) $\angle 4$

答：

例17 Example

如右圖，$\overline{AD}$ 是圓 O 的直徑，B、C 兩點在 $\overset{\frown}{AD}$ 上，如要在 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一點 M，使得 $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$，則下列四個作法中，哪一個是錯誤的？



(A) 作 $\angle BAC$ 之平分線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M。

(B) 作 $\overline{BC}$ 中垂線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M。

(C) 自 A 作 $\overline{BC}$ 邊的中線延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M。

(D) 作 O 與 $\overline{BC}$ 邊的中點連線，延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M。

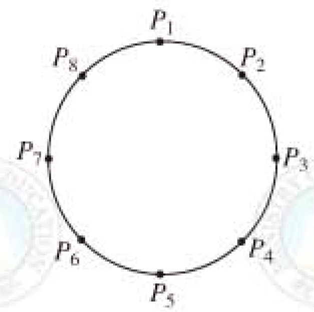
解題說明

因為圓心到 $\overline{BC}$ 中點的連線會垂直平分 $\overline{BC}$，由線對稱性知 (B) 和 (D) 正確。由圓周角性質，也知道 (A) 是正確的。

答：(C)。

隨・堂・練・習

如右圖，圓上有八個點 P_1、$P_2 \cdots$、P_8，且此八點將圓周分成八等分。若 $\triangle P_3P_5P_7$、梯形 $P_2P_3P_7P_8$、四邊形 $P_1P_2P_3P_7$ 的周長分別為 a、b、c，則下列關係何者正確？



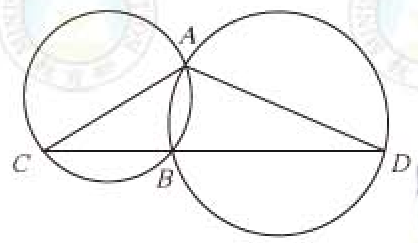
(A) $a > b > c$ (B) $a = b = c$

(C) $a > c = b$ (D) $c = b > a$

答：

例18 Example

如右圖，兩圓交於 A、B 兩點。若 C、B、D 三點共線，$\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$，$\overset{\frown}{ABC} = 160^\circ$，求 $\overset{\frown}{ABD}$。



(A) 100° (B) 160° (C) 200° (D) 280°

解題說明

由題意得 $\angle ACB$ 所對的弧度 $= 160^\circ - 90^\circ = 70^\circ$

所以 $\angle ACB = 35^\circ$ 圓周角為所對弧度之半

同理 $\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

因此 $\angle ABD = 35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$ 外角等於兩內對角之和

故 $\overset{\frown}{ABD} = 360^\circ - \overset{\frown}{AD} = 360^\circ - 80^\circ \cdot 2 = 200^\circ$

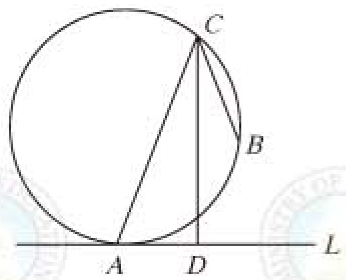
答：(C)。

隨・堂・練・習

如右圖，圓上有 A、B、C 三點，直線 L 與圓相切於 A，$\overline{CD}$ 為 $\angle ACB$ 的角平分線，且與 L 交於 D 點。若 $\overset{\frown}{AB} = 80^\circ$，$\overset{\frown}{BC} = 60^\circ$，求 $\angle ADC$。

(A)80° (B)85° (C)90° (D)95°

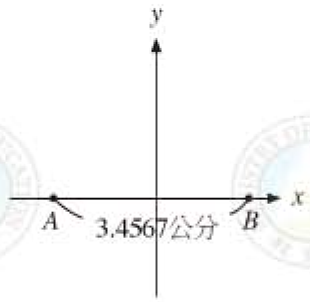
答：



例19 Example

如右圖，A、B 兩點在 x 軸上，$\overline{AB} = 3.4567$，且 y 軸為 $\overline{AB}$ 的中垂線。若在平面上找一點 C，使得 $\overline{AC} = 1.5$，$\overline{BC} = 3$，則 C 點可能在下列何處？

(A)x 軸 (B)y 軸 (C) 第一象限 (D) 第三象限



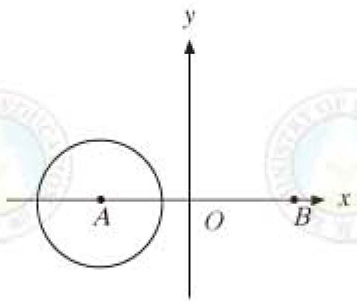
解題說明

以 A 為中心，1.5 為半徑作一圓，則 C 在此圓上。

因為 A 和 O 點的距離 $= \frac{3.4567}{2} > 1.5$，所以此圓如右圖所示，C 不可能在第一象限或 y 軸上。

由於 1.5、3、3.4567 構成一三角形的三邊長，因此 C 不可能在 x 軸上。

答：(D)。



隨・堂・練・習

在坐標平面上有五個圓，其圓心坐標與半徑如右表所示，則下列哪一個圓與圓 O 沒有交點？

(A) 圓 A (B) 圓 B (C) 圓 C (D) 圓 D

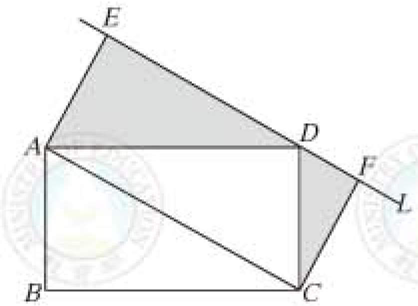
答：

	圓心坐標	半徑
圓 O	$(0, 0)$	10
圓 A	$(6, 0)$	3
圓 B	$(6, 0)$	4
圓 C	$(6, 0)$	5
圓 D	$(6, 0)$	6

例20 Example

如右圖，$ABCD$ 為矩形，過 D 作直線 L 與 $\overline{AC}$ 平行，再分別自 A、C 作直線與 L 垂直，垂足為 E、F。若圖中兩灰色部分的面積和為 a，$\triangle ABC$ 面積為 b，求 $a : b$。

(A)$1:1$ (B)$1:\sqrt{2}$ (C)$1:\sqrt{3}$ (D)$1:2$



解題說明

由圖知 $a = \frac{1}{2}(\overline{CF} \times \overline{FD} + \overline{AE} \times \overline{ED}) = \frac{1}{2}(\overline{FD} + \overline{ED}) \times \overline{AE}$ $\overline{AE} = \overline{CF}$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AE} = \triangle ACD$ 的面積 $= \triangle ABC$ 的面積 $= b$

所以 $a : b = 1 : 1$。

答：(A)。

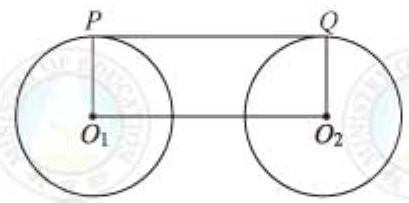
隨・堂・練・習

如右圖，圓 O_1、圓 O_2 為大小不同的兩圓，且 P、Q 分別為圓上的一點。若 $\overline{PQ}$ 是兩圓的公切線，則下列敘述何者正確？

(A) $\overline{PQ} // \overline{O_1O_2}$ (B) $\overline{PO_1} // \overline{QO_2}$

(C) $\overline{PO_1} \perp \overline{O_1O_2}$ (D) $\overline{QO_2} \perp \overline{O_1O_2}$

答：

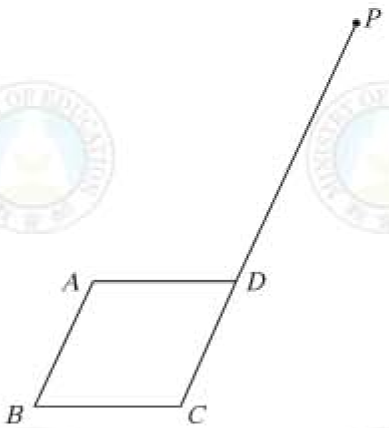


面積和體積

在小學我們已經學過很多面積和體積的計算，學過更多的幾何性質後，兩者的結合有了更豐富的例子。

例21 Example

如右圖，四邊形 $ABCD$ 為一平行四邊形，P 在直線 CD 上，且 $\overline{PD}=2\overline{DC}$。甲、乙兩人想過 P 點作一直線，將平行四邊形分成兩個等面積的區域，其作法如下：



甲：取 $\overline{AD}$ 中點 E，作直線 PE，即為所求。

乙：連接 $\overline{BD}$、$\overline{AC}$ 交於 O，作直線 PO，即為所求。

對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？

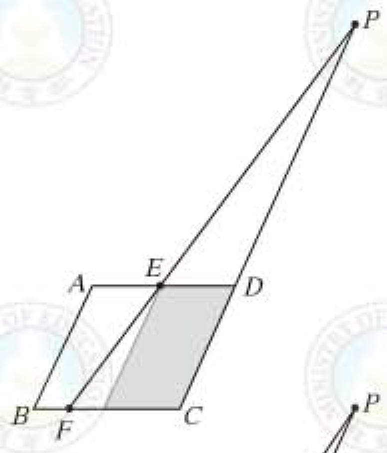
(A) 甲、乙皆正確　(B) 甲、乙皆錯誤

(C) 甲正確，乙錯誤　(D) 甲錯誤，乙正確

解題說明

答案是 (D)：甲錯誤、乙正確。

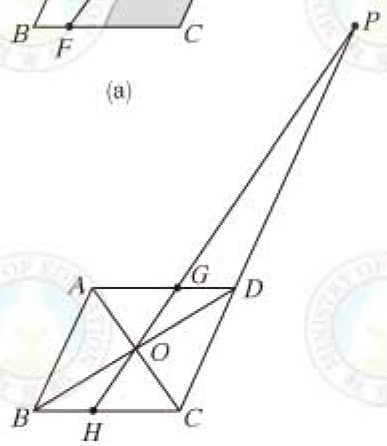
甲的方法（圖(a)）：



(a)

由於梯形 $EFCD$ 面積顯然大於四邊形 $ABCD$ 面積的一半（灰色部分），所以錯誤。

乙的方法（圖(b)）：



(b)

因為 O 為 $\overline{BD}$ 的中點，

因此　$\triangle ODG \cong \triangle OBH$　**ASA 全等性質**

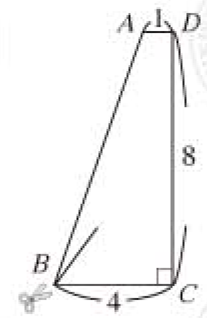
所以　梯形 $ABHG$ 的面積 $=\triangle ABD$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot ABCD$ 面積

答：(D)。

隨・堂・練・習

如右圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，$\overline{CD}\perp\overline{BC}$，其中 $\overline{AD}=1$、$\overline{BC}=4$、$\overline{CD}=8$。今自 B 點剪出 $\overline{BN}$，使得 $\overline{BN}$ 將梯形分成兩塊面積相等的圖形。若 N 在 $\overline{CD}$ 上，求 $\overline{DN}$。

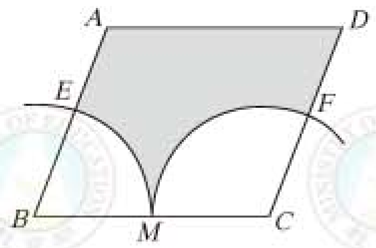


(A)1　(B)3　(C)4　(D)5

答：

例22 Example

如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{BC}=12$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，M 到 $\overline{AD}$ 的距離為 8。若分別以 B、C 為圓心，$\overline{BM}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 於 E、F 兩點，求圖中灰色區域的面積。



(A)$96-12\pi$　(B)$96-18\pi$

(C)$96-24\pi$　(D)$96-27\pi$

解題說明

由於同側內角互補，且 $\overline{BM}=\overline{CM}$，所以兩個白色扇形的面積合起來是一個半圓的面積，由於

平行四邊形 $ABCD$ 面積 $=\overline{BC}\cdot$（M 到 $\overline{AD}$ 的距離）

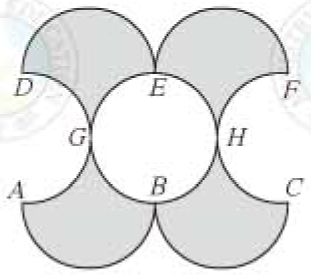
$=12\cdot 8=96$

所以　灰色區域面積 $=96-\dfrac{\pi\cdot 6^2}{2}=96-18\pi$

答：(B)。

隨·堂·練·習

如右圖，$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{AGD}$、$\overset{\frown}{BGE}$、$\overset{\frown}{BHE}$、$\overset{\frown}{CHF}$ 皆為直徑 2 的半圓。求灰色區域的面積。

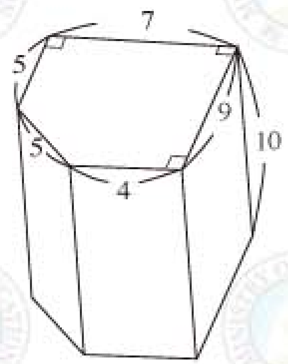


(A)4　(B)8　(C)2π　(D)4π

答：

例 23 Example

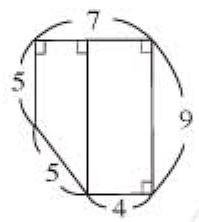
如右圖，柱體的兩底面為全等的五邊形，側面均為垂直於兩底面的長方形。根據右圖的數據及符號，求此柱體的體積。



(A)570　(B)590　(C)610　(D)630

解題說明

底面可分割成一個矩形和梯形。如右圖，



因此

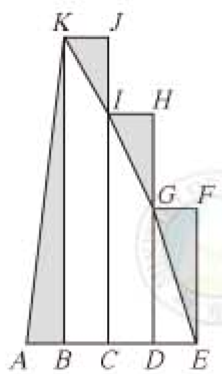
$$\text{底面積} = 4 \times 9 + \frac{(5+9)}{2} \times (7-4) = 57$$

$$\text{體積} = 57 \times 10 = 570$$

答：(A)。

隨·堂·練·習

如右圖，三個四邊形 $BCJK$、$CDHI$、$DEFG$ 均為矩形，且 A、B、C、D、E 五點在同一直線上。已知 I、G 兩點分別在 $\overline{CJ}$、$\overline{DH}$ 上，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$。若 $\triangle ABK$ 的面積為 a，$\triangle EFG$、$\triangle GHI$、$\triangle IJK$ 的面積和為 b，求 $a : b$。



(A)1 : 1　(B)1 : 2　(C)1 : 3　(D)2 : 3

答：

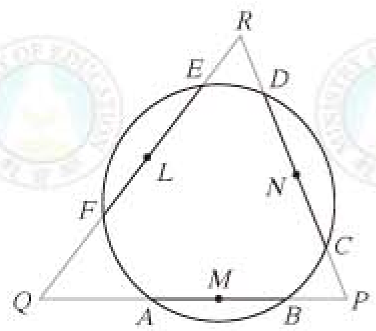
內心、重心、外心

利用多邊形的內切圓和外接圓的概念，可定義多邊形的內心和外心，其中內心到多邊形的各邊等距，也可以想成是各頂點角平分線的交點；另外，外心則到多邊形的各頂點等長，也可以想成是各邊中垂線的交點。

顯然，一般的多邊形並不見得有外心和內心，但是三角形卻一定有內心和外心。換句話說，三角形的三條角平分線必交於一點，三邊的中垂線必交於一點。我們要特別強調，正多邊形的內心和外心，就是其對稱軸的交點。另外，直角三角形的外心，就是斜邊中點。

例 24 Example

如右圖，圓上三弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，欲在圓內找一點，使其到三弦的距離相等。下列四種作法中，哪一種是正確的？



(A) 作 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{CD}$ 的中垂線的交點。

(B) 作 $\angle FAB$ 的角平分線與 $\angle ABC$ 的角平分線的交點。

(C) 取 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 三邊中點 M、N、L，作 $\overline{MN}$ 的中垂線與 $\overline{ML}$ 的中垂線的交點。

(D) 分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P，分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 Q，作 $\angle P$ 的角平分線與 $\angle Q$ 的角平分線的交點。

解題說明

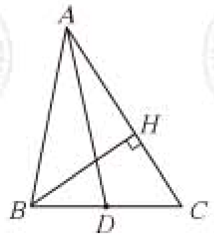
本題是要作上圖中 $\triangle PQR$ 的內心，

由於內心是角平分線的交點，知 (D) 是答案。

答：(D)。

隨·堂·練·習

如右圖，$\overline{AD}$ 是△ ABC 的中線， H 點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$。若 $\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=14$，連接 $\overline{DH}$，求 $\overline{DH}$。

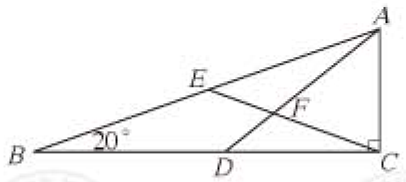


(A)4 (B)5 (C)6 (D)7

答：

例25 Example

如右圖，△ ABC 中，$\angle C=90^\circ$，D 在 $\overline{BC}$ 上，E 為 $\overline{AB}$ 之中點，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 相交於 F，且 $\overline{AD}=\overline{DB}$。若 $\angle B=20^\circ$，求 $\angle DFE$。



(A)40° (B)50° (C)60° (D)70°

解題說明

因為 E 是直角三角形 ABC 斜邊的中點，所以 E 是△ ABC 的外心，因此 $\overline{BE}=\overline{EC}$，得 $\angle FEA=20^\circ \cdot 2=40^\circ$。

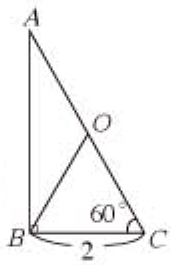
又 $\angle DAB=\angle DBA=20^\circ$ $\quad \overline{AD}=\overline{BD}$

所以 $\angle DFE=\angle DAB+\angle FEA=20^\circ+40^\circ=60^\circ$

答：(C)。

隨·堂·練·習

如右圖，△ ABC 中 $\angle ABC=90^\circ$，O 為△ ABC 的外心，$\angle C=60^\circ$，$\overline{BC}=2$。若△ AOB 面積 $=a$，△ OBC 面積 $=b$，則下列敘述何者正確？



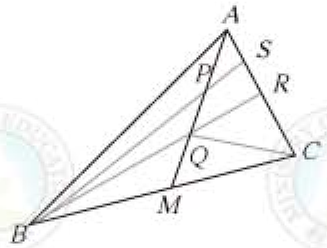
(A)$a>b$ (B)$a<b$ (C)$a-b=0$ (D)$a+b=4$

答：

另外，我們知道三角形的三條中線也會交於一點，稱為重心。重心到頂點的距離和重心到中點的距離比為 2 ： 1，而三條中線將三角形分割為 6 個面積相等的三角形。

例26 Example

如右圖，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$，$P$、$Q$ 兩點在 $\overline{AM}$ 上，其中 $\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為△ ABC 的重心。若兩直線 BP、BQ 與 $\overline{AC}$ 分別交於 S、R 兩點，則下列關係何者正確？



(A) $\overline{AS}=\overline{SR}$ (B) $\overline{AR}=\overline{RC}$ (C) $\overline{QB}=\overline{QC}$ (D) $\overline{QR}=\overline{PS}$

解題說明

因為 Q 為重心，所以 $\overline{BR}$ 是△ ABC 的中線，即 $\overline{AR}=\overline{RC}$

答：(B)。

2-3 自我評量

1. 已知小娟家的地板全由同一形狀且大小相同的地磚緊密地舖成。若此地磚的形狀是一正多邊形，則下列何者不可能是此地磚的形狀？

(A) 正三角形 (B) 正方形 (C) 正五邊形 (D) 正六邊形

答：

2. 已知有長 3 公分、6 公分之兩線段，下列敘述何者錯誤？

(A) 若有另一長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

(B) 若有另一長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

(C) 若有另一長為 $3\sqrt{5}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形。

(D) 若有另一長為 $3\sqrt{3}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形。

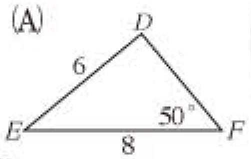
答：

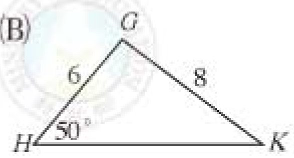
3. 甲、乙、丙、丁、戊五人各站在不同的位置。已知乙在甲的正西方 2 公尺處，丙在甲的正東方 3 公尺處，丁在甲的正北方 6 公尺處。若戊在丙的正北方 m 公尺處，使得乙、丁、戊的位置恰在一直線上，求 m 的值。

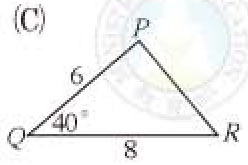
(A)9 (B)12 (C)15 (D)18

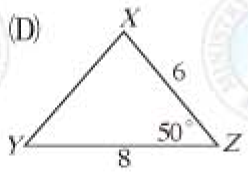
答：

4. 已知△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\angle BAC=50^\circ$。請問下列四個三角形中，哪一個與△ABC 相似？

(A)


(B)


(C)


(D)


答：

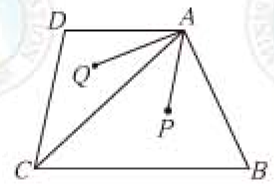
5. 如右圖，有三個大小相同的圓，其中各有長度分別為 5、7 的兩弦，且甲、乙、丙分別是各圓與其兩弦形成的灰色區域。根據圖中圓與弦的位置，判斷甲、乙、丙面積的大小關係為何？

(A) 甲＞乙＞丙 (B) 甲＞丙＞乙

(C) 甲＞乙＝丙 (D) 甲＝乙＝丙

答：

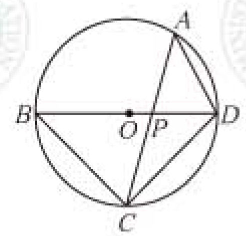
6. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$、$\angle DCB=80^\circ$、$\angle D=100^\circ$。若 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心，求 $\angle PAQ$。



(A)60° (B)70° (C)80° (D)90°

答：

7. 如右圖，$\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，弦 $\overline{AC}$ 未過圓心 O，則下列哪一個敘述是正確的？



(A)O 是△PCD 的外心 (B)O 是△APD 的外心

(C)O 是△ACD 的外心 (D)O 是△BCP 的外心

答：

2-4 綜合解題

本節將綜合國中所學的數學舉例說明如何解題。在小學時，我們學過小數化成分數，以及分數化成小數。例如$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{11}{8}=1.375$等等，這些都是屬於分子除以分母可以除盡的例子。但有些是分子除以分母除不盡的例子，如$\frac{1}{3}$。像這樣的例子要如何記成小數呢？

由右邊的直式計算，知道

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots$$

$$\begin{array}{r} 0.333\cdots \\ 3\,\overline{)\,10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1\cdots \end{array}$$

這個小數是一種新的小數，它會無窮無盡的一直往右跑，而且小數點後會出現一直重複的現象，像這樣的小數，我們稱為<u>循環小數</u>。

在數學上，我們將循環小數 $0.333\cdots$，簡記成$0.\overline{3}$，其中橫槓表示重複出現的意思。由上面的直式計算得到$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$。

我們再舉例說明循環小數。由右邊 $1\div 6$ 的直式計算知道，商到小數第 3 位以後，會重複第 2 位的數字，所以

$$\frac{1}{6}=0.1666\cdots=0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r} 0.166\cdots \\ 6\,\overline{)\,10} \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array}$$

注意到，商之所以會出現循環的現象，是因為在計算的過程中有餘數重複出現的現象（見右邊兩例中的紅色數字）。

隨．堂．練．習

$\frac{1}{7}$如何用循環小數來表示？

例 1 Example

將$\frac{19}{27}$化成小數，則小數點後第 122 位數為何？

(A)0 (B)3 (C)7 (D)9

$$\begin{array}{r} 0.703 \\ 27\,\overline{)\,190} \\ \underline{189} \\ 100 \\ \underline{81} \\ 19 \end{array}$$

解題說明

由直式計算知道

$$\frac{19}{27}=0.\overline{703}$$

也就是，商在小數點後每 3 個位數會重複出現一次。

現要求小數點後 122 位數的值。因為每 3 個位數重複一次，所以只要知道 $122\div 3$ 的餘數是多少，就能知道答案。因為 $122\div 3$ 餘 2，所以小數點後第 122 位是 0。

答：(A)。

至於一循環小數，如$0.\overline{909}$等於哪一個分數，在高中數學課程將會學到。

我們在前面幾節一直強調，解題要先觀察再做答案，而不要一看到題目就急著做下去，例 2 可以說明觀察的好處。

例 2 Example

下表是甲、乙、丙、丁四組數據。判斷哪一組數據的平均數最小？

(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁

甲	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92
乙	76	76	76	76	76	76	86	86	86	86	86	86
丙	72	72	72	78	78	78	84	84	84	90	90	90
丁	70	70	70	70	80	80	80	80	90	90	90	90

解題說明

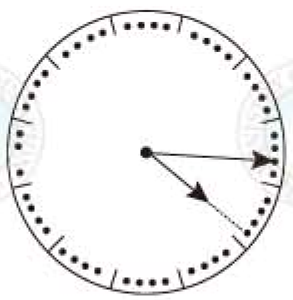
本題當然可以直接計算四組的平均數，但這樣做要花費太多的時間，並且容易做錯。先觀察四組數據的特性，再做答。首先很容易觀察到乙、丙的平均數應該一樣（如 $90+72=86+76$，$78+84=76+86$），所以乙、丙絕對不是答案，因此只要比較甲、丁即可。從比對甲、丁兩組數量就很快得知甲的平均數大於丁的平均數。

答：(D)。

例 3 是一個訓練邏輯思考的題目，解題不需要利用任何公式。

例 3 Example

如右圖，在地面上有一個鐘，鐘面的 12 個粗線刻度是整點時時針（短針）所指的位置。根據圖中時針與分針（長針）的位置，該鐘面所顯示的時刻在下列哪一個範圍內？

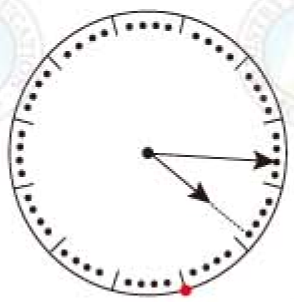


(A)3 點～4 點　(B)6 點～7 點

(C)8 點～9 點　(D)10 點～11 點

解題說明

首先要先決定 12 點的位置在哪裡。由圖知，時針還要再走 1 小格才會到達整點，也就是分針還要走 $60 \div 5 = 12$（小格）才會到達時鐘刻度 12 的位置，因此右圖紅點處即為 12 的位置。

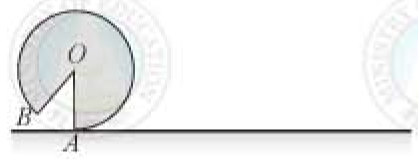


由此得知，時鐘的時刻是 10 點 48 分。

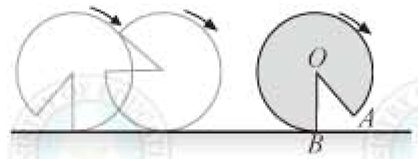
答：(D)。

例 4 Example

如圖 (a)，水平面上有一面積為 30π 平方公分的灰色扇形 OAB，其中 $\overline{OA}$ 的長度為 6 公分，且與地面垂直。若在沒有滑動的情形下，將圖 (a) 的扇形向右滾動至 $\overline{OB}$ 垂直地面為止，如圖 (b) 所示，則 O 點移動多少公分？



(a)



(b)

(A)20　(B)24　(C)10π　(D)30π

解題說明

由題意，知 O 點移動的距離等於由圓上 A 點到 B 點的弧長。

已知扇形面積 $=30\pi$，半徑 $=6$。利用扇形面積和弧長的公式：

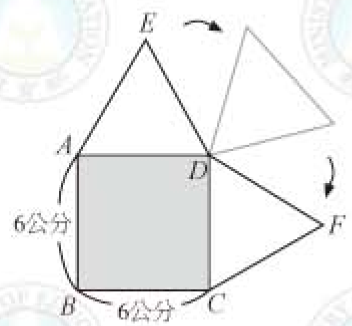
$$扇形面積=\frac{弧長\times半徑}{2}$$

得　$$弧長=\frac{2\times 30\pi}{6}=10\pi$$

答：(C)。

隨・堂・練・習

如右圖，有一個邊長為 6 公分的正方形 $ABCD$，在此正方形的兩邊上放置兩個邊長為 6 公分的正三角形（$\triangle ADE$ 與 $\triangle FDC$）。請問當 $\triangle ADE$ 以 D 為圓心順時針旋轉至與 $\triangle FDC$ 完全重合時，E 點所經過的路線長為多少公分？



(A)7π　(B)9π　(C)12　(D)18

答：

在前面強調過，計算時要多利用運算規則，例 5 就是這樣的例子。

例 5 Example

已知 $1^2+1=2^2-2$，

$2^2+2=3^2-3$，

$3^2+3=4^2-4$，

$\vdots$

$99^2+99=100^2-100$

若 $1123^2+1123+2248+1125=a^2$，且 $a>0$，則 $a=$？

(A)1124 (B)1125 (C)1126 (D)1127

解題說明

由本題的說明，知

$$\begin{aligned}&1123^2+1123+2248+1125\\&=(1123+1)^2-(1123+1)+2248+1125\\&=1124^2-1124+2248+1125\\&=1124^2+2\times1124+1=(1124+1)^2\end{aligned}$$

答：(B)。

事實上，如果觀察算式中各數的個位數，也可以知道答案是 (B)。

隨・堂・練・習

已知 $3^2-1^2=8$，

$4^2-2^2=12$，

$5^2-3^2=16$，

$\vdots$

$(101)^2-99^2=400$

求 $1998^2+4\times1999-1999^2$ 的值。

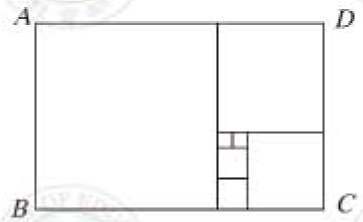
(A) -3997 (B)799 (C)1997 (D)3999

答：

例 6 是綜合幾何和列式的問題。

例 6 Example

右圖為 7 個正方形紙板緊密地拼成長方形 $ABCD$ 的方式。求 $\overline{AB}:\overline{AD}=$？

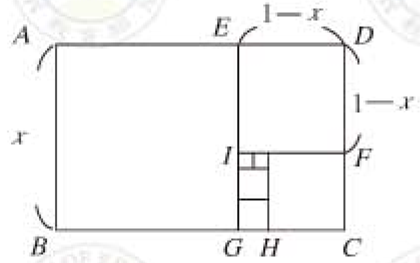


(A)12 ： 19 (B)21 ： 23

(C) $\sqrt{2}:1$ (D) $(\sqrt{5}+1):2$

解題說明

設 $\overline{AD}=1$，$\overline{AB}=x$，如圖。



則 $\overline{DF}=\overline{ED}=1-x$，

$\overline{HC}=\overline{CF}=x-(1-x)=2x-1$，

$\overline{GH}=1-x-(2x-1)=2-3x$，

但因為最小的正方形邊長 $=\dfrac{1}{2}\overline{GH}$，

所以 $\overline{GI}=\dfrac{5}{2}\cdot\overline{GH}=\dfrac{5}{2}\cdot(2-3x)$

又因 $\overline{GI}=\overline{CF}$

得 $\dfrac{5}{2}(2-3x)=2x-1$

即 $10-15x=4x-2$

化簡得 $19x=12$，解得 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=x=\dfrac{12}{19}$，因此 $\overline{AB}:\overline{AD}=12:19$。

答：(A)。

我們常常將問題列成方程式後，對原問題較能清晰的思考出如何解題，例 7 可檢驗你的數感。

例 7 Example

右表為小美採買火鍋料的收據，但因污損幾個重要數據無法辨識。根據下表判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

(A) 粉絲比茼蒿多 2 包

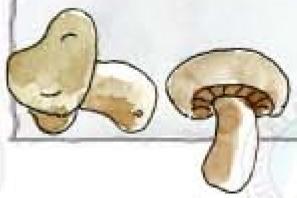
(B) 茼蒿比粉絲多 2 包

(C) 粉絲比茼蒿多 4 包

(D) 茼蒿比粉絲多 4 包

品名	售價（元/包）	數量（包）	金額（元）
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16
應付總額：740



解題說明

由表知，買粉絲和茼蒿的錢為

$740-(178+264+75+17\times 2)=189$

設買粉絲 x 包，買茼蒿 y 包，則

$39x+30y=189$

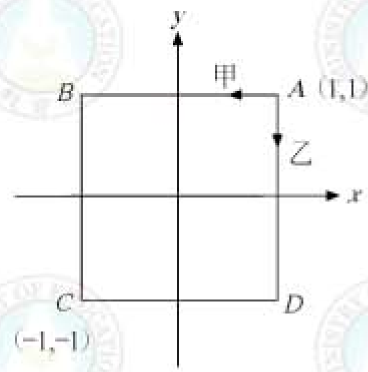
可化簡為　$13x+10y=63$

其中 x 、 y 均為正整數或 0 。從方程式兩邊係數的個位數來看 x 一定是 1 ，此時 $y=5$ 。

答：(D) 。

隨．堂．練．習

如右圖，坐標平面有一正方形 $ABCD$ ， A 、 C 的坐標分別為 $(1,1)$ 、 $(-1,-1)$ 。已知甲、乙兩人在 A 點第 1 次相遇後，甲自 A 點以每秒 a 公尺的速率，沿著正方形的邊以逆時針方向等速行走；乙自 A 點以每秒 b 公尺的速率，沿著正方形的邊以順時針方向等速行走，試回答下面問題。



(1) 若 $a=7b$ ，則甲、乙第 2 次相遇在何處？

(A) $(1,0)$　(B) $(1,1)$

(C) $(0,1)$　(D) $(-1,1)$

答：

(2) 若 $a\neq 7b$ ，且甲、乙第 2 次相遇在 D 點，則此兩人第 91 次相遇在何處？

(A) A 點　(B) B 點

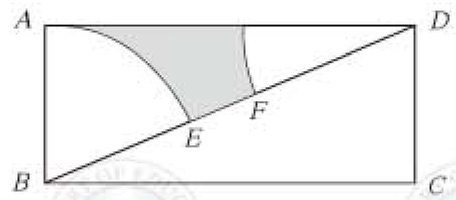
(C) C 點　(D) D 點

答：

例 8 是面積的問題，應用對稱概念有助於解題。

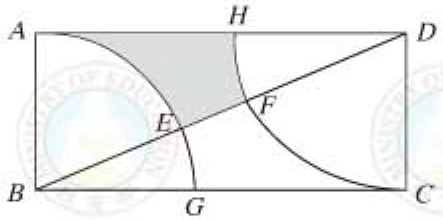
例 8 Example

如右圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形， $\overline{BD}$ 為對角線。今分別以 B 、 D 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{BD}$ 於 E 、 F 兩點。若 $\overline{AB}=8$ ， $\overline{BC}=5\pi$ ，求圖中灰色區域的面積。



(A) 4π　(B) 5π　(C) 8π　(D) 10π

解題說明



若將原圖畫成如右圖，由對稱性或 $\angle EBG = \angle FDH$，$\overline{AB} = \overline{CD}$，可知扇形 BEG 和扇形 DFH 全等。因此，

扇形 ABE 面積＋扇形 DFH 面積＝$\frac{1}{4}$ 圓的面積，

所以　灰色區域面積 $= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \frac{1}{4} \cdot \overline{AB}^2 \cdot \pi$

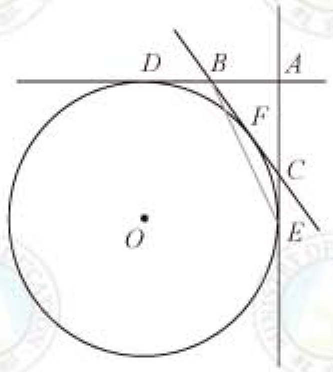
$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5\pi - \frac{1}{4} \cdot 8^2 \cdot \pi$

$= 20\pi - 16\pi = 4\pi$

答：(A)。

例 9 是過圓外一點兩切線等長性質和畢氏定理的綜合應用。

例 9 Example



如右圖，在△ABC 中，$\overline{AB} = 3$，$\overline{AC} = 4$，$\overline{BC} = 5$。若三直線 AB、AC、BC 分別與圓 O 切於 D、E、F 三點，求 $\overline{BE}$。

(A)6　(B)$\frac{25}{3}$　(C)$\sqrt{45}$　(D)$\sqrt{72}$

解題說明

如上圖，設 $\overline{CE} = x$，$\overline{BD} = y$，

由於過圓外一點的兩切線段等長，因此

$x + y = \overline{BC} = 5$　　$\overline{CE} = \overline{CF}$，$\overline{BD} = \overline{BF}$

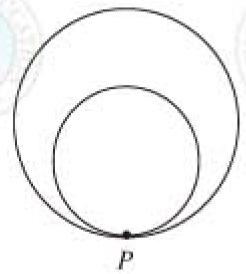
$x + 4 = y + 3$　　$\overline{AD} = \overline{AE}$

得 $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

解得 $\overline{CE} = x = 2$，$y = 3$，因此 $\overline{BE} = \sqrt{(4+2)^2 + 3^2} = \sqrt{45}$。　畢氏定理

答：(C)。

隨．堂．練．習



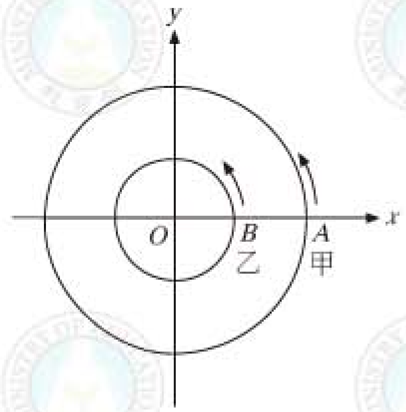
如右圖，大、小兩圓內切於 P 點。今甲、乙兩人分別自 P 點出發，甲沿著大圓圓周，走了 $\frac{1}{4}$ 大圓周長到達位置 A；乙沿著小圓圓周，走了 $\frac{1}{2}$ 小圓周長到達位置 B。若兩圓的半徑分別為 $8m$、$5m$，求 $\overline{AB}$。

(A)$3m$　(B)$\sqrt{39}\ m$　(C)$\sqrt{68}\ m$　(D)$\sqrt{89}\ m$

答：

一般的速度問題是在直線上移動，如果是在圓周上的話，就要注意重複繞圈的現象。

例 10 Example



如右圖，A、B 兩點在 x 軸上。甲、乙兩車分別從 A、B 兩點同時出發，以逆時針方向分別繞大、小圓周行駛。若甲車每 35 分鐘繞一圈，乙車每 20 分鐘繞一圈，則當乙車剛好繞完第三圈時，甲車位於第幾象限？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四

解題說明

本題在問當乙繞完 3 圈後，甲共繞了多少圈。

因為乙繞完 3 圈共花了 $20 \times 3 = 60$（分），所以甲共繞了

$60 \div 35 = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$ 個圓。

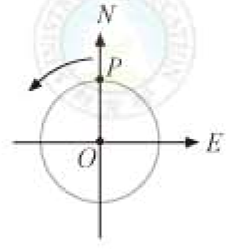
因為 $\frac{1}{2} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$，所以甲車在第三象限。

答：(C)。

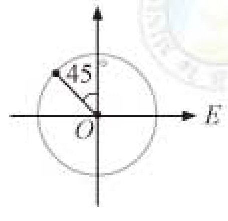
由 $\frac{5}{7}$ 個圓相當於 $\frac{5}{7} \times 360^\circ \fallingdotseq 257^\circ$，也可看出甲車在第三象限。

隨．堂．練．習

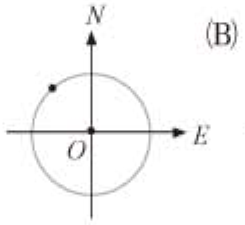
如圖(a)，P點在O點正北方。一機器狗從P點依逆時鐘方向繞著O點作等速率圓周運動，經過1分鐘，其位置如圖(b)所示。若經過101分鐘，則機器狗的位置可用下列哪一個圖形表示？

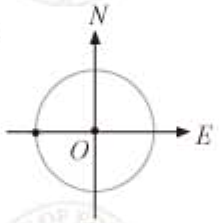


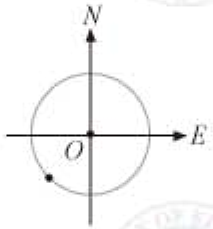
(a)

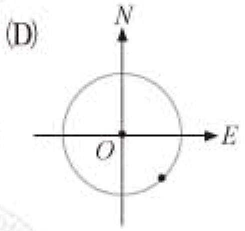


(b)

(A)


(B)


(C)


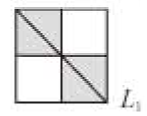
(D)


答：

例11是圖形縮放的例子。

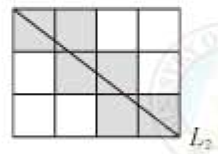
例11 Example

右圖(a)為一長方形，其內部分成4個大小相同的小正方形，且對角線L_1通過2個小正方形(如灰色部分)。



(a)

右圖(b)為一長方形，其內部分成12個大小相同的小正方形，且對角線L_2通過6個小正方形(如灰色部分)。試回答下面問題：



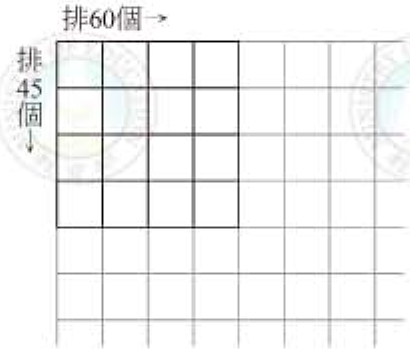
(b)

(1) L_1、L_2是否分別為圖(a)、圖(b)的對稱軸？

(A) L_1、L_2均是　(B) L_1是，L_2不是

(C) L_1不是，L_2是　(D) L_1、L_2均不是

(2) 如右圖，若將2700個大小相同的小正方形緊密地排出一個長邊有60個小正方形、短邊有45個小正方形的長方形後，在此長方形中畫一條對角線，則此對角線通過幾個小正方形？



(A)60　(B)75　(C)90　(D)105

解題說明

(1) 正方形的對角線是對稱軸，而長方形的對角線不是對稱軸。

答：(B)。

(2) 我們注意到$45=3\times15$，$60=4\times15$，所以本題的長方形是圖(b)長方形放大15倍的圖形。由於圖(b)中L_2通過6個小正方形，因此本題長方形對角線會通過$6\times15=90$個小正方形。

答：(C)。

例 12 雖是等差數列的問題，但觀察而不盲目的計算是解題的要點。

例 12 Example

圖 (a) 的正方形內有 9 個數字，數字的總和為 y，求圖 (b) 中五個正方形內所有數字總和為何？（以 y 表示）

3	7	11
15	19	23
27	31	35

(a)

(A) $5y$

(B) $5y+9$

(C) $5(y+9)$

(D) $5y+18$

1	5	9
13	17	21
25	29	33

2	6	10
14	18	22
26	30	34

3	7	11
15	19	23
27	31	35

4	8	12
16	20	24
28	32	36

5	9	13
17	21	25
29	33	37

(b)

解題說明

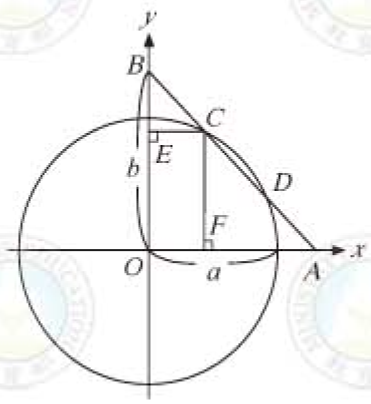
由圖 (b) 可以觀察到，從左邊第一個正方形起，每個正方形的數字是前面一個正方形對應位置的數字加 1。因此每個正方形數字的總和是前面一個正方形數字總和加 9。

這表示這 5 個正方形的數字和正好構成 5 項的等差數列，因此這 5 項的和為第 3 個正方形數字和的 5 倍，即 $5y$。

答：(A)。

例 13 Example

如右圖，圓的圓心為原點 O，半徑為 a，A、F 兩點在 x 軸上，B、E 兩點在 y 軸上，直線 AB 方程式為 $x+y=b$，且 $b>a$。若 $\overline{AB}$ 與圓 O 交於 C、D 兩點，且 $\overline{CF}\perp\overline{OA}$，$\overline{CE}\perp\overline{OB}$。



試回答下列問題：

(1) 矩形 $OFCE$ 中，求對角線 $\overline{EF}$ 的長度。

(A) a　(B) b　(C) $\dfrac{a+b}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

(2) 求矩形 $OFCE$ 的周長。

(A) $2a$　(B) $2b$　(C) $a+b$　(D) $\sqrt{a^2+b^2}$

解題說明

(1) 因為 $OFCE$ 為矩形，所以

$\overline{EF}=\overline{OC}=a$　　$\overline{OC}$ 為圓的半徑

答：(A)。

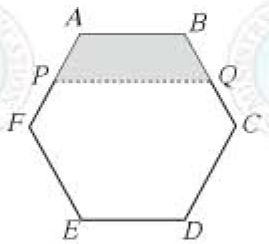
(2) 設 C 的坐標為 (x,y)，則 $\overline{OF}=x$，$\overline{OE}=y$，因此矩形 $OFCE$ 的周長為 $2(x+y)$。但由於 C 在直線 AB 上，因此 (x,y) 滿足 $x+y=b$，所以

$$\text{矩形 } OFCE \text{ 的周長}=2(x+y)=2b$$

答：(B)。

例 14 Example

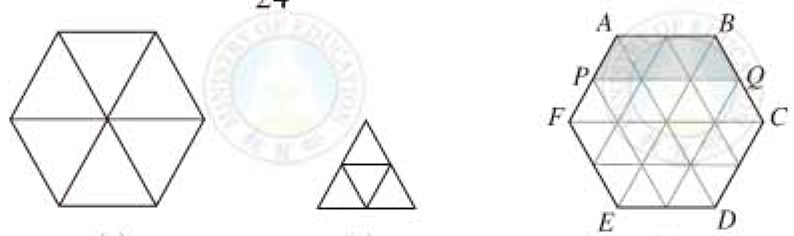
如右圖，有一正六邊形 $ABCDEF$，P、Q 分別是 $\overline{AF}$、$\overline{BC}$ 的中點。若連接 $\overline{PQ}$，則四邊形 $APQB$ 面積佔此正六邊形面積的幾分之幾？



(A) $\dfrac{5}{24}$　(B) $\dfrac{6}{24}$　(C) $\dfrac{7}{24}$　(D) $\dfrac{11}{48}$

解題說明

由於這是正六邊形，因此三條對角線都是線對稱軸，而且將正方形割成 6 個正三角形（圖 (a)）。每個正三角形的中點連線，又將每個正三角形割成 4 個小正三角形（圖 (b)）。畫到原圖上，可得 $4\times 6=24$ 個小正三角形（圖 (c)）。而四邊形 $APQB$（灰色部分）佔 5 個小正三角形，因此四邊形 $APQB$ 佔全正六邊形的 $\dfrac{5}{24}$。



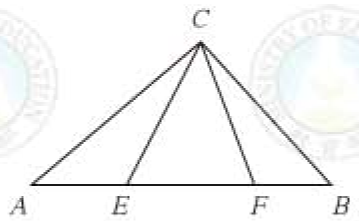
(a)　(b)　(c)

答：(A)。

例15 Example

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 102^\circ$，$\overline{AF} = \overline{AC}$、$\overline{BE} = \overline{BC}$，求 $\angle ECF$。

(A) 34° (B) 39° (C) 45° (D) 56°



解題說明

本題要利用等邊對等角以及三角形內角和為 180°。首先，由圖知

$\angle ACF + \angle BCE = 102^\circ + \angle ECF$ ……(1)

由 $\overline{AC} = \overline{AF}$，得 $\angle ACF = \angle AFC$ ……(2)

由 $\overline{BC} = \overline{BE}$，得 $\angle BCE = \angle BEC$ ……(3)

但 $\angle AFC + \angle BEC + \angle ECF = 180^\circ$ 三角形內角和為 180°

由 (2) 和 (3) 得 $\angle ACF + \angle BCE = 180^\circ - \angle ECF$ ……(4)

由 (1) 和 (4) 得 $102^\circ + \angle ECF = 180^\circ - \angle ECF$

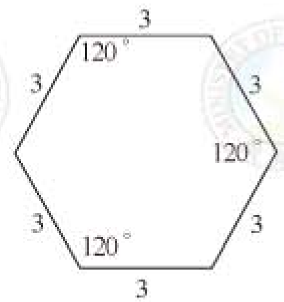
即 $2\angle ECF = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$，解得 $\angle ECF = 39^\circ$。

答：(B)。

底下要利用三角形 SAS 全等性質，來判定圖形是否為正六邊形。

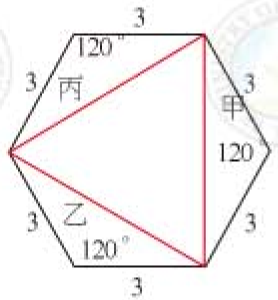
例16 Example

如右圖，有一六邊形，試說明此六邊形為一正六邊形。



解題說明

我們將說明未標示的角都是 120°。如右圖作紅色線段，由 SAS 全等性質，知甲、乙、丙三個三角形全等，因此紅色線段三角形為正三角形，內角均為 60°。



另外，甲、乙、丙三個等腰三角形的底角均為 $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$，因此六邊形三個未知的內角度數均為 $30^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 120^\circ$，所以此六邊形為正六邊形。

例17 Example

小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩質數的和，再將此四質數相乘，乘積即為密碼（例如，生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 和 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145）。已知小華的密碼為 2030，求小華出生在幾月分？

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 12

解題說明

由題意知，2030 為 4 個質數相乘，顯然 $2030 = 2 \times 5 \times 203$，所以 203 是兩個質數相乘，試用 7、13、…除 203，得 $203 = 7 \times 29$，因此

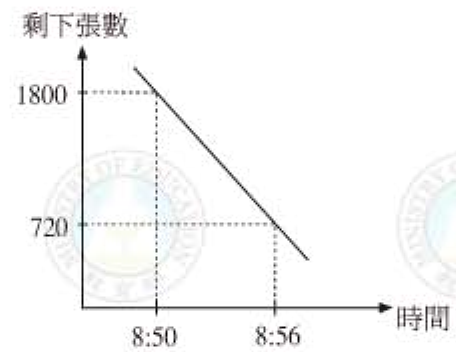
$$2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 29$$

29 一定是日期的一部分，又因為日期最多為 31，所以日期必為 $2 + 29 = 31$，因此月份為 $5 + 7 = 12$，即小華的生日為 12 月 31 日。

答：(D)。

例18 Example

右圖為小美影印資料時剩下張數和時間的關係圖。利用圖中所提供的數據，推估小美在 9：00 時影印的情形是下列哪一種？



(A) 來不及印完 (B) 剛好印完

(C) 提前一分鐘印完 (D) 提前半分鐘印完

解題說明

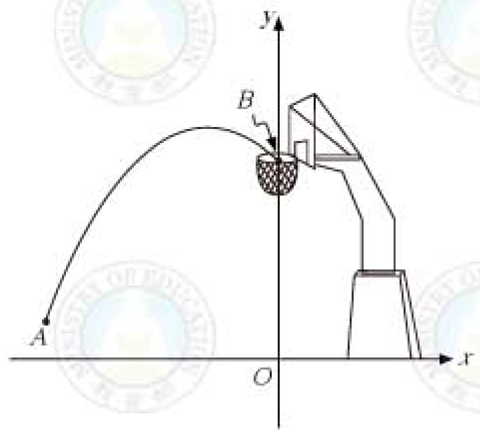
由圖知道小美從 8：50 到 8：56 之間，共印了 $1800 - 720 = 1080$ 張資料。所以印表機的速度是每分鐘印 $\frac{1080}{6} = 180$ 張。剩下的 720 張，需要 $\frac{720}{180} = 4$（分）才能印完，也就是 9：00 時剛好印完。

答：(B)。

例 19 是利用拋物線圖形的性質來辨別二次函數。

例 19 Example

如右圖，有一坐標平面。已知籃框位置 B 點在 y 軸上，今有一選手將球從 A 點的位置投出，球經過的路徑是拋物線，由 B 點空心進籃。若此拋物線是下列某一函數的圖形，則此函數為何？



(A)$y=6-\frac{1}{2}(x+2)^2$　(B)$y=6-\frac{1}{2}(x-2)^2$

(C)$y=6+\frac{1}{2}(x-2)^2$　(D)$y=6+\frac{1}{2}(x+2)^2$

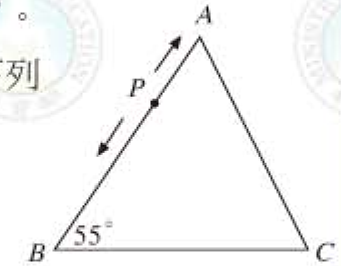
解題說明

由圖知拋物線的對稱軸 $x=h$，滿足 $h<0$，所以答案是 (A)、(D) 之一。又因為此拋物線開口向下，所以 x^2 的係數是負的，因此答案為 (A)。

答：(A)。

2-4 自我評量

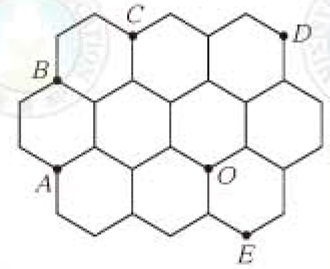
1. 如右圖，在△ ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle B=55^\circ$。若有一點 P 在 $\overline{AB}$ 上移動，則 $\angle BPC$ 可能是下列哪一個角度？



(A)55°　(B)60°　(C)80°　(D)130°

答：

2. 如右圖，有 10 個相同的正六邊形緊密排列在平面上。根據圖中各點的位置，判斷 O 點是下列哪一個三角形的外心？



(A) △ ABD　(B) △ BCD　(C) △ ACD　(D) △ ADE

答：

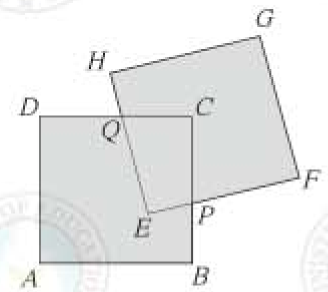
3. 有大小兩個數，兩數的差為 13，且小數比大數的 $\frac{1}{5}$ 倍多 6。若大數為 x，則依題意可列出下列哪一個一元一次方程式？

(A)$\frac{1}{5}x+6-x=13$　(B)$\frac{1}{5}x-(x-6)=13$

(C)$x-\frac{1}{5}x+6=13$　(D)$x-(\frac{1}{5}x+6)=13$

答：

4. 如右圖，將兩個邊長為 12 的正方形 $ABCD$、$EFGH$ 的部分區域重疊在一起，形成一多邊形區域（即多邊形 $ABPFGHQD$）。若此多邊形區域的周長為 70，求四邊形 $EPCQ$ 的周長。



(A)35　(B)26　(C)24　(D)22

答：

附錄一

仁山國中三年甲班兄弟姊妹數統計資料

原始資料

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
兄弟姊妹數(人)	2	1	1	2	0	3	1	0	1	2	0	0	1	1	2

次數分配表

資料值（人）	0	1	2	3
次數（人）				
相對次數				
累積次數				
相對累積次數				

眾數＝________，平均數＝________

中位數（Q_2）＝________，Q_1＝________，Q_3＝________

全距＝____________，四分位距＝________

盒狀圖

附錄二

仁山國中三年甲班三月課外書閱讀資料

原始資料

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
書籍數(本)	1	4	2	1	2	0	2	2	0	1	2	7	0	2	1

次數分配表

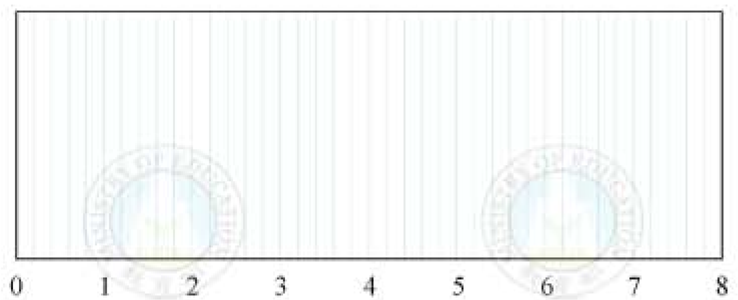
資料值（本）					
次數（人）					
相對次數					
累積次數					
相對累積次數					

眾數＝______，平均數＝______

中位數(Q_2)＝______，Q_1＝______，Q_3＝______

全距＝______，四分位距＝______

盒狀圖



附錄三

智水國中三年B班兄弟姊妹數統計資料

原始資料

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兄弟姊妹數(人)	1	2	0	2	4	1	2	2	1	1	0	2

次數分配表

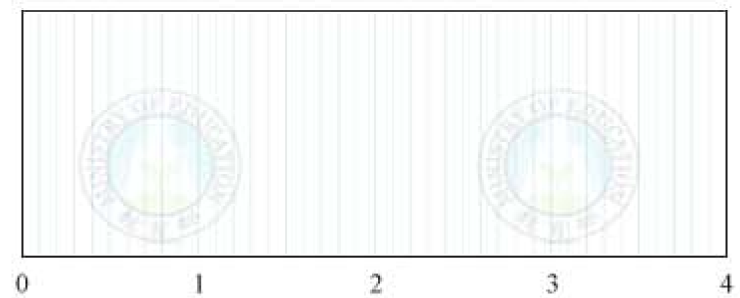
資料值				
次數				
相對次數				
累積次數				
相對累積次數				

眾數＝______，平均數＝______

中位數(Q_2)＝______，Q_1＝______，Q_3＝______

全距＝______，四分位距＝______

盒狀圖



附錄四

智水國中三年B班三月課外書閱讀資料

原始資料

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
書籍數(本)	0	1	26	0	1	2	0	0	1	1	0	4

次數分配表

資料值（本）					
次數（人）					
相對次數					
累積次數					
相對累積次數					

眾數＝_____，平均數＝_____

中位數(Q_2)＝______，Q_1＝______，Q_3＝______

全距＝______，四分位距＝______

盒狀圖

0 5 10 15 20 25 30

附錄五

甲地全年月均溫資料

原始資料

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月均溫(℃)	14	15	20	20	20	25	26	25	20	20	20	15

次數分配表

資料值					
次數					
相對次數					
累積次數					
相對累積次數					

眾數＝_____，平均數＝_____

中位數(Q_2)＝______，Q_1＝______，Q_3＝______

全距＝______，四分位距＝______

盒狀圖

10 15 20 25 30

附錄六

乙地全年月均溫資料

原始資料

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月均溫(°C)	0	0	10	20	20	30	40	40	30	20	20	10

次數分配表

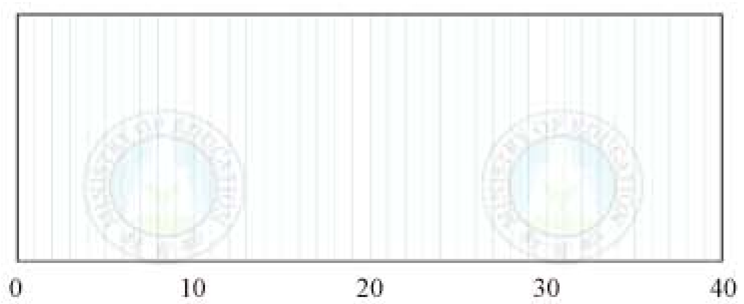
資料值					
次數					
相對次數					
累積次數					
相對累積次數					

眾數＝_____，平均數＝_____

中位數(Q_2)＝_______，Q_1＝_______，Q_3＝_______

全距＝_______，四分位距＝_______

盒狀圖



附錄七

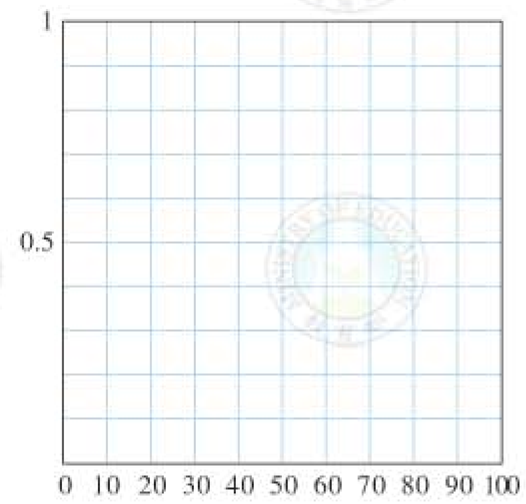
全班30人之數學段考成績記錄

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
分數(分)	60	70	48	73	78	95	65	75	88	90	85	45	50	83	15
座號	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
分數(分)	85	75	98	63	79	50	70	80	60	77	55	78	65	36	66

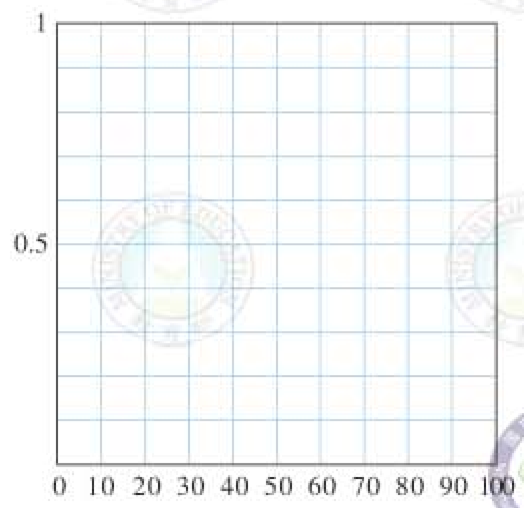
分組次數分配表

資料值(a)	$0\leq a<10$	$10\leq a<20$	$20\leq a<30$	$30\leq a<40$	$40\leq a<50$	$50\leq a<60$	$60\leq a<70$	$70\leq a<80$	$80\leq a<90$	$90\leq a\leq 100$
組中點(新資料值)										
次數										
相對次數										
累積次數										
相對累積次數										

相對次數直方圖



相對累積次數直方圖



附錄八

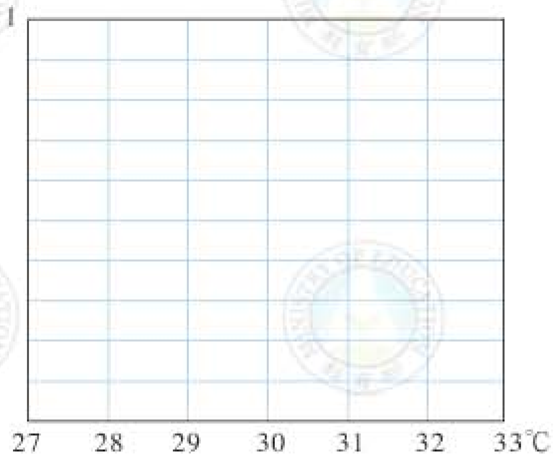
恆春氣象站2007年6月4日的溫度表

觀測時間	1:00	2:00	3:00	4:00	5:00	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
溫度（℃）	28.6	28.5	28.4	28.3	27.9	28.3	29.1	30.4	30.8	31.6	31.9	32.8
觀測時間	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00	24:00
溫度（℃）	32	32.3	31.4	30.7	29.8	29.8	29.6	29	28.6	27.8	28.3	27.7

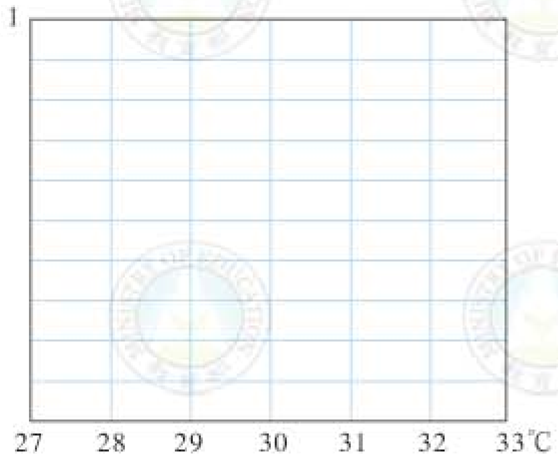
（資料來源：中央氣象局）

分組次數分配表

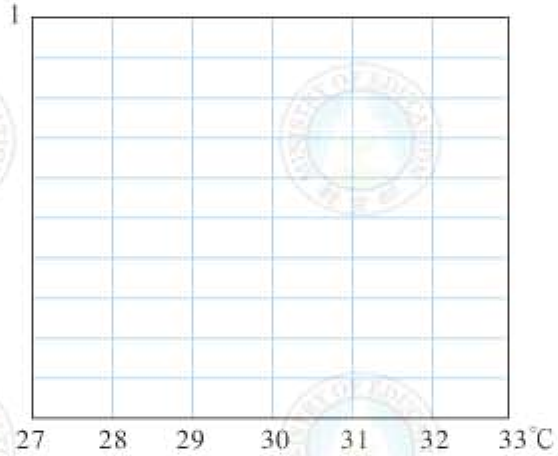
資料值 (a)	$27 \leq a < 28$	$28 \leq a < 29$	$29 \leq a < 30$	$30 \leq a < 31$	$31 \leq a < 32$	$32 \leq a < 33$
組中點（新資料值）						
次數						
相對次數						
累積次數						
相對累積次數						



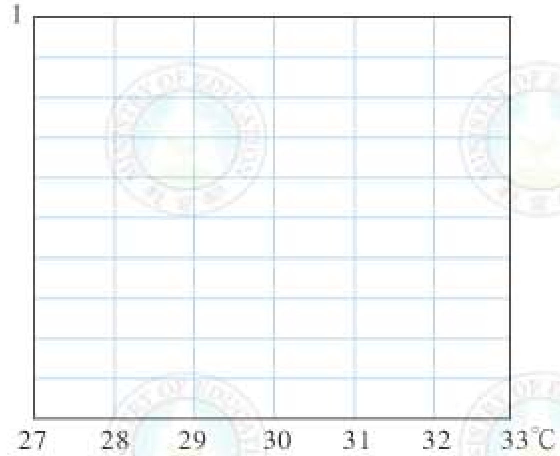
相對次數直方圖



相對累積次數直方圖



相對次數折線圖



相對累積次數折線圖

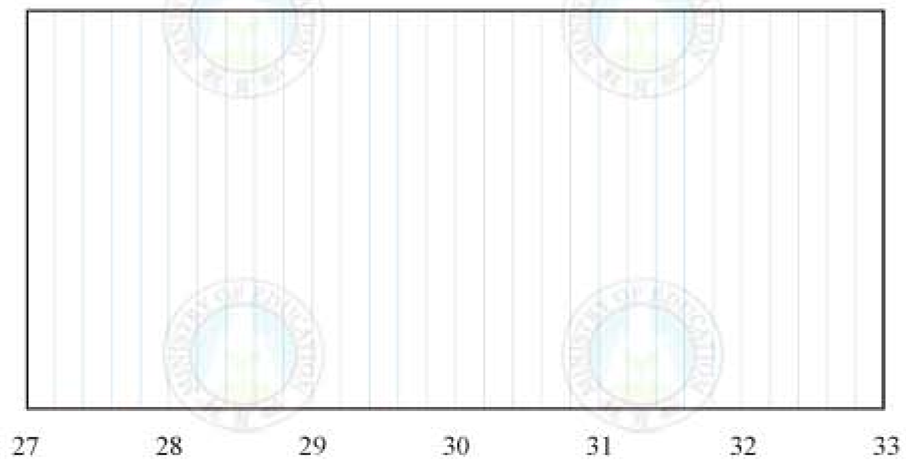
取組中點計算

平均數＝________，中位數（Q_2）＝________

Q_1＝________，Q_3＝________

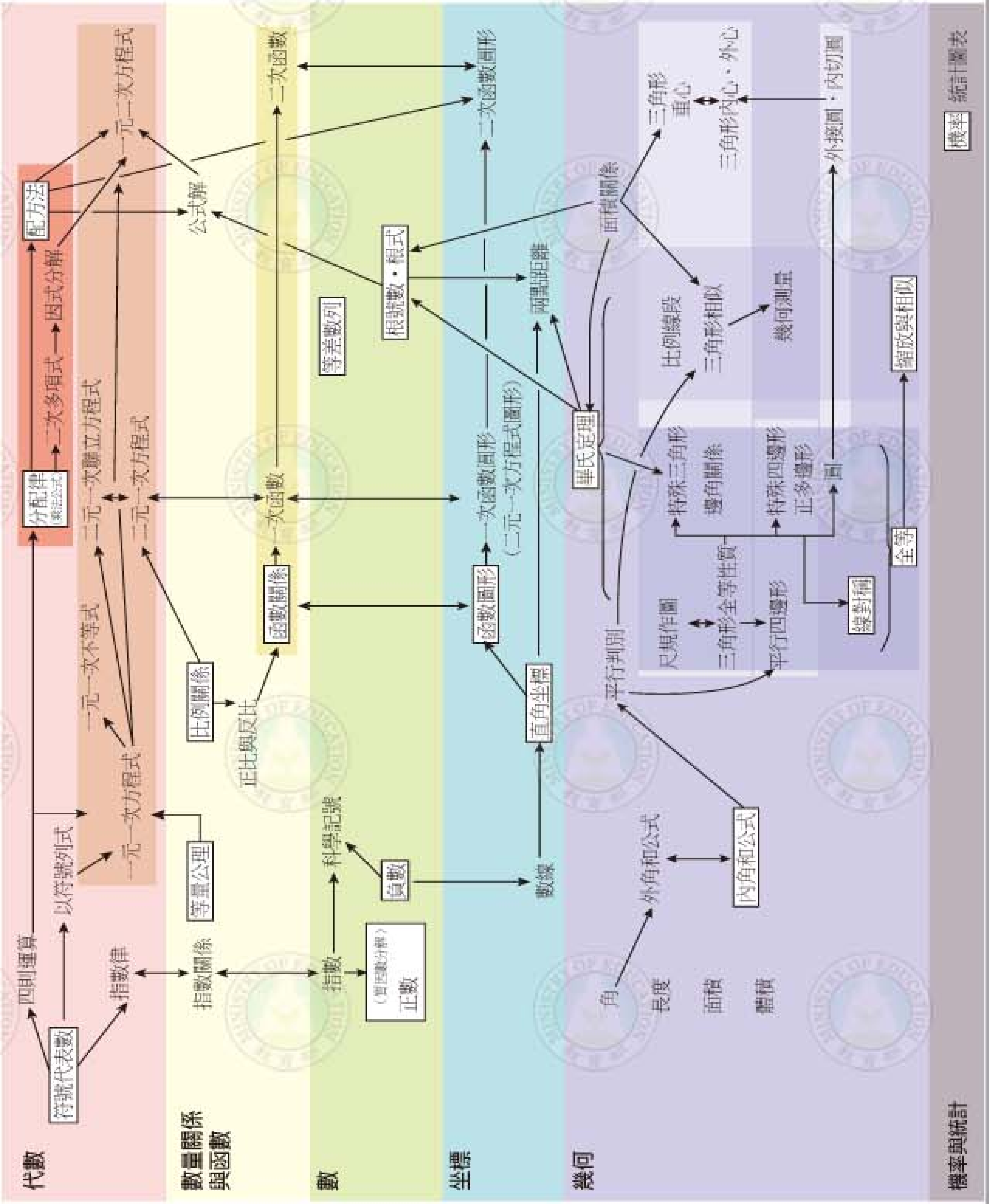
全距＝____________，四分位距＝________

取組中點製作盒狀圖



附錄九

國中數學概念表


代數
數量關係與函數
數
坐標
幾何
機率與統計
符號代表數
四則運算
以符號列式
指數律
一元一次方程式
一元一次不等式
二元一次聯立方程式
二元一次方程式
分配律
乘法公式
二次多項式
因式分解
配方法
一元二次方程式
公式解
等量公理
指數關係
比例關係
正比與反比
函數關係
一次函數
二次函數
指數
（質因數分解）
正數
科學記號
負數
等差數列
根號數・根式
數線
直角坐標
函數圖形
一次函數圖形
（二元一次方程式圖形）
二次函數圖形
兩點距離
角
長度
面積
體積
外角和公式
內角和公式
平行判別
尺規作圖
三角形全等性質
平行四邊形
特殊三角形
邊角關係
特殊四邊形
正多邊形
圓
線對稱
全等
縮放與相似
比例線段
三角形相似
幾何測量
畢氏定理
面積關係
三角形
重心
三角形內心、外心
外接圓、內切圓
機率
統計圖表