十二年國民基本教育課程綱要

國民中小學暨普通型高級中等學校

數學領域

課程手冊

中華民國一一二年五月

院長序

國家教育研究院於民國 100 年 3 月 30 日正式成立，肩負了國內教育研究、課程改革的使命，以「教育政策發展智庫」、「課程測評研發基地」及「領導人才培育重鎮」為願景，規劃長期性、整體性、系統性、前瞻性的研究計畫，為國家課程發展奠立穩固基礎。

國家教育研究院自民國 97 年進行課程綱要研擬之基礎研究，於 102 年起陸續展開與完成十二年國民基本教育課程綱要的研修工作，經教育部高級中等以下學校課程審議會審議通過正式發布。隨著十二年國民基本教育各領域/科目課程綱要發布，國家教育研究院也啟動各領域/科目課程手冊研發的工作計畫，進行課綱理念內涵之解析與實踐方向的指引，提供學校課程與教學設計、教師教學與學習評量實施、以及教材研發與選用之參考。

期待學校、教師、教材研發者以及社會各界，能夠善加應用各領域/科目課程手冊，同時秉持十二年國民基本教育課綱自發、互動、共好的精神，落實素養導向的課程與教學，成就每一個孩子都能適性揚才與終身學習。

國家教育研究院代理院長

郭工賓 謹誌

主編序

十二年國民基本教育課程綱要總綱業於 103 年 11 月 28 日發布，各領域/科目課程綱要之研修工作自 103 年 6 月陸續展開；歷經「十二年國民基本教育課程研究發展會」研議與「教育部高級中等以下學校課程審議會」審議等程序，教育部於 107 年 2 月起陸續發布各領域/科目課程綱要，108 學年度開始，自國民小學、國民中學及高級中等學校一年級起逐年實施。

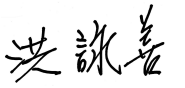
總綱乃整體十二年國民基本教育課程與教學規劃與實施的藍圖，並且引導各領域/科目課綱發展。十二年國教課綱以成就每一個孩子—適性揚才，終身學習為願景，以核心素養為課程連貫與統整發展的主軸，透過素養導向課程與教學的實踐，藉由活力彈性的學校本位課程發展，規劃多元適性的學習，激發學生生命的喜悅與生活的自信，提升學生學習的渴望與創新的勇氣，培養具有自主行動、溝通互動與社會參與的終身學習力、社會關懷心及國際視野的現代優質國民。

為促進各界理解各領域/科目課程綱要，國家教育研究院進行各領域/科目課程綱要研修外，同時發展各領域/科目課程手冊，解析各領域/科目課程綱要內涵特色，並且發展教學示例，提供教材編選、學校課程規劃實施、以及教師教學之參考。

本課程手冊係為參考性質，期待教材研發者、學校課程與教學設計者、教學者等能自行視情境脈絡與需求加以轉化與實踐。本書得以出版，感謝各領域課綱研修小組及課程手冊研發小組成員全心投入與專業貢獻，此外，感謝課推系統學科中心，課程教學輔導團隊教師群提供建議以及參與協作。我們期望本課程手冊之出版，能作為課程綱要與教育現場實踐與對話的橋樑，觸發更大動能，為學生多元適性的學習，共學共創，協力同行。

主編

國家教育研究院課程及教學研究中心



謹誌

中華民國 107 年 12 月

目 次

院長序

主編序

緣 起

壹、發展沿革與特色 3

一、發展沿革 3

二、特色 4

三、新舊課綱差異比較 6

貳、課程架構 11

一、課程架構規劃說明 11

二、高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係 12

參、核心素養與學習重點的呼應說明 21

一、國民小學教育階段 21

二、國民中學教育階段 22

三、普通型高級中等學校教育階段 24

肆、學習內容解析 29

一、國民小學教育階段 29

1 年級學習內容解析 30

2 年級學習內容解析 72

3 年級學習內容解析 169

4 年級學習內容解析 231

5 年級學習內容解析 293

6 年級學習內容解析 346

二、國民中學教育階段 392

7 年級學習內容解析 393

8 年級學習內容解析 425
9 年級學習內容解析 470
三、普通型高級中等學校教育階段 494
10 年級學習內容解析 495
11 年級數學 A 學習內容解析 550
11 年級數學 B 學習內容解析 592
12 年級數學甲學習內容解析 635
12 年級數學乙學習內容解析 658
伍、素養導向教材編寫原則 679
一、素養導向教材編寫原則說明 679
二、學習表現與學習內容雙向細目表參考示例 680
陸、數學領域之議題融入說明 687
一、融入議題之選擇 687
二、議題融入之做法 687
三、議題融入之示例說明 687
柒、教學單元案例 693
一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用 693
二、國中組—相似直角三角形邊長比值的不變性 699
三、高中組—科學記號與 10 的冪次 707
捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議 715
一、新舊課綱之課程實施銜接分析 715
二、新舊課綱之課程實施銜接建議 715
玖、實施要點重點說明 719
一、必修 B 類數學銜接選修數學乙的實施說明 719
二、使用工具的素養----計算機融入教學 720
三、數學差異化教學 722
四、數學奠基活動 723

拾、課綱 Q&A 727
附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表 735
附錄二：數學名詞解釋 747
附錄三：108 數學課綱之計算機規格說明 757
附錄四：必修 A 類、B 類課程與選修數學甲、數學乙課程差異對照表 761

緣起

民國 103 年公佈之《十二年國民基本教育課程綱要總綱》(以下簡稱《總綱》)，以三面九項核心素養，作為連貫各個教育階段課程發展，以及引導跨領域課程規劃，揭櫫「適性揚才──成就每一個孩子」為願景，提出「自發、互動、共好」為基本理念，並以「啟發生命潛能、陶養生活知能、促進生涯發展、涵育公民責任」為課程目標，培養學習者進行終身學習所需之知識、技能和態度。而新修訂之《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》(以下簡稱《數學領綱》或 108 數學課綱) 本於核心素養導向，期能達成為所有人創造有品質的生活，以及為大學學習和職涯發展做好準備。因此，《數學領綱》研修小組特研訂發展《數學領域課程手冊》(以下簡稱《數學課程手冊》或本課程手冊)，依循總綱的願景和理念以及《數學領綱》的重要內涵，解析《數學領綱》之核心素養與學習重點，期能建立完整的課程架構，落實學生適性學習，勾勒高中升學及職涯進路關係，提出教材編選參考與教學實施案例，分析新舊課綱差異，研擬課程銜接建議，以提供各界了解，達成數學領綱之目標。

本課程手冊內容共分為十章，說明如下。

第壹章與第貳章為總論性質，先從研修背景、研修特色與新舊課綱差異三方面，說明《數學領綱》的發展沿革與特色。接著，介紹課程整體架構，說明第一至第五學習階段之課程架構與規劃理念，以及升學與職涯進路關係，以表格進行分析說明。

第參章到第伍章，就《數學領綱》最具特色的核心素養與學習重點進行解析。首先說明核心素養與學習重點的呼應，分成國民小學 (簡稱國小)、國民中學 (簡稱國中)、普通型高級中等學校 (簡稱普高) 三個教育階段解析核心素養的重要內涵，闡述其與學習重點的對應關係。其次，針對各個教育階段的學習內容深入說明與分析。接著，則是素養導向教材編寫原則，針對素養導向教材編寫提出重要參考原則，並列舉學習表現與學習內容雙向細目表之參考示例輔以說明。

第陸章到第捌章，是教學實踐的相關建議。首先，就數學教學融入性別、人權、環境、海洋等議題的選擇及作法進行說明；再將議題融入數學學習重點之示例說明，以表格形式呈現。其次，是融入素養導向的教學單元案例，包含國小、國中、普高三個教育階段共三個教

學單元案例。案例中對於教學設計理念、核心素養、學習重點、議題融入、教學活動設計與評量等內容皆有清晰表述。接著，是針對新舊課綱之課程實施銜接進行分析，於六升七年級、九升十年級的學習銜接上，提出在學習內容的教學實施配套之建議。

第玖章對於《數學領綱》實施要點項下之「計算機融入教學」、「差異化教學」和「奠基活動」提出解釋和說明，具體轉化新課綱「提供所有學生有感的學習機會」之理念。第拾章則是課綱 Q&A，針對社會各界關心《數學領綱》研修之重要議題，以問題與解答形式進行說明。附錄一為新、舊課綱差異對照表，附錄二為數學名詞解釋，附錄三為計算機規格說明。

《數學領綱》肩負十二年國教的深化與改革，而《數學課程手冊》對於《數學領綱》的闡釋、比較分析與教學示例，有助於中小學教師及教科用書編寫者對於《數學領綱》的理解。數學做為工具學科，在十二年國教佔有相當重要的位置，《數學課程手冊》編纂集結眾人智慧，相信有助於《數學領綱》理念與內容的溝通和傳播，為十二年國教願景之達成做出貢獻。

壹　發展沿革與特色

壹、發展沿革與特色

一、發展沿革

我國自從民國 57 年開始實施九年國民義務教育，本學科在國民小學的名稱由「算術」改為「數學」，並根據《國民小學數學暫行課程標準(57)》從民國 57 年的一年級開始逐年實施，到民國 69 年的最後一屆六年級學生使用，才全面改成民國 64 年教育部正式頒布的《國民小學數學課程標準(64)》。此課程標準從民國 65 年起逐年實施，直到民國 89 年的最後一屆六年級學生，是目前壽命最長的課程標準。在這段時間內，全國都使用國立編譯館編撰的教科書（俗稱統編本），此課本經過相當大規模的實驗，常稱為「板橋模式」。這段時期的小學數學注重數、量、形的內容學習，並把握三項原則：社會生活的需求，兒童身心的發展、與學習的妥當性。

同時期的國民中學數學課程標準則在民國 57 年制訂之後，歷經民國 61 年、72 年、74 年、83 年多次的修訂，其教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸到重視學生的思考、推理與創造能力，並顧及情意面的學習興趣及數學素養。國民中學的數學課程，在民國 89 年被納入九年一貫課程。

普通高級中學的數學課程則為配合國民中學首屆畢業生而在民國 60 年訂立課程標準，至民國 72 年配合「高級中學法」而修訂高級中學課程標準，在民國 84 年因應社會變遷而再次修訂。高中數學的學習內容增加了「函數」項目，也都強調思考能力和應用於生活的素養，並且均指出數學在其他學科上的重要基礎性。

民國 80 年代，發生了一項重要的數學教育興革。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱為 NCTM）於 1989 年出版《學校數學課程與評鑑標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）強調數學能力的培養與數學概念的理解，從傳統以「教師為中心」轉向以「學生為中心」，教師不再是知識的「傳遞者」而是學生知識建構的「協助者」。然而其過分著重概念理解卻輕忽計算能力的培養，招致數學家的批評，對於「概念理解」與「計算能力」發展孰輕孰重的爭論，發展成數學教育學者與數學家之間的數學戰爭。

此波風潮及於臺灣，則展現於民國 82 年頒布的《國民小學數學課程標準版課程標準(82)》，這份課程標準強調學生必須自行建構數學的意義，在教學目標中提到「... 養成主動地從自己

的經驗中，建構與理解數學的概念，...」，因此俗稱「建構式數學」。同年亦開放民間出版社編寫教科書，由四家出版商（南一、翰林、康軒、新學友）以及國立編譯館同時編製國小數學課本。因為開放的時間急迫，幾乎沒有經過實驗就送審，審查通過後即直接實施於小學。此課程從民國 85 年起逐年實施，至民國 92 年全面轉換為《九年一貫課程數學領域暫行綱要(89)》而止。

教育部於民國 89 年宣布實施九年一貫課程，將國小和國中課程做統整的規劃，並於同年頒布《暫行綱要》。自此，數學科改稱為「數學學習領域」。最劇烈的改變是，取消了數學傳統上具有較多授課時數的「主科」概念，而與其他學習領域平分。《暫行綱要》的數學課程似仍持續建構主義的理念，原本計畫些微調整後即為正式的綱要。然而，建構式數學不要求學生背誦九九乘法表和輕忽直式乘法計算，造成學生計算能力下降的疑慮，引起數學家批評建構式數學，中華民國數學學會便緊急向教育部建議暫緩正式綱要之公布，並另行邀集相關學者與教師，重新審議數學課程的設計，結果就是民國 92 年頒布的《九年一貫數學領域課程綱要(92)》，從民國 94 年起正式逐年實施，並於民國 97 年微調修訂，自民國 100 年起實施迄今。

搭配九年一貫課程的實施，高中先後從民國 95 年、99 年起，實施暫行綱要與新的綱要，並於民國 102 年微調。後期中等學校的數學課程，分成普高（普通型高級中學之簡稱）、技高（技術型高級中學之簡稱）、和綜高（綜合型高級中學之簡稱）三類。

二、特色

（一）規劃十二年一貫的數學課程綱要

數學課程綱要大約每隔十年研修一次，本次研修適逢十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）開始實施，修訂課程綱要時可以用十二年一貫的架構，整體檢視，規劃出適合現代國民需要的數學課程內容，並希望能避免現行數學課程綱要在國、高中之間銜接上的困難。

一方面，要回應世界各國朝向培養數學素養的趨勢，著重學生能將生活中所遇到的問題轉化成數學問題並且解決它，並能欣賞數學的美並對數學有正向的態度。另一方面，要盡力改善我國中小學生的數學評量成績有高成就與高落差、對數學的態度與學習信心不佳的現象，達成十二年國教把每一位學生帶上來、適性揚才的重要理念，實踐數學教育公平受教的原則。

（二）提倡培養學生正確使用工具的素養

歷年的數學課程綱要，都在實施要點中提及要教導學生使用計算機，只是計算機教學從未在我國的中小學教育認真實施；甚至有些實用科目，在例題或考題中，都只敢出現特殊規劃好的數據。工具對於數學教學與學習助益極大。然而，我國即使在最基本的計算機教學，都遠遠落後於世界各先進國家。有鑑於此，這次的數學課程綱要研修小組決定，要認真修訂課程綱要內容，讓全國學生真的學到使用計算機的能力。數學教學應從教導使用計算機開始，逐漸引導學生使用各種高階工具。數學課程綱要研修小組檢討發現，我國忽視計算機教學現象可能有下述三種原因。

首先，一些數學教師害怕，學生是否因為使用計算機，反而不好好學習數學原理原則，只一昧地胡亂使用機器計算。對於這樣的憂慮，我們強調，要同時教導學生「使用計算機的正確態度」。所以定調，國小是學生奠定數學基礎的階段，計算機教學從國中開始，並且強調，學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，才適當使用計算機。

其次，歷年來的數學課程綱要，都只在實施要點提及要使用計算機，教科書作者及教師並不清楚教材的何處要使用，教科書中若無著墨，教師也無暇思索，以至於未能落實計算機教學。本次數學課程綱要，將計算機的使用納入課綱的條文，明白指出何處適合使用計算機。

最後，臺灣的全國性大型考試（全國技術人員考試例外）都不准使用計算機，這有其防止作弊的需求，而且考試本來就應該與教學脫鉤才對。只是，臺灣是一個考試領導教學的國家，考試不考，教師就樂得不教，或是不願意花時間教。進一步說，全國性大型考試的規範，更暗示計算工具的不需要，甚至不正當。希望教育當局能導正此一錯誤的政策。

（三）確實規劃從高二開始數學分類教學

數學內容在國小、國中大致上是所有人都應該要學習的，進入高中之後，學生因為理工商文的性向逐漸顯露，對數學的需求及接受度逐漸因人而異，分類教學勢在必然；世界各國都是如此，只是差異度極大，幾乎沒有範例可以讓我們輕鬆比照。我國歷年來，高中數學內容也變化極多，到了最近的版本，高一時所有學生必修一種共同的數學，高二時的必修數學分 A、B 兩版，但是課程綱要實際上還是一份，只是最後三節標記雙圈，學得少的學生就不學這些部分，到了高三才分成數學甲、數學乙兩版選修。這樣的做法，在課程綱要訂定、教科書編撰、教學安排、甚至大考內容等各方面都有方便之處，只是苦了那些數學需求性比較少的學生。

《總綱》最初為回應高中生有更多選修的彈性，將原本各科的必修學分扣除四分之一，改成選修，讓學校有更獨立自主的規劃空間，立意甚佳；其實，數學已經領先其他領域，早就已經將高三改為選修，是更積極的將三分之一學分列為選修。《總綱》在一視同仁的簡單計算（及國文領域的堅持）下，各界視為主科的國文、英文、數學的必修學分數從現行的 24、24、16，被規劃為 20（含中國文化基本教材 2）、18、12，各界譁然，特別是數學超低必修學分，大眾難以接受。

平心而論，如果把 12 學分規劃為所有人最低要修三學期數學，再依照個人對數學的需求，逐漸去選修必要的數學，是可以回應有些人的確是不需要學三年數學這件事。只是，這樣的規劃，對於後續的教學、大考等並未仔細規劃，無人了解此事的可行性。並且對於數學早已先行高三選修一事未被納入考量，各界的反對，層級高達眾多包含人文類的中央研究院院士，這應該是《總綱》規劃始料未及。經過長時間討論，《數學領綱》研修小組總算說服相關長官及委員會，高中數學的必修學分數回歸 16。在這樣的背景下，研修小組有義務在高二的必修學分做到確實分類，讓不同程度的學生可以確實學到他們所需要的數學，但不必強迫數學需求少的學生硬要修習過多數學。

（四）與技高數學的整合

前一屆的高中數學課程綱要研修小組，經過許多研究，並與國際上各種數學課程綱要比較，將本來在高二下修習的排列組合和機率統計移到高一下，原本在高一下比較困難的三角函數的內容往後移。這樣的安排，在先教容易再教困難內容的邏輯上十分實際。一開始大家可能還不習慣，但是後來逐漸也能發現其優點。

只是，當時的技高數學課程綱要小組另有成員，並未討論此事。在沒有溝通管道的情況下，技高數學課程綱要沿用原架構，雙方在高一的課程差異到達半年之多。本來普高和技高各行其是也無不可。只是，臺灣有綜合高中的學制，在這個體制下，每年一萬八千的高一學生，到高二時，有百分之四十五要轉到學術學程、念普高的軌道，有百分之五十五要轉到專門學程、念技高的軌道。因此，這些學生在高一的數學要念甚麼內容，引發很大困難，教育部為此做了許多補救措施，但總是不能兼顧。為此，普高與技高的內容，如何能盡量求同，是一件重要的事情。

三、新舊課綱差異比較

十二年國教著重以人為本的全人教育，三大面向的核心素養「自主行動」、「溝通互動」

與「社會參與」強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。其課程發展的想法為藉由各領域的學習共同成就核心素養的培養，不像九年一貫課程每個學習領域都要承擔十大能力發展的任務。核心素養在十二年國教課程中作為領域或科目課程發展垂直連貫與水平統整的主要組織核心，並具體轉化為領域的「學習表現」與「學習內容」。這與《九年一貫數學學習領域課程綱要》的「能力指標」與《普通高級中學 99 課程綱要》的「子題/內容」的形式有所不同。

《九年一貫數學學習領域課程綱要》的架構是由五大主題能力指標「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」和「連結」所構成；而《高級中學 99 數學課綱》則是由主題所構成，例如：數與式，多項式函數。兩者之間的格式並不一致。《數學領綱》以「數與量」、「空間與形狀」、「坐標幾何」、「關係」、「代數」、「函數」、「資料與不確定性」做為學習重點的主題類別，讓各教育階段的學習表現與學習內容格式一致。其中，學習表現中的 r 為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為 a 和 f；學習內容的 R 為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為 A 和 F。

另外，在高級中學階段，《數學領綱》按照《總綱》的規畫，在 11 年級設計 A 與 B 兩類差異化課程，讓不同學習需求學生修習；在 12 年級規劃加深加廣選修課程分甲與乙兩類，為學生往後的大學學習做好銜接與準備。這與以往《高級中學 99 數學課綱》的 A、B 兩版課程有所不同，其中 B 版的內容包含 A 版，增加的題材以加註雙圈符號作區隔。新的數學領綱確實做到課程分類，以滿足不同學習需求的學生有機會學到所需要的數學。除上述整體差異比較說明，另提供新、舊課綱差異對照表於附錄一，按學習階段以「新增」、「強化」、「調移」、「減少」、「刪除」進一步說明新、舊課綱學習內容的不同之處。

貳 課程架構

貳、課程架構

依據《總綱》之規定，數學領域之課程架構於國民小學與國民中學教育階段為部定課程，一至九年級皆規劃為四節課。高級中等學校教育階段則分為 16 學分之部定必修課程以及 8 學分之加深加廣選修課程。以下茲依「課程架構規劃」及「高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係」二項說明。

一、課程架構規劃說明

十二年國教的學制劃分為三個教育階段，分別為國民小學六年、國民中學三年、高級中等學校三年。各教育階段之數學領域課程架構分述如後。

（一）國民中小學

國民中小學數學領域課程自一年級開始，其中一、二年級為第一學習階段，三、四年級為第二學習階段，五、六年級為第三學習階段，七、八、九年級為第四學習階段。部定課程每週節數為四堂課。國民中小學數學領域課程架構如表 1。

表 1：十二年國教國民中小學數學領域課程架構

學習階段	階段學習重點	備　註
第一學習階段	能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形的認識。	彈性學習課程可規劃數學奠基與探索活動。讓學生探索、討論，培養對數學的喜好，奠立單元學習的先備基礎，進行有意義的學習。
第二學習階段	在數方面，能確實掌握自然數的四則與混合運算，培養流暢的數字感，並初步學習分數與小數的概念。在量方面，以長度為基礎，學習量的常用單位及其計算。在幾何方面，發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認 識幾何圖形的性質。	
第三學習階段	確實掌握分數與小數的四則計算。能以常用的數量關係，解決日常生活的問題。能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積與體積的計算。能製作簡單的統計圖表。	
第四學習階段	在數方面，能認識負數與根式的概念與計算，並理解坐標表示的意義。在代數方面，要熟悉代數式的運算、解方程式及簡單的函數。在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何(直觀、辨識與描述)、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚學習。能理解統計與機率的意義，並認識基本的統計方法。	

（二）普通型高級中等學校

依據《總綱》及《數學領綱》各教育階段領域課程的規劃，普通型高級中等學校為第五學習階段。在必修部分安排總學分數為 16 學分的數學必修課程，包括兩部分：(1) 高中一年級（10 年級）8 學分，(2) 高中二年級（11 年級）8 學分，分為 A、B 兩類，學生擇一修習。而加深加廣選修部分，則在高中三年級（12 年級）安排 8 學分的數學甲課程，與 8 學分的數學乙課程。數學領域的課程架構與學分數如表 2，而數學從高中二年級起分為三個軌道的學習路徑如圖 1。

表 2：十二年國教普通型高級中等學校數學領域課程架構

必修		加深加廣選修
高一（10 年級）	高二（11 年級）	高三（12 年級）
8 學分	8 學分（分為 A、B 兩類）	8 學分（分為甲、乙兩類）

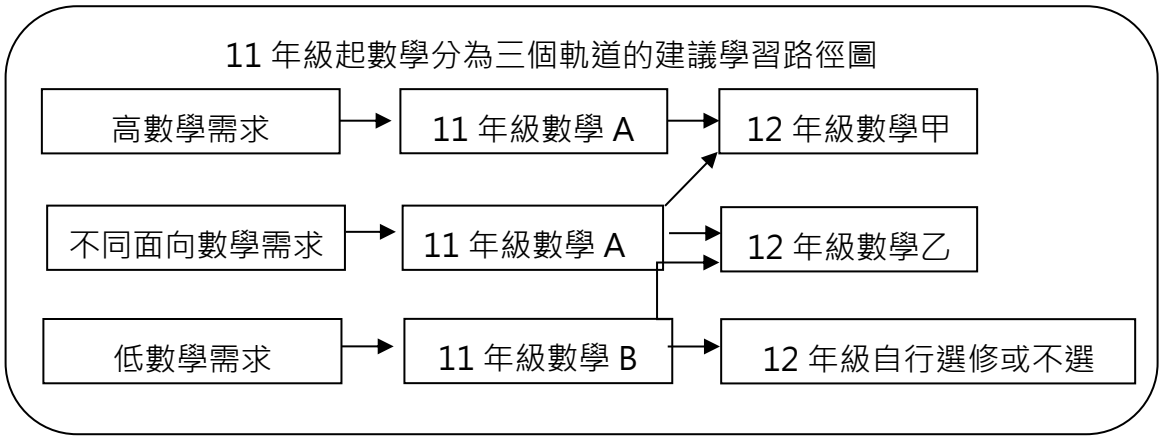


圖 1：11 年級起數學分為三個軌道的建議學習路徑

二、高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係

《數學領綱》的必修課程規劃，提供學生掌握現代各專業領域所需之核心數學語言的學習機會。對於具備興趣、動機、或有志於朝向需要更多數學專業發展的學生，則規劃兩種加深加廣選修課程提供學習機會。必修與選修課程與職涯進路之關係如表 3，其學習成效之歷程檔案有助於學生升學及職涯進路選才參採之用。

下表高中數學領域必選修課程與職涯進路關係表，係由研修小組參考領綱設計及教育部高等教育司於民國 105 年 12 月底所進行之「十八學群選才調查報告」綜合評估後研訂提出，惟大學考招單位仍持續就大學選才及高中育才輔助系統進行建置，故本文件僅先提供學校作

為開設選修課程之參考，後續有關「高中數學領域必選修課程與職涯進路關係表」**將以大學入學考試中心公布之內容為準**。

表 3：普通型高級中等學校數學領域必選修課程與職涯進路關係。

學群	升學及職涯進路	選修課程 必、選修課程 建議	數學領域課程					備註
			必修			加深加廣選修		
			高一	數學A	數學B	數學甲	數學乙	
資訊學群	主要學類	資訊工程、資訊管理、數位設計、圖書資訊。	●	●	●	●	●	資工與系統分析建議數學甲，其他建議數學乙。
	生涯發展	程式設計師、資訊系統分析師、資訊管理人員、資訊產品研發人員、網路管理工程師、電子商務設計師、多媒體設計師、電腦遊戲設計師等。						
工程學群	主要學類	電機電子、機械工程、土木工程、化學工程、材料工程、科技管理。	●	●		●		
	生涯發展	電機工程師、電子工程師、光電工程師、自動化工程師、通訊工程師、儀表工程師。 動力工程師、航空工程師、汽車工程師、造船工程師、機械設計工程師、電整合工程師。 土木工程師、工程監工、大地工程師、結構工程師、建築師、營建管理專業人員、工程技術與管理研究員。 化學工程師、環境工程師、分析工程師、藥劑工程師。 冶金工程師、材料工程師、材料分析工程師、材料研發人員。 工業工程師、決策分析師、品管工程師、物料管理工程師、生產管理。						
數理化	主要學類	數學、物理、化學、統計、科學教育、自然科學。	●	●		●		
	生涯	數學研究與教學、物理研究與教學、化						

學群	升學及職涯進路	選修課程 必、選修課程建議	數學領域課程					備註
			必修			加深加廣選修		
			高一	數學A	數學B	數學甲	數學乙	
學群	發展	學研究與教學、理化技術諮詢服務、保險精算師、統計分析師。						
醫藥衛生學群	主要學類	醫學、牙醫、中醫、營養保健、護理、藥學、公共衛生、職業安全、醫學技術、復健醫學、健康照護、呼吸治療、獸醫、衛生教育、醫務管理、化妝品。	●	●	●	●	●	醫師與藥師建議數學甲，其他建議數學乙。
	生涯發展	醫師、藥師、護理師、公共衛生專業人員、醫事檢驗師、營養師、物理治療師、職能治療師、聽力師、語言治療師、呼吸治療師、病理藥理研究人員。						
生命科學學群	主要學類	生態、生命科學、生物科技、植物保護、生化。	●	●			●	
	生涯發展	生物教師、生物學研究人員、動植物研究人員、生物科技專業人員、生態保育專業人員、病理藥理研究人員。						
生物資源學群	主要學類	農藝、動物科學、園藝、森林、食品生技、海洋資源、水土保持。	●	●	●		●	
	生涯發展	獸醫師、生態保育專業人員。生物技術研發人員、農藥及肥料研發、景觀設計規劃師、園藝企業經營、牧場經營、畜牧業技師、畜產管理、食品研發品管、動物園技師、環保技師、自然資源保育師、環境保育師。						
地球與環境學	主要學類	地球科學、地理、地質、大氣、海洋科學、環境科學、防災。	●	●		●		
	生涯發展	地理或地球科學教師、天文學研究人員、氣象學研究人員、地質學及地球科學研究人員、地質探測工程師、探勘工						

學群	升學及職涯進路	選修課程 必、選修 建議課程	數學領域課程					備註
			必修			加深加廣選修		
			高一	數學A	數學B	數學甲	數學乙	
群		程師、地震研究員、大地工程師、採礦工程師、測量師、環境工程師。						
建築與設計學群	主要學類	建築、景觀與空間設計、都市計畫、工業設計、商業設計、織品與服裝設計、造型設計。	●	●	●	●		建築師建議數學A與數學甲，其他僅建議數學B。
	生涯發展	建築師、景觀設計師、室內設計師、美術設計師、商業設計師、工業設計師、多媒體設計師、服裝設計師。						
藝術學群	主要學類	美術、音樂、舞蹈、表演藝術、雕塑、藝術與設計。	●		●			
	生涯發展	美術教師、音樂教師、舞蹈老師、舞蹈家、畫家、音樂家、作家、表演工作者、劇作家、導演、燈光師、舞台設計師。						
社會與心理學群	主要學類	心理、輔導、社會、社會工作、犯罪防治、兒童與家庭、宗教。	●	●	●		●	
	生涯發展	臨床心理師、輔導教師、社會工作人員、社會學研究人員、心理學研究人員、社會服務經理人員、人力資源師、神職人員。						
大眾傳播學群	主要學類	大眾傳播、新聞、廣播電視、廣告、電影。	●		●			
	生涯發展	新聞記者、廣告企畫、廣播或電視專業人員、編輯、表演工作者、攝影師、導演、廣告或公關人員、影像處理師、數位內容創作、媒體設計人員、動畫設計。						
外語	主要學類	英語、歐洲語文、日本語文、東方語文、應用語文、英語教育。	●		●			

學群	升學及職涯進路	選修課程 必、選修課程建議	數學領域課程					備註
			必修			加深加廣選修		
			高一	數學A	數學B	數學甲	數學乙	
學群	生涯發展	英文教師、外語教師、編譯人員、語言學研究人員、外貿拓展人員、外交人員、旅遊人員。						
文史哲學群	主要學類	中國語文、台灣語文、歷史、哲學、史地、國語文教育。	●		●		●	語言學、哲學歷史研究人員建議選修數學乙，其他僅建議數學B。
	生涯發展	文史教師、文字編輯、作家或評論家、文物管理師、哲學歷史研究人員、語言學研究人員。						
教育學群	主要學類	教育、公民教育、幼兒教育、特殊教育、社會科教育、社會教育。	●	●	●		●	教育研究人員建議選修數學乙，其他僅建議數學B。
	生涯發展	中學教師、小學教師、學前教育教師、教育機構專業人員、校長及學校主管人員、教育研究人員。						
法政學群	主要學類	法律、政治、外交、行政管理。	●	●	●		●	律師法官檢察官建議選修數學乙，其他僅建議數學B。
	生涯發展	律師、法官、檢察官、書記官、代書、法律專業人員、民意代表、政府行政人員、安全人員。						
管理學群	主要學類	企業管理、運輸與物流管理、資產管理、行銷經營、勞工關係。	●	●	●		●	
	生涯發展	行政或財務經理人員、證券或財務經紀人、人事或產業經理人員、市場銷售經理人員、市場分析人員、工商服務業經理人員。						
財經學	主要學類	會計、財務金融、經濟、國際企業、保險、財稅。	●	●	●		●	
	生涯	會計師、稅務專業人員、金融專業人						

學群	選修課程 必、選修課程 升學及建議 職涯進路		數學領域課程					備註
			必修			加深加廣選修		
			高一	數學A	數學B	數學甲	數學乙	
群	發展	員、財務經理人員、證券或財務經紀人、商業作業經理人員、保險專業人員。						
遊憩與運動學群	主要學類	觀光事業、餐旅管理、休閒管理、體育、運動管理、體育推廣、運動保健。	●		●			
	生涯發展	旅館餐飲管理人員、休閒遊憩管理人員、運動員、體育教練、體育教師、體育休閒事業經理、運動器材經營者。						

參 核心素養與學習重點的呼應說明

參、核心素養與學習重點的呼應說明

本領域各教育階段核心素養具體內涵係依循《總綱》核心素養內涵發展，結合本領域之基本理念與課程目標後具體展現。各教育階段學習重點皆為列舉呈現，並做共同的原則說明。

一、國民小學教育階段

數學領域學習重點		數學領域核心素養	說明
學習表現	學習內容		
n-I-3 應用加法和減法的計算或估算於日常應用解題。	N-2-5 **解題：100元、500元、1000元。**以操作活動為主兼及計算。容許多元策略，協助建立數感。包含已學習之更小幣值。	數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。	學生能運用加減乘除解決日常生活的問題；能識別基本形體的特徵與進行簡單分類。可透過讓學生操作、試驗、互動、蒐集資料與分類達成。
n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。	N-3-15 **容量：「公升」、「毫升」。**實測、量感、估測與計算。單位換算。	數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。	學生能把日常生活語言轉換成簡單數學語言進行問題解決，並能精熟度量衡與時間單位轉換，能藉由操作與探索建立幾何形體概念並能用數學符號表示公式。
d-II-1 報讀與製作一維表格、二維表格與長條圖，報讀折線圖，並據以做簡單推論。	D-3-1 **一維表格與二維表格：**以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。	數-E-B2 具備報讀、製作基本統計圖表之能力。	藉由任務設計讓學生小組合作學習，或是由教師引導學生蒐集與整理資料，並選擇合適的統計圖表對於現實生活問題做推論與決策。

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
s-II-4 在活動中，認識幾何概念的應用，如旋轉角、展開圖與空間形體。	S-3-4 **幾何形體之操作：**以操作活動為主。平面圖形的分割與重組。初步體驗展開圖如何黏合成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。	數-E-B3 具備感受藝術作品中的數學形體或式樣的素養。	可結合日常生活常用到的立體形體或藝術作品，讓學生藉由操作、討論，從中培養數學素養。
r-I-1 學習數學語言中的運算符號、關係符號、算式約定。	R-1-1 **算式與符號：**含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、做檢驗學生的理解。適用於後續階段。	數-E-C3 具備理解與關心多元文化或語言的數學表徵的素養，並與自己的語言文化比較。	鼓勵學生從日常生活語言逐漸進到使用數學符號溝通想法，以數學史或民族數學增進學生對於多元文化的理解。

二、國民中學教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。	A-7-1 **代數符號：**以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。	可讓學生先使用生活化、非形式的語言進行討論與溝通，然後逐步引導他們發現使用數學符號進行運算與推論的方便性與簡潔性，從而使用數學的抽象思維來解決問題。
s-IV-4 理解平面圖形全等的意義，知道圖形經平移、旋轉、鏡射後仍保持全等，	S-8-4 **全等圖形：**全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊	數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗	帶領學生從動手操作或是相關的活動中，認識幾何與代數中的關係，並鼓勵他們發展精

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
並能應用於解決幾何與日常生活的問題。	合)；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然)。	範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。	確的數學語言來說明二維平面或三維空間的基本性質與關係。培養學生蒐集生活中的統計資料以及藉由實驗操作來處理生活中不確定性的問題。
n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。	N-8-2 **二次方根的近似值：**二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機$\sqrt{\ }$鍵。	數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。	當進行計算機教學時，教師應視問題情境同時發展學生估算、心算、概算等相關能力；在讓學生體驗計算機在數學計算或是問題解決的益處時，也應引導學生從操作一些例子中察覺到計算機的可能限制。
s-IV-5 理解線對稱的意義和線對稱圖形的幾何性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。	S-7-4 **線對稱的性質：**對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。	可引導學生從欣賞與討論一些藝術作品中，看出背後的幾何形體或是數量關係，並能運用相關的關係或是性質進行問題解決，瞭解數學的的美與實用性。
s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題。	S-8-6 **畢氏定理：**畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏	數-J-C3 具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養。	藉由數學史的引進或是相關文化的介紹，讓學生探索與瞭解不同文化、地區脈絡下的數學發展以及特性。

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
	定理的三角形必定是直角三角形。		

三、普通型高級中等學校教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
f-V-4 認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-4 **指數與對數函數**：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。	數 S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。	運用科學和商業的相關任務營造讓學生進行觀察、探索與有能力建模以解決相關現實問題的課室環境。在歸結與抽象出現象背後的原理或模型之後，學生應有機會瞭解歸納思維的侷限性並能應用演繹思維來論證所得結果之正確性。
f-V-3 認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-2 **正餘弦的疊合**：同頻波疊合後的頻率、振幅。	數 S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。	設計現實情境任務讓學生去操作與討論數學符號以表徵狀態、關係或運算。引導學生能根據問題敘述提取相關數據與條件，將問題中的生活語言轉換成數學符號，並根據問題條件進行操作或推論，最後將得到的結果進行詮釋以解決問題。

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
d-V-2 能判斷分析數據的時機，能選用適當的統計量作為描述數據的參數，理解數據分析可能產生的例外，並能處理例外。	D-10-2 **數據分析：**一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。	數 S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。	在數位學習環境中打造合適的任務，讓學生使用資訊科技工具進行資料蒐集、數據分析與解讀，同時讓學生體驗計算機與電腦軟體對於建立數學模型與解決數學問題的威力和限制。設計結合媒體識讀與數學的任務讓學生探討、反思與批判媒體報導以及相關的社會議題。
s-V-2 察覺並理解空間的基本特質，以及空間中的點、直線與平面的關係。能在空間中認識特殊曲線，並能察覺與欣賞生活中的範例。	S-11A-1 **空間概念：**空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、直線與平面的位置關係，三垂線定理。	數 S-U-B3 領會數學作為藝術創作原理或人類感知模型的素養，並願意嘗試運用數學原理協助藝術創作。	可從賞析投影幾何或是體現奇妙的悖論、錯覺等美術作品或是探討樂譜拍子、樂聲本質，認識藝術作品背後的數學原理，並進行相關的藝術創作。
n-V-5 能察覺規律並以一般項或遞迴方式表現，進而熟悉級數的操作。理解數學歸納法的意義，並能用於數學論證。	N-10-6 **數列、級數與遞迴關係：**有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。	數 S-U-C3 具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野，並了解其促成技術發展或文化差異的範例。	從探討不同文化或地域的所發展出來的民族數學，瞭解數學概念發展的脈絡與環境，以及工具與技術的進步和數學知識的發展交織的關係和影響。

肆 學習內容解析

肆、學習內容解析

本章分別呈現《數學領綱》在國小、國中與普通高中教育階段的學習內容之「具體內涵說明」，其目的在使教學者與教材編輯者能具體掌握數學領綱的學習內容，進而有效提供課程環境及條件，給予學生多元、多樣學習機會，並能體驗學習的樂趣，發揮潛能，實現課程目標。

一、國民小學教育階段

國小階段特別說明

(1) 「基本說明」和「條目範圍」大致相當於課綱「本文」與「備註」之詳細說明，但不完全相同，建議兩者合併閱讀。「基本說明」原則上包含該條目之目標；條目內容與教學之解說；與其他條目之關連；「條目範圍」原則上說明教學之合理範圍與注意事項，避免重複、提前或過度教學。

(2) 「釋例」為該條目之教學示例與解析，除了數學知識之外，也包含教學該注意的情意面。「釋例」原則上依常見教學順序安排，但並非絕對。若有奠基、複習、鋪陳性質之範例，將置於最前面。國小階段中、高年級，「釋例」僅提供新增條目、比較緊要或特別說明之釋例，一般教科書或教學常見之釋例較少。

(3) 「錯誤類型」強調學生容易發生的認知或程序錯誤，以及教師可採取之應對措施。「評量」提供教學評量之主要項目或不宜評量項目，若有 * 記號則為相對較不重要，補救教學可忽略之部分。另外「評量」也提供評量時教師宜注意之事項。這兩者若有重要或常見者，也可能先在「基本說明」或「條目範圍」中強調。

(4) 「先備」、「連結」、「後續」提供條目之間的先後與連結關係，「連結」通常為當年條目，「先備」大多為前一年之條目，但也可能更早，「後續」大多為後一年之條目，但也可能更晚。這些連結關係通常也會在「基本說明」中說明。

1 年級學習內容解析

N-1-1 一百以內的數：含操作活動。用數表示多少與順序。結合數數、位值表徵、位值表。位值單位「個」和「十」。位值單位換算。認識 0 的位值意義。 **備註：**教學可數到最後的「一百」，但不進行超過一百的教學。可點數代表一和十的積木進行位值教學。學習 0 的位值意義以便順利連結日後直式計算之學習。	n-I-1

連結：N-1-2、N-1-4、D-1-1。

後續：N-2-1。

基本說明

1. 數（正整數與 0）是學習數學的基礎，是一年級的首要數學課程目標。教師應從操作活動入手，讓學生初步但充分理解數的符號、位值結構與日常應用，並支援加減法學習。由於許多學生在入小學前已經多少有數數經驗，教師應注意如何運用與整合學生的這些先備經驗。
2. 學生對「數」最早的經驗來自數數，因此首先應結合聲音、圖像、數字、單位（量），讓學生在具體情境中掌握數詞序列的規律，以說、讀、聽、寫、做各種活動，表示並應用 100 以內的數。
3. 運用位值積木與位值表，理解數字結構。例如數字「25」是 2 個「十」和 5 個「一」，其中 2 所在的位置是「十位」，其位值單位為「十」，這時的 2 表示 20；5 所在的位置是「個位」，位值單位為「一」，這時的 5 就是 5。配合恰當教具教學，學生學習位值與位值單位轉換來理解數字的意義，其中包括例如 25 個「一」，如何轉化成 2 個「十」和 5 個「一」，以及反向確認 2 個「十」和 5 個「一」就是 25 個「一」。教具應包含位值積木，以及運用花片十個一堆的點數方式。
4. 學生的數數經驗雖然沒有「0」，但必須知道 0 在位值系統中的意義──代表空位。因此學生要學習 0 作為一個數表示「沒有東西」的意義。學生應理解如果沒有「0」，2 個「十」和 2 個「一」的位值記法就會混淆。
5. 數數很難處理大數，學生必須學習位值記法，才能進入更豐富的「數」世界。但這不表示數數不重要，尤其是局部的順數與倒數（例如從 45 開始往後數 5 或倒數 5），在加減法與位值教學有其價值。練習「兩個一數」、「五個一數」、「十個一數」也有助日後乘除法的學習。
6. 比較是數的基本應用，如比較「多少」、「大小」、「順序」、「長短」（N-1-5）等日常應用。一年級比較活動以初步建立「對應」的比較模型以及其多樣應用為主，並以數數和位值兩種方式來思考解題。不論是數量（基數）或序數的問題，均應結合「單位」來學習，避免做純粹數字比較。

7. 序數初期的表徵方式帶有明顯的方向性，可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」。但在教學時，應先與學生約定溝通清楚。例如講清楚從哪裡開始數；「18 前面（或後面）是什麼數？」的「前」「後」的意義。序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級開始，就將數的序列圖像化，並和數數活動結合。

條目範圍

1. 教學上數數可數到最後的「100」，但不進行超過一百的教學，也不介紹位值單位「百」（N-2-1）。
2. 能點數「十位積木」，並在記錄成數字時解釋「0」的位值意義。不過一年級的加減法尚未使用直式計算，加減教學上尚不需強調「0」的這個面向。
3. 教學上可觀察百數表中明顯與位值有關的模式。其他有趣的問題則請老師斟酌時間，可擺入探索或留到日後再學習。
4. 一年級的比較問題中不出現「>」、「<」的符號，也不處理比較的遞移性質（R-2-1）。

釋例

1. 教具：國小的數概念教學經常用到四種教具：

   (1) 花片：1 個、1 疊（10 個）。

   (2) 積木：白色積木（表示 1）、橘色積木（表示 10）、百格板（表示 100）。

   (3) 錢幣：一元、十元硬幣（或圖卡），百元鈔票（或圖卡）等。

   (4) 圖像：畫出圖像①代表 1 個物件、圖像⑩代表 10 個物件……等。

   這四種教具可以區分成兩類，第一類是成比例的教具，包含花片和積木；第二類是不成比例的教具，包含錢幣及圖像。

2. 布置各種教學情境（包含「可移動或不可移動」、「排列整齊或散置」、「單類或多類物件」），讓學生掌握標準數詞順序及保持數詞與物件的一對一對應關係，完成正確的數數活動。

   (1) 例 1：數概念與一對一的對應關係：

   - 透過點數活動，以聲音對應物件的方式，建立一對一對應的關係，並利用最後一個聲音或數字（例如ㄨˇ 或 5），抽象的代表前面念過的那幾個聲音，直接學習抽象出來聲音（例如ㄨˇ）的寫法（例如 5）。下圖說明如何利用數詞序列來溝通個數。

     {○ ○ ○ ○ ○ }　　{○ ○ ○ ○ ○}

     {一 ㄦˋ ㄙㄢ ㄙˋ ㄨˇ}　　{1 2 3 4 5 }

     ⇩　　⇩

     { ㄨˇ }　　{ 5 }

   - 學生在進行點數活動時，教師必須留意兩件事情：
     - ■ 學生是否能正確按照數詞的順序使用數詞。

■ 點數時，是否能正確的將數詞與物件保持一對一對應的關係。

(2) 例 2：個數的多少和數字的大小：

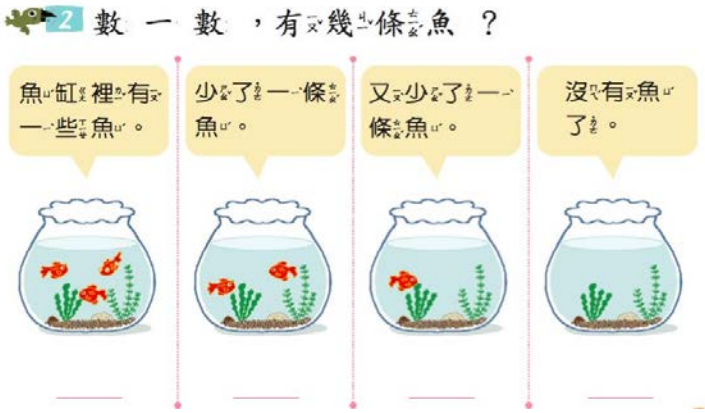
- 數量的比較有兩種策略，一是基於「數數」，二是進行配對。前者學生有一定的經驗，後者讓學生經歷「配對」活動的歷程，蘊含了「一一對應」的概念。
- 體驗數相對大小關係是重要的，但要建立在理解的基礎上。建議一開始在比較物件的個數時，教師應該指導學生使用「5 個蘋果比 2 個蘋果多」或「2 個梨子比 5 個梨子少」的語詞來描述比較的結果。
- 至於像「5 比 2 大」、「2 比 5 小」和利用最後一個聲音抽象代表前面念過的那幾個聲音的概念相同，至少要在學生已經熟練 5 個比 2 個多，2 個比 5 個少，才可以進一步用「5 比 2 大」、或「2 比 5 小」的語詞來描述比較個數的結果。

3. 以各種教學形式 (包含「個別、小組、全班」)，進行「物件、數詞、數字」之間互相轉換之說讀聽寫做的活動。「說」是使用數詞 (聲音) 來描述這堆物件的個數是多少個，「讀」是看懂別人寫出來的數字所代表物件的個數，「聽」是聽懂別人說出的數詞所代表物件的個數，「寫」是使用數字 (符號) 來描述這堆物件的個數是多少個。做數 (表現數) 指的是聽到數詞或看到數字，能拿出相對應個數的物件。例如聽到數詞「ㄨˇ」，或看到數字「5」，能拿出 5 個梨子的圖卡、5 個花片等來表示。

4. 認識「0」，有兩種教學方式：

(1) 透過「由有到無」連續的情境，引入 0 的需求，例如在魚缸原來有 3 條魚，要求學童說出「ㄙㄢ」條魚，或記成「3」條魚，再依序撈走 1 條魚，進行相同的活動，當魚缸裡沒有魚時，教師宣告沒有魚可以記成「0」條魚，讀作「ㄌㄧㄥˊ」條魚。

例如：數一數，下圖有幾條魚，請你寫寫看。



(《部》第一冊課本 P.11，《部》即《部編本國小數學》)

(2) 例如：桌上擺放各種白、藍、紅三種顏色的積木，問桌上有綠色積木嗎？當學童回答沒有綠色積木時，再宣告沒有綠色積木可以記成「0」個綠色積木，「0」讀作「ㄌㄧㄥˊ」。

(《部》第一冊課本 P.11》)

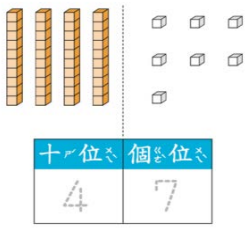
5. 理解數的位值結構和「位值表」的教學 (含「0」代表空位)。

(1) 認識 11~20 的各數是幫助學生建立位值概念的重要知識點之一，從這裡開始，學生對數的認識不僅僅是單獨的一個一個數，而是以十個為一群進行數數，這是建立十進制位值概念的重要階段。

(2) 數量範圍從 20 擴展到 100 時，除了指導學生用不同的方法點數物件外，也要幫助學生從中抽象出 100 以內的數。在點數較多物件時，讓學生體會按 10 個、10 個分堆數數的便利性，並在位值表記錄數字表示物件的數目，進一步讓學生體會位值的意義。

(3) 進行位值教學時，可以使用教具來說明，像是數學積木、圖像①、⑩...等來說明 1 和 10 的關係。

- 例 1：使用積木表示 100 以內的數量。
  - ■ 請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？



＿＿個十＿＿個一，是＿＿。

(《部》第二冊課本 P.8)

  - ■ 請學生拿出 60 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 60 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「6」和「0」所代表的意義分別為何？

- 例 2：使用代表①、⑩的圖像表示 100 以內的數詞。
  - ■ 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 74 元，並問「7」和「4」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？
  - ■ 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 80 元，並問「8」和「0」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？
- 例 3：區分相同數字在不同位值上的差別。（配合白色積木和橘色積木）
  - ■ 請學生說明「22」中兩個「2」的異同在哪裡？

6. 進行各種數數活動，加強數感的練習。

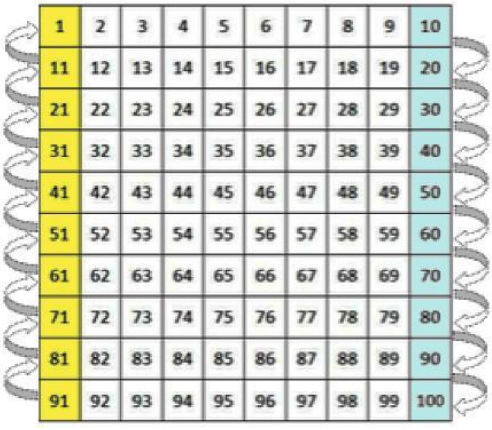
(1) 二個（五個或十個）一數的數數活動：多個一數的方式在生活中也常用到，二個一數、五個一數和十個一數的數詞序列，聲音的節奏有規律，學童可以比較容易掌握且快速的唱數。同時，「二個一數」和「五個一數」也是二年級學習 2 的乘法、5 的乘法的基礎。

- 例如：二個一數：「2、4、6、…」；五個一數：「5、10、15、…」；十個一數：「10、20、30 、…」讓學生透過多個一數的方式，點數各種不同物件。

(2) 局部數數（順數或倒數）活動：建議順數和倒數的活動都要兼顧，這對日後透過點數策略解決加法或減法問題，會有很大的幫助。

- 例如：順數：「1、2、3、4、5」；「88、89、90、91、92」；倒數：「5、4、3、2、1」；「92、91、90、89、88」讓學生局部數數的方式，點數各種不同物件。

局部順數、倒數



10 個一數（順數、倒數）

(3)「多十或少十」一數的數數活動，學生應察覺十位的變化：

- 例如：利用百數表進行十個一數的的順數及倒數，順數：「10、20、30、40、50」、「58、68、78、88、98」；倒數：「50、40、30、20、10」、「98、88、78、68、58」。

(4) 面對零散排列積木（以 24 個白色積木為例），如何有效運用數數的策略：

- 例如：可以透過「一個一數」的數數活動，由 1 開始數到 24，算出共有 24 個。也可以利用「又十及又一數數活動」，例如：10、20、21、22、23、24 或 1、2、

3、4、14、24 來點數，算出共有 24 個，比較有效率。

(5) 序數的教學：序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級起就開始將數的序列圖像化，並和數數活動結合。初期的序數表徵方式通常是有明顯的方向性，因此可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」，但在教學應先與學生溝通清楚。

- 例 1：看圖回答問題。

(《部》課本第二冊 P.17)

- 例 2：動物園遊會有 8 個攤位，第幾個攤位在賣草莓呢？

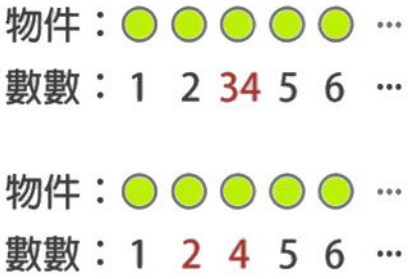
(《部》第二冊課本 P.16~17)

- 例 3：用十二生肖的排行說明「前後」的約定 (見下圖)，第 1 個動物是老鼠，往後數 2 個是老虎，老虎排行第 3；排行第 6 的動物是蛇，往前數 2 個是兔子，兔子排行第 4。

(《部》第二冊課本 P.14~15)

錯誤類型

1. 學生進行數數活動時，發生重複或漏數的狀況。



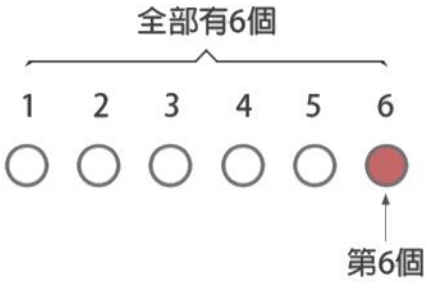
建議：針對不能流暢唱數的學生，可用分布練習之方式加強。若原因出自點數不可移動且排列不整齊之物品，可用標記或分類來協助。

2. 學生在數數時無法正確或流暢「過十」。如「…、68、69、40（錯誤）、41、…」或「…、28、29…（停頓）30、31…」。

觀察「過十」時十位數的變化，如 69 後是 70，因為十位數 6 後是 7。

3. 學生混淆「基數（總量）」與「序數（第幾個）」的問題情境。

(1) 例：有 6 個圓圈，問「全部有幾個圓圈？」學生點數後誤以為「第 6 個」是全部；問「第 6 個在哪裡？」，學生點數後誤以為全部圓圈是「第 6 個」。



建議：利用生活情境溝通如「排隊隊伍中的第 6 個同學」以及「需要 6 個同學幫忙」的「6」意義不同，協助釐清語言的混淆。

4. 位值表徵的錯誤：

(1) 例 1：未能掌握位值表上，每一位值位置只能出現一個數字。

(2) 例 2：不會使用 0。混淆如 2 個「十」和 2 個「一」的記法。

(3) 例 3：學生不能正確讀出指定數字，或不能正確寫出老師所讀的數字。如 32 讀成「三二」；將所讀的「三十二」記成「302」。

建議：加強位值表教學，教導學生數字正確的讀法與記法。

評量

1. 能透過一對一對應數數，掌握 1 至 100 的數詞序列。
2. 能以說、讀、聽、寫、做各種活動，表現 100 以內的數。
3. 能理解「十」和「一」代表的位值。

4. 能做位值單位「十」和「一」的轉換，理解數字的位值結構。
5. 能認識「0」表示沒有，及「0」在位值系統中的意義。
6. 能做 2、5、10 個一數。局部順數與倒數。「多 10 或少 10」。
7. 能在生活情境中正確使用「基數」與「序數」。

注意事項

1. 教師宜在教學中同時評量學生學習進展，讓學生多練習、表現或判斷。教師逐漸增加或減少物件數量，全班進行數數；也可兩個學生分成一組，一位先數，另一位確認，然後互換角色。
2. 小一文字能力不足，紙筆評量題目不宜過長，但應題意完整或搭配圖示，避免誤解題意。不然會誤導學生或教師，錯估教學效果或學生能力。
3. 不宜用紙筆評量學生「讀」數，例如：「25 讀做 (　　)」，應用口語讀出。

N-1-2 加法和減法的意義與應用。加法和減法的意義與應用。含「添加型」、「併加型」、「拿走型」、「比較型」等應用問題。加法和減法算式。 **備註：**強調「併加型」(合成型) 的學習以理解加法交換律。處理「0」的加減。應含加、減法並陳之單元，使學生主動察覺加法和減法問題的差異。一年級不做加數、被加數、減數、被減數未知題型 (N-2-3)。	n-I-2

連結：N-1-1、N-1-3、N-1-4、N-1-5、R-1-1、R-1-2、D-1-1。

後續：N-2-2、N-2-3、N-2-4。

基本說明

1. 加減法是最基本的數學運算，有最廣泛的日常應用。以數數與位值概念為基礎 (N-1-1)，一年級加減法的學習有三個重點：在應用中理解加減法的意義，並由數數過渡到合成分解模型 (本條目與 R-1-2)；初步認識算式 (橫式) 與符號 (本條目與 R-1-1)；熟練基本加減法 (N-1-3)。
2. 一年級學習解加減應用時，無論如何分析問題 (如使用花片、畫圈等)，都要把想法記成加減法的橫式，並建立將計算結果記在等號後的習慣。例如：6 顆葡萄和 8 顆葡萄合起來是 14 顆葡萄，記成 6 + 8 = 14；15 顆芭樂吃掉 2 顆剩下 13 顆芭樂，記成 15 – 2 = 13。為了檢查學生是否理解加減算式的意義，可讓學生擬出對應的生活應用情境 (R-1-1)。學生也應理解「被減數」比「減數」大的約定 (R-1-1)。
3. 「添加型」：先固定一數，再「加入」一數之「加」法。例如「教室中有 8 個人，又進來 4 個人，教室中有多少人？」這也相當於從一數開始順數的能力。
4. 「拿走型」：先固定一數，再「移走」一數之「減」法。例如「教室中有 12 個人，出去 7

個人，教室中還有多少人？」這也相當於從一數開始倒數的能力。

5. 「併加型」和「分解型」: 將分開兩數量，合起來是多少 (「加」); 將一數量分拆，移走一部分，還剩多少 (「減」)。例如「左手有 4 顆糖果，右手有 7 顆，合起來是多少顆？」一般不區分「分解型」和「拿走型」問題。
6. 加減法的合成分解模型 :「併加與分解」就是學習加減法最基本的合成分解模型，教師應清楚引導學生熟悉這個模型，學習用合成分解模型(或應用表徵)去思考一般加減法算式。其基本應用例如做較大數的加減法 (如$24+38$、$49-15$是多少？能以幾個「十」、幾個「一」的合成分解來思考解題); 以及加法交換律的說明 (R-1-2)。
7. 「比較型」: 以 N-1-1 建立之「對應」比較模型，回答「多幾個」、「少幾個」的減法問題。「比較型」問題相對比較困難 (因為用數數易生混淆)，須結合新學的思考方式來理解，建議放在一年級下學期教學。
8. 學習加減法的意義與應用情境時，數量不需過大。較大數加減法教學的困難不在加減法的意義，而是擁有確實的位值觀念 (尤其有「進位」「退位」需求時)、橫式記錄的經驗、基本加減法的熟練，故宜在一年級下學期教學。
9. 學習加減法的意義時，數量雖不需過大，但在學習加減法時，仍應將數量範圍依一定教學策略循序擴大，首先是基本加減法 (N-1-3)，一年級下學期則進行到兩位數加減法學習。學生應充分結合位值積木點數、單位轉換，以及加減法的合成分解，學習兩位數的加減法。其重點在於了解在位值系統中做加減法的意義 (因此需含少數進位與退位的例子)。
10. 一年級加減法教學，以日常應用為重心。但教學要保留一定時間，練習無應用情境的「計算題」，例如 $16+8=24$、$23-8=15$，在不用直式計算的情況下，學習用比較抽象的數數、表徵 (如花片的合成分解) 或位值經驗來思考解題。

條目範圍

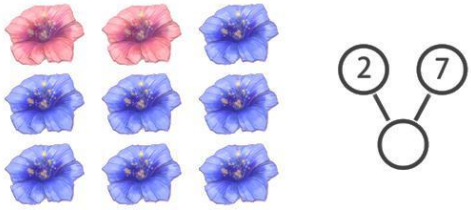
1. 一年級不處理直式記錄 (N-2-2)，不做加數、被加數、減數、被減數未知的應用題 (N-2-3)，只做「和」或「差」未知的應用解題。此皆和《九年一貫數學課綱》不同。
2. 在加減法中也要處理「0」。學習 0 的運算，最自然的情境是減法。例如「教室中有 8 個學生，他們都離開後，教室還剩多少人？」用減法算式記錄時，必須寫成 $8-8=0$，表示「沒有人」。再以此為基礎，理解「某數 $+0$」「$0+$某數」或「某數-0」其結果都不變。「0」的加減處理，是日後直式計算基礎的一部份。由於這個約定很自然，不需過份評量。
3. 課本或教學應含加減法應用解題並陳之單元，使學生能主動理解問題，察覺加法和減法問題的差異。
4. 一年級雖不處理加減互逆關係 (R-2-4)，也無對應的解題活動 (N-2-3)。但仍應透過某些活動如「基本加減法」(N-1-3)，讓學生感受加減關係，作為二年級學習的先備經驗。

5. 在一年級先不處理「相差多少」的問題，在二年級才進行這類型問題的教學（N-2-2）。

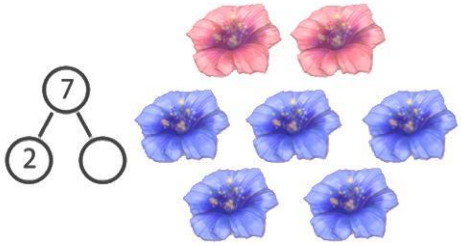
釋例

1. 數的合成分解經驗是加減法的先備經驗。

(1) 例 1：合成的例子：2 和 7 合起來是多少？可以用下列圖示記錄：



(2) 例 2：分解的例子：7 可以分成 2 和多少？可以用下列圖示記錄：



2. 透過不同情境（如併加、添加、拿走、比較型），理解加法和減法的意義。

(1) 例 1：加法問題的題型：

加法的情境可以區分為併加型問題和添加型問題兩類。其中併加型問題比較簡單，可視為理解加法算式的原型（即「合成」），建議教師首次引入加法算式，必須是併加型問題。

- 併加型問題：池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？
- 添加型問題：弟弟有 3 個蘋果，媽媽再給他 3 個蘋果，現在弟弟有幾個蘋果？

就解題活動而言，併加型和添加型是加法問題（將兩堆物件合起來點數確定數量），就解題記錄而言，這兩類問題都要用加法算式記錄。

(2) 例 2：減法問題的題型：

加法的情境可以區分為拿走型（即分解型）問題和比較型問題兩類。其中拿走型問題比較容易理解，可視為理解減法算式的原型（即「分解」），建議教師首次引入減法算式，必須是拿走型問題。

- 拿走型問題：池塘裡有 8 隻小鴨，其中 3 隻走上岸，池塘裡剩下多少隻小鴨？
- 比較型問題可再分為兩類：
  - 比較型問題（原型）：王老先生養了 8 隻白羊，5 隻黑羊，白羊比黑羊多幾隻？
  - 不同單位的比較型問題：有 8 個小朋友和 5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子多還是人多？多多少？

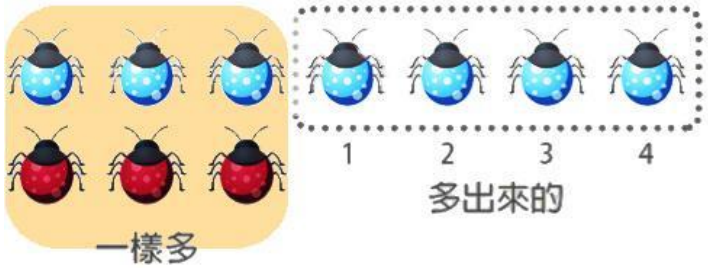
  就解題活動而言，上述三個題型很不相同，如下列解題圖示：

■ 拿走型問題之解題圖示。教室裡有 5 位小朋友，走了 3 位，剩下幾位？

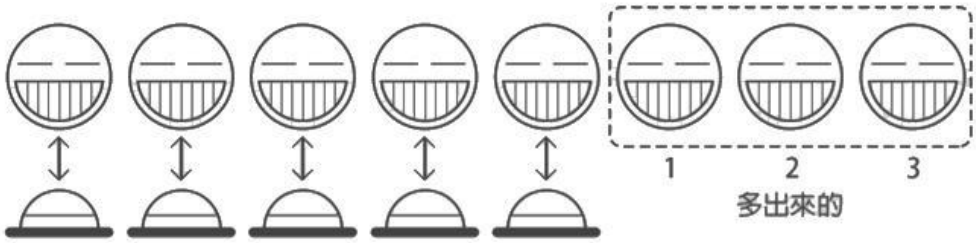
5 － 3 ＝＿＿

(《部》第一冊課本 P.61)

■ 比較型問題（原型）之解題圖示：7 隻瓢蟲比 3 隻金龜子多幾隻？



■ 不同單位的比較型問題解題圖：8 個小朋友，5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子多還是人多？多多少？



(3) 例 3：其他題型，也參考 N-2-3。

除了以上常見問題類型外，透過序數結合加減的問題也會出現在日常應用，舉例如下。

- 爬樓梯比賽，王先生到了 10 樓，又向上走了 1 樓，現在他在第幾樓？
- 李小姐從百貨公司的 11 樓向下走 2 樓到童裝部，童裝部在幾樓？
- 阿姨排隊買票，她的前面排 了 17 個人，阿姨排在第幾個？
- 排隊結帳，林叔叔排在第 12 個，媽媽排在林叔叔前面第 3 個，媽媽排在第幾個？
- 多多少、少多少和相差多少？同一個比較型的情境，常有三種不同的問法：

  ■例：農場裡面有 10 隻白羊和 7 隻黑羊，問：

  誰多？多幾隻？誰比誰多幾隻？（易）

  誰少？少幾隻？誰比誰少幾隻？（稍難）

  白羊和黑羊相差幾隻？（二年級再出現）

上述第 3 種問法中的「相差幾隻」是絕對值的概念，「白羊比黑羊多 3 隻」、「黑羊比白羊少 3 隻」，都是「相差 3 隻」，小一學生不易理解。建議一年級先布「多幾隻」的問

題，再布「少幾隻」的問題，二年級才處理「相差幾隻」的問題。

3. 初步認識橫式算式與符號（參見 R-1-1）：

(1) 例 1：「哥哥有 7 顆彈珠，弟弟有 6 顆彈珠，兩人合起來共有多少顆彈珠？」

首先學生從題意判斷這是加法問題，當學生透過數數算出「7 顆彈珠和 6 顆彈珠合起來是 13 顆彈珠」後，要求學生將解題活動和結果記成「$7+6=13$」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題（加法）」、「問題是什麼（$7+6$）」、「答案是什麼（13）」這三個重點。

(2) 例 2：「盤子裡有 8 片餅乾，弟弟吃了 3 片，盤子裡剩下幾片餅乾？」

學生先從題意判斷這是減法問題，當學生能透過數數算出「8 片餅乾，吃了 3 片，剩下 5 片」後，要求學生將解題活動和結果記成「$8-3=5$」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題（減法）」、「問題是什麼（$8-3$）」、「答案是什麼（5）」這三個重點。

(3) 擬題活動：

為了加強學生理解加、減法算式的意義，可以透過擬題活動來協助。例如教師先列出加法算式「$5+3=8$」或減法算式「$8-3=5$」，再要求學生擬出符合該算式的相關文字題，檢查學生是否掌握加、減法算式的意義。

擬題活動的進行須注意：

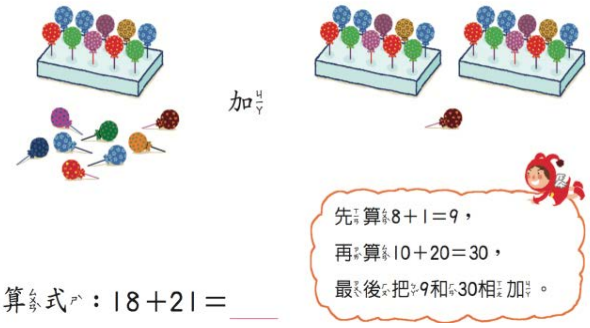
- 須在學生已能順利進行加、減法應用問題的解題、列式，並對加、減法算式的意義和紀錄格式熟練後才進行。
- 進行擬題時，學生以口語表達即可，不宜要求以文字描述。
- 學生的擬題只要是併加型、添加型或拿走型的情境即可。

(4) 加減法計算的學習過程有很多方式，最根本的基本加減法範圍內的學習，請見N-1-3釋例的說明。其後的二位數加減法，應從數數能力、位值概念、合成分解模型入手。

- 二位數的加減法而其加數或減數為一位數或整十的情形：
  - 加一位數：運用 N-1-1 釋例 6.從一數開始順數的能力解題。
  - 減一位數：運用 N-1-1 釋例 6.中從一數開始倒數的能力解題。
  - 加幾十：運用 N-1-1 釋例 6.從一數開始「多十」順數的能力解題。
  - 減幾十：運用 N-1-1 釋例 6.從一數開始「少十」倒數的能力解題。
- 一般二位數加減法：透過具體物（位值積木、花片）的操作來理解二位數加或減二位數的方法。一年級的二位數加減法不以計算的熟練為目的，教師應將重點放在學習「如何在位值系統中進行加減法」。

■ 二位數加二位數（不進位）：這是合成分解模型的簡單應用。

2 18加21等於多少？

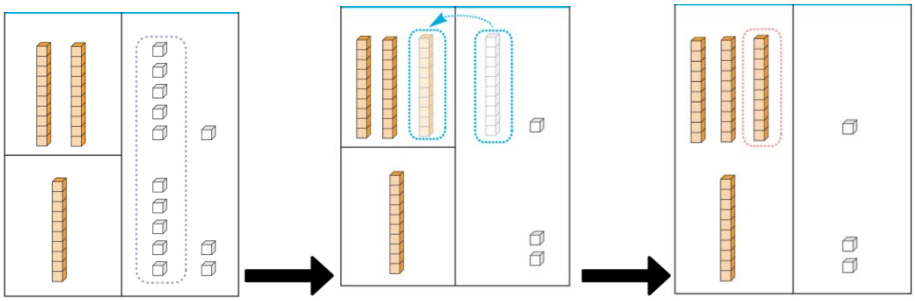


算式：18＋21＝＿＿

（《部》第二冊課本 P51）

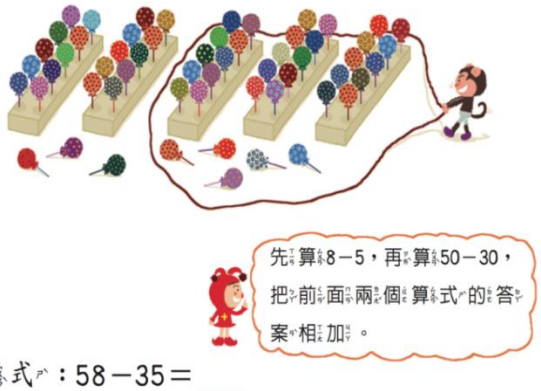
■ 二位數加二位數（進位）：進位時要用到 10 個 1，可換成 1 個 10。

例：26+17=43。



■ 二位數減二位數（不退位）：這也是合成分解模型的簡單應用。

4 58減35等於多少？

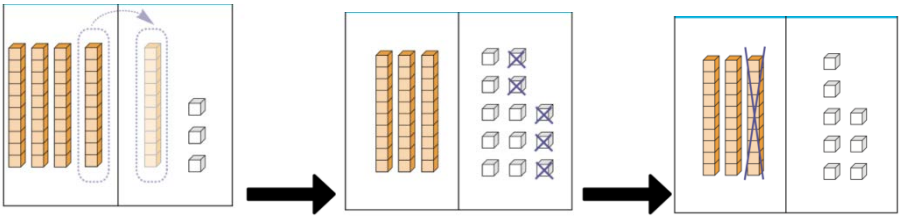


算式：58－35＝＿＿

（《部》第二冊課本 P78）

■ 二位數減二位數（退位）：退位時要用到 1 個 10，換成 10 個 1。

例：43 － 15 ＝？



錯誤類型

誤將不同類量作加減計算。

(1) 例 1：1 枝鉛筆 5 元，小明買 2 枝鉛筆，共要花多少元？學生誤列「$1+5=6$」、「$5+2=7$」或「$1+2=3$」等錯誤算式。

(2) 例 2：一條船上有 35 頭牛，14 頭羊，問船長幾歲？學生逕行列出「$35+14=49$」或「$35-14=21$」得出荒謬解答。

- 建議：教師請學生說明或解釋算式，以澄清觀念之錯誤處。

(3) 以題幹先出現的數為被減數，列出錯誤減法算式。(另一原因見 R-1-2)

例：小明有 3 元，小華有 5 元，小華比小明多幾元？學生列成「$3-5=2$」。

- 建議：除確認學生了解題意外，應重申「被減數」比「減數」大的約定。

(4) 學生做減法問題，知道答案是「沒有」，但未寫成 0。如「$8-8=$　」。

- 建議：強調「沒有」記成「 0 」的約定。

評量

1. 評量重點：

(1) 能解決「添加」、「併加」、「拿走」、「比較」各型應用問題。

(2) 能針對應用問題，列出正確橫式算式，並說明問題與算式的關係。

(3) 能計算加法與減法的算式問題，進而協助解決應用問題。

(4) 能從加法與減法算式擬出對應的生活應用情境問題（參考釋例 3 (4)）。

2. 注意事項：

(1) 本條目在一年課程中宜分成多個單元進行，要注意數量範圍的合理性與題目類型是否適宜，如較大數加減法或「比較型」問題宜在一年級下學期。

(2) 解題的想法可能有多種，只要合理即可。

(3) 解題的計算方法要符合學生能力，但也應在學生理解且有能力時，要求以較簡潔的方式解題，化繁為簡讓學生逐步提升解題能力。

(4) 應用問題的解題，應列成橫式算式並應寫「答」，「答」中的答案要含單位（除非特定問題無單位），養成完整的答題習慣。

N-1-3 基本加減法：以操作活動為主。以熟練為目標。指 1 到 10 之數與 1 到 10 之數的加法，及反向的減法計算。 **備註：**在活動過程中，可能練習到兩步驟以上的加減混合數算，這是活動的常態，其中自然延伸之計算策略與數感建立更值鼓勵，這種活動不是兩步驟計算的正式教學。	n-I-2

連結：N-1-2、N-1-4。

後續：N-2-2。

基本說明

基本加減法主要是類似「十十乘法」的「十十加法」(及相應減法)，其中尤其強調「合十」的重要性。藉由熟練小數字的加減法，可以增強學生的簡單心算能力與信心，除了協助一年級較大數字之加減法計算，更是二年級之後直式計算的基礎 (四則直式計算都會用到基本加減法)。

(1) 基本加減法的教學必須注意下列事項：

- 在操作活動中進行，直到學生熟練，而不是強行背誦。
- 鼓勵學生獨立思考，算法容許多樣化。
- 注重與生活的連結，培養學生應用基本加減法的意識。
- 採用多種練習方式，激發學生學習興趣。

(2) 熟練的意思是，能夠完全不用數數就知道答案。教師應配合各種活動或遊戲，寓教於樂，讓學生自然熟習 (見底下釋例)，不要單純死背。

(3) 基本加減法包括：「合 10」與「拆 10」; 其他十十加法與對應之減法。另外也可將加 1 與減 1；加 10 與減 10；視為基本加減法。

(4) 由於這是操作活動，在過程中若「遊戲」布題自然用到多步驟加減混合計算 (「7 加 8 是多少？再減 5 呢？」、「三個 4 加在一起是多少？」)，或學生計算時運用「合 10」與「拆 10」於加減問題，應視為自然延伸之計算策略與數感，予以鼓勵，而非抑制。

條目範圍

基本加減法的練習，應該從學習加減法之後開始，遍及一年級的數學教學。(猶如二年級的十十乘法)。

釋例

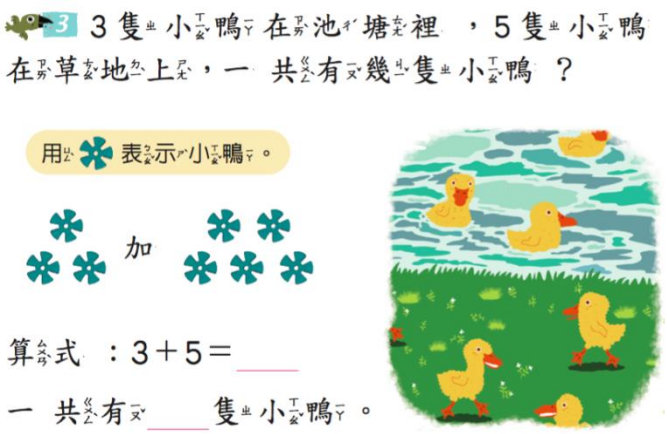
1. 「基本加法」指的是一位數加一位數的加法 (如下圖)，「基本減法」指的是一位數減一位數及十幾減一位數的減法。透過簡單的分與合活動，學生在基本加減法的範圍，應透過基本加減法熟知加法和減法的關係。

1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7	7+1=8	8+1=9	9+1=10
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8	7+2=9	8+2=10	9+2=11
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9	7+3=10	8+3=11	9+3=12
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10	7+4=11	8+4=12	9+4=13
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11	7+5=12	8+5=13	9+5=14
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12	7+6=13	8+6=14	9+6=15
1+7=8	2+7=9	3+7=10	4+7=11	5+7=12	6+7=13	7+7=14	8+7=15	9+7=16
1+8=9	2+8=10	3+8=11	4+8=12	5+8=13	6+8=14	7+8=15	8+8=16	9+8=17
1+9=10	2+9=11	3+9=12	4+9=13	5+9=14	6+9=15	7+9=16	8+9=17	9+9=18

此圖不見得要出現在教科書。

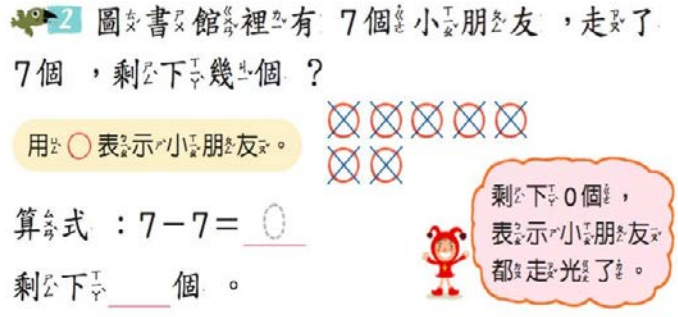
(1) 建議讓學生透過多樣的操作活動熟練基本加減法，底下是一些可能的活動：

- 全部點數：這是最基本也是最初的加減法活動，運用數數的能力。
  - ■ 以 3 + 5 為例，分別拿出 3 個花片、5 個花片，從頭由 1 開始點數全部的花片（一次點數），得到 8 的答案。



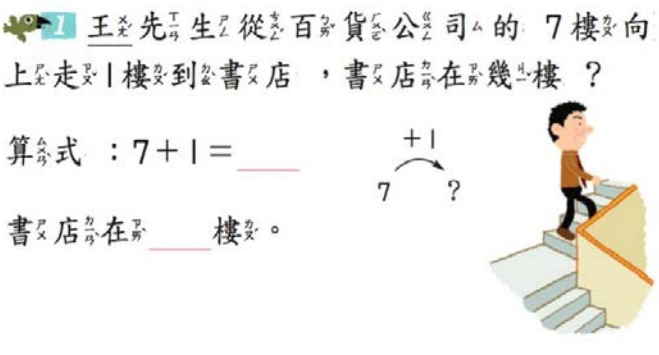
（《部》第一冊課本 P.41）

  - ■ 以 5 – 3 為例，先畫出 7 個圓圈，再由原先畫出的 7 個圓圈中，畫掉要拿走的 7 個圓圈。最後點數剩下的圓圈，得到剩下 0 的答案。



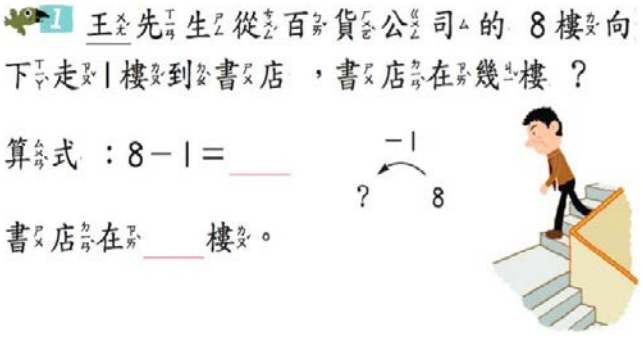
（《部》第一冊課本 P.60）

  - ■ 向上數：以 7 + 3 為例，口中唸「7」，伸出 3 根手指，從 7 開始順數 3 得「8、9、10」，得到 10 的答案。



（《部》第一冊課本 P.42）

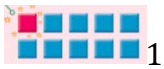
■ 向下數：以 8 – 3 為例，口中唸「8」，伸出 3 根手指，從 8 開始倒數 3「7、6、5」，得到 5 的答案。



（《部》第一冊課本 P.62）

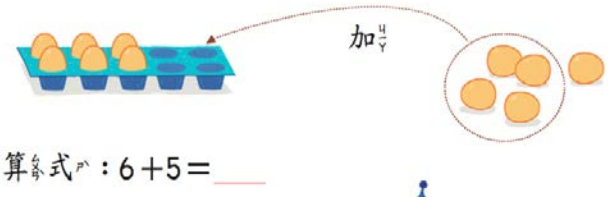
● 合 10：

■ 探索哪兩個數合起來是 10 的活動。透過圖形觀察算式的變化規律。在和 10 活動中學生應十分熟悉 10 的合成與分解。


$1+9=10, 10-1=9, 10-9=1$

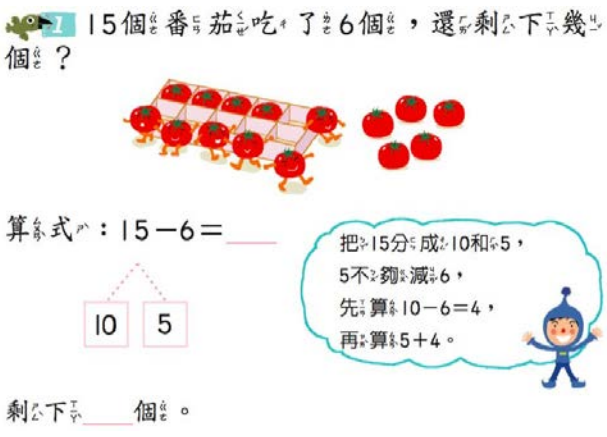
$2+8=10, 10-2=8, 10-8=2$

■ 以 6 + 5 為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：



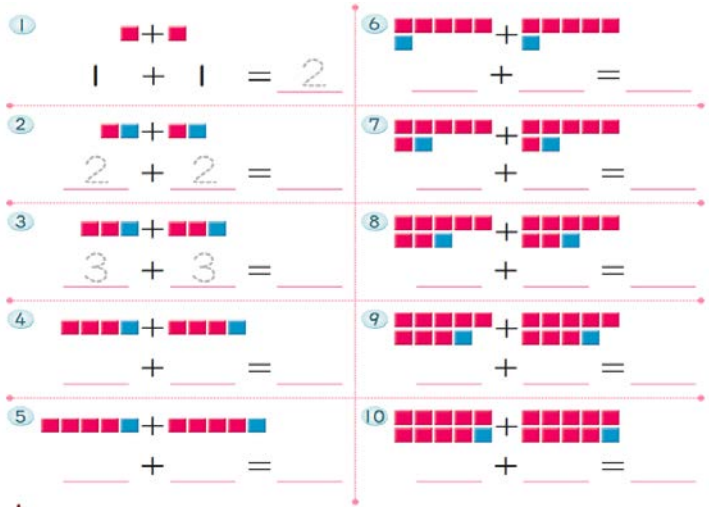
（《部》第一冊課本 P.28）

■ 以 15 – 6 為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：



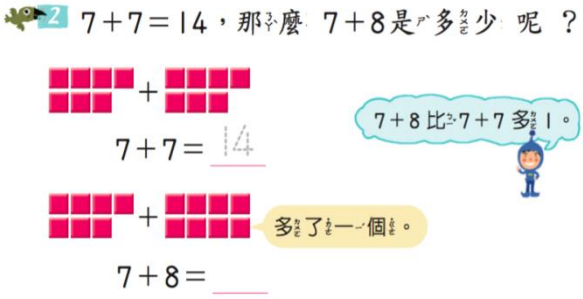
(《部》第一冊課本 P.30)

- 同數相加：
  - ■ 被加數和加數是相同的數，讓學生運用模型進行兩數相加的活動，觀察模型和數字的變化規律。例如：



(《部》第一冊課本 P.78)

  - ■ 利用同數相加的事實來做加法。例如：



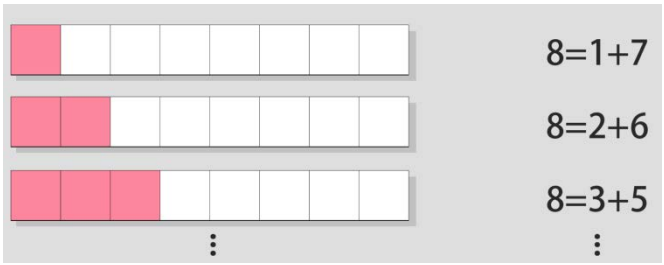
(《部》第一冊課本 P.79)

2. 基本加減法中的加減關係：當學生用以上方法熟悉基本加減法後，再透過恰當的「遊戲」，就可以熟練基本加減法中的加減關係，作為二年級加減互逆的前置經驗。

例：下圖黃框中的數加起來是紅框中的數，在空的位置填入恰當的數字。

(1) 在恰當教學單元中，可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。

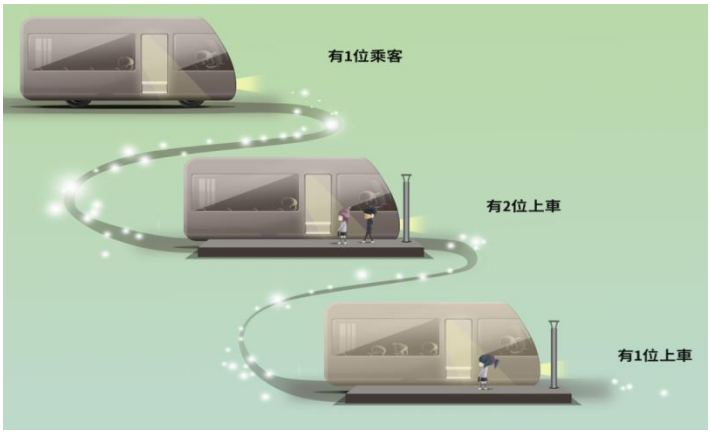
例如：哪兩個數合起來是 8？可以藉由下列圖示搭配算式紀錄來表示：



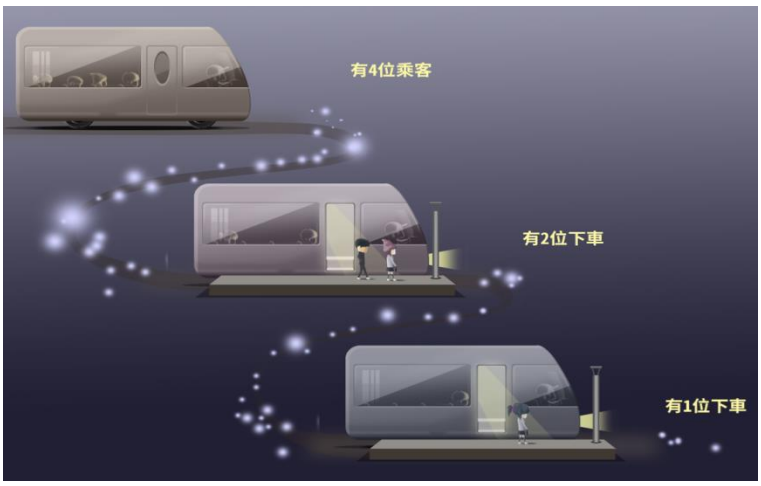
這樣的紀錄格式，建議在學生已經熟悉 $1+7=8$、$2+6=8$、$3+5=8$ 的格式及計算之後才引入，通常安排在下學期的課程。

(2) 透過操作活動，可以用遊戲或故事情境的方式進行多步驟的加減混合計算。引導學生用心算、花片、畫圈等方式模擬真實情境，達到熟練基本加減法的目標，但不出現算式紀錄。

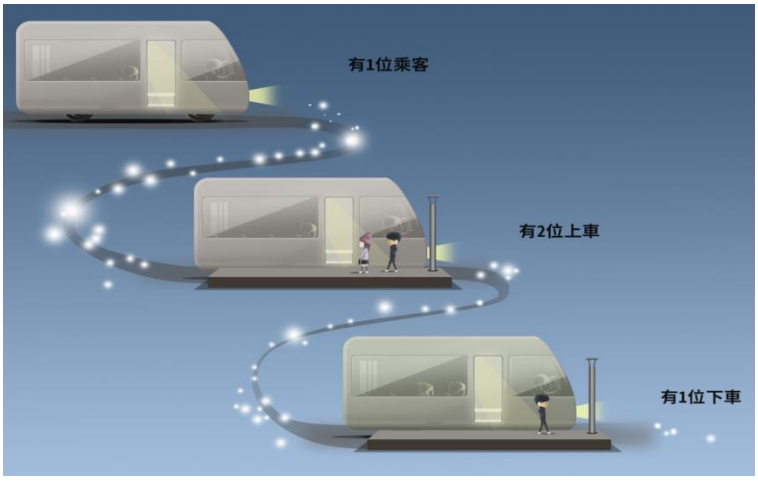
- 例：用上下公車的情境問各種混合計算的問題。



連加情境



連減情境



加減混合情境

- 例：將學生兩兩分組，進行類似如下的挑戰遊戲。

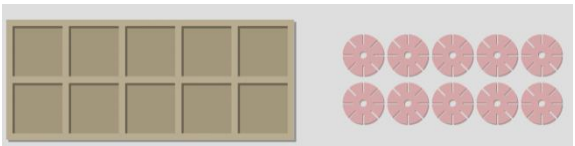
  「3 加 7 是多少？再減 4 是多少？」

  「4 個 3 加在一起是多少？」

  「1 加 2，再加 3，再加 4 是多少？」

(3) 底下是一些可以用來做心算練習的活動。

- 十格板： 利用十格板和花片做基本加減法。



- 心算卡遊戲
  - 例： 從心算卡中找出和為 9 的心算卡，並找出被減數為 11 的心算卡，排排看，可以看到什麼規律。
- 用撲克牌遊戲玩「合十」。

錯誤類型

學生執著使用某些計算方式（如「數手指頭」「全部點數」），計算繁複可能發生錯誤。

(1) 例：計算 3 + 7。先數 3 個花片，再數 7 個花片，從頭再數一次得到答案 10。

- 建議：教師在數的教學一開頭就要鼓勵學生要多元思考與練習，才能因應不同問題，選擇恰當的計算方式。如果直接強迫學生背誦對學生並沒有利。

(2) 減法需退位時，發生「大數減小數」的錯誤。例如：12 − 7 算成 17 − 2。

- 建議：回到具體操作或表徵解決原來問題。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能透過操作活動等逐步熟練加 1 與減 1；加 10 與減 10；「合 10」與「拆 10」最後能不透過數數，就流利得到答案。
   (2) 能透過操作活動等逐步熟練十十加法與反向之減法。
2. 注意事項：
   (1) 在熟練的過程中，依照學生能力評量應從給予物件、圖示、遊戲或提示，到最後只出現算式。
   (2) 熟練後可以算式、填空題、九宮格、心智圖、樹枝圖等多元方式，要求在限定時間讓學生完成計算。

N-1-4 解題：**1 元、5 元、10 元、50 元、100 元。**以操作活動為主。數錢、換錢、找錢。 **備註：**容許多元策略，以利建立數感，教師不應視為單純的加減單元。	n-I-3

連結：N-1-1、N-1-2、N-1-3。

後續：N-2-5。

基本說明

1. 「用錢」是數學基本的日常生活應用，若配合位值概念的教學，能收相互強化之效。「用錢」的各種活動如數錢、換錢、找錢，通常都有多元的解題策略，讓學生發展自己的想法並彼此溝通，協助建立數感，是本條目的目標。
2. 用錢所牽涉的數學，如果變成單純的課堂教學，往往顯得過於形式或瑣碎，其中所牽涉到的數感訓練，應以實際情境的操作活動來進行，若能連結一年級其他條目整合進行更佳。例如簡單的買賣活動，學生輪流扮演買方或賣方，可以提高學生的學習興趣。
3. 可進行的活動包括：「數錢」──結合數數、位值、加法，甚至針對 5 元的「五個一數」；「換錢」──除了最重要，與「一」與「十」類似的 1 元和 10 元間的轉換之外，也包括 5

元和 10 元間的轉換（10 元相當於 2 個 5 元）、10 元和 50 元間的轉換（50 元相當於 5 個 10 元）;「找錢」──除了練習換錢（以 50 元找錢、10 元找錢）之外，也可以練習如何付錢（例如買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元）。

條目範圍

1. 如前所述，讓學生發展多元的解答策略，是本條目的目標，因此切忌由教師灌輸單一解題策略，多引導讓學生發展其合理解題策略。
2. 可介紹 100 元鈔票，但只做 100 元與 50 元、10 元、1 元之間的兌換。（N-2-5）
3. 本條目重點是活動，目的在加強位值認識，不是加減法教學，教師不可要求學生將問題轉換成加減計算問題。例如在本條目活動中可解決相當於進位或退位的問題，但在一年級，除了基本加減法（N-1-3），並不做其他進退位的加減教學。
4. 本條目若做紙筆評量應注意到和加減問題作區隔，不要求學生列加減算式。

釋例

1. 錢幣與位值：錢幣是比較特別的教具，數學積木和數量是成比例的教具，但錢幣不是，例如 10 元硬幣的面積、體積或重量，都不是 1 元硬幣的 10 倍，有時會造成學生理解的困擾。學生應理解 1 枚十元硬幣和 10 枚一元硬幣等值是社會的約定，其他幣值的錢幣也一樣。
2. 錢幣的幣值介紹：

   (1) 基本幣值（1 元、5 元、10 元、50 元和 100 元）介紹和兌換，包括：
   - 5 元、10 元、50 元和 100 元錢幣分別和 1 元錢幣的兌換。
   - 10 元錢幣和 5 元錢幣的兌換。
   - 50 元錢幣、100 元錢幣和 10 元錢幣的兌換。
   - 100 元錢幣和 50 元錢幣的兌換。
3. 數錢：結合 5 個一數、10 個一數的方式，可以快速點數多枚以 5 元或 10 元為單位的元數。當錢幣數量較多時，引導學生有策略的數，先從幣值較大的錢幣數起，也可和加法向上數的策略結合。

   (1) 例 1：皮包內有多少錢？用 10 個一數數 10 元硬幣；用 5 個一數數 5 元硬幣。

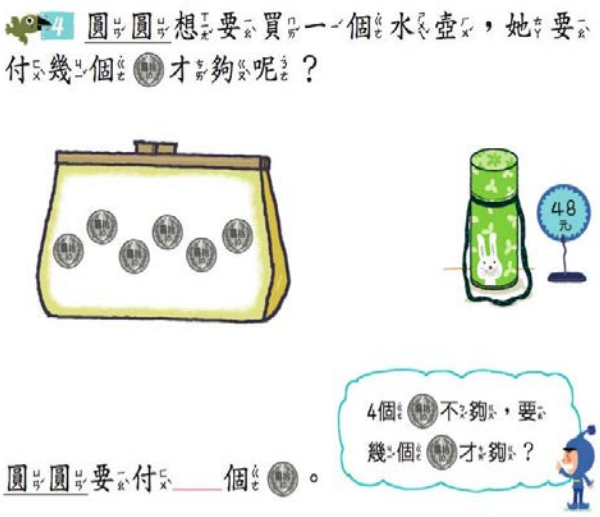
(2) 例 2：2 種錢幣的組合：

● 例 3：多種錢幣的組合：

4. 透過買賣活動，引起學習動機：例如上市場、去便利商店或文具店買東西的情境。碰到需要找錢或錢不足的狀況，避免變成用加減法算式來算，而是用實際換錢、數錢的操作讓學生有更多經驗。

(1) 例 1：「想買東西，錢夠嗎？」用點數來解決問題。

(2) 例 2：「可以怎麼付錢？」



(3) 例 3：買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元。

(4) 例 4：用到換錢來買東西，拿 5 個十元去買 38 元的東西，先將 1 個十元硬幣換成 10 個一元硬幣再去買。

錯誤類型

1. 混淆幣值單位（元、錢或個），例如問「錢包裡有 1 個 5 元和 3 個 1 元，總共是多少

錢？」答案是 8 元，但學生誤答成 4 個錢或 8 錢。

- 建議：教師教學時避免問多少錢？宜改問多少「元」？學生若混淆錢幣單位「元」與錢幣個數「個」時，建議透過買賣活動安排數錢、換錢、找錢等「用錢」之生活應用，熟悉用錢活動中單位「元」之基本重要性。

2. 混用錢幣圖示與位值表徵。例：將 5 個十元表徵在位值表上。結果在記錄時，十位寫成 50。這類錯誤和「把 5 個表示 10 的橘色積木放在位值表的十位」造成的錯誤一樣，只是錢幣幣值大小並無比例關係，更不適合置於位值表。

- 建議：首先教師應避免布題時，出現這類錯誤。一旦發生，建議教師告知位值表上要記錄一個數字，而且每一格上都只能記一位數字。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能認識 1 元、5 元、10 元、50 元、100 元的硬幣或鈔票。
   (2) 能透過操作，結合數數、位值、加法等進行數錢。
   (3) 能透過操作，結合幣值間的等值關係進行換錢活動。
   (4) 能透過操作，進行「付錢」和「找錢」等「用錢」的活動。
2. 注意事項：
   (1) 本條目以操作為主，評量需配合相關的教具，採用紙筆評量時題目應包含錢幣圖示，讓學生透過畫記或圈選等方式回答用錢的問題。
   (2)「用錢」的活動不列加法（減法）算式，除「數錢」外「換錢」、「付錢」、「找錢」的答案呈現方式常常不只一種。
   (3) 不做超過 100 元以上的「用錢」活動。
   (4) 不宜評量：用 10 元 1 元做位值表表徵，參考錯誤類 2.。

N-1-5 長度（同 S-1-1）: 以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。 **備註：**活動內容含直線與曲線。本條目教學無常用單位（N-2-11）。	n-I-7

連結：N-1-1、N-1-2。

後續：N-2-11。

基本說明

1.「數」透過「量」應用到日常生活。離散量五花八門，這些單位為「個」、「顆」、「隻」等等的數量與數數密切相關，通常融合在「（整）數」課程中教學。連續量包含和視覺相關的幾何量──「長度」、「角度」、「面積」、「體積」、「容量」，以及其他量如「重量」與

「時間」，將會分散於各年級教學，循序漸進，其中尤以長度最為基礎和直觀易學。一年級學習的量為「長度」(本條目)與「時間」(N-1-6)。

2. 長度是學生最早學習的連續量，具有指標作用，又是數線與小數概念的入口，教師應完整處理此細目，以利後續相關學習之流暢。由於連續量除了日常應用，也與自然科學應用相關，必須藉由實際觀察與操作活動，認識長度的意義(「長短」、「高矮」等)，再學習如何比較物體長短的各種方法，其活動應包含「認識長度」、「直接比較」、「長度複製」、「間接比較」、「個別單位」。較困難的長度基本概念活動，見 N-2-11。
3. 直接比較：把兩(細長狀)物，固定一端，再比較另一端的位置(這和數的比較方式一致)。透過繩索等曲線類物體，學習在比較長度時，必須先拉直後才做比較。透過直接比較，理解「複製長度」的長度相等意涵。
4. 間接比較：甲、乙兩物不(能)直接比較，透過先將甲長度複製，再拿去與乙比較。
5. 個別單位與比較：學習如何透過身邊的「個別單位」(如：手臂長、掌幅、步幅、紙條、筆、橡皮擦、書長、迴紋針等)，測量一物的長度。並以此方法測量兩物長度，再結合數的比較來比較兩物的長短。我們強調學生要在實際操作中，確定這個方法適用。
6. 利用「單位」做測量而得到「長度」的量，讓「長度」與「數」的教學產生密切連結。除了比較之外，本條目也應處理長度的合成分解活動(加減法)，作為長度加減(N-2-11)與數線加減(N-3-11)的先備經驗。例如討論兩繩接起來的「長度」和各別的「長度」的關係，或討論一繩剪斷後，繩子原長度，和部分長度的關係。
7. 學生應知道測量長度時，應該找方便而恰當的「單位」。例如測量教室的長度，用步幅為單位比用迴紋針恰當。讓學生討論為什麼某些「單位」比較方便或恰當。
8. 從操作活動的教學中，建立「距離」的認知，以利日後的溝通。從操作活動的教學中，察覺兩點之間的線(繩子)，以直線為最短；兩點之間以直線距離最短。

條目範圍

1. 教學中要包含直線物與曲線物，以方便學生處理為原則。
2. 不做常用單位如「公分」、「公尺」的教學。(N-2-11)
3. 運用「個別單位」測量時，經常會出現無法剛好的情況，只需要運用「長一點」、「短一點」、「大約」等口語即可。
4. 在基本說明 5. 的活動中，可能會觸及較長的「單位」量出來的「長度」會比較小的議題。但這不是一年級學生必要學習的內容，教師斟酌現場情況處理即可。(見 N-2-11)
5. 留意長度保留認知尚未充分發展的學生，在多次經驗後，讓學生知道同一物長度在各種時空移動中不會改變。

釋例

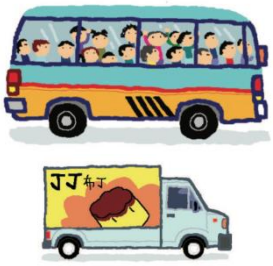
1. 長度的初步認識與直接比較：「長短」、「高低」等長度用詞需透過直接比較才能真正理解，教師也比較容易說明「長度」的意思。

   (1) 初步介紹長度：教師引導學生認識長度教學經常使用的工具，如鉛筆、繩子、黑板的邊緣、長方體盒子的邊緣等。教師以指尖沿物品一端徐徐移動至另一端，強調直線段「長度」之認識。

   (2) 直接比較：不透過媒介物而將兩個（或多個）個物直接作比較。

   - 物品兩端未對齊，但有包含關係。這是最直接而直觀的比較。

     例：下面兩輛車子，哪一輛比較長？

   - 典型的長度直接比較：先對齊比較物的一端，再比較另一端位置的遠近，直接比較二物的長短。

     ■ 例 1：比較左圖三條紙條的長度？（圖示物品靠右對齊）

     ■ 例 2：誰比較高？

   - 曲線物的長度比較：教師引導學生先將曲線物體拉直後才比較。

     ■ 例：讓學生進行二條彎曲繩子的長度比較？

     藉由各種行度直接比較的討論，豐富與「長度」相關的語彙如長短、遠近、高矮、厚薄、粗細。

2. 長度的複製：將一物長度仿製到另一物上，藉由直接比較，知道其等長相等。複製是長度教學的重要操作與工具。

   (1) 完整複製：這是最基本的長度複製。

   - 例 1：以繩子剪出和書桌指定邊等長的段落。

● 例 2：在木條或繩子上做記號，使一端至記號處和原物等長。

(2) 長度的合成與分解：將一繩子剪斷成兩段，則兩小段繩子前後相接的長度，會等於原繩的長度，表示「兩小段繩子長度可合成原繩長度」或「原繩長度可分解成兩小段繩子長」。長度的合成與分解是長度的基本性質，和個別單位測量、長度加減法都有關。

(3) 累積複製：利用長度的合成性質，用不同物件頭尾相接成一線，此線長度和被複製物等長。其中最重要的特殊情況，是使用許多全等物件 (如迴紋針、鉛筆，等長繩段) 的累積複製。這種以同一物件的累積複製是個別單位比較的基礎。

(4) 彎曲物的長度：彎曲物如水桶的把手、圓罐的周界、身體的腰圍、樹圍等，都可以利用柔軟的繩子去複製，拉直後做為彎曲物的長度。

(5) 長度的間接比較：當要比較的兩物無法使用直接比較時，可複製其中一物的長度，再將複製物與另一物作直接比較，這種比較稱為「間接比較」。間接比較是使用器械測量長度的基礎。

例：「學校 A、B 兩棟大樓的裡的教室黑板是不是一樣長？」

因為無法將 A 大樓教室的黑板搬到 B 大樓去直接比較，所以先拿一條繩子把 A 大樓教室黑板的長邊複製下來，再拿去 B 大樓和那邊的黑板的直接比較。

3. 長度的個別單位測量：

(1) 個別單位測量：藉由釋例 2. 中以同一物件累積複製的想法，選定一個物件甲作為測量的 (個別) 單位，進行累積複製再點數所需的物件數目，就是該物體以此物件甲為單位的長度。例如釋例 2 中藍色長方形的一邊是「7 個迴紋針長」。

(2) 使用個別單位測量長度時，經常無法剛好量完。基於學生數學經驗不足，對於多一點或少一點的情況，可用「大約」一詞帶過。

(3) 為了避免用太小的單位量太大的東西 (或反過來)，如何選擇恰當的個別單位，是學習長度的重要課題，也是學生長度量感的一部份。鼓勵學生從身邊常見物選用恰當單位，如指幅、手扠、步幅、二手張開之長、迴紋針、小白積木、橘色積木等。

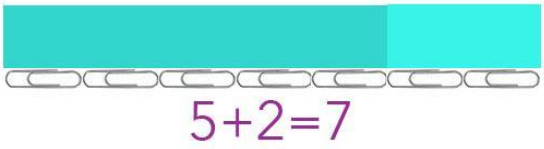
4. 長度的個別單位比較：以選定的個別單位，測量兩比較物，再以所得兩物長度做比較。透過個別單位的測量，把長度量轉化為數，把長度比較轉化為數的比較 (N-1-1)，建立了數和量的密切關係。

例：續釋例 3「A、B 兩棟大樓教室的黑板長度比較」。

準備長度相同的繩子當做個別單位，測量後 A 大樓黑板為 6 段長，B 大樓黑板為 8 段長，8 比 6 大，所以 B 大樓教室黑板比較長。

5. 長度的加減：利用個別單位的測量，可以將長度的合成和分解，轉化成數的加減問題

（如下圖）。一年級只做最基本的討論活動即可。



例：將一繩 A 剪成兩段 B 和 C，若用指幅作為個別單位測量，得 A 長為「13 指幅長」，B 長為「8 指幅長」，則 B 的長度為$13 - 8 = 5$，是「5 指幅長」。

6. 關於長度保留概念的小叮嚀：所有以上的長度概念，都奠基於一個長度保留的假設：「長度是不變的」，如此長度概念才有意義，長度的複製、以複製做間接比較、長度的合成分解、以個別單位測量等等才都有意義。長度保留是人類認知發展的一部份，因此教師不需強行教導，只要長度單元的教學充份而多元，許多學生都不會有問題。但教師仍應觀察在長度學習上較遲緩的學生，注意學生是否有這方面的問題。認知較遲緩不是錯誤，也不是學習力有問題，只要教師能寬容等待，大多數學生最後會自然跟上。

錯誤類型

1. 直接比較時（除了包含的情況），一端未對齊，逕行比較另一端位置。
   建議：用生活化的例子（如佔不同台階比較身高）提醒學生。
2. 曲線未拉直，以為曲線的長度比直線短。
   建議：比較拉直的繩子，將較長繩彎曲「變短」，讓學生領會其錯誤。
3. 許多學生犯錯是因為「保留概念」未成熟，見釋例 6.。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能從日常生活情境初步認識長度。
   (2) 能透過操作進行長度的直接比較。
   (3) 能透過操作進行長度的間接比較（含個別單位）。
   (4) 能運用方便而恰當的長度「個別單位」進行測量和比較。
2. 注意事項：
   (1) 在做比較時，要將比較物件（如繩子）擺直比較，有彈性的物件可暫不在此處處理。
   (2) 直接比較時提供至少一個可移動的長度物件。
   (3) 間接比較需透過複製再比較，若要採用紙筆評量，評量時除題目中的圖示外，應提供適宜做長度複製的物件，以供操作解題。

N-1-6 日常時間用語：以操作活動為主。簡單日期報讀「幾月幾日」；「明天」、「今天」、「昨天」；「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。簡單時刻報讀「整點」與「半點」。 **備註**：活動以教師和學生在教室中溝通之時間用語為原則，非時間單位結構之教學(N-2-13、N-2-14)。簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構。時刻須以鐘面教學。簡單鐘面時刻限「整點」與「半點」。	n-I-9

連結：N-1-1。

後續：N-2-13、N-2-14。

基本說明

1. 時間是另一種常用量，但是在學習上比較抽象，更因為時間的應用情境與時間單位換算都比較複雜，因此時間量的學習將遍及整個小學階段。
2. 由於時間無法重來，許多在幾何量常用的認識與比較方法(見 N-1-5)，受到很大限制，學生也不易體會。因此時間教學與計時工具的使用密切相關。另外，一年級時間教學，首重日常時間用語的學習，以利教師日後在各科教學之溝通。
3. 在可以比較的情況(同時開始的事件如賽跑、計時競賽)，學習「時間比較長」、「時間比較短」的用法。利用故事與日常經驗結合，讓學生分辨事件發生的「先」、「後」。這些比較用語，前者和事件時間長短(時間量)有關，後者和事件發生的時刻有關，這是兩種時間應用的原型。另外，建立一定時間量感後，可討論如「刷牙時間比吃一頓飯時間短」之類的比較。
4. 由學生的活動與睡眠起居經驗，學習使用「明天」、「今天」、「昨天」等時間用語，知道其先後順序。接著擴展其理解，以月曆或日曆讓學生簡單報讀「今天」、「昨天」、「明天」是「幾月幾日」或「星期幾」。
5. 以各種生活經驗(太陽起落、天空亮暗、吃飯時機等)，學習「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語。
6. 用鐘面學習簡單時刻報讀，以「整點」與「半點」為限。再連結基本說明 5，學習使用「上午 9 時」、「晚上 7 點半」的用法。
7. 以上基本說明 5 和 6 的學習中，可用鐘面工具問學生指定時刻的前(或後)1(或 2)小時的時刻。若溝通清楚，也不妨用日曆、月曆等問學生「前 1 天是幾月幾日」之類的問題。

條目範圍

1. 一年級的教學重點，以師生在教室溝通之時間用語為主要原則。不做時間單位結構之教學。(大單位見 N-2-14、小單位見 N-3-17。)

2. 簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構教學，也不處理月曆或年曆上的模式（N-2-14）。簡單時刻指「整點」與「半點」，不處理其他時刻（N-2-13），也不處理 24 小時制（N-4-13）。
3. 基本說明 7. 的教學只限於很簡單的情況，讓學生知道時刻和「數」之間的連結即可，前或後之數字以 2 為限，尤其不可碰觸週期性約定的邊緣（如「3 月 31 日下一天是幾月幾日」、「晚上 11 點睡覺，1 小時後是幾點。」）。（N-2-14、N-4-13）
4. 依照師生溝通的原則，「中午」、「晚上」一詞在此不需有嚴格定義。
5. 「上午 12 點 vs 下午 12 點」之溝通：對於端點時刻牽涉到溝通約定，於此階段，建議暫不碰觸。
6. 電子鐘：若學校使用電子鐘，建議盡量調成非 24 小時制。教師可告知「幾時幾分」的溝通約定，但不做其他教學。

釋例

1. 從日常經驗，學習「先」、「後」，「長（久）」、「短」的日常用語。
   (1) 例 1：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並比較生活事件（「起床」「吃早餐」「上學」「吃中餐」等）發生的先後。確定學生會正確使用「先」「後」的語詞。
   (2) 例 2：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並生活事件所花時間的長短。教師應選擇容易分辨時間長短的事件，如「刷牙和洗澡」、「戴帽子和穿外套」。
2. 認識「明天」、「今天」、「昨天」、「幾月幾日」或「星期幾」等時間用語
   (1) 從學生的日常生活入手，討論學校或家裡「明天」、「今天」、「昨天」的活動。
   (2) 以月曆或日曆為工具，報讀「明天」、「今天」、「昨天」是「幾月幾日」以及「星期幾」。
   (3) 以月曆報讀請學生回答一些簡單的日期問題（如假期、生日），但不牽涉到月曆的結構。
   (4) 學生應認識「明天」、「今天」、「昨天」是相對於今天的時間用語，但日期則是「絕對的」。
   (5) 教室中應佈置月曆，作為日常溝通之用，並鼓勵學生觀察和探索。
3. 認識「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語：從學生的日常生活經驗入手，知道太陽高掛頭時是「中午」，之前是「上午」，之後是「下午」，天黑睡覺時間是「晚上」。
4. 簡單時刻報讀。

(1) 老師教導學生如何看鐘面，學生能從長針和短針的位置讀出「幾點」或「幾點半」。

1 點

2 點

3 點半

(2) 配合鐘面知道中午 12 點之前是「上午」，之後是「下午」。也能結合釋例 3，使用「上午 9 點」、「下午 4 點」、「晚上 7 點半」的時間用語。

(3) 不必強調「中午」的嚴格定義，尤其不要說中午就是 12 點。

(4) 由於缺乏精確的鐘面教具，為避免誤導學生的學習，建議若想進行撥鐘教學應只限於教師示範。事實上一年級的時刻教學，撥鐘並非必要。而且教室若已有真正掛鐘，學生能真正結合時刻與實際生活，遠比撥鐘來得更重要。若學生想嘗試撥鐘，提醒學生應順時鐘撥轉。

(5) 電子鐘並非標準教具，也比較看不出時間結構，但因為使用者日多，為師生溝通方便，若有必要也可進行基本教學，以能溝通為原則。

錯誤類型

混淆時間量與時刻的概念，亦即混淆「先後」和「長短」。以為先發生的事件比較長，但事實上事件已經結束。

評量

1. 評量重點：

(1) 能依照日生活情境排出事件發生的先後順序。

(2) 能依照生活經驗比較事件所花時間的長短。

(3) 能在日常生活或情境中正確使用簡單時間用語，如「明天」、「今天」、「昨天」、「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。

(4) 能使用月曆或日曆報讀「幾月幾日星期幾」。

(5) 能報讀鐘面時間 (「整點」與「半點」)。

2. 注意事項：

時間的評量須提供相關的計時工具或情境，紙筆評量受比較多的限制，題目中應包含相關計時工具 (鐘面、月曆等)。

S-1-1 長度(同 N-1-5): 以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較(含個別單位) 。 **備註：**同 N-1-5 備註。	n-I-7

各項說明請參見 N-1-5。

S-1-2 形體的操作：以操作活動為主。描繪、複製、拼貼、堆疊。 **備註 :** 應包含平面圖形、立體形體或兩者互動之活動，豐富學生之幾何操作經驗。	s-I-1

連結：D-1-1。

後續：S-2-1、S-2-2。

基本說明

1. 本條目目標是透過各種形體的操作活動，讓學生體驗基本的幾何操作。例如移動物品或複製圖形時，可能會做平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作，也可能察覺到全等或對稱的現象，這些都是日後幾何學習的先備經驗。
2. 描繪：如依照老師給定的圖形，進行塗色。
   複製：如利用透明紙描繪，複製一全等圖形。
   拼貼：如簡單的平面圖形拼圖；幾何造型製作或仿製；簡單幾何圖形鑲嵌。
   堆疊：依照圖片指示，做簡單立體圖形的堆疊 (堆積木)。
   前三者是平面活動，後者是空間活動。由於簡單幾何形體容易掌握與判斷，可在這些活動中運用，作為 S-2-2 的前置經驗。。
3. 活動重點在啟動或刺激學童的幾何直覺，不做構成要素的教學。做溝通時，也可以讓學童隨意發揮，啟發學童自己對形體結構的體驗。

條目範圍

1. 本條目重點在幾何體驗，而非幾何圖形與概念的教學。學生在入學前，可能已經知道一些簡單圖形名稱，若有教學需要，可使用這些名稱，但僅限於溝通。至於圖形構成要素、嚴格定義，甚至「全等」、「對稱」等名詞都不該出現在一年級教學現場 (見 S-2-1 和 S-2-2)。一年級不做形體命名活動。
2. 依照一年級認知程度，本條目的相關拼圖教學活動和坊間拼圖應有明顯區別。拼圖活動所使用的幾何元件，應簡單且容易區分 (除非全等); 若牽涉相似圖形的放大或縮小，其大小應有明顯區別 (例如不同大小的正方形)。
3. 活動的難度，須考量學生的年齡。低年級學生肌肉還不能做細密協調，教師不宜做太過精確的要求。
4. 本條目不適合做紙筆評量。

釋例

1. 描繪與複製：

(1) 例 1：師生準備造形圖樣（如圖卡或積木），讓學生沿著造形的其中一個面之外緣作描繪，並描述其形狀。

（《部》課本第一冊 P.56）

（《部》課本第二冊 P.70）

(2) 例 2：拓印活動（將上述活動改為塗色再拓印或以蓋印章的方式進行）。

(3) 例 3：教師給定圖形或圖卡，讓學生沿外緣描繪或利用透明紙複製。

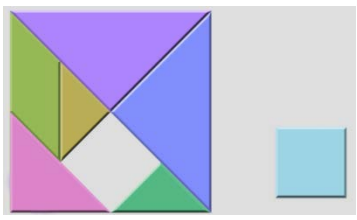
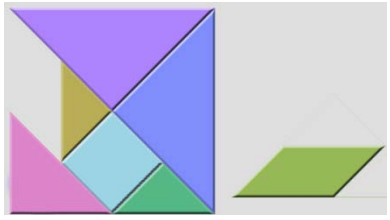
以上教學應與 S-2-1 和 S-2-2 區別。（見條目範圍 1. 之說明）。

2. 拼貼：幾何造型、看圖拼貼、拼圖等活動可讓學生進行平移、旋轉、翻轉（鏡射）等全等運動，以及比對、疊合等全等操作，又能學習辨認簡單平面圖形，是進行本條目的重要活動。

(1) 例 1：看圖拼貼。

（《部》課本第一冊 P.57）

(2) 例 2：幾何圖案的造形活動（含鑲嵌）。將下面圖形板放入拼圖中。

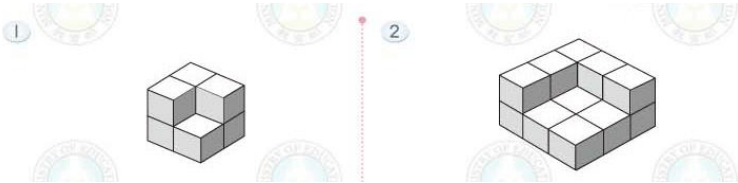



3. 堆疊：透過積木或實物組合等造形活動，經驗空間幾何活動。

(1) 例 1：師生準備空瓶、空盒、空罐、造形積木等，讓學生進行造形活動。

(《部》課本第二冊 P.66 改製)

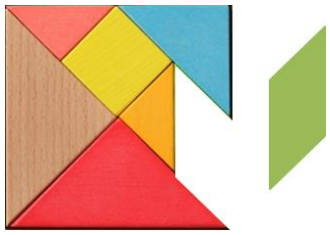
(2) 例 2：教師準備實物或圖片（示意圖如下）和方塊，請學生依圖作造形活動。



(《部》課本第二冊 P.69)

錯誤類型

1. 學生不知道可做旋轉或翻轉，建議多做拼圖活動，理解其必要性。如下圖做七巧板拼圖，若學生只會將綠色平行四邊形做旋轉，就無法拼成正方形。



2. 空間圖示只有一個方向，學生剛開始可能無法完成，教師應鼓勵學生多做嘗試，從錯誤和觀摩中學習。

評量

1. 評量重點：

(1) 能透過操作，完成圖形的描繪、複製、拼貼與形體的堆疊。

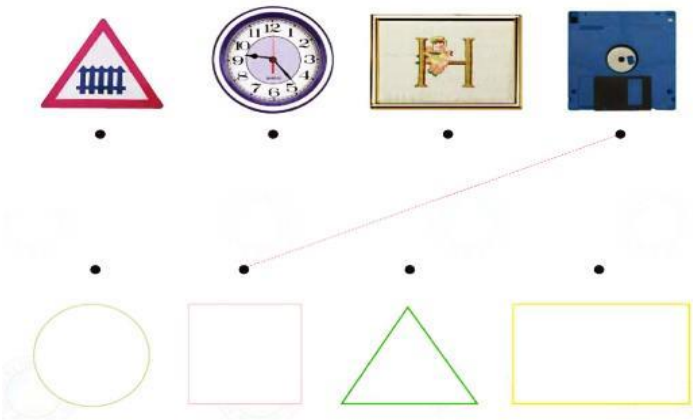
(2) 能在操作過程中體驗形體的平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作。

2. 注意事項：

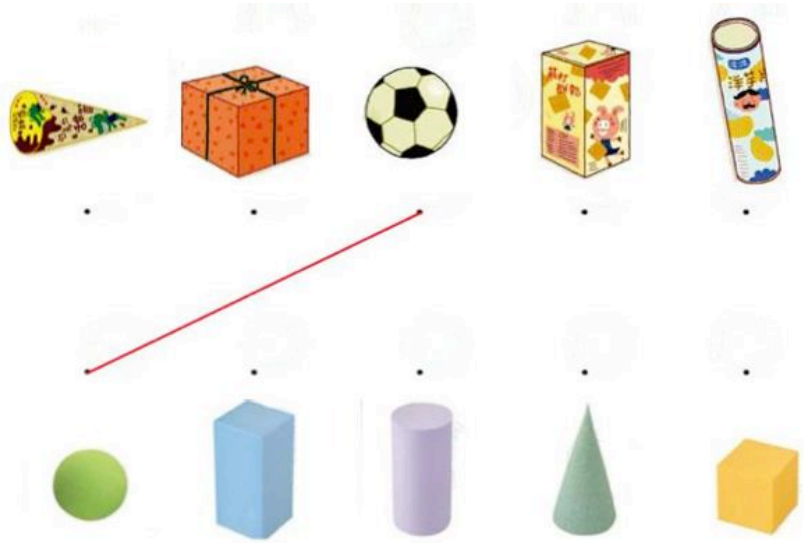
(1) 本條目以多元評量為主，若採紙筆評量則須提供相關物品（如複製、拼貼需提供物件或膠水），或限制評量目標（如立體堆疊不適合紙筆評量）。

(2) 紙筆評量可用連連看題型，提供充分的視覺線索。讓學生將很像的形體。

- 例 1：把看起來和很像的圖形連起來。



- 例 2：把看起來和立體積木很像的東西連起來。



R-1-1 算式與符號：含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、做檢驗學生的理解。適用於後續階段。 **備註：**此條目包括小學之後的學習，不再另列條目。本條目應在加減法單元中完成，不須另立獨立單元教學。	r-I-1

連結：N-1-2。

後續：N-2-6、N-2-10、R-2-1。

基本說明

1. 恰當運用算式與符號，有利於學生對數學的理解、思考與分析，增進學生間與師生間之溝通。確實使用各種數學符號，也能讓學生體會數學的嚴格性與普適性。
2. 算式與符號的使用基於約定，就像學習新語言一樣，必須有練習使用與確認的過程。因此和學習「數」類似（N-1-1），教師必須以說、讀、聽、寫、做的教學，讓學生多加練習，確認學生使用算式與符號的正確性，以利後續師生溝通，並納入學生日常使用的語言。其中「做」，包括在加減法教學時能列出正確的算式，以及能針對給定算式擬題（N-1-2）。
3. 一年級所學習的算式與符號，主要是阿拉伯數字和加減法的算式（包含「加號」、「減號」、「等號」）。為了建立正確的格式，教師可使用「被加數 + 加數 = 和」與「被減數−減數 = 差」的表示法來協助教學（但不放入評量）。
4. 在恰當教學單元（如 N-1-3），可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。例如「合十」活動中，問題「10 可以寫成誰的和？」，教師可以將學生提議的結果記錄成 $10 = 1 + 9$、$10 = 2 + 8$ 等，作為後續學習的前置經驗。

條目範圍

1. 本條目雖只出現在一年級，但其立意與教學過程應包含在後續數學課程中。
2. 此條目應在 N-1-1、N-1-2、N-1-3 的教學中一起完成，不需另立單元教學。
3. 在小學時，減法算式裡「被減數」比「減數」大的要求是一種約定。在減法解題時，教師要注意學生不可寫錯被減數與減數的位置（N-1-2）。
4. 學生初期常將「等號」視為「紀錄計算結果」的符號，建議基本說明 4. 的「等號」記錄方式應等到一年級下學期，加減法計算的學習穩固後才施行，而且只作為活動結果的紀錄之用。
5. 除了基本說明 4.，等號的其他使用方式在一年級不宜介紹：如在 N-1-3「基本加減法」中混合加減練習的活動結果，不宜寫成算式；不用等號連接算式，如「$2 + 3 = 1 + 4$」「$2 + 5 = 5 + 2$」；不使用連續的等號連結算式，例如「$6 + 7 = 6 + 4 + 3 = 10 + 3 = 13$」。

釋例（參見 N-1-2、N-1-3）

錯誤類型（參見 N-1-2）

評量（也可參見 N-1-2）

1. 評量重點：
   (1) 能正確執行算式與符號的說、讀、聽、寫、做。
   (2) 能正確列出加法和減法算式，說明算式中符號或數量在題目中的意義。
2. 注意事項：
   (1) 在教學中就要邊做評量，檢查列出算式需與題意相符（數字順序合理、使用符號正確），並能做正確計算。若有疑義應請學生說明。
   (2) 若要學生圈選正確算式，選項應避免「$1 = 7 - 6$」這類不熟卻正確的算式。

R-1-2 兩數相加的順序不影響其和：加法交換律。可併入其他教學活動。 **備註**：先用「併加型」（合成型）情境說明，再應用於其他情境。不出現「加法交換律」一詞。	r-I-2

連結：N-1-2、N-1-3。

後續：R-2-2。

基本說明

1. 「計算規律」的學習，應先透過最合理的情境，讓學生自然接受規律「顯然」的正確性；其次，恰當安排練習，讓學生體會運用規律的好處；最後在其他情境中運用「計算規律」。
2. 本條目學習目標為熟悉「兩數相加的順序不影響其結果（和）」。教師從合成分解模型相關情境進行教學，最容易解釋。
3. 當學生理解這個規則後，就可以應用在各種加法問題上，不應受限於情境。
4. 應併入 N-1-2 的教學中一起完成，不需另立單元教學。

條目範圍

1. 課本或上課時不出現「加法交換律」一詞。
2. 在一年級，學生只要能靈活運用此規律即可。教師教學時不應列出底下的算式，也不可如此評量：「$3 + 48 = 48 + 3$」、「$3 + 48 = 48 + 3 = 51$」。

釋例

1. 透過併加型的情境，經驗「兩數相加的順序不影響其和」。
   (1) 例 1：「小明左手有 5 顆彈珠，右手有 7 顆彈珠，一共是多少顆？」
   (2) 例 2：「池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？」

合成（併加）型問題是理解「加法交換律」的自然情境。

2. 恰當安排練習，讓學生產生運用「加法交換律」的需求。

例：教師問學生 $1+69$ 是多少？$2+59$ 是多少？

讓學生體會轉換成 $69+1$、$59+2$，可大量減少計算負擔，而樂於使用。

3. 在其他類型情境，體會如何理解這個規則，更進而運用這個規則。

(1) 例 1：「動物園管理員每天餵食美猴王，早上給牠 3 根香蕉，傍晚再給牠 4 根，美猴王一天共吃多少根香蕉？」

(2) 例 2：「小明有 3 元，媽媽再給他 49 元，小明有多少元？」

簡單的例 1 可供學生思考為何加法交換律成立。例 2 更強調學生列成算式 $3+49$ 之後，運用釋例 2 的經驗，交換順序用 $49+3$ 來計算比較簡單。

錯誤類型

學生將加法交換律錯誤類推至減法問題，列出錯誤之減法算式（同一錯誤現象之另一原因見 N-1-2）。

例：「小明有 3 元，小華有 5 元，小明比小華少多少元？」學生以為可交換，故不注意「被減數」和「減數」的位置，列成錯誤的 $3-5=2$。

建議：教師應確實理解學生錯誤的成因，回到 N-1-2 或 R-1-1，加強學生理解減法的意義與減法算式的正確記錄方式。

評量

1. 評量重點：

能理解「兩數相加的順序不影響其和」，並能活用。

2. 注意事項：

雖然加法交換律很簡單且常用，但在學習加法初期，依照不同情境，教師仍應評估學生對此規則的熟悉度，彈性處理加數與被加數在列式時互換的狀況，讓學生說明算式的合理性。

3. 評量示例：

(1) 例 1：下列哪一個選項算出來的答案最大？圈圈看

（ $45+3$　　$3+45$　　$45+6$　　$2+45$ ）

(2) 例 2：下列選項中，哪一組算出來的答案是一樣的？

① $14+53$ 、 $14+35$。

② $38+69$ 、 $69+38$。

③ $5+78$ 、 $78+4$。

④ $29+37$ 、 $38+29$。

D-1-1 簡單分類：以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現日常生活物品，報讀、說明已處理好之分類。觀察分類的模式，知道同一組資料可有不同的分類方式。 **備註：**本條目活動中呈現之說明圖表皆出自學生的創意，並非正式表格（D-3-1）與統計圖表的教學（D-4-1 以後）。	d-I-1

連結：N-1-1、N-1-2、S-1-2。

後續：D-2-1。

基本說明

1. 低年級資料條目 D-1-1 和 D-2-1 的重點不在介紹正式表格或統計圖，而是從操作活動，初步學習資料的報讀、說明、蒐集、分類、記錄、分析、溝通。一年級處理日常生活或學校常見物品；二年級則更強調和數學相關的物件如幾何形體，以及更深入的分類概念。低年級的圖表是跟學生比較容易溝通的非正式圖表，記錄物件數目的符號也不見得是數字，可以發揮學生的創意。
2. 本條目的重點，是學生能模仿給定的範例，學習蒐集、分類、製作出自己的分類圖表，同時也能理解老師或其他同學的分類紀錄。
3. 知道圖表中的數目符號或數字與實際資料的對應關係（點數）；知道圖表分項基於某種分類，並能察覺與說明分類根據的模式或特徵；能回答老師根據圖表所提出的問題；能製作自己喜歡的圖表，將資料整理、呈現並說明。
4. 認識因特徵不同，同一組資料可有不同的分類方式。例如一群同學可分成不同性別、不同血型、不同星座、不同街區、不同姓氏、……。
5. 學生學習分類可能有很多不成熟的想法，老師可強調兩個重點並多做溝通：第一，分類所依據的是同一個概念下的不同分組；第二，同一物體出現在兩個類別中，反映分類可能不妥當。

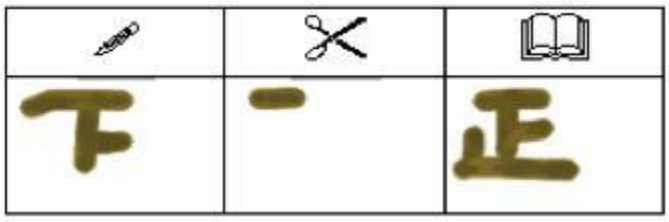
條目範圍

1. 本條目只處理非正式、適合低年級學生的圖表。正式統計圖表教學見 D-3-1、D-4-1、D-5-1、D-6-1。
2. 一年級處理分類只需要簡單明確、言之有物。教師需要恰當安排教學活動，達成本條目「同一組資料可有不同的分類方式」的目標。(更難分類見 D-2-1)

釋例

1. 報讀、說明生活情境的「非正式圖表」，說明其意義

   例：小強做了一張圖記錄桌上的東西。說說看，這個圖表記錄了什麼？



學生學習理解「圖表」中各種記號的意思，並能說明「圖表」中分類的依據、數字或數量劃記的意義。教師可視情況以問題引導。可告訴學生諸如「正」這類邊點數邊畫記的常用方式，同　時強化「五個一數」或「十個一數」的能力。

2. 蒐集、分類、記錄生活中常見的資料。

可先學習分類的範例，再學習分類。分類只談合不合理，沒有一定正確的分類方式。教師教學應注意所選擇的物件具有多種分類可能。

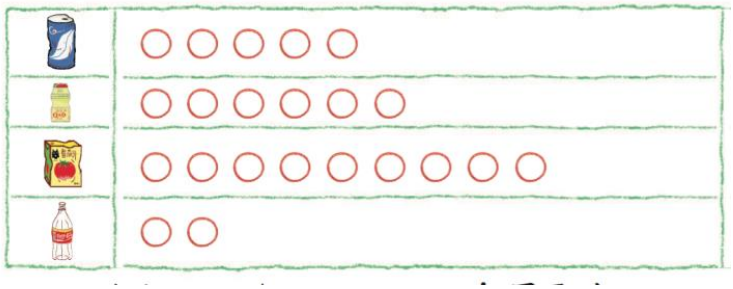
(1) 例 1：回收的瓶罐怎麼分類。

(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

- 教師詢問學生下列問題，必要時加以指導。
  - 有沒有幫忙做過資源回收？
  - 這些回收物品可以怎麼分類？
  - 拿出一張紙，依照你的分類方法，做一張你自己的分類圖表。

(2) 例 2.學生的紀錄方式為非正式圖表，不要求格式一致。以下為圖表示例：

- 一個圓圈代表一個回收物品，用畫圈表示資源回收物品的數量。



(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

- 用塗色表示不同顏色瓢蟲的數量。

(3) 例 3：給學生一堆動物圖卡，學生可討論要怎麼分類(如腳數、有無翅膀、有無尾巴、...)，可和自然課程統整學習。

錯誤類型

1. 學生的點數錯誤，請參考 N-1-1。
2. 教師應謹慎處理所謂「分類錯誤」的問題。原則上，學生只是發展自己的分類想法，教師應請學生盡量發表自己的想法，並依據他的想法來指出其數據是否有缺失、分類是否有疏忽、在同一分類原則下出現一物多類等等問題，而非斷然判斷其對錯。

   例：學生可能同時將「出生月」與「年齡」混在同一個分類中。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能透過蒐集日常生活或學校常見的物品，以合理特徵，做簡單分類。
   (2) 能將簡單的分類資料（結果），製作出合理、簡易的分類圖表紀錄。
   (3) 能報讀簡易的分類圖表記錄，並說明分類的方式或依據。
   (4) 能透過觀察分類的模式或特徵，知道同一組資料可有不同的分類方式。
2. 注意事項：
   (1) 本條目適合多元（操作）評量，在紙筆評量上需考慮操作為主的特性與多種分類的可能。依據評量目標，題目中宜呈現相關資料的圖示或圖表。

(2) 紙筆評量只適合根據題意給定的分類問問題，不適合用來檢驗學生的分類方式。

2 年級學習內容解析

N-2-1 一千以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「百」。位值單位換算。 **備註**：教學可數到最後的「一千」，但不進行超過一千的教學。學生能局部從某數開始前後數數。須點數表示位值之積木，並熟練「十個一數」「百個一數」的數數模式。	n-I-1

先備：N-1-1。

連結：N-2-2、N-2-5、R-2-1。

後續：N-3-1。

基本說明

1. 在二年級，以點數具體物件認識數不再是主要方法，應結合點數、位值積木、位值表來認識新的數與應用。學生應知道如何以所學規則類推新的數。
2. 新增位值單位為「百位」。學生應理解三位數的位值意義，並能以說、讀、聽、寫、做，表示並應用三位數。
3. 能運用位值做數的大小比較，知道比較時先比高位數的道理。
4. 認識 100、10 和 1 的關係，其中新單位換算關係為「1 個百是 10 個十」、「1 個百是 100 個一」。並能運用這些關係，進行數的化聚活動，尤其著重和加減法「進位」與「退位」相關部分的學習。
5. 能做局部數數(含順數與倒數)，並多練習較困難的數詞序列，如「過百」(199→200→201；601→600→599)；三位數「過十」(如 349→350→351；251→250→249)；從 1000 局部倒數如 1000→999→998。
6. 能結合位值與局部數數，完成「$199+2$」「$301-3$」等「加減計算」。
7. 能結合位值 (含點數位值積木) 與數數的學習，熟練「十個一數」、「百個一數」的模式。先從最簡單的整十、整百開始，如 280→290→300→310；400→500→600。再做「連續加 10」、「連續加 100」的數數活動，如 298→308→318；125→225→325。倒數較難，教師應斟酌現場狀況處理。

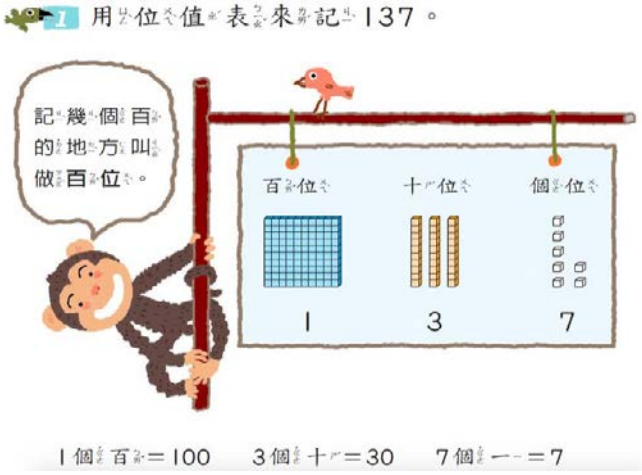
條目範圍

1. 教學可數到最後的「1000」，但不進行超過一千的教學。(N-3-1)
2. 能局部前後數數即可，並運用於簡單加減法，此時被加數和被減數限個位數。二年級不再練習冗長的數數，尤其是倒數。
3. 熟習「十個一數」、「百個一數」時，倒數部分較難，不列入評量

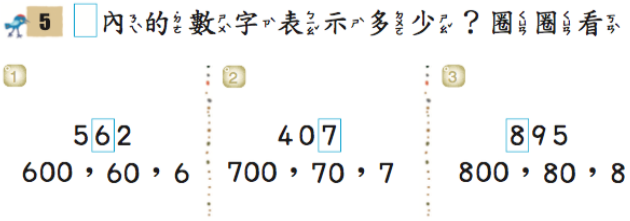
4. 數的比較參見 R-2-1。

釋例

1. 透過位值表認識「百位」的位名，及百位數、十位數、個位數的意義。



(《部》第三冊課本 P.9)

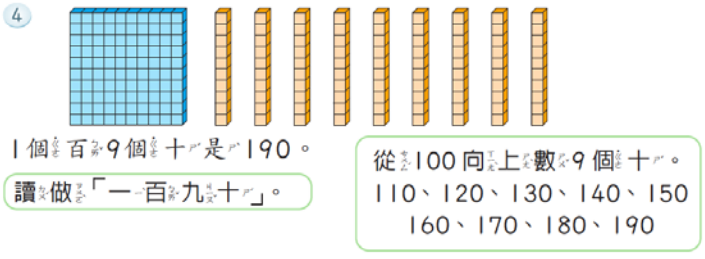


(《部》第四冊習作 P.17)

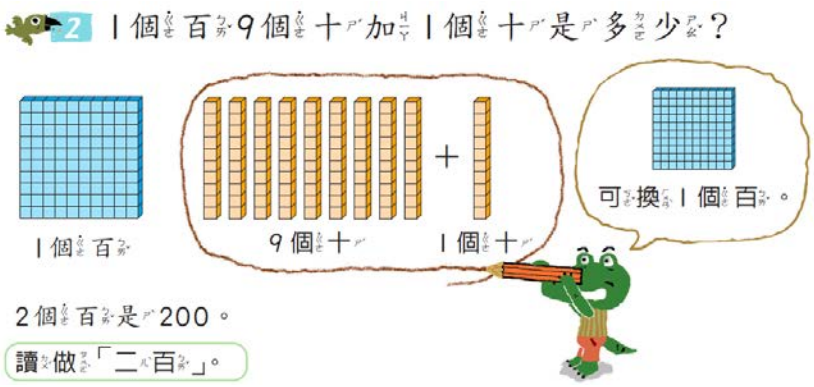
2. 1000 以內數的說讀聽寫做，宜分成兩部分：

(1) 101～200 的數：因為 101～200、…、901～1000 命名結構類似，教師應先幫助學生掌握 101 到 200 的學習，再引導學生類比到 201 到 1000 的學習。

●十個一數，如下圖所示，向上數。



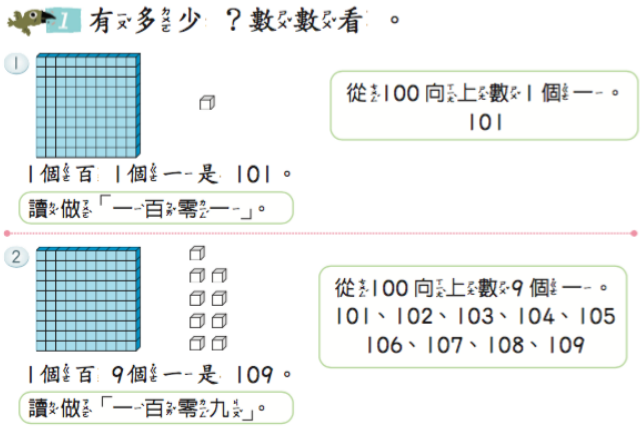
從 190 向上數 1 個十是多少？　可以藉由積木的轉換，讓學生理解 10 個十換成 1 個百，2 個百讀做「二百」。



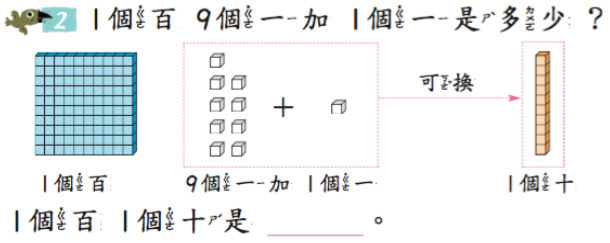
(《部》第三冊課本 P.4)

●一個一數，如下圖所示，向上數。

■ 從 101 數到 109，引導時要強調十位數字是 0，讀法上要將十位的「零」讀出來。



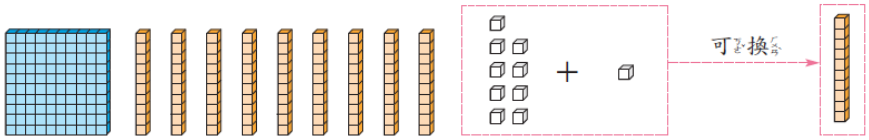
■ 從 109 向上數 1 個一是多少？ 可藉由積木轉換，讓學生理解 10 個一換成 1 個十，1 個百 1 個十是 110，讀做「一百一十」。

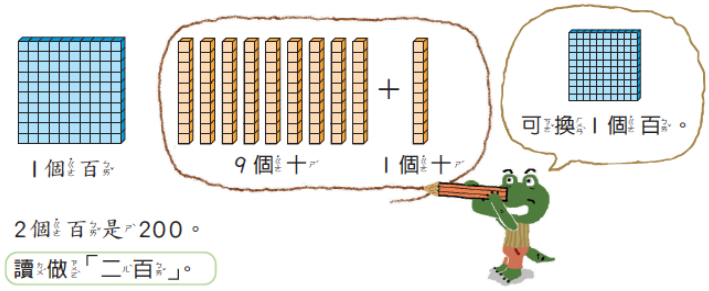


(《部》第三冊課本 P.5)

■ 同樣的，從 110 數到 119，要注意十位數是 1，讀時要讀出十位的「一」。如 111 讀做「一百一十一」，而非「一百十一」。

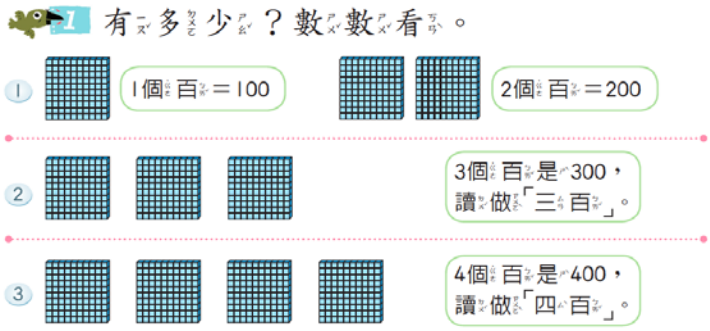
■ 最後，從 199 向上數 1 個一是多少？ 可以藉由積木的轉換，讓學生理解換成 10 個一換成 1 個十，10 個十換 1 個百，2 個百是 200，讀做「二百」。





(《部》第三冊課本 P.6)

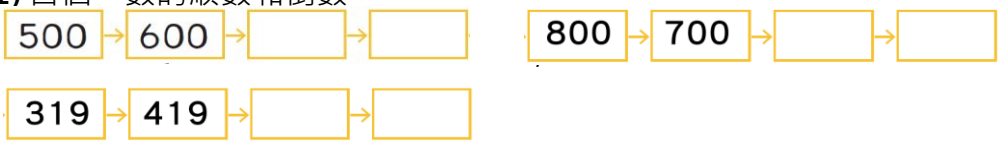
(2) 201～1000 的數：透過對 101～200 數詞的掌握，引導學生類比到 201 至 1000，教師應從檢查的角度，進行 200 至 1000 之間的一個一數、十個一數的數數活動。此外還要進行「百個一數」的數數活動，含 10 個百是 1000。



(《部》第四冊課本 P.15)

3. 數序填空。

(1) 百個一數的順數和倒數。



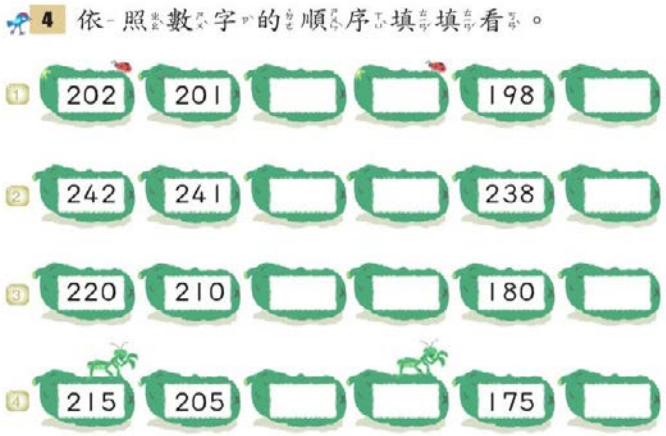
(《部》四冊習作 P.12)

(2) 過十和過百的填空，可以分別讓學生練習順數和倒數。

●順數：

(《部》第四冊習作 P20)

●倒數：



(《部》第四冊習作 P.21)

4. 以數數完成加數、減數是較小的數字的加減法。

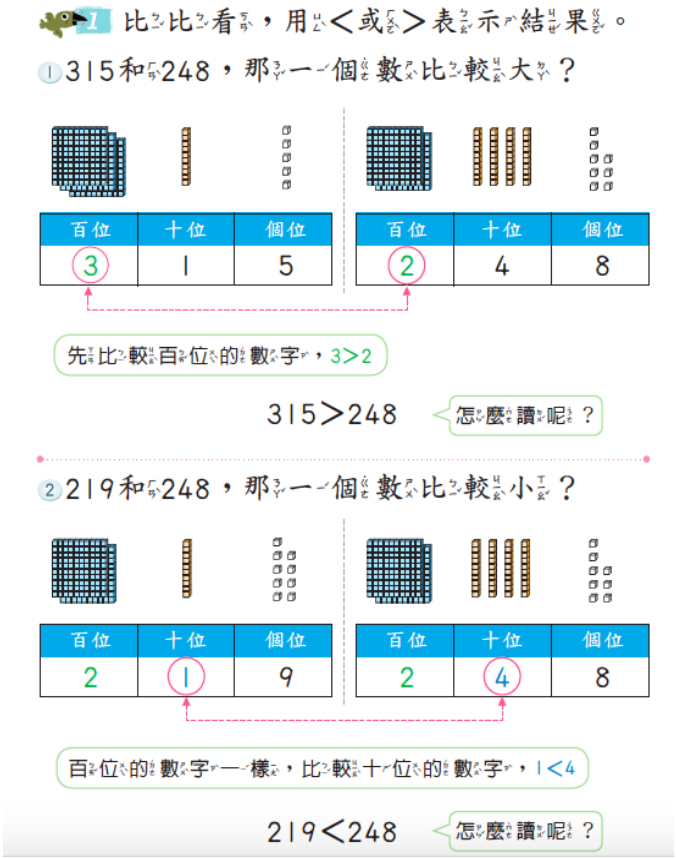
(1) 剛開始可以利用百數表協助學生數數做加減法（參見《部》第三冊習作 P13）。

(2) 不用百數表也能用數數做加減法：

●199 加 2，可以從 199 開始向上數 2 個一，200、201。

●301 減 3，可以從 301 開始向下數 3 個一，300、299、298。

5. 比較問題：引入「>」和「<」符號表示大小比較的結果（R-2-1）。比較時從高位開始比起。



(《部》第四冊課本 P23)

錯誤類型

1. 學生填寫位值表，容易發生十位或個位漏寫「0」的情形。教學時，宜說明十位格填 0，表示 0 個十，個位格填 0，表示 0 個一。如果不填 0，會混淆 208 和 28；350 和 35；甚至 300 和 3。
2. 反過來，若學生過份類化（1），當沒有百位數會認為要補上 0，如將 53 寫成 053（甚至 2 記成 002），教師教學時應告知整數左邊位值的 0 不用寫。
3. 學生容易數錯 109 到 110、119 到 120、199 到 200 等，宜多讓學生練習。
4. 學生常弄混一百零幾和一百幾十的讀法和數字記法（如 105 和 150），教師宜透過積木和位值表的操作比對，說明兩者的差異。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能說、讀、聽、寫、做 1000 以內的數。
   (2) 能做 1000 以內的位值單位換算，但限於一階單位換算。
   (3) 能運用位值概念比較 1000 以內數的大小，並用「＞」、「＝」和「＜」的符號表示大小比較的結果。
   (4) 能以數數解決多一、少一的過十、過百問題；多十、少十的過百問題。
2. 注意事項：
   (1) 做看圖寫數字的評量，若表徵物不是積木，須明示「百」和「十」。
   (2) 評量 24 個十要換成幾個百幾個十這類型的題目，若是為了練習進位加法，就要換成 2 個百 4 個十，不宜要求學生寫出 1 個百 14 個十。
   (3) 評量 3 個百 4 個十要換成幾個百幾個十這類型的題目，若是為了練習退位減法，就要換成 2 個百 14 個十，不宜要求學生寫出 1 個百 24 個十或 34 個十。
   (4) 評量單位換算時，不宜出現「26 個『十』18 個『一』可換成多少？」這類雙重進位的題目。

N-2-2 加減算式與直式計算：用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。 **備註：**不論橫式或直式，加法含二次進位，減法限一次退位。須處理數字中有 0 的題型。為了熟悉位值與直式計算的關係，應先在有位值的表格中學習記錄與計算。	n-I-2

先備：N-1-2、N-1-3。

連結：N-2-1、N-2-3、N-2-4。

後續：N-3-2。

基本說明

1. 由於位數增加，加減計算更加複雜。二年級起，學生應以位值概念理解多位數加減計算的原理，一方面，結合基本加減法（N-1-3），熟悉基本直式計算的算則；另一方面，也要能掌握計算的彈性（N-2-4）。日常生活的加減應用解題請參看 N-2-3。
2. 延續一年級經驗（N-1-2），學生學習加減計算時，初期可透過具體操作、橫式計算、直式計算等方法進行，重點在以位值概念理解加減計算的原理。為接續未來多位數加減計算學習（如 N-3-2），二年級後期應能以直式計算解決一般加減問題。
3. 直式計算的教學不宜直接告知形式算則，教師應整合之前加減活動的位值原理與合成分解模型，以位值積木的合成、分解、化聚說明直式計算的道理，理解進位、退位的意義。直式計算的熟練應善用基本加減法。
4. 學生學習直式計算的順序應有恰當佈局，由淺入深。例如先熟悉二位數，再進到三位數；從無進位、無退位的簡單情況開始，再到一次進位、一次退位，直到加法的二次進位；進退位發生的位置應遍及個、十、百位，理解其位值原理的一致性。
5. 學習直式計算應避免僵化。教師應提供恰當範例，提醒學生彈性應用其他方法，例如 198+3、71-4 這類問題，數數、心算、合成分解都可以順利解題，並非只能使用直式計算。若直式計算的要求過份僵硬，將影響 N-2-4、N-2-5 的教學，教師應謹慎。

條目範圍

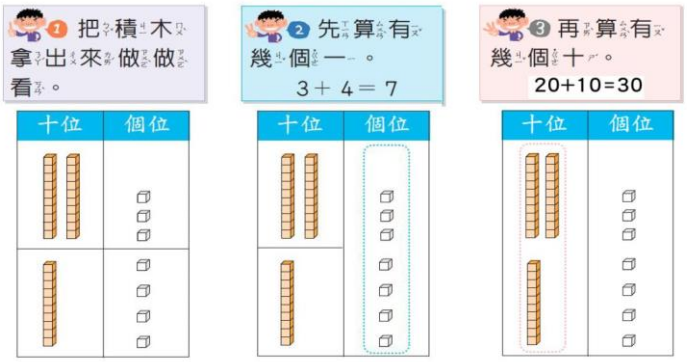
1. 二年級直式計算的範圍，加法可做二次進位，減法限一次退位。（N-3-2）
2. 直式計算教學應特別處理數字中有 0 的加減題型。
3. 學習直式計算，應先在有位值記號的算式表格中學習，養成位值對齊的習慣，再做無位值記號的練習。

釋例

1. 初期透過具體操作、橫式計算（參考 N-1-2 釋例）、直式計算等方法並陳，利用位值表說

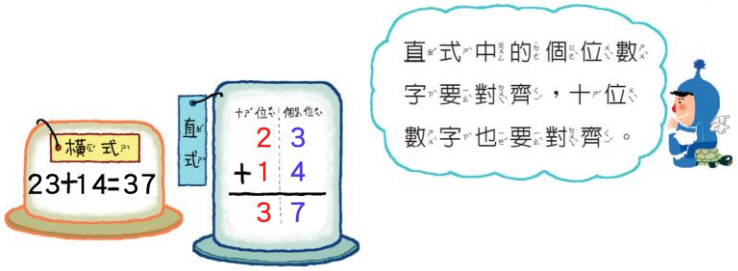
明加減直式計算的原理，強調直式中的各個位置上的數字要對齊。

先複習一年級二位數加減法的經驗，透過具體操作、橫式計算。建議從二位數不進位加法開始，例如：23+14，將積木放在位值表中點算，同時配合橫式紀錄操作結果。



(《部》第三冊課本 P16)

接著在位值表上引入直式紀錄的方式，教師應說明直式紀錄中十位數字和個位數字代表的數值意義。初始學習直式計算時，直式列式可在個位與十位間增加一條虛線，養成對齊和一個位值只寫一個數字的好習慣。



2. 各種加減法直式計算題型：引入新題型時，可以引導學生利用積木操作、位值表紀錄的方式來協助解題。

(1) 不進位加法。

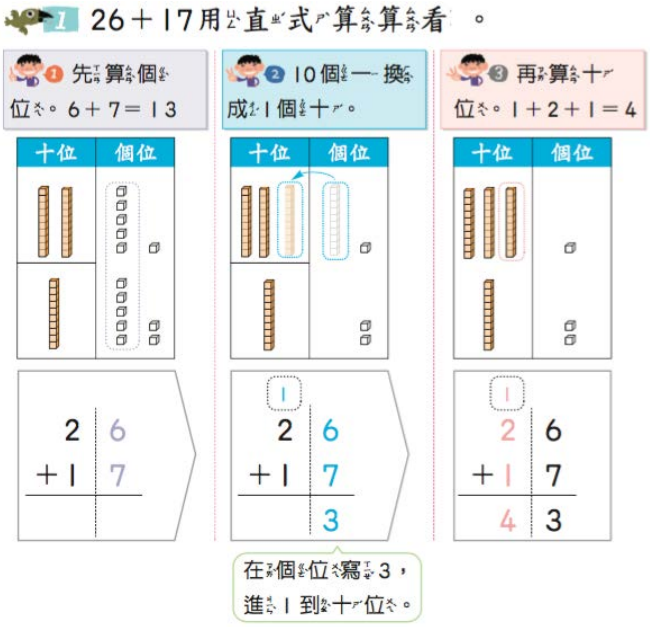
●二位數不進位加法，參見釋例 1.。

●三位數不進位加法：

(《部》第四冊課本 P41)

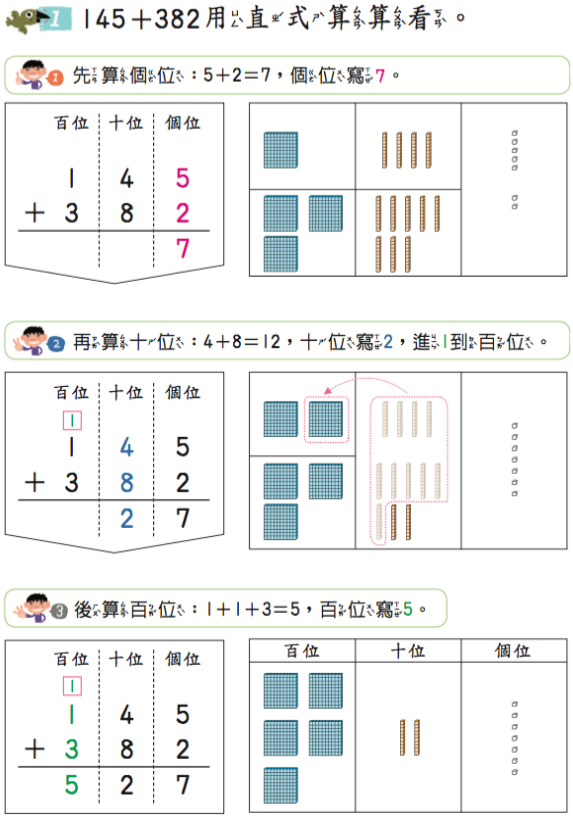
(2) 進位加法（含一次、二次進位）。

●二位數加法，一次進位，教師可以引導學生在直式紀錄上，個位滿十進一，可以在十位數字上方寫「1」。(標記方式不是制式規定，評量不宜強求)



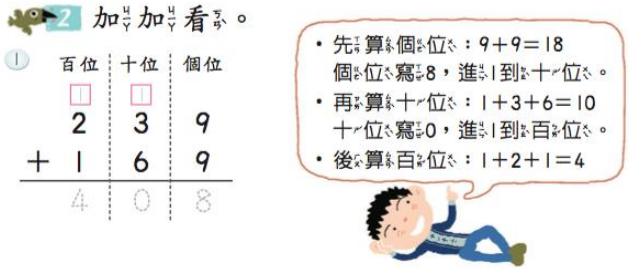
(《部》第三冊課本 P21)

●三位數加法，一次進位：



(《部》第四冊課本 P43)

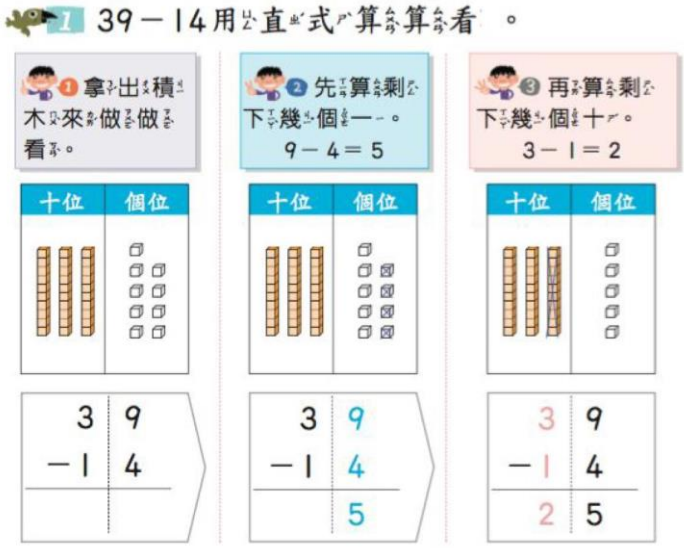
●三位數加法，二次進位：



(《部》第四冊課本 P46)

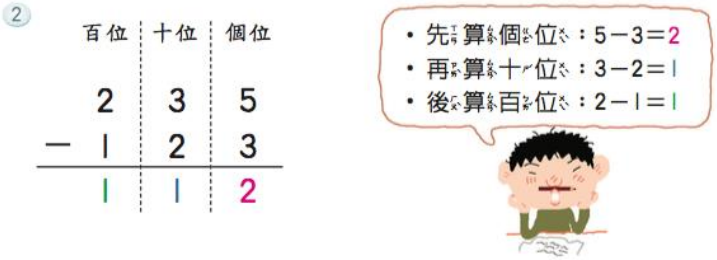
(3) 不退位減法。

●二位數減法：



(《部》第三冊課本 P29)

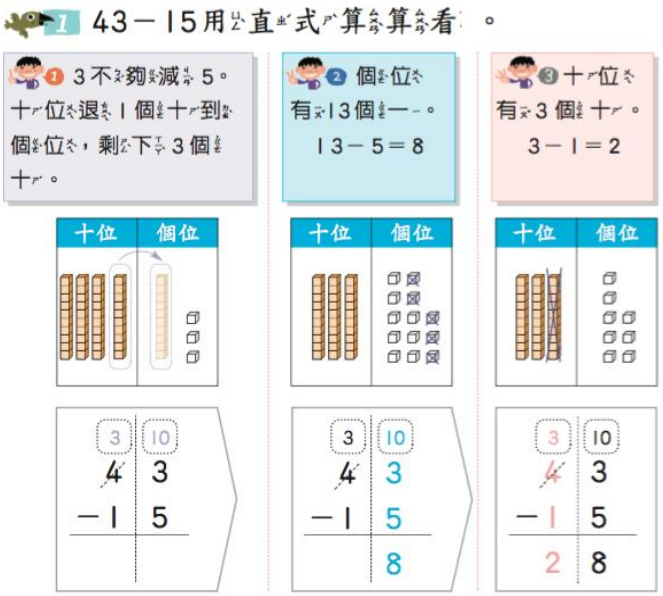
●三位數減法：



(《部》第四冊課本 P41)

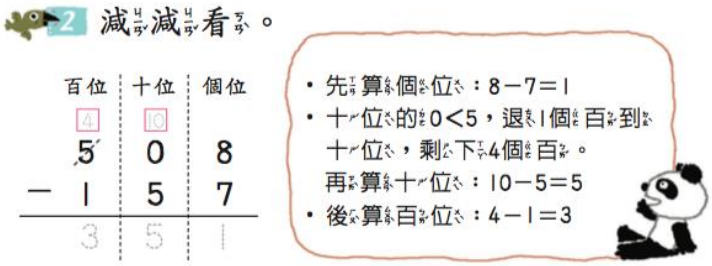
(4) 一次退位減法。

●二位數減法：



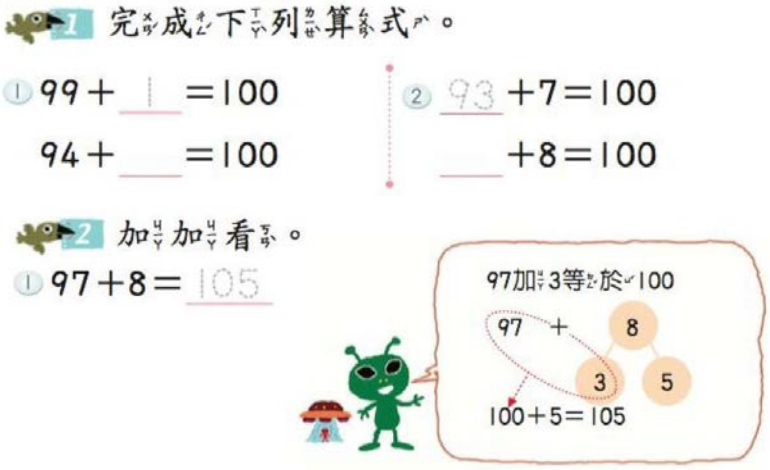
(《部》第三冊課本 P34)

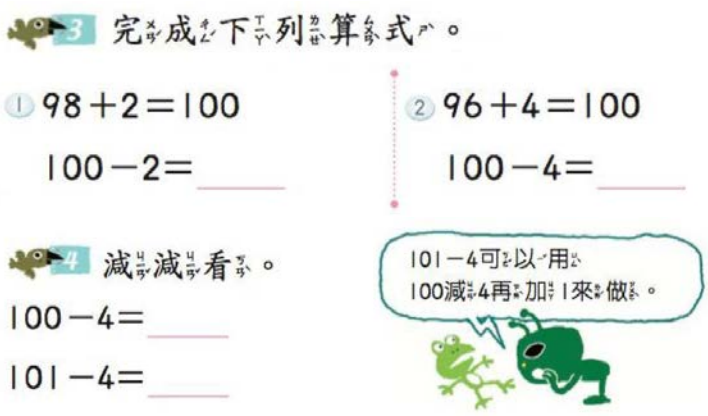
●三位數減法：



(《部》第四冊課本 P49)

3. 不使用直式計算，利用數數（參見 N-2-1 釋例）、心算、合成分解的方式完成加數或減數為較小數字的加減計算：





（節選自《部》第四冊課本 P.50、P.51）

4. 學習加減直式計算要特別注意數字有 0 的情形，教師需能用位值原理來說明。其中尤其要留意答案中有 0 但漏寫的情形，以及被減數有 0 的情形（一次退位）。

錯誤類型

1. 做減法直式計算時，遇到某位數不夠減時，學生常出現下面的錯誤：例如在左邊直式中 3 不夠減 5，學生會倒過來用 5 減 3，右邊直式也有類似的錯誤：

$$\begin{array}{rr} (1)\quad 13 & (2)\quad 582 \\ -\ \ 5 & -\ 178 \\ \hline 12 & 416 \end{array}$$

建議教師用下面的教學策略來補救：

(1) 透過操作數學積木或轉換位值，搭配直式紀錄，讓學生真正理解減法的意義。

(2) 造成孩子的認知衝突：例如從上例學生誤以為 13−5 答案是 12，但做 17−5 答案也是 12，兩者都是減 5，答案都是 12，引導學生討論合理性。

2. 剛開始學生常會漏掉進退位，教師可以引導學生進退位時，可以在被加數或被減數的上方以較小數字標記，較能發揮提醒的作用。

3. 學生剛學直式計算時，常發生各個位數不對齊或一個位值記兩個數字的現象。教師可引導學生列式時，在相鄰位值間畫一條虛線，養成對齊和一個位值只寫一個數字的習慣。

4. 位值相減結果是 0 時，記錄答案時，要提醒學生寫 0 的重要性，否則如 107 會變成 17。

5. 學生寫加減直式時，會將被加（減）數、加（減）數靠左對齊，尤其是三位數加減二位數，提醒學生注意各數的位值。

評量

1. 評量重點：

(1) 能熟練和為 1000 以內的加法直式計算（含二次進位）及被減數為 1000 以內的減法直

式計算（含一次退位）。

(2) 能運用數數、心算、合成分解而非直式計算做如 $198+3$、$71-4$ 這類問題。

(3) 能運用加、減法解決生活中的問題。

2. 注意事項：

(1) 初期評量，教師可以提供位值表，協助學生對齊位數，提醒一個位置只能記一個數字。

(2) 初學進（退）位直式計算，在評量時可以拿出積木操作「做做看」的題型。

(3) 學生的進、退位標記方式，不屬於直式計算評量的範圍。

(4) 心算評量以課堂中的形成性評量為宜，且限定類似釋例 3. 的題型，勿過度評量，學生若用其他算法，也應予以肯定。

N-2-3 解題：加減應用問題。加數、被加數、減數、被減數未知之應用解題。連結加與減的關係（R-2-4）。 **備註：**教師使用解題策略協助學生理解與轉化問題（花片模型、線段圖、空格算式或加減互逆等），但不發展成學生答題之固定格式。本條目不需須另立單元教學。	n-I-3

先備：N-1-2、N-1-3。

連結：N-2-2、R-2-4。

基本說明

1. 學習加減法的應用解題，學生會逐漸注意到問題關鍵詞和解題方式的關連。在初期這是正面而無可厚非的學習過程，讓學生能理解加減法和生活應用的密切關係。重要的是，只要調整問題的問法，可以讓學生更深入理解加法和減法的密切關係（參見 R-2-4），也能破除學生只憑關鍵詞做形式的無意義解題。
2. 加數或被加數未知形同減法問題；被減數未知形同加法問題；減數未知形同另一減法問題，再加上加法和減法的應用情境，足可產生各式各樣的應用問題。教師應依學習流暢和情境難易來安排學習順序，教導學生分析問題的方法。二年級最後目標，是在碰到較大數字問題時，能順利列出正確加減橫式，再用直式計算或其他方法解題。
3. 學習加減問題時，合成分解模型是最容易理解與操作的解題情境，因此在布題上，首先應在較小數字的情況下討論這類問題。例如「車上有 15 人，再來多少人，可以坐滿 40 個座位？」「參加校外教學的學生中，扣掉已經到校的 29 位同學，還有 8 位還沒到，參加的學生有多少人？」「小明本來有 9 雙襪子，媽媽把髒襪子拿去洗，衣櫃中還剩下 4 雙，媽媽拿幾雙去洗？」這類問題都可以用花片來協助說明與思考。
4. 教師可依學生的學習經驗，發展分析問題的工具，例如花片操作、線段圖、待填充的算式、

初步加減互逆經驗（如 N-1-3 基本加減法的活動）。重點在於學生能從如何填入未知數字的思考中，確實理解並應用加法和減法的密切關係。

條目範圍

1. 為避免過度干擾學生建立加減互逆思考，當教師以特定工具（尤其是線段圖與待填充的算式）教導學生如何分析問題時，應站在輔助思考的立場，不宜變成固定的答題格式，評量布題時也應斟酌題目難易提供輔助提示。
2. 本條目的進行不需另立單元教學，可和加減法教學一起進行。

釋例

1. 在 N-1-2 中曾列出加減應用問題的基本類型，如「添加型」、「併加型」、「拿走型」、「比較型」，就問題語意來說，前二者是加法題型，「拿走型」是減法題型，「比較型」則依題意有加、減兩種題型。學生會注意到題目中的關鍵詞和解題的策略有關，這是合理的學習過程。例如：

   (1) 添加型：公車上有 25 人，靠站後上來 4 人，公車上一共有幾人？

   (2) 併加型：罐子裡有綠珠子 27 顆，紅珠子 16 顆，兩種顏色的珠子一共有幾顆？

   →(1)及(2)的題目中均出現「一共」，學生會採用「加法」策略。

   (3) 拿走型：小威有 60 元，買了一本 55 元的筆記本後，剩下幾元？

   →學生看到題目中的「剩下」二字，會採用「減」的解題策略。

   (4) 比較型 1：小可有 37 元，小威比小可多 6 元，小威有幾元？

   →學生看到題目中的「比…多…元」，會採用「加」的解題策略。

   (5) 比較型 2：小可有 37 元，小威比小可少 6 元，小威有幾元？

   →學生看到題目中的「比…少…元」，會採用「減」的解題策略。

2. 調整釋例 1. 中五類問題的問法，不僅可以讓學生深入理解加法和減法的密切關係，這樣的解題經驗，也可以破除學生只憑關鍵詞就決定解題策略的迷思。

   (1) 公車上有 25 人，到站後上來一些人，現在公車上一共有 29 人，到站後上來幾人？

   (2) 罐子裡一共有 43 顆紅、綠珠子，綠珠子有 27 顆，請問紅珠子有幾顆？

   →1 及 2 的題目中均出現「一共」，但不能用「加法」策略。

   (3) 小威買了一本 55 元的筆記本後，剩下 5 元，小威原來有多少元？

   →題目中出現「剩下」，但不能用「減法」策略。

   (4) 小可有 37 元，小可比東東多 6 元，東東有幾元？

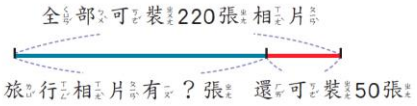
   →題目中出現「比…多…元」，但不能用「加法」策略。

   (5) 小可有 37 元，小可比小威少 6 元，小威有幾元？

   →題目中出現「比…少…元」，但不能用「減法」策略。

3. 建議在解題布題上，應以**合成分解模型的解題情境**加上較小的數字最優先。
   例如下面這些問題，都可以用花片、數學積木，錢幣圖卡來協助說明與思考。
   (1)「魚缸裡原來有一些魚，撈起 8 條後，還剩下 1 條魚，魚缸裡原來有幾條魚？」
   (2)「一盒餅乾有 32 片，弟弟吃了一些，剩下 21 片，弟弟吃了幾片？」
   (3)「圓圓想買一個 50 元的鉛筆盒，她只有 45 元，還不夠多少元？」
4. 二年級在「比較型」的問題上，可以開始處理「相差」的情境問題，例如「農場裡面有 7 隻白羊和 10 隻黑羊，白羊和黑羊相差幾隻？」
5. 本條目之要點與目標參見基本說明 2.。發展分析問題工具的要旨見基本說明 3。當老師教學發現學生不容易理解題意時，可利用花片的操作、線段圖、待填充的算式來分析題目中數量的關係，協助學生釐清題意，順利解題。底下以線段圖為例說明。教師不宜要求學生畫線段圖，布題時應提供線段圖或示意圖，協助解題。亦可參看 R-2-4。
   (1) 被加數未知的問題用減法解題：

一本相簿可裝220張相片，把旅行的相片裝進去後，還可以裝50張，旅行的相片有幾張？



(《部》第四冊習作 P44)

   (2) 加數未知的問題用減法解題：

3 一個盒子可以裝200顆彈珠，已經裝了160顆，再放幾顆就可以裝滿？

(《部》第四冊習作 P43)

   (3) 被減數未知的加法解題：

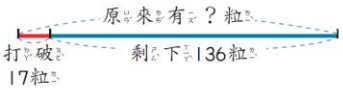
6 圓圓做緞帶花，已經用掉60公分的緞帶，還剩下30公分，原來的緞帶有多長？

60＋＿＿＝＿＿

答：＿＿公分

1 雜貨店原來有一些雞蛋，不小心打破17粒，還剩下136粒，雜貨店原來有幾粒雞蛋？

17＋136＝＿＿



答：＿＿粒

(4) 減數未知的問題用減法解題：

2 麵包店上午共做了250個甜甜圈，中午時還有70個沒有賣完，麵包店上午賣了幾個甜甜圈？

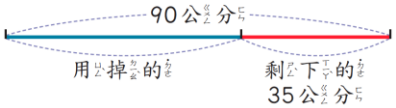
250－70＝＿＿

答：＿＿個

(《部》第四冊課本 P.53)

5 一條緞帶長90公分，做緞帶花用掉一些，剩下35公分，做緞帶花用了幾公分？

90－＿＿＝＿＿

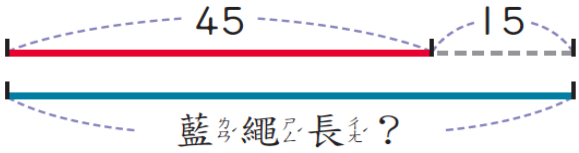


答：＿＿公分

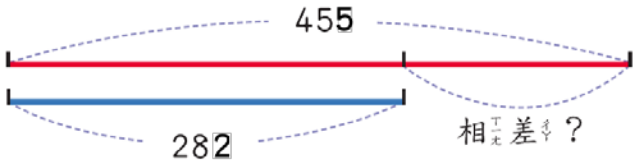
(5) 比較型的問題，可用線段圖表示題目中兩量的比較關係。

●紅繩長 13 公分，藍繩長 9 公分，紅繩比藍繩長多少公分？

●紅繩長 45 公分，紅繩比藍繩短 15 公分，藍繩長多少公分？



●遊樂園中，排隊搭雲霄飛車的有 455 人，排隊搭旋轉木馬的有 282 人，兩邊排隊人數相差幾人？



●火車長 120 公尺，聯結車長 30 公尺，兩輛車相差多少公尺？

錯誤類型

詮釋 1. 中提到的幾個類型，例如：「桌上原來有幾顆蘋果，媽媽又買了 5 顆，總共有 12 顆蘋果，問桌上原來有幾顆蘋果？」之類的問題，對於初學習而言，這個問題情境與「桌上有 5 顆蘋果，媽媽又買了 5 顆，總共有幾顆蘋果？」的問題相似，學生會困惑於兩個問題中都有「總共」，是不是兩個問題都是用加法來算呢？建議教師教學時依據學生的學習經驗，運用恰當的分析問題的工具，例如：花片、線段圖...等，協助學生理解題意，列出恰當的算式。

評量

1. 評量重點：

   能透過花片操作、線段圖、待填充的算式、加減互逆關係等理解生活中的加減問題，並運用加法或減法來解題。

2. 注意事項：

   (1) 初學本條目且數字較小時，評量建議可讓學生操作相關的花片或積木。

   (2) 無論是線段圖或待填充的算式，都不宜格式化，不納入評量要點。建議教師或教科書評量此類問題時，應提供線段圖、待填充的算式；或其他輔助工具，協助學生解題。

N-2-4 解題：簡單加減估算。具體生活情境。以百位數估算為主。 **備註：**估算解題的布題應貼近生活情境。	n-I-3

連結：N-2-1、N-2-2、N-2-5。

後續：N-3-8。

基本說明

1. 在許多日常生活應用情境中，有時並不需要精確答案，只需要知道「大概」數字便能解決問題。因此學生應學習如何辨識這類情境，以及如何進行適當估算。
2. 估算和初學加法的嘗試活動不同。估算是比較高層的數學能力，必須相當能掌握「確算」之後才進行。除了必要的估計練習，估算教學應盡量在具體有用的情境中進行，在合理自然的布題中，學生才能理解估算的動機，知道估算的好處，並判斷估算結果是否恰當。例如 N-2-5 的用錢活動或某些驗算活動便能提供恰當的估算情境。
3. 加減估算的目的，是以雖然不精確但簡單的替代加減計算快速解決問題，通常只要簡單的心算就能完成。例如「鳳梨 199 元、火龍果 215 元，媽媽身上帶 500 元夠不夠？」由於 199 很接近 200，所以 199 + 215 的和與 200 + 215 的和很接近，但後者用心算就知道是 415，因此很快得知媽媽帶的錢是夠的。
4. 二年級的「大」數是三位數，除了初期教學，學生的加減估算最後宜以百位數估算為主。基於可以簡單心算的原則，二位被估數所接近的數是整十，三位被估數所接近的數是整百。不做三位數估整十的問題。
5. 可以在教學中使用「大概」「大約」的用詞。
6. 在學生已經熟悉加減確算的意義和方法之後，教師可以用位值積木來說明為何接近的數相加減的結果也會接近，也可以讓學生進行討論。

條目範圍

1. 估算布題以合理、自然、能引起動機為原則。為了讓學生先掌握確算的意義與能力，建議「估算」在二下後段再進行教學。
2. 由於本年度重點為估算的初步學習，因此只進行整十和整百的估算，其範圍建議為 18、19 或 21、22 估為 20（其餘類推），190 到 210 估為 200（其餘類推）。
3. 加減估算可以應用於加減計算的驗算與檢查（請參考釋例），但教學時請勿採用易和直式計算混淆的「計算題式估算」（例如計算 238 + 595 大概是多少）。
4. 估算教學應小心評量的方式，宜鼓勵學生說明想法，避免直接要求標準答案與制式過程，尤其不可認定使用「確算」的學童是「錯誤的」。老師可以藉「確算」驗證估算結果的合理與否，同時讓學生理解針對問題的目標，為何速度較快的估算方式已經足以取代確算。

釋例

1. 某數接近「整十」、「整百」的練習，用來練習估計整十、整百的數字，須依照條目範圍(2)的限制。

   例 1：38 比較接近 30 還是 40？可以進行下列的練習：

   列出 30 至 40 的數列：30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40，讓學生觀察 36 接近哪一個整十。

   例 2：290 比較接近 200 還是 300？可以進行下列的練習：

   列出 200 至 300 的數列（十個一數）：

   200　210　220　230　240　250　260　270　280　290　300，

   讓學生觀察 290 接近哪一個整百。

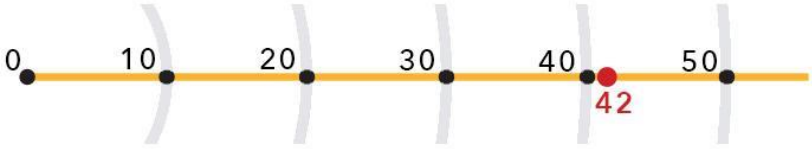
   例 3：媽媽在水果攤買鳳梨，老闆秤重後，跟媽媽說：「71 元，算妳 70 元就好。」

   例 4：王先生坐計程車，下車時，司機說車資是 295 元，王先生付了 300 元，跟司機說不用找錢了。

   例 5：哪個小朋友剪的紙條最接近 70 公分？

   小明　　小華　　珍珍

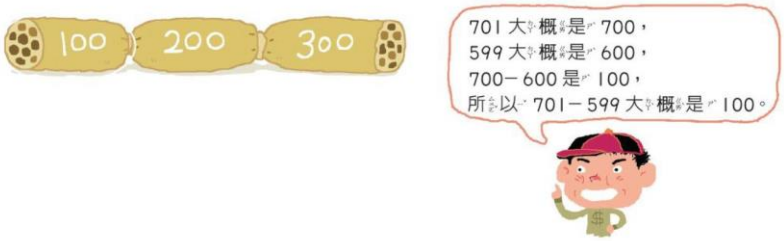
   例 6：壘球擲遠，珍珍最好的成績是擲出 42 公尺的紀錄，42 公尺比較接近 40 公尺還是 50 公尺？

2. 由於二年級的「大」數是三位數，學生的加減估算宜以百位數估算為主，建議結合 N-2-5 的用錢活動，更能貼近學生的日常生活。

例 1：小杰帶了 705 元，買了一雙 599 元的鞋子後，剩下的錢大概是多少元？

下列哪一個數最接近「705-599」的結果？



例 2：媽媽買二件衣服，分別是 605 元、898 元，她總共付了大概多少元？

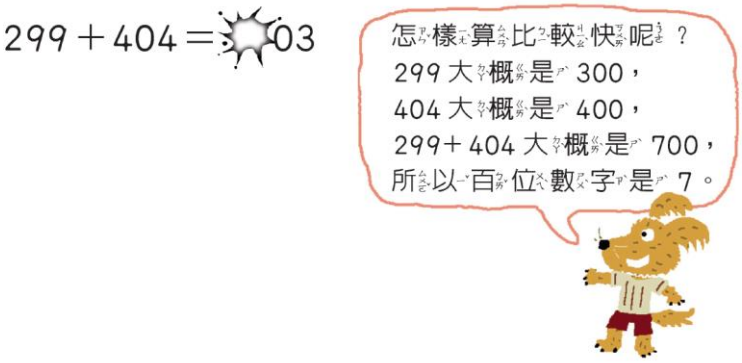
下列哪一個數最接近「605+898」的結果？

例 3：小鐘買外套花了 595 元，剩下大約 200 元，小鐘原來的錢大約是多少元？

• 900元　• 800元　• 700元　• 395元　• 300元

例 4：姊姊要買一個 195 元的鉛筆盒和一盒 292 元的水彩，只用百元鈔票付錢，最少要幾張百元鈔票？

例 5：小華計算時，不小心讓百位數字沾到墨汁，請你幫忙把百位數字寫出來。



例 6：小可在 698 – (　　) = 299 的 (　　) 中填入 499，小可算的答案對不對？

因為 698 大概是 700，299 大概是 300，問題接近 700 – (　　) = 300，由心算知 (　　) 中的數字大概是 400，和 499 相差很遠，小可的答案是錯的。

錯誤類型

部分學生可能有強烈傾向想用確算完成答案。教師不宜說這樣的計算錯誤。但是可以從簡

化的觀點，鼓勵學生發現估算問題基本上只需要簡單的心算。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能進行簡單的二、三位數的估算，學生基本上可以用心算解題。
   (2) 能用估算檢驗答案的合理性。
2. 注意事項：
   (1) 估算的評量範圍詳見條目範圍(3)，課堂上的評量鼓勵學生說明原因，紙筆評量可以考慮用「選選看」的方式，提示解題的方向。
   (2)「用心算解題」提醒教師要如何合宜進行估算評量的布題。學生是否真正用心算解題，反而不是重點。

N-2-5 解題：100 元、500 元、1000 元。以操作活動為主兼及計算。容許多元策略，協助建立數感。包含已學習之更小幣值。 **備註：**本單元的進行可與估算連結（N-2-4）。	n-I-3

先備：N-1-4。

連結：N-2-1、N-2-2、N-2-4。

基本說明

1. 本條目是 N-1-4 之後續延伸，請參考該處的說明。謹記在操作活動中容許多元策略，協助加強並融合新舊數感。
2. 新增加的錢幣為「500 元」與「1000 元」。在 N-1-4 中，「100 元」是只有兌換功能的最大幣值，和本條目的「1000 元」地位相當。
3. 除了能做新幣值的轉換之外，在活動中也應充分包含 N-1-4 中的較小幣值，加強整體位值系統的熟悉感。
4. 運用錢幣，最能知道為什麼較大的數在加減估算時比較「重要」，應和 N-2-4「估算」的學習相互連結加強。

條目範圍

1. 避免要求學生自備大鈔。
2. 用錢活動不可和直式計算混淆。例如進行「1000 元」用錢活動時，可以進行換錢、找錢活動，這和 N-2-2 直式計算不做二次退位的限制並不違反。例如：拿 1000 元鈔票買 65 元物品，可找回多少錢？

釋例

1. 基本幣值的介紹和兌換。包括：

(1) 100 元錢幣分別和 1 元、10 元、50 元錢幣的兌換。

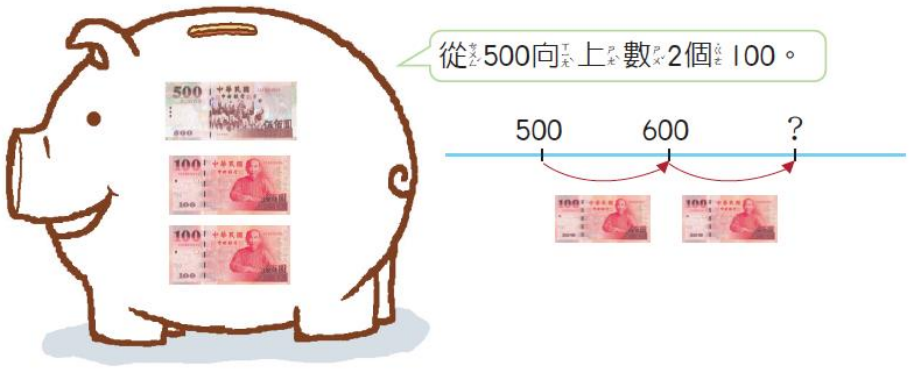
(2) 500 元錢幣和 1 元、100 元錢幣的兌換。

(3) 1000 元和 1 元、100 元、500 元錢幣的兌換。

2. 數錢：延續一年級點數錢幣的策略，5 個一數、10 個一數，到了二年級再加上 100 個一數。

例：小豬撲滿裡有多少錢？數數看。

結合 100 個一數的方式，並利用向上數的策略，協助點算出幣值。



當錢幣金額越大、幣值種類愈多時，教師可以指導學生以位值表的概念來整理錢幣，點數時從較大幣值的錢幣開始向上數。

3. 解決日常生活中用錢的問題，鼓勵多元的解題策略，可以讓學生討論有幾種不同的付錢方式，進行錢幣的實作活動。

例 1：「一隻趴趴鼠賣 315 元，小可買一隻，要怎麼付錢才會剛剛好？」

例 2：「一隻小兔子賣 650 元，小玉想買一隻，可以怎麼付錢呢？」

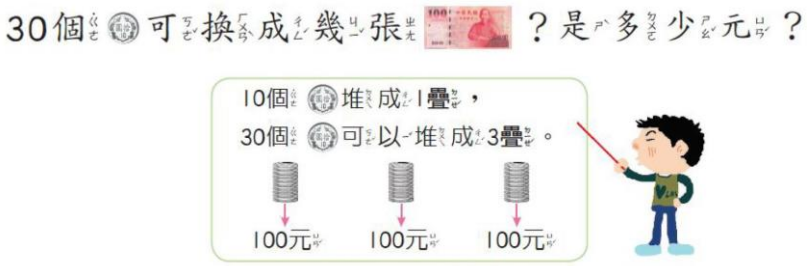
這個問題包含多種付錢的方式，可以進一步追問「小玉還剩下多少元？」。

例 3：「哥哥請兩位朋友到餐廳吃飯，每人花費 199 元。結帳時，哥哥可以怎麼付錢？」這個問題可以引導學生結合估算來解題，199 接近 200，因此因此問題可以想成「每人花費 200 元，一共有三人，最少要付幾百元？」來解題。透過用錢情境，進行加減估算活動，可參見 N-2-4。

例 4：媽媽皮包裡有一些錢，她想買一頂 540 元的帽子，她可以怎麼付錢？

4. 換錢：可以安排讓學生進行各種硬幣（1 元、5 元、10 元、50 元）和百元鈔票的換錢活動，以及百元鈔票、十元硬幣及一元硬幣和千元鈔票的換錢活動。

(1) 幾個十元換成幾張一百元：



(2) 幾張一百元換成幾個十元：

(3) 一張一百元可以換幾個十元和幾個一元？例如：一張一百元鈔票可以換 9 個十元硬幣和幾個一元硬幣？

(4) 一張一千元的鈔票可以怎麼換成零錢呢？例如：

●一張一千元鈔票可以換 9 張一百元和幾個十元硬幣？

●一張一千元鈔票可以換 9 張一百元、9 個十元硬幣和幾個一元硬幣？

(5) 姊姊拿了一張 1000 元的鈔票，去文具店買一本 65 元的筆記本，店員會找她多少錢呢？教師應引導學生以換錢方式解決問題，而不是用減法計算來解題。

(6) 小威有 28 個十元硬幣和 82 個一元硬幣，他想跟爸爸換錢，怎麼換可以讓紙鈔最多、硬幣最少？

錯誤類型

學生初期可能對硬幣或紙幣的幣值不熟悉，宜多讓學生從模擬用錢、找錢、換錢的情境中逐漸熟悉幣值。

評量

1. 評量重點：

(1) 能透過錢幣（圖卡）的操作，認識 100 元、500 元及 1000 元。

(2) 能做各種幣值的換算，並解決日常用錢的問題。

2. 注意事項：

(1) 有需要時，在評量時需提供相關教具以供操作解題。

(2) 評量題目可包含錢幣圖像提供學生圈選。

(3) 用錢活動不是加減法教學。「我們在實際用錢時，不會當場使用直式計算。」教師應秉持這個原則來布題、推動活動與評量。學生若使用直式計算，教師不能認定其為錯，而是從使用情境著手，讓學生理解。

N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。 **備註：**可在乘法解題脈絡中，自然使用連加算式，不限步驟。最後能以行列模型理解乘法交換律（R-2-3）。	n-I-4

先備：N-1-2。

連結：N-2-7、N-2-8、N-2-9、R-2-3。

後續：N-3-3、N-3-4。

基本說明

1. 乘法是小學數學數與量教學的重點與基礎，二年級的教學重點是學習乘法的意義與日常應用，熟練十十乘法（N-2-7），並認識乘法交換律（R-2-3）。

2. 乘法的初步意義是同一數的連加，此數稱為「被乘數」，連加的次數稱為「乘數」，相乘結果稱為「積」。教師可自然引導學生做連加計算，也可運用「幾個一數」。整體二年級乘法

教學應注意三個原則：(a) 由於多次加法過程瑣碎，藉此鼓勵學生學習「十十乘法」；(b) 在分析乘法應用問題時，發展「倍」的語言；(c) 乘法教學的圖示應自然呈現「行列模型」，利用該模型認識乘法交換律。

3. 「倍」的概念（即乘數）可以統一的乘法意義，是分析乘法情境的抽象概念。例如「一顆糖果 8 元，5 顆多少錢？」所問的問題是 8 元連加 5 次，可以轉換成倍的語言，即是「8 元的 5 倍」，可以列式成「$8 \times 5 = 40$」。「倍」的概念較抽象，在二年級只是初步認識，但在後續乘法學習可以協助分析問題。
4. 「行列模型」比「倍」的概念更抽象，是整合更豐富乘法情境（例如面積、乘法原理）的核心模型，足以打破被乘數與乘數的不對稱性，進而理解乘法交換律，日後探討乘法和除法的關係時也很重要。
5. 雖然二年級乘法重點是「十十乘法」範圍，但可不限於此。如「一杯豆漿 15 元，3 杯多少元？」學生理解能用 15 連加 3 次解題。在理解乘法交換律之後，學生對於「同樂會跳舞分組，每組 2 人，18 組多少人？」，學生理解「2×18」的算式，可以轉成「18×2」來做，並得到 $18 + 18 = 36$ 的答案。教師不可放任學生把 2 連加 18 次。

條目範圍

1. 在乘法的脈絡中，初期老師和學生可以約定並使用連加算式，當然「乘數」不宜過大。這只是算式的約定，和併式的學習無關。
2. 二年級不處理乘法直式計算。
3. 在初期乘法應用解題裡，「被乘數」與「乘數」的位置並不對稱，教師可用此來檢查學生是否理解乘法的意義。但是在學習「乘法交換律」之後，教師在評量中不可遽然以此判斷學生的對錯，應讓學生說明其計算的意義。
4. 處理以 0 作為被乘數或乘數時，應有恰當引導，尤其是後者。
5. 二年級乘法的範圍主要是「十十乘法」。若基於基本說明（5），想以更高位數探索乘法意義，建議只做「十幾 × 個位數」或「個位數 × 十幾」，且個位數不大於 3。

釋例

1. 進行乘法教學前，教師可複習二個一數、五個一數或十個一數，作為本條目的基礎。

例 1：二個一數（複習活動）。

（《部》第一冊課本 P.12）

例 2：五個一數(複習活動)

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(《部》第一冊課本 P.13)

2. 乘法的初步意義：透過同數連加引入乘法算式，認識「乘號」、「被乘數」、「乘數」、「積」、和「倍」等名詞，以作為乘法運算的基礎。

(1) 在同數連加的情境下引入乘法算式。

例 1：下圖中有多少花瓣？

(《部》第一冊課本 P.13)

學生可透過「五個一數」的舊經驗，得出共有 20 個花瓣。教師應協助學生理解「五個一數」數了 4 次，表示共有 4 個 5。因此相當於把 5 連加 4 次，於是得到

加法：$5+5+5+5=20$。

然後再引導學生將「5 有 4 個」(也就是 4 個 5) 記成乘法算式：

乘法：$5\times4=20$。

學生應理解連加算式如何轉化成乘法算式，也要知道乘法算式與問題的關係。告知學生 × 是「乘號」，5 是「被乘數」，4 是「乘數」，20 是「積」。

(2) 乘法學習重點之一是透過同數連加之瑣碎不便，強化乘法算式與十十乘法之需求。十十乘法見 N-2-7。

例 2：在例 1 之後追問，如下問題有多少花瓣？

加法：$5+5+5+5+5+5=30$。

乘法：$5\times6=30$。

讓學生體會加法的計算太繁瑣，容易造成錯誤，乘法的算式要簡潔很多。

(3) 乘法學習重點之二是認識「倍」的意義與使用。

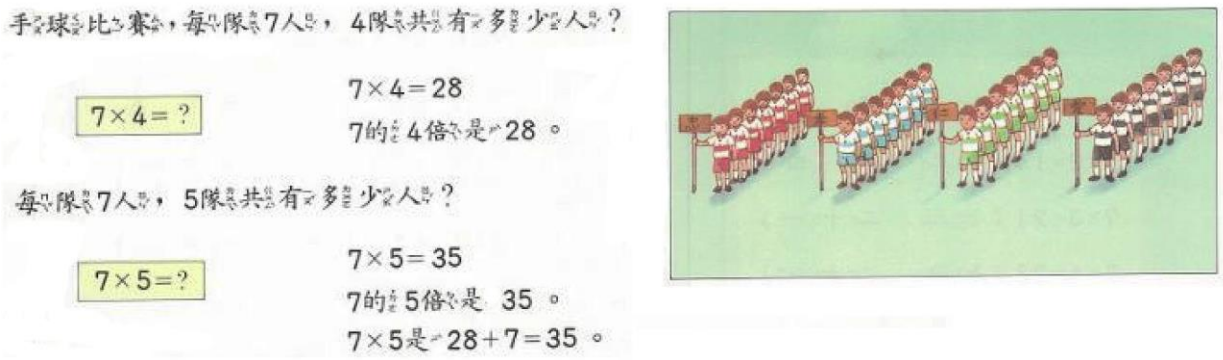
例 3：透過例 1 和例 2 的例子，引入倍的語言和用法。

在例 1 中，5 有 4 個，乘法算式 $5 \times 4 = 20$，5×4表示 5 的 4 倍，5 的 4 倍是 20。

在例 2 中，5 有 6 個，乘法算式 $5 \times 6 = 30$，5×6表示 5 的 6 倍，5 的 6 倍是 20。

3. 理解倍的語言，深化乘法的意義

例 1：引導學生觀察多 1 排即多 1 倍的變化和結構，並培養數感。



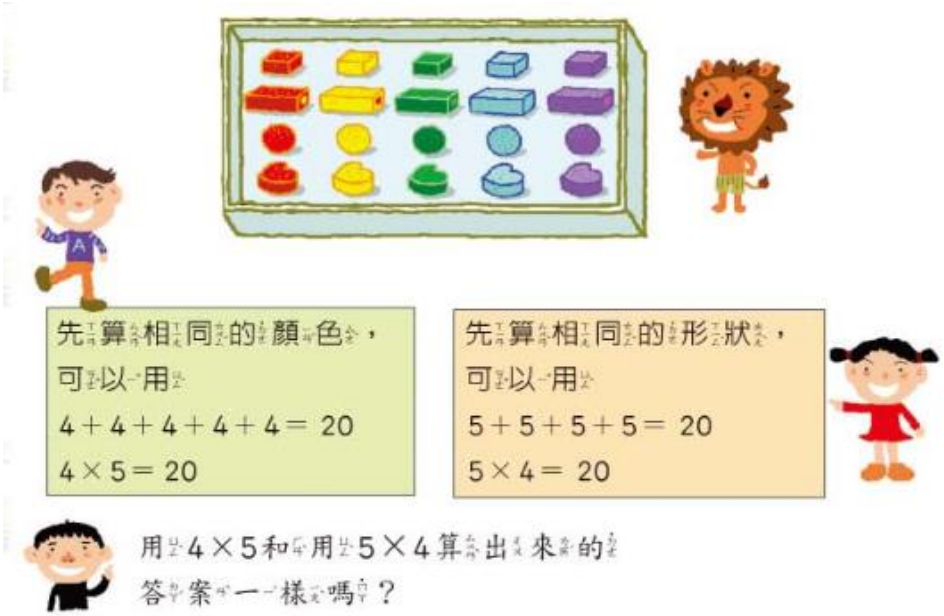
(《部》第四冊課本 P63)

例 2：倍的深化和運用。

(《部》第四冊課本 P14)

4. 引導學生分析乘法問題，經驗乘法交換律。

例 1：盒子裡有幾顆糖？



(《部》第四冊課本 P96)

5. 被乘數或乘數為 0 的問題。

例 1：小明和小華玩射飛標遊戲時，小明 3 次都射中 5 分，小華 3 次都射中 0 分，他們分別得到幾分？用乘法怎麼記錄？

小明的分數是 $5+5+5=15$，用乘法記錄就是 $5\times3=15$。

小華的分數是 $0+0+0=0$ ，用乘法記錄就是 $0\times3=0$。

例 2：一盤裝 2 個甜甜圈，2 盤有幾個甜甜圈？用乘法怎麼記？拿走 1 盤後，剩下幾盤？盤子裡共有幾個甜甜圈？用乘法怎麼記？如果再拿走 1 盤，剩下幾盤？盤子裡有幾個甜甜圈？用乘法怎麼記。

(《部》第三冊課本 P.95)

$2\times2=4$　　每盤 2 個，原有 2 盤；

$2\times1=2$　　每盤 2 個，剩下 1 盤；

$2\times0=0$　　每盤 2 個，剩下 0 盤。

錯誤類型

1. 當學生答案的乘法算式，其「被乘數」與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，並不能判斷其為錯誤。學生有可能是亂寫或不理解題意而弄錯，但也有可能是學生完全清楚題意而有自己的解釋或直接運用乘法交換律。以「5 輛汽車，每輛汽車有 4 個輪胎，共有幾個輪胎？」為例。一般列式為

   $4 \times 5 = 20$。　（4 的 5 倍是 20）

   若學生知道乘法交換律，則可能寫成

   $5 \times 4 = 20$。

   也有可能學生將問題解釋成左前輪有 5 個、右前輪有 5 個....，由於輪子有 4 個位置，共有 4 組，因此寫成

   $5 \times 4 = 20$。　（5 的 4 倍是 20）

   教師可詢問學生列式的理由再處理（參見評量注意事項）。
2. 在理解倍的關係時，有時學生會混淆計數單位發生錯誤。例如「5 輛汽車，每輛汽車有 4 個輪胎，共有幾個輪胎？開走 1 輛後，現在共有幾個輪胎？」學生可能先正確算出 4×5=20 個輪胎後，接著卻算成 $20 - 1 = 19$ 個輪胎。建議教師讓學生將解題出現的數字，對應原題目情境，並說明其意義，讓學生理解錯誤的原因，建立正確的想法。

評量

1. 評量重點：
   (1) 從連加情境活動中，理解乘法的意義，並改用乘法算式記錄連加活動的結果，認識乘號、被乘數、乘數、積。
   (2) 認識倍的意義並能運用於理解及解決乘法問題。
   (3) 能用乘法解決生活中的問題。
2. 注意事項：
   (1) 評量被乘數（單位量）與乘數（單位數）的區別，須避免同數相乘的問題。
   (2) 乘法交換律的評量經常造成教師和家長的衝突，主因在於學生所列算式之「被乘數」與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，有可能是學生完全不理解題意而弄錯，也有可能是學生完全清楚題意，但有自己的解釋或直接運用乘法交換律。教師評量應以學生是否理解為考量，不能只是光從算式來判斷。教師可追問學生列式的原由，看看學生是否誤會題意、隨意列式、有意義轉換題意、已明瞭交換律等等，再作評量之判斷。
   (3) 教師設計問題時，宜考量可能之合理回答。例如：「3 的 5 倍和 3 的 2 倍，合起來是多少？」回答「3 的 7 倍」或「21」均合理。或許用分段布題，如「3 的 5 倍和 3 的 2

倍，合起來是 3 的幾倍？合起來是多少？」，可更完整達成評量目標。

N-2-7 十十乘法：乘除直式計算的基礎，以熟練為目標。 **備註：**本單元應和乘法概念的學習同時進行，不可要求學生死背乘法表。本條目的學習可協助在除法情境（如 N-2-9）中察覺乘與除的關係。	n-I-4

連結：N-2-6。

後續：N-3-3、N-3-4、N-3-5。

基本說明

1. 「十十乘法」是乘法和除法直式計算的基礎，在二年級結束時應熟練。教學時應考慮學生已有的先備經驗（如 2 個一數、5 個一數、10 個一數），依熟悉度或難度分階段教學。除了分別觀察個別乘數的乘法模式，最後也應觀察十十乘法表的整體模式（包括乘法交換律）。
2. 「十十乘法」的教學應如「基本加減法」，不只是單純的背誦乘法表，也包含熟悉乘法數感的各種活動，例如心算卡、幾個一數、熟悉兩數交換其積相同的結果。靈活的「十十乘法」教學可協助日後的除法與乘除互逆教學。例如教學可用口頭多問類似「多少乘以 3 等於 15？」、「7 乘以多少等於 56？」的問題。
3. 「十十乘法」加強了「10」的部分，尤其是熟悉以 10 為乘數的部分，讓學生能直覺熟練「$7 \times 10 = 70$」的結果，這有益於理解日後的直式計算（N-3-3）。

條目範圍

1. 「十十乘法」不宜另立單元單獨教學，應與乘法教學（N-2-6）同時進行。
2. 十十乘法雖可協助發現乘與除的關係，但二年級不進行除法教學（參見 N-2-9）。

釋例

1. 「十十乘法」的學習，宜依學生的熟悉度並考量乘法事實的難易度，分散於上下學期完成個別乘法表。例如：2、5、10 可先於 7、8、9。教師也可透過十十乘法表，熟悉個別乘法構成整體乘法表的模式，讓學生精熟十十乘法。
2. 十十乘法表的教學方式舉例

例 1：完成個別乘法表（提供具體物，讓學生可以點數，並觀察其結構變化）。

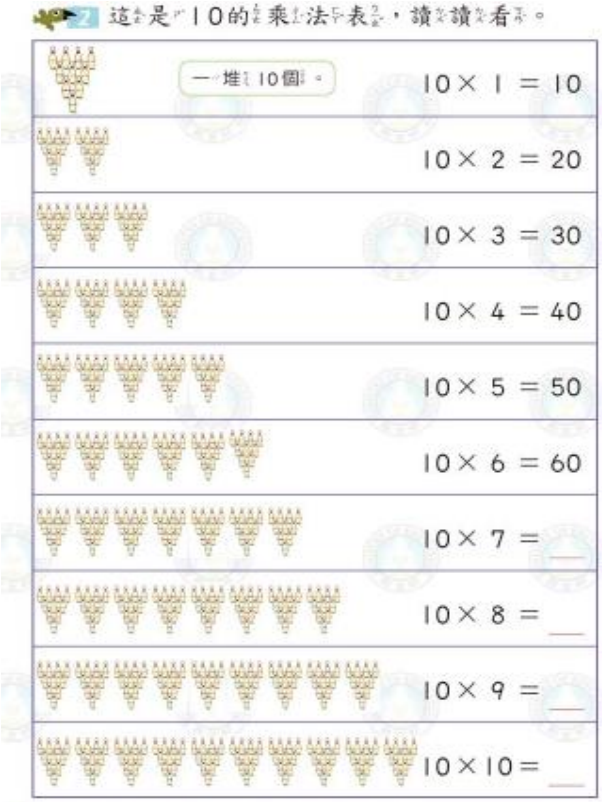
（《部》第三冊課本 P.78）

例 2：個別乘法表中的規律探索。

- 乘數差 1 倍的探索：

（《部》第三冊課本 P.78）

● 個別乘法表的探索：說說看，從上面的表格中，你的發現是什麼？



(《部》第三冊課本 P.84)

3. 熟悉整體乘法表的一些方法釋例。

例 1：引導學生發現乘法表上的對稱性，發現具有「交換律」性質，而減半記憶。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

例 2：觀察個別乘法事實，探討其規律。

(1)「2 乘以幾」或「幾乘以 2」(2 的倍數)，積的序列即兩個一數的唱數。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(2)「5 乘以幾」或「幾乘以 5」(5 的倍數)：積的個位數字不是 5 就是 0。

(3)「10 乘以幾」或「幾乘以 10」(10 的倍數)：積的十位數與原數相同，而個位數都是 0。(100 要小心)

(4)「9 乘以幾」或「幾乘以 9」(9 的倍數)；積的十位加上個位等於 9，而且依序變化有一定的規律。

(5) 其他規律（例如下圖）：

(六四年《部》第四冊課本 P.60)

錯誤類型

學生不理解個別乘法表的規律，只會死背很容易記錯，導致乘法未能精熟，甚至出現固定錯誤（如混淆7 × 8 = 54 或 56）。建議教師教學時應強調個別乘法表的規律（如：多一倍即多多少？）以及透過交換律簡記憶等方式協助學生。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能透過乘法意義和應用倍的關係，熟練十十乘法。
   (2) 能發現十十乘法表中的一些規律。
2. 注意事項：
   (1) 教師宜在教學中同時評量學生學習進展，讓學生多練習、表現或判斷。
   (2) 評量方式宜多元，不要局限於紙筆評量，以增加學生之學習興趣。

N-2-8 解題：兩步驟應用問題（加、減、乘）。加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。 **備註：**連乘在三年級（N-3-7）。	n-I-5

連結：N-2-2、N-2-6、R-2-2。

後續：N-3-7。

基本說明

1. 本條目進行結合加、減、乘的日常應用問題。兩步驟指的是在解題時需要列出兩道橫式再計算，包括連加、連減、加減、減加、加乘、乘加、乘減、減乘之應用解題。
2. 學生解決兩步驟問題時，應先判斷題意，並將各步驟分開列式。學生第一次學習兩步驟問題，由於題目中文字較多，數字線索也較多，容易混亂，因此二年級的兩步驟解題應從簡單而直接的問題開始，其類型應較易理解，尤其數字也不用太大。
3. 兩步驟問題有時有不同的列式方式，若學生出現不同作法，教師應鼓勵學生討論，這是發現計算規律的前置經驗。處理 R-2-2 時也宜採這種多元解題，發現規律的模式。
4. 不含將兩步驟併成一算式的併式教學。（見 R-4-1）

條目範圍

1. 兩步驟加、減、乘，不包含連乘。其他兩步驟運算在 N-3-7、N-4-3。
2. 若兩步驟問題容許多元作法，可以進行討論，教師不宜統一固定的作法。但多元作法暗含的規律，由於無併式紀錄，不易敘述，且就二年級學生的認知還太複雜，因此除了 R-2-2 之外，均不宜做出計算規律的結論，更不宜直接告知結論，要求死記。
3. 涉及分配律的問題（如「一盒糖果，草莓口味有 2 顆，奶油口味有 4 顆，小明買 5 盒，總

共有幾顆糖果？」) 應容許學生採用較直接的三步驟來列式，但老師應詳細說明為何也可用兩步驟列式解題。

釋例

1. 進行兩步驟應用問題之教學，應連結 N-1-3、N-2-6、N-2-9 及 R-2-2 的學習經驗。例如基本加減法（N-1-3）活動中即可進行加減混合計算；乘法（N-2-6）中自然使用連加算式；分裝與平分（N-2-9）可透過連減策略解題；三數相加順序不影響其和（R-2-2）。
2. 引導學生分析兩步驟應用問題的解題策略，需先讓學生理解問題情境，再透過列式進行解題。通常可以依「順向思考」: 先算什麼？再算什麼？；或「逆向思考」: 要算什麼？已經知道什麼？不知道什麼？協助學生分析問題。遇到較複雜的問題情境，建議提供線段圖或圖示，協助學生思考與解題。
3. 兩步驟「連加」應用問題示例。

   例 1：快樂國小二年甲班有 25 人，乙班有 26 人，丙班有 27 人，三個班級共有多少人？

   解：先算甲乙兩班人數：$25 + 26 = 51$，再算三班人數：$51 + 27 = 78$。當然運用 R-2-2 可能有許多不同列式方式。

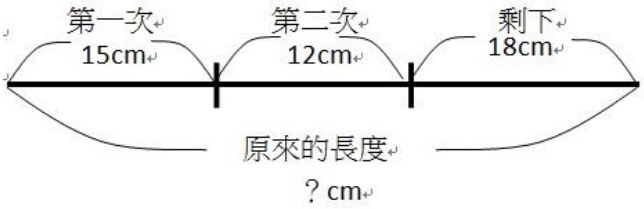
   例 2：小明原有 15 元，爸爸給他 12 元，媽媽又給他 8 元，現在他有多少元？

   解一：先算小明原有和爸爸給的錢之和$15 + 12 = 27$，再算加入媽媽的部分：$27 + 8 = 35$。

   解二：先算爸媽給的錢：$12 + 8 = 20$，再算與原有錢的和：$15 + 20 = 35$或 $20 + 15 = 35$。

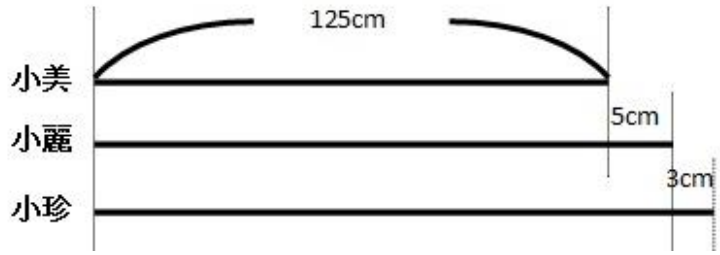
   例 3：一條緞帶，第一次用了 15 公分，第二次用了 12 公分，最後剩下 18 公分，請問緞帶原來是多長？

   解：分析線段圖，再透過二步驟逐次列式解題：$15 + 12 = 27$、$27 + 18 = 45$。



   例 4：小美身高 125 公分，小麗比小美高 5 公分，小珍又比小麗高 3 公分，請問小珍身高是多少？

解一：透過線段圖協助學生理解比較型問題的分析方式，先算小麗有多高：$125+5=130$，再算小珍有多高：$130+3=133$。

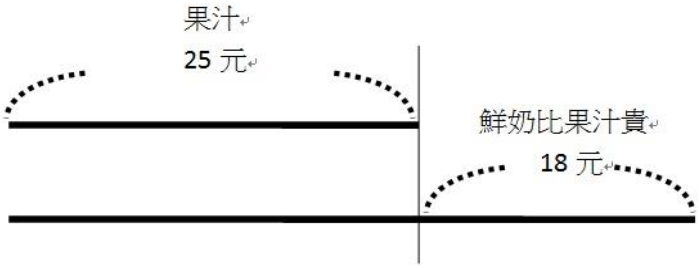


解二：先算小珍比小美高 5 + 3 = 8 公分，再算小珍多高：125 + 8 = 133。

比較型問題相對較困難（參見 N-2-3），因此比較型兩步驟問題通常需以線段圖輔助。另外比較型兩步驟問題，雖然可運用 R-2-2，但因為比較抽象，在二年級時並不推薦（參見 R-2-2）。

例 5：果汁一瓶 25 元，一瓶鮮奶比一瓶果汁貴 18 元，媽媽買了一瓶果汁和一瓶豆漿，總共要付多少錢？

解：先透過線段圖分析題意，再透過二步驟逐次列式解題（如下）



算法很多種：$25+18=43$、$43+25=68$、

$25+25=50$、$50+18=68$、

$25\times 2=50$、 $50+18=68$。

4. 兩步驟「連減」應用問題示例。

例 1：便利商店裡原有 50 顆茶葉蛋，早上賣出 15 顆，下午賣出 25 顆，剩下多少顆？

解一：先算早上剩幾顆：$50-15=35$，再算最後剩幾顆：$35-25=10$。

解二：先算共賣出幾顆：$15+25=40$，再算剩下多少顆：$50-40=10$。

例 2：小美帶 50 元到商店，買了 18 元的麵包，又買了果汁，剩下 20 元。果汁多少元？

解：先算買麵包剩下錢數：$50-18=32$，再算果汁價錢：$32-12=20$。

例 3：胖虎、小夫和大雄三人參加校外教學，胖虎花了 250 元，小夫說：「我比胖虎少花 25 元」，大雄說：「我比小夫少花 15 元」。請問大雄花了多少錢？

解一：先算小夫花的錢：$250-25=225$，再算大雄花的錢：$225-15=210$。

解二：先算大雄比胖虎少花$25+15=40$元，再算大雄花的錢：$250-40=210$。

例 4：籃子裏的蘋果和梨子共 37 個，蘋果有 18 個，請問籃子裏的梨子比蘋果多多少？

解：透過線段圖，先算梨子顆數：$37-18=19$，再算相差幾顆：$19-18=1$。

5. 兩步驟「加減、減加」應用問題示例。

例 1：小明有 24 張貼紙，哥哥給他 15 張後，小明分給弟弟 17 張，小明剩下幾張？

解：先算哥哥給完的張數：$24+15=39$，再算給弟弟剩下張數：$39-17=12$。

例 2：小華有 125 元，哥哥有 147 元，他們想合買 298 元的指尖陀螺後，不夠多少錢？

解：先算兩人共有錢數：$125+147=272$，再算不夠幾元：$298-272=26$。

例 3：紅繩長 43 公分，綠繩 38 公分，黃繩 89 公分，紅繩和綠繩合起來比黃繩長多少？

解：先算紅繩綠繩合起來的長度：$43+38=91$，再算比黃繩多多少：$91-89=2$。

例 4：公車上面原來有 30 名乘客，到了正義站，前門上來了 8 位乘客，後門下去 9 位乘客，公車上還剩下多少乘客？

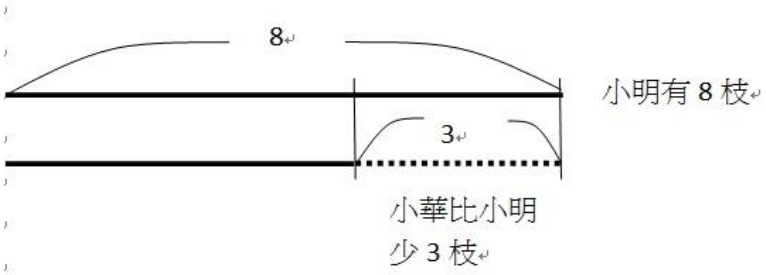
解一：$30+8=38$，$38-9=29$。

解二：$30-9=21$，$21+8=29$。

例 5：小明有 8 枝筆，小華比小明少 3 枝筆，兩人共有多少枝筆？

解：先透過線段圖分析題意，再透過二步驟逐次列式解題：

$8-3=5$，$8+5=13$；或$8+8=16$，$16-3=13$。



6. 兩步驟「先乘再（加、減）」應用問題示例。

例 1：運動會趣味競賽，將現場報名人數每 8 人分成一隊，共有 5 隊，另外還有 3 人沒有組隊，請問報名人數是多少？

解：先算 5 隊多少人：$8\times5=40$，再算全部多少人：$40+3=43$。

例 2：小明今年 13 歲，叔叔的年齡是小明的 3 倍又多 7 歲，請問叔叔今年幾歲？

解：先算 3 倍是幾歲：$13\times3=39$，再算叔叔幾歲：$39+7=46$。

例 3：一枝鉛筆 10 元，老師買了 9 枝，付了 100 元，可以找回多少元？

解：先算錢幣共幾元：$10\times9=90$，再算找回幾元 $100-90=10$。

例 4：全班同學乘坐摩天輪，每 4 人一個車廂，共坐了 8 個車廂，但有一個車廂離坐滿還差 1 人，問全班有多少人？

解：先算 8 車廂做滿的人數：$4\times8=32$，再算實際人數：$32-3=29$。

例 5：把一些糖果平分給 8 位小朋友，每人分 5 顆，不夠 4 顆，糖果原來有幾顆？

解：先算理想中的糖果數：$5 \times 8 = 40$，再算實際糖果數：$60 - 4 = 56$。

7. 兩步驟「先（加、減）再乘」應用問題示例。

例 1：一盒麻糬中，花生口味有 6 粒，芝麻口味有 4 粒。爸爸買 9 盒，共有多少麻糬？

解一：先算一盒有幾粒：$6 + 4 = 10$，再算共有幾粒：$10 \times 9 = 90$。

解二：先算花生共幾粒：$6 \times 9 = 54$，再算芝麻有幾粒：$4 \times 9 = 36$，最後算共有幾粒：$54 + 36 = 90$。雖然是三步驟，但教師不要禁止，應鼓勵學生討論。

例 2：一盒布丁有 3 個，媽媽買 5 盒，阿姨買 6 盒，總共買了幾個？

解一：先算共買了幾盒：$5 + 6 = 11$，再算共買幾個：$3 \times 11 = 33$。

解二：先算媽媽買幾個：$3 \times 5 = 15$，再算阿姨買幾個：$3 \times 6 = 18$，最後算共買幾個：$15 + 18 = 33$。

例 3：巧克力糖一顆原來賣 10 元，今日特價賣 8 元，小平買了 6 顆，省了多少元？

解一：先算每顆省幾元：$10 - 8 = 2$，再算共省幾元：$2 \times 6 = 12$。

解二：先算本來共幾元：$10 \times 6 = 60$，再算特價後共幾元：$8 \times 6 = 48$，最後算共省幾元：$60 - 48 = 12$。

例 4：一盒布丁有 3 個，媽媽買 8 盒，阿姨買 4 盒，媽媽比阿姨多買幾個？

解一：先算相差的盒數：$8 - 4 = 4$，再算差幾個：$3 \times 4 = 12$。

解二：先算媽媽買幾個：$3 \times 8 = 24$，再算阿姨買幾個：$3 \times 4 = 12$，最後算差幾個：$24 - 12 = 12$。

錯誤類型

1. 當學生解題，將問題情境中出現的數字，列出似乎不合宜的算式，卻得到正確的答案。和處理乘法交換律相同（R-2-3），教師宜追問其策略和想法加以釐清。
2. 兩步驟問題有些較複雜，學生未理解題意，僅透過關鍵字與數字解題，例如釋例(3)例 5，只有兩個數字，可能誤算成 $25 - 18 = 7$ 或 $25 + 8 = 43$。

評量

1. 評量重點：

能解決結合加、減、乘的日常兩步驟應用問題（排除連乘）。

2. 注意事項：

(1) 當學生以少見的方式列式，並得到正確答案，教師不宜認定其為錯。應請學生說明其想法。

(2) 兩步驟問題有時有不同的列式方式，若課堂上出現不同作法，教師應鼓勵學生討論。

(3) 由於兩步驟問題較複雜，布題中的數字不宜太大，以免錯置評量的重點。

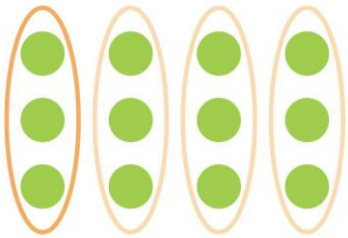
N-2-9 解題：分裝與平分。以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。 **備註：**本條目非除法教學，不列除式，不用「除」的名稱 (N-3-4)。限相當於整除的問題。教學應在「十十乘法」範圍中進行。可用幾個一數或連減協助，但不可成為答題格式。	n-I-4

連結：N-2-6、N-2-7。

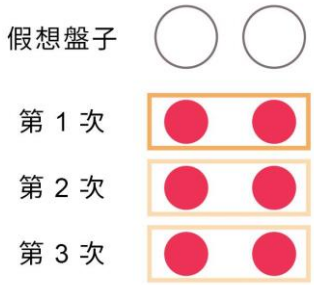
後續：N-3-4。

基本說明

1. 分裝與平分是除法的前置經驗。以操作活動學習分裝與平分的意義與常用思考方法。
2. 學童可以透過操作、畫記、點數、連減或乘法等多元策略來解題，但最後仍應透過圖示讓學生認識分裝和平分問題都和乘法有密切的關連。
3. 「分裝」問題較簡單，例如「12 個玻璃杯，3 個杯子裝一盒，可裝幾盒？」學生可以透過花片的分堆，學習分裝的方法。教師可提供左下圖的「行列模型」擺法，讓學生發現這個問題和乘法的關係，更可以連結「十十乘法」中的問題：「3 乘以多少是 12？」(即「1 盒 3 杯，幾盒是 12 杯？」)



4. 「平分」問題必須處理分配的步驟，才能和「分裝」的操作結合。如「將 6 顆李子，平分給 2 人，每人一樣多，每人分幾顆？」學生可透過花片學習，其操作步驟如下：想像一個人用一個盤子代表，第一次各盤各分一顆李子，共放 2 顆；第二次再各放一顆李子，再放 2 顆，以此類推第 3 次再放 2 顆，分完 (如圖)。



然後發現次數其實就是每人分得的顆數。在次過程中也可發現此問題和乘法的關係，更可以連結「十十乘法」中的問題：「多少乘以 2 是 6？」(即「1 人 (盤) 幾顆，2 人會是 6

顆？」)

條目範圍

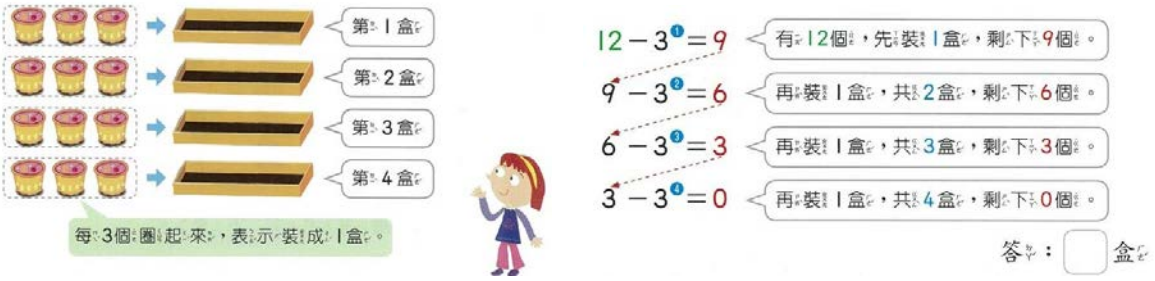
1. 本條目的教學是操作活動，雖然是除法的問題，但不列除式，不用「除法」的名詞。
2. 限整除問題（全部分完），並應在「十十乘法」的數量範圍中進行。
3. 由於本條目是學習分裝與平分的活動教學，因此不論使用幾個一數、連減、十十乘法做為解題活動的策略，學生可以只回答答案，但不需要記錄成特定答題格式。

釋例

1. 平分活動和分裝活動，雖然都是除法的前置經驗，但意義不同，思考方式也不同，兩者的教學都應讓學生有實際操作的經驗。
2. 分裝活動及過程：

   例：「12 個布丁，3 個裝一盒，可以裝幾盒？」底下是可能的作法，但無論如何最後要歸結到與乘法的連結，才能建立日後乘法與除法的密切關係。

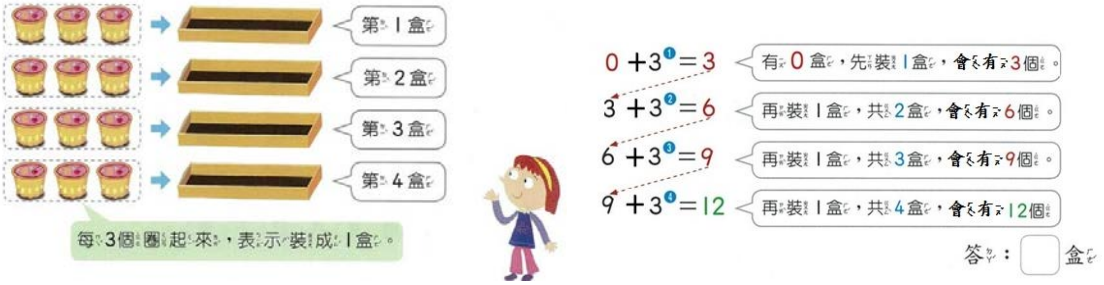
   (1) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「連減」。



   ●請學生觀察上圖左邊 12 個布丁，在分裝過程中，每多裝 1 盒，左邊的布丁數會減少 3 個。

   ●當 12 個布丁分裝完畢時，左邊的布丁會剩下 0 個，觀察裝滿的盒數會有 4 盒。

   (2) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「連加」。



   ●請學生觀察上圖右邊的布丁盒，在分裝過程中，每裝 1 盒，布丁盒中的布丁數會增加 3 個。

   ●當 4 盒布丁都分裝完成時，會有 12 個布丁。

   (3) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「乘法」。(分裝圖示同前)

●請學生觀察分裝過程中，每分裝 1 盒，盒子總數和布丁數目。

●其過程可以如下：

3 × 1 = 3　　裝 1 盒，共裝 3 個布丁。

3 × 2 = 6　　裝 2 盒，共裝 6 個布丁。

3 × 3 = 9　　裝 3 盒，共裝 9 個布丁。

3 × 4 = 12　　裝 4 盒，共裝 12 個布丁。

●當學生解題後，教師可追問：「3 乘以多少會等於 12？」讓學生察覺分裝活動和乘法問題的連結和關係。

1 盒布丁裝 3 個，幾盒布丁共有 12 個？

3　　×　　(　　)　　=　　12。

1 盒 3 個　　4 盒　　全部 12 個。

●教師重新整合詢問：說說看：從「12 個布丁，3 個布丁裝一盒，可以裝幾盒？」與「一盒布丁有 3 個，裝了 4 盒，全部有幾個？」可以發現什麼？

3. 平分活動的注意事項：

(1) 以「將 6 顆蘋果平分成 3 盤，每盤可以分幾顆？」為例，為了達到「公平」，常用的策略是「一輪一次分一顆」，當每分一輪時，雖然是分到 3 個盤子上，但觀察蘋果數量的變化，其數量正是每輪移出 3 個，這個經驗和「分裝」類似，因此可用上述「分裝」的策略進行。

(2) 最後要能夠理解，分完之後盤中的蘋果數，正是平分到各盤的蘋果數。

(3) 由於「一輪一次分一顆」的想法比較困難，教師應特別花時間解釋為何這麼做是公平的。

4. 平分活動及記錄方式：

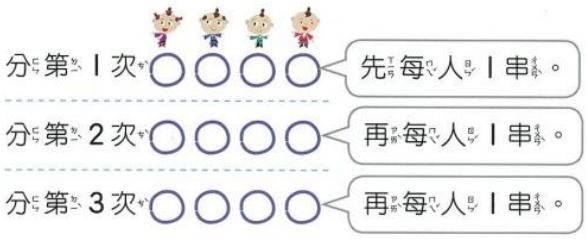
(1) 教師布題，並請學生畫記（表徵）和說明做法：

有 12 串糖葫蘆要平分給 4 人，每人可以分到幾串？

用 1 個○表示 1 串，畫○分分看。

(2)「一輪一次分一顆」的「平分」操作過程

在教師提示「一輪一次分一顆」是公平的分法之後進行活動：



接著要描述學生可能的說明方式，但無論如何最後要歸結到與乘法的連結，才能建立日後乘法與除法的密切關係。

(3) 學生連結「連減」來說明平分的過程和結果。

(4) 學生連結「連加」來說明平分的過程和結果。其方式和「分裝」類似，這裡不多做說明。

(5) 學生連結「乘法」來說明平分的過程和結果。

●請學生觀察平分過程中，每分 1 輪，每人分得的串數。

●其過程如下：

第一輪：　1 × 4 = 4　　每人 1 串，共分了 4 串。

第二輪：　2 × 4 = 8　　每人 2 串，共分了 8 串。

第三輪：　3 × 4 = 12　　每人 3 串，共分了 12 串。

●當學生解題後，教師可追問：「多少乘以 4 會等於 12？」讓學生察覺平分活動和乘法問題的連結和關係。

每人分幾串，4 人合起來共有 12 串？

(　　) × 4 = 12。

每人 3 串　　4 人　　全部 12 串。

●教師重新整合詢問：說說看：從「12 串糖葫蘆，平分給 4 人，每人分幾串？」與「每人分 4 串，3 人全部有幾串？」可以發現什麼？

5. 在十十乘法的範圍內，練習分裝和平分，與乘法算式的關係，讓學生能逆轉十十乘法的記法。

例 1：「24 個橘子，8 個裝一袋，可以裝幾袋？」相當於問「8 個裝一袋，幾袋會是 24 個？」，再轉化成 8 × (　) = 24 的算式，讓學生從 8 的乘法，很快找出答案 3。

例 2：「18 支鉛筆，平分給 9 位小朋友，每人分幾支？」相當於問「每人分幾支，9 人合

起來是 18 支？」，再轉化成 (　　) × 9 = 18 的算式，讓學生從 9 的乘法(家加上交換律)，很快找出答案是 2。

錯誤類型

1. 平分時未將全部分完。學童的生活經驗，只要每組 (人) 分得的物品數量相同，雖未將物品全部分完，但學生亦可能視為平分。老師應強調全部都要分完。
2. 平分活動的記錄中，以釋例 3. 為例，可能出現 6 個蘋果減去 3 盤的錯誤，這是學生尚未掌握問題以轉化成 6 個蘋果減去 3 個蘋果的想法。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能進行分裝活動，並理解分裝的意義和方法。
   (2) 能進行平分活動，並理解平分的意義和方法。
2. 注意事項：
   (1) 本條目係以操作活動為主，其評量方式宜多元，不可侷限於紙筆評量，以增加學生之興趣。
   (2) 進行平分活動，學童若以連減的方式當作記錄時，宜注意各數量之單位是否相同。參見錯誤類型 2.。
   (3) 活動與評量均應以十十乘法為範圍。

N-2-10 單位分數的認識：從等分配的活動 (如摺紙) 認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。 **備註：**學生應知道等分配活動之目的。二年級之分數活動與教學限連續量，不處理離散量，避免和 N-2-9 混淆。摺紙限「摺半」操作：例如用長方形摺出分母 2、4、8 的單位分數；用圓摺出分母 2 或 4 之單位分數。已等分割之格圖，應呼應等分割活動，以長方形或圓形為主。「的幾分之一」的用語僅限於活動與溝通，不是分數乘法問題。	n-I-6

連結：N-2-9。

後續：N-3-9。

基本說明

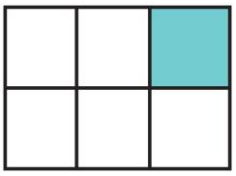
1. 本條目是小學第一次的分數教學，重點在於認識單位分數及其記錄方式。 由於學生尚未學習面積之操作或公式，因此應以基於「公平」的等分活動來進行。
2. 本條目教學分兩部分：摺紙分數活動和單位分數教學。為避免學生認知尚無法區分不同的

單位量，第二部份教學僅限於和摺紙活動相關的已等分割連續量模型（如長方形和圓），不處理離散量。

3. 從等分配的操作活動（如摺紙）中，認識單一部分為全部的「幾分之一」，並展開原紙，將「幾分之一」的部分上色。在活動中認識日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。操作原則上以最容易的「取一半」來進行，也可嘗試「取三分之一」。
4. 在上述活動之後，進行在已等分割之格圖中，說明塗色之格為全部的「幾分之一」。並記錄成分數符號。完成對簡單單位分數之說、讀、聽、寫、作的學習。
5. 教師要進行「在明顯不公平的分割情況下，說明其不能稱為『幾分之一』的活動」，並檢查學生是否理解。

條目範圍

1. 應從正面態度處理已等分割格圖。評量時切勿使用或測試學生等積異形的分割（見錯誤類型），也不要用差異微小的分割格圖來做為教學反例（如下圖，問是否為 $\frac{1}{6}$）。

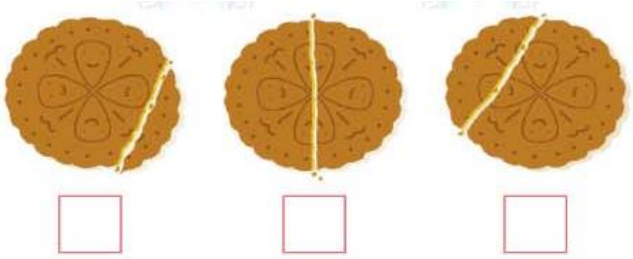


2. 本條目所有活動與教學，僅限於連續量之等分配活動。切勿與 N-2-9 的離散量活動混淆。離散量之分數活動應等三年級再進行。
3. 摺紙原則上限「摺半」操作：用長方形或圓形紙摺出分母 2、4、8 的單位分數。若嘗試等分成三份，僅限於長方形紙，且不納入評量。
4. 摺紙的方式很多，但必須包含類似摺繩單方向的摺疊操作。
5. 基本說明 3. 所使用的已等分割格圖，應呼應基本說明 3. 之等分割活動，以長方形或圓形為主。但其分母的範圍可稍放寬為常用的 2、3、4、5、6、8、9、10、12。
6. 單位分數之比較應在摺紙活動中進行，學生理解 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ 的道理，知道分的次數越多，所得越小的道理即可。
7. 「的幾分之一」僅限於活動與日常溝通，不是分數乘法問題。

釋例

1. 引入單位分數前，先從日常例子讓學生體驗公平的分配。由於真正的等分，在二年級還太困難，因此經常從反面的排除法，體驗等分大致上的意思。

例：兄弟兩人平分鬆餅，由哥哥來分，弟弟先選，你覺得下面哪一種分餅的方法最公平？

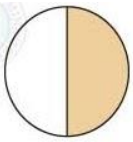


2. 摺紙等分操作，從 1 次對摺，2 次對摺，最多 3 次對摺，引入 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$。

(1) 活動時在對摺打開後，教師引導學生確認平分的份數，將其中一份塗色，再引入「幾分之一」的記法和讀法。

例 1：拿出 1 張圓形圖卡，把圖卡對摺。

打開圖卡對摺，對摺把 1 張圖卡平分成幾份？（2 份）

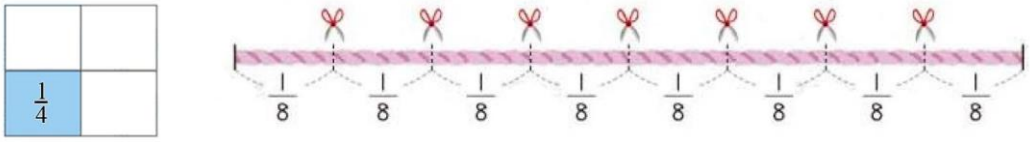


把其中一份塗上顏色，塗色的這 1 份，是這張圖卡的一半，也就是這張圖卡的 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 讀做「二分之一」。沒有塗色的另一半，也是這張圖卡的 $\frac{1}{2}$。

(2) 可以操作圓形或長方形圖卡（或長條的圖卡如下）。

活動中透過 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$ 的圖卡，與學生溝通日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的意義：

例 1：1 張圖卡平分成 4 份如左圖，塗色的 1 份是圖卡的 $\frac{1}{4}$（四分之一）。



例 2：1 條繩子平分成 8 段如右圖，其中一段是繩子的 $\frac{1}{8}$（八分之一）。

3. 認識單位分數。

(1) 摺紙活動之後，學生已初步理解單位分數的意思。接著再藉由與摺紙活動類似但等分好的圓形或長方形圖卡，完整認識單位分數。

(2) 單位分數的說、讀、聽、寫、做活動：

課堂上學習單位分數時，「等分中的一份」、「分數數詞」、「分數數字」彼此間的轉換，就是單位分數的說、讀、聽、寫、做活動。

例：「一張紙平分成 4 等份，其中的一份」、「四分之一」、「$\frac{1}{4}$」。：

- 說：教師呈現四等分的圖形，問：「一張紙平分成 4 等份，(指著) 其中這一份，說說看，這是多少張紙？」
- 讀：教師拿出數字卡「$\frac{1}{4}$」或板書，請小朋友讀讀看。
- 聽：教師念分數數詞「四分之一」，請小朋友拿出數字卡或寫出。
- 寫：教師呈現四等分的圖形，問：「一張紙平分成 4 等份，(指著) 其中這一份，寫寫看，這是多少張紙？」
- 做：給定空白圓形或長方形圖卡，要求學生「把四分之一張紙塗上顏色」。若分母不是 2、4、8，則圖卡上應有提示虛線。

(3) 等分好的圖形不可使用等積異形的圖示。避免混亂學生對分數概念的理解，影響分數的學習。

4. 以相同圖卡分別對摺的活動進行分數的大小比較活動：

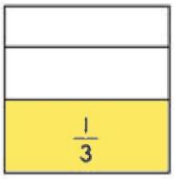
例：將一樣形狀的圖卡對摺出 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$，比比看哪一個比較大？

可以分別比較 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$、$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8}$，知道 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ 且 $\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$。引導學生理解其中的道理：摺的次數越多，得到的結果越小。

註：教師可以結合 N-2-9，問「把 12 顆糖果分給 2 個人或 4 個人，哪一種分法，分得的糖果數比較多？」兩種道理是一樣的。

錯誤類型

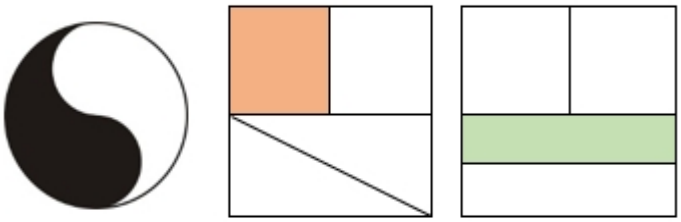
1. 不等的分割，誤以為隨意摺（或分），三份中一份就是 $\frac{1}{3}$。



2. 學生在溝通時，可能混用單位，如「我把 1 塊披薩平分成 8 塊，其中 1 塊是 $\frac{1}{8}$ 塊披薩。」單位混淆是學生學習分數的常見障礙。教師應釐清是「我把 1 個披薩平分成 8 份，其中 1 份是 $\frac{1}{8}$ 個披薩。」

評量

1. 評量重點：
   (1) 能透過摺紙活動初步認識 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$ 的意義。
   (2) 認識分母 2、3、4、5、6、8、9、10、12 的單位分數，進行其說、讀、聽、寫、做的活動。
   (3) 知道 $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$、$\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$。
2. 注意事項：
   (1) 摺紙活動進行時不能過度計較微小的差異。連續對摺的操作，以三次為限，避免造成平分有過大誤差（見錯誤類型 1.）。
   (2) 教師評量應注意單位不要混淆（見錯誤類型 2.）。
   (3) 評量命題不能出現等積異形的圖示，這超出學生的認知能力。如：



N-2-11 長度：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 **備註：**基於 N-2-1 的限制，單位換算時公尺數限個位數。長度的加減問題必須包含和數線加減可以連結之題材（N-3-11）。	n-I-7

先備：N-1-5（S-1-1）。

連結：S-2-3、S-2-4、R-2-1。

後續：N-3-11、N-3-12。

基本說明

1. 以一年級的「長度」量個別單位活動為基礎，二年級開始學習常用單位「公分」與「公尺」。由於是首次學習，建議「公分」與「公尺」分上下學期教學。「公分」學習可和使用公分尺（S-2-3）的單元結合。
2. 常用單位的學習目的在應用於日常生活。因此教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單加減計算。知道什麼是常用的測量器具──直尺，並能正確使用直尺（S-2-3）。量感的教學應配合學生身體或周遭物件，以建立量感的實質基礎。估測必須在實測已有經驗之後才進行，結合對單位的基本量感和實測經驗來估計長度，並會使用「大約多少公分」的敘述。
3. 有一些長度活動因為概念較難，並未在 N-1-5 進行，應在二年級完成（見 3.、4.、5. 說明）。學生應知道長度概念的數量表示，必須完整包含單位數和單位測量。如果不知道個別單位長，只知道測量得到的單位數，並無法做長度比較。
4. 在長度活動中理解長度大小的遞移關係（R-2-1）。重點是應從實際量感著手，以測量後的單位數來比較，只宜做為驗證。最後應知道，甲、乙兩物不（能）直接比較時，若甲比乙長，乙比丙長，則甲比丙長的遞移關係。
5. 在常用單位的單位換算教學之前，應先進行「單位換算」活動：以兩種個別單位測量物體。本活動應討論以下兩個重點：個別單位比較長，量出來的單位數反而必較少；如何根據不同個別單位的關係，做單位數的換算。
6. 認識「1 公尺＝100 公分」，並能處理相對應的單位換算（如「325 公分是 3 公尺 25 公分」、「3 公尺 25 公分是 325 公分」）與相應長度計算問題。
7. 結合長度活動與加減計算問題。學生應知道長度單位數的加減在長度情境中的意義。為了和三年級數線活動（N-3-11）連結，加減問題應包含與尺刻度有關的計算問題，數字可僅限於一把尺的數字範圍，但應清楚其意義。
8. 線段圖是源自長度問題而自然發展出來的（加減）解題思考工具，在本指標下的長度加減問題，均應呈現線段圖，一方面協助理解題意，同時也讓學生熟悉其使用，以作為協助其他解題和日後學習數線之用。

條目範圍

1. 因為本年度整數學習為三位數，因此單位換算公尺數限個位數。
2. 長度的加減問題與說明必須包含和數線加減可以連結之題材。
3. 量感和估測活動，應注意單位的合理性，不應以「公尺」量身高，也不應以「公分」量走廊長。
4. 二年級的估測比較接近量感活動，和「量」的經驗有關，絕非實測後再求近似值的概算活動。估測和學生成熟度有很大的關係，應以活動討論為主，著重經驗學習與應用，不宜過度評量。
5. 基本說明 5. 中的不同個別單位做單位數的換算，只處理一單位為另一單位倍數的情況，而且只處理大單位換成小單位的情況。

釋例

1. 長度常用單位的需求感活動。一年級已學會以「個別單位」測量長度。在二年級引入常用單位「公分」、「公尺」之前，宜先進行「**為什麼需要相同單位**的活動」：例如由學生自選個別單位，測量同一物件，進而從溝通需要，建立使用相同單位的需求感。

   例 1：老師的桌子有多高？用你的筆量量看。

   下面是四位小朋友量出來的紀錄：

(《部》第三冊第 42 頁)

   (1) 一樣的桌子為什麼會有不同的數值結果。透過討論，學生理解並能說明：「因為筆不一樣長，量得數量不相同」。

   (2) 也可討論筆的長度和所得數值之間的關係。筆越長，量得的數值越大還是越小。將例 1 的結果轉化成如「4 枝小可的筆和 6 枝小威的筆一樣長」，問「小可和小威誰的筆比較長？」

   (3) 也可將問題轉化成如果 1 枝小可的筆和 2 枝圓圓的筆一樣長，表中測得的數值是合理的嗎？

例 2：誰家的冰箱比較高？

(《部》第三冊第 43 頁)

以不同個別單位測量不同物品長度，從所得數值並無法判斷長短，必須用一樣長的個別單位才能從判斷，所以需要共同單位。

2. 常用單位「公分」。引入「公分」並進行其實測、估測，從實測、估測的經驗培養量感。公分和公尺宜分在不同學期教學，較易掌握的公分應先引入。

(1) 公分引入與直尺實測活動，請先閱讀 S-2-3。下例是簡單的點數活動。

(2) 公分的估測與量感。有實測經驗後，可以「先估再量」培養長度的量感。

例：估估看，紅色緞帶有多長？粉色紙帶有多長？再量量看。

估估看：大約 (　　) 公分　　大約 (　　) 公分

量量看 _____公分　　_____公分

(改自《部》第三冊第 45 頁)

- ●估自己身上較短長度的部分，例如指甲寬大約 1 公分、食指長、手掌寬、「一扳」(拇指與食指張開的寬度) 或是腳掌長、步長等。熟悉身體的長度單位，可以協助日後做較精確的長度估測。同理也可估測身邊常見的物件，未來也可協助估測。
- ●公分估測不做相對於公分太長的物件 (如教室長)。

3. 公分的計算應用。透過情境引入加減計算，並發展線段圖為解題鋪路。在本條目下的加減問題，最初均應呈現線段圖，讓學生熟悉這個有用的表徵。

(1) 在實測時，當需要兩次測量 (以上) 的情況，自然須使用長度加法。

例：用 15 公分尺量盒子的邊長，量完一次後，剩下的部分量出來是 7 公分，邊長有多長？

（《部》第三冊第 49 頁）

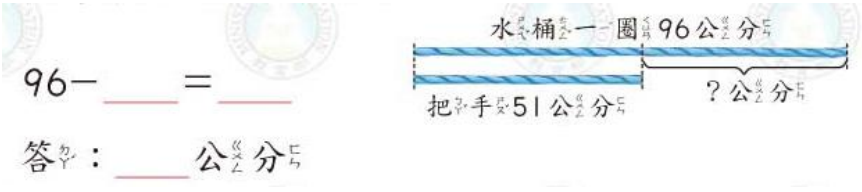
(2) 長度比較的情境要使用長度減法。

例：紅繩長 13 公分，藍繩長 9 公分，紅繩比藍繩長多少公分？

（《部》第三冊第 49 頁）

(3) 其他長度加減計算情境。

例：水桶一圈 96 公分，水桶把手 51 公分，水桶一圈比把手長多少公分？



（《部》第三冊第 50 頁）

(4) 本問題的重點是要確定學生知道彎曲部分要拉直。

例 1：小永和小軒合作量桌子，小永從左邊量了 35 公分，小軒從右邊量了 27 公分，桌子有多長呢？

例 2：紅繩長 45 公分，紅繩比藍繩短 15 公分，藍繩長多少公分？

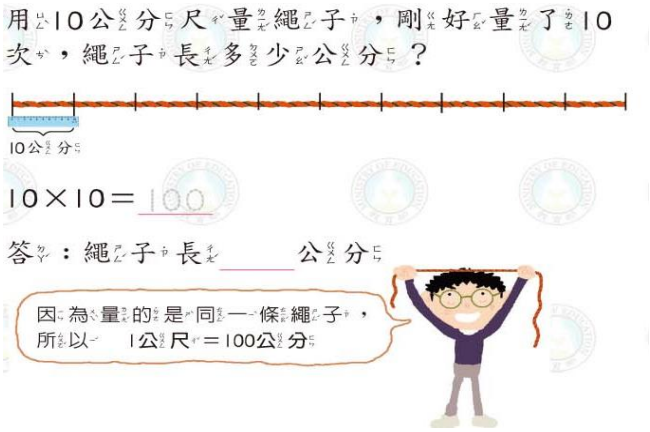
（《部》第三冊第 51 頁）

4. 常用單位「公尺」:

(1) 公尺的引入常使用 1 公尺直尺，直尺在 1 公尺處標示有 1 公尺和 100 公分。

(《部》第四冊第 63 頁)

(2) 公尺和公分的關係：1 公尺=100 公分：



(《部》第四冊第 63 頁)

(3) 公尺的實測。公尺實測工具是 1 公尺直尺。學生應先熟悉公分直尺的使用 (S-2-3)。實測活動可測量教室的長寬、黑板、布告欄、身高、門高等，學生應熟悉公尺和公分同時出現的記法如身高 1 公尺 28 公分。另外，彎曲物件如腰圍、水桶握把長的長度可用捲尺測量。

(4) 長度的估測與量感：

例 1：

(《部》第四冊第 64 頁)

先聚焦在 1 公尺的量感，和身體部位結合，以利後續估測。

例 2：回答下列問題：

估估看，教室大約有幾公尺寬？＿＿＿公尺。

量量看，教室大約有幾公尺？　＿＿＿公尺。

不做幾公尺幾公分的估測

例 3：教室有多長？你會用 1 公尺直尺來量，還是 15 公分直尺來量？

這支粉筆有多長？你會用 1 公尺直尺來量，還是 15 公分直尺來量？

估測時要選擇合理的單位。

例 4：圈出合理的答案：

走廊長　（50 公分　50 公尺）

鉛筆長　（20 公分　20 公尺）

手指長　（5 公分　5 公尺）

5. 單位換算。二年級單位換算不用「乘以 100」或「除以 100」換算。

例 1：黑板的長邊是 4 公尺 50 公分，黑板有幾公分長？

（《部》第四冊第 66 頁）

例 2：教室寬 850 公分，教室寬幾公尺幾公分？

800 公分是 8 公尺，所以 850 公分是 8 公尺 50 公分。

6. 公尺的計算應用，含加法、減法、乘法。建議先不討論複合單位計算。

例 1：腳踏車長 2 公尺，貨櫃車長 12 公尺，兩輛車相差多少公尺？

例 2：1 輛腳踏車長 2 公尺，4 輛一樣的腳踏車排成一直線和貨車一樣長，貨車長多少公尺？

（《部》第四冊第 69 頁）

7. 長度大小的遞移關係。

二年級先透過圖示處理如「甲＞乙、乙＞丙」或「甲＜乙、乙＜丙」的問題，先從直接比較確定第遞移關係的正確性。再運用於無圖示的推理問題。

例：

(《部》第四冊第 67 頁)

雖然學生可從圖示看見駱駝比綿羊高。但教師可以引導將兩圖發生的地點獲時間分開。強迫學生思考並確認透過斑馬來比較的正確性。

錯誤類型

1. 學生會忽略使用的是不同個別單位，直接以測得的數值比較長度。
2. 回答長度問題時，答案只報數值，沒有「公分」或「公尺」的單位。
3. 用尺錯誤類型見 S-2-3。

評量

1. 評量重點：
   (1) 知道用不同長度的個別單位測量同一物品，量的數值會不同，且個別單位比較長的量出的數值較少，反之亦然。
   (2) 能使用「公分」、「公尺」進行實測與估測，並從活動中培養量感。
   (3) 能做長度的加法、減法和乘法計算（單位公分或公尺，不做複合單位的計算），解決生活中長度的問題。
   (4) 能做「公分」、「公尺」的單位換算。
2. 注意事項：
   (1) 估測和量感的培養以活動和討論為主，不宜做紙筆評量。
   (2) 長度常用單位的解題，評量時答案要包含單位。

N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。 **備註：**雖然重量部分的教學主要使用天平，但學生仍須實際體驗重量的量感。本條目教學無常用單位（N-3-14、N-3-15、N-3-16）。	n-I-8

先備：N-1-5。

連結：R-2-1。

後續：N-3-14、N-3-15、N-3-16。

基本說明

1. 如同 N-1-5，這是認識容量、重量、面積這些量的第一次學習活動，應以操作活動為主，並包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位），也可包含比較遞移關係。不同的量應分在不同單元學習。
2. 除了長度之外，容量是小學中較早學習、較易處理又與數學教學（分數和小數）有關的量。容器的容量原來是體積或容積的概念，可透過容器裝滿的液量來認識其容量，後來延伸成也用容量稱呼容器中（未裝滿）的液量。在容量初步認識中，如何用個別單位（如小杯）來度量容器中的液量是最關鍵的步驟，教師應清楚教學，也可以此化解容量教學中常見的等量異形問題。總之，容量概念本身並不簡單，要讓教學順暢，必須妥善安排教學順序和教具使用，讓學生熟悉如何測量容量，才能讓學生從使用中更理解其意義。
3. 重量是日常生活的常用量，但和與視覺有關的幾何量不同。重量教學必須結合體感和測量工具（本年度只需要天平），進行相關的量感與比較活動。由於體感較主觀，誤差也較大。重量教學相當依賴恰當的測量工具。直接比較活動可用手（單手測量兩次）先主觀經驗輕重的差別，並建立重量相等和天平水平的連結（也可透過直覺的對稱性），再以天平進行重量的間接比較和個別單位活動。
4. 面積是幾何量，可以用視覺做比較。但因為面的形狀變化很多，進行本條目面積初步認識時，應把握底下原則：所有直接比較都只處理一圖形包含於另一圖形的情形（亦即本年度不處理直接分割被比較區域的活動）。但是本年度仍要進行以個別單位來比較兩無法直接比較區域的活動。

條目範圍

1. 重量教學不能只使用天平，學生仍須充分體驗重量的體感。不過運用體感比較時，兩物的重量不宜過近。
2. 面積個別單位應只處理最簡單而基本的情況：正方形或長方形。
3. 本年度不介紹容量、重量、面積的常用單位。（N-3-14、N-3-15、N-3-16）

釋例

1. 容量的初步認識、特性與比較。

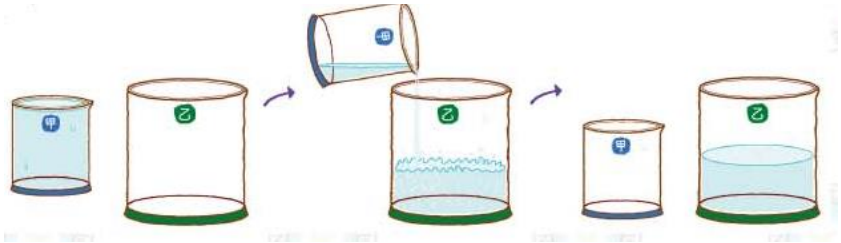
(1) 容器的容量是指這個容器所能容納的量，例如把一個杯子裝滿水，所裝入的水量，就是這個杯子的容量。換句話說，容量是和體積、容積類似的視覺量，有時並不容易做直接比較。

例 1：誰的容量比較大？

(《部》第四冊第 98 頁)

(2) 由於容器形狀形形色色，有時很難進行視覺直接比較。這時可透過把容器甲裝滿水，將水倒入另一容器乙。若剛好倒滿，則甲乙容量相等；若乙還有空間，則乙的容量比甲大；否則乙的容量比甲小。

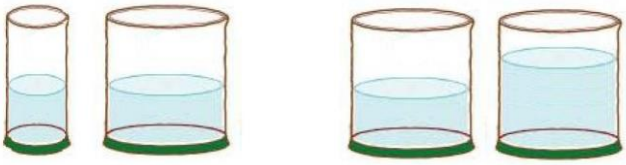
例 2：誰的容量比較大？



這是直接比較還是間接比較呢？如果將液量等同容器甲的容量，這是直接比較。但如果將水的液量視為一種「容量」，則容器甲、乙的容量，是透過水的容量來比較，這就是間接比較。

(3) 於是除了容器的容量，我們也常將容器中（未裝滿）的液體量視為容量，這個概念甚至比容器容量的原來概念更常用。

例：誰的容量比較大？

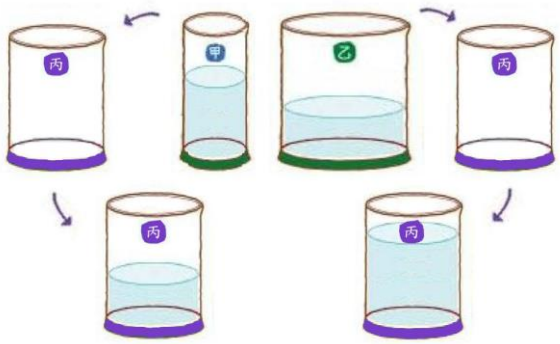


左圖兩容器中的液體高度相同，但底面積不相等，從視覺可以判斷右側的液體容量較大。右圖兩容器中的液體底面積相等，但高度不同，，從視覺可以判斷右側的液體容量較大。這是新容量定義下，容器中液體容量的直接比較。

2. 容量的間接比較與個別單位比較。

(1) 容量的間接比較比較傳統的作法，是將甲、乙兩容器中（未裝滿）的液體，倒到第三個容器丙中，在丙中做比較。

例 1：誰的容量比較大？



(2) 容量的個別單位比較：建立長度的個別單位測量，可以用數的大小來比較物體的長短，建立了數和量的密切關係。容量的個別單位重點也相同，將兩容器（未裝滿）的水分別倒入「同一」個別單位，測得倒的次數，因此也可用數的比較來比較容量的大小。

例 2：紫色水壺的容量比黃色水壺多多少？倒在同樣的杯子中，比比看。

（《部》第四冊第 100 頁）

上例也可以反過來，改用杯子裝滿水，倒入水壺中，以裝滿水壺的杯數比較容量。

3. 重量的初步認識與直接比較。

(1) 重量是物體受力的大小，可利用拿拿看、掂掂看，感受物品的重量。重量不是視覺量，無法用幾何大小來比較重量，甚至還造成誤導（如氣球和鉛球）。因此除了體感與經驗之外，重量的學習相當依賴測量工具的使用。：

例：老鼠和獅子哪一個比較重？（用經驗推測）

（《部》第四冊第 94 頁）

(2) 重量的直接比較只能訴諸體感，可用同一手拿兩物品比較，或用兩手各拿一物來比較。但除非兩物重量差別極大，這種比較方式相當粗略。

例：氣球和排球哪一個比較輕？

（《部》第四冊第 94 頁）

(3) 初學重量，最常用的工具是「天平」來比較重量。若天平呈水平表示兩物等重，否則下垂的一方較重。由於教具靈敏度。

例：比較重的畫△，比較輕的畫○

（《部》第四冊第 95 頁）

4. 重量的間接比較及個別單位比較。

(1) 重量的間接比較：三個物品的重量比較，可使用天平兩兩比較知道三個物品的重量關係：

例：用天平比比看 和 哪個比較重？

透過 比較重量，知道 比 重。

教師在這邊也可進行遞移關係的教學（R-2-1）。

(2) 重量的個別單位比較。在天平情境，個別單位相當於砝碼。

例：

(《部》第四冊第 96 頁)

5. 面積的初步認識與直接比較。

(1) 面積的初步認識：平面圖形的大小稱為面積，是可透過視覺感官比較大小的量。例如：紅色正方形的面積比藍色長方形的面積大（左圖）。

(2) 面積的直接比較：如上題情境，可以直接透過視覺感官比較面積的大小，也可以透過兩個平面圖形相互疊合，進行直接比較（右圖）。

例 1：

(《部》第三冊第 92 頁)

6. 面積的間接比較與個別單位比較。

(1) 當兩個平面圖形無法相互疊合進行直接比較時，可透過大小複製後進行間接比較。

例 1：上例布告欄之問題，若不移動物件直接疊合，也可以用複製的方法進行間接比較。例如複製圖畫面積(黃色部分)，再與海報或報紙進行疊合比較，可知面積比海報和報紙小。

(改編自《部》第三冊第 92 頁)

(2) 面積的個別單位比較，應只用正方形或長方形做個別單位。

例 1：用正方形紙卡拼排測量桌面面積大小。

例 2：用報紙拼排，測量某處如走廊面積的大小。

7. 在容量、重量、面積的間接比較活動時，也可以進行 R-2-1 的大小比較遞移關係比較。讓學生理解遞移關係不只出現在數，也出現在各種量的比較中。

錯誤類型

1. 重量的比較學生受視覺感官影響，以為較大物品較重，建議教師利用較大的氣球和小的球

（如棒球或網球），讓學生比較，修正錯誤觀念。

2. 一樣的水倒到不同形狀的容器高度不一樣時，學生可能認為水柱較高的水量較多。教師可以再將水倒回同一容器，確定水量一樣多。
3. 進行面積個別單位比較活動時，注意拼排的紙卡是否緊密連接或紙卡重疊。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能初步認識容量、重量和面積。
   (2) 能做容量、重量和面積的直接比較。
   (3) 能做容量、重量和面積的間接比較（含個別單位）。
2. 注意事項：
   (1) 二年級學生不能做靈敏度高的操作，因此任何量比較的教學或評量，都不應該挑量非常接近的物件比較。若要呈現量的相等，則必須容忍誤差。
   (2) 容量與重量的評量應以實作評量為主，否則必須等學生有足夠的操作經驗，理解比較的工具和方式後，才進行進行紙筆評量
   (3) 容量的直接比較應符合：一個容器能直接裝到另一容器中；或可以並置並能用視覺判斷比較。
   (4) 重量比較的紙筆評量不宜只給物品圖，而無測量工具或重量關係的圖示。
   (5) 面積直接比較的評量，不宜處理一圖形無法包含於另一圖形的情況。
   (6) 面積個別單位的評量，應只用正方形或長方形做個別單位。

N-2-13 鐘面的時刻：以操作活動為主。以鐘面時針與分針之位置認識「幾時幾分」。含兩整時時刻之間的整時點數（時間加減的前置經驗）。 **備註：**同時加強「五個一數」、「十個一數」。本活動不含秒針教學。整時的點數教學須配合鐘面進行。	n-I-9

先備：N-1-6。

連結：N-2-14。

後續：N-3-17。

基本說明

1. 以操作活動為主，由鐘面上的時針、分針之位置與刻度認識「幾時幾分」。「幾時」之報讀：認識「時針」；知道時針走一大格為 1 時，時針繞一整圈是 12 時。「幾分」之報讀：認識「分針」；知道分針走一小格是 1 分，走一大格是 5 分，分針繞一整圈是 60 分，並能用「5 個一數」或「10 個一數」協助「幾分」的點數。從分、時針的聯合轉動，知道時針除

整點外多半介於兩大格之間，並應知道「幾時」應以哪一格為準。知道接近下一整點時，時針和分針的位置如何變化。

2. 撥鐘教學，能讓學生體驗時間進行時分針和時針的位置變化 (如學生該知道「分針走一整圈，時針走一大格」、「分針走 30 分 (半圈)，時針走半個大格」)。因此至少老師所使用的教具鐘，其時針和分針的連動要有一定的準確度。
3. 教師應配合日常作息，進行上午幾時幾分與下午幾時幾分的教學。
4. 以配合鐘面點數方式，處理牽涉到兩整時時刻間的簡單「加減」問題 (詳見釋例 3.)，這是時間加減的前置經驗 (N-3-17)，重點在認識這些問題的情境與分析，而非列式計算。
5. 由於生活中常用到電子計時裝置，建議老師可以說明其意義，並與鐘面做對照連結 (若電子鐘為 24 小時制，老師可略加說明)。但這不是教學要點，也不需要做評量。

條目範圍

1. 點數鐘面時，可同步練習「五個一數」「十個一數」。
2. 完全不處理「秒針」。(N-3-17)
3. 「加減」問題不處理跨午問題。
4. 不論是時刻或時間量，在正式布題與時間單位上統一採用「時」、「分」。幾「點」、幾「小時」、幾「分鐘」這類用語可視為日常溝通用語。

釋例

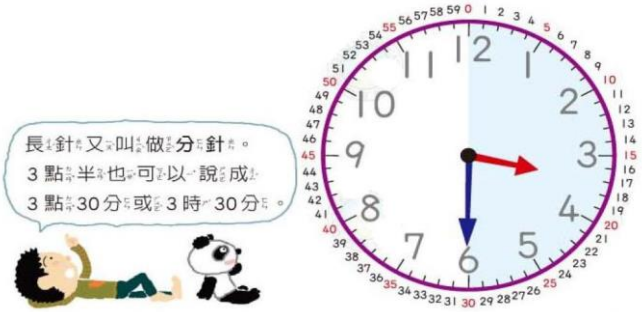
1. 繼一年級 N-1-6 簡單報讀「整點」與「半點」，二年級由鐘面時針、分針之位置 (刻度) 報讀幾時幾分。鐘面只有 1 到 12 的數字，而不是 1 到 60，有效率的報讀需要熟練的用「5 個一數」往上數。初學時，可只報讀 5 的倍數。

   一年級已介紹長針短針，此處透過鐘面報讀介紹時針 (即短針) 和分針。

   例 1：鐘面上的長針指向哪裡？短針指向哪裡？是幾時？

(《部》第三冊第 53 頁)

例 2：長針指向 6，短針指在 3 和 4 之間，是幾時幾分？



(《部》第三冊第 53 頁)

2. 進行撥鐘教學，課前教師需準備且確認有相對準確的教具鐘，以利撥鐘時學生的觀察。

例：撥撥看

(1) 從 1 時開始撥鐘到 2 時，分針轉了幾圈？經過幾小格？是幾分鐘？

(2) 從 2 時開始撥鐘到 3 時，分針轉了幾圈？經過幾小格？是幾分鐘？

(3) 從 3 時開始撥鐘到 5 時，分針轉了幾圈？代表過了幾小時？

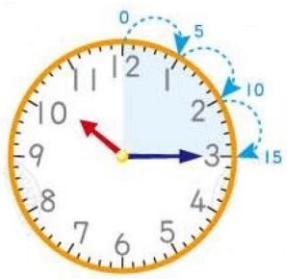
(4) 從 5 時撥回 4 時，分針轉了幾圈？代表轉回了幾小時？

(5) 從 6 時慢慢撥鐘，分針在鐘面每個數字時是 6 時幾分？每大格數字之間是幾分鐘？

- 撥鐘時要提醒學生理解如 4 時 1 分至 4 時 59 分，鐘面的時針從 4 旋轉至 5，但不會超過 5，避免學生誤將 4 時 59 分報讀成 5 時 59 分。
- 4 點 59 分再撥轉 1 分鐘是 4 點 60 分，教師可以說「滿 60 分了，變成 5 時」，並讓學生確認鐘面的確是 5 時，教師告知通常不說 4 點 60 分。

3. 報讀幾時幾分。

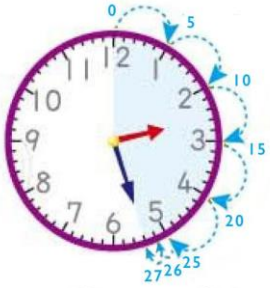
例 1：下面鐘面是幾時幾分？用 5 個 1 數的方法數數看。



____時____分

5 時____分

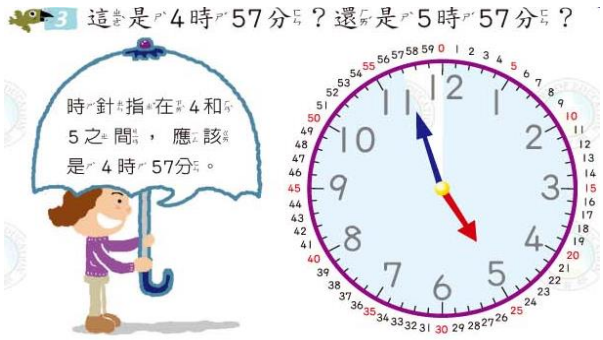
例 2：報讀下面鐘面是幾時幾分？



____時____分

3 時____分

例 3：



（《部》第三冊第 57 頁）

觀察時針位置，時針在 4 到 5 之間，分針未到 60，因此是是 4 點多。

例 4：圈圈看，並填上吃早餐的時間：

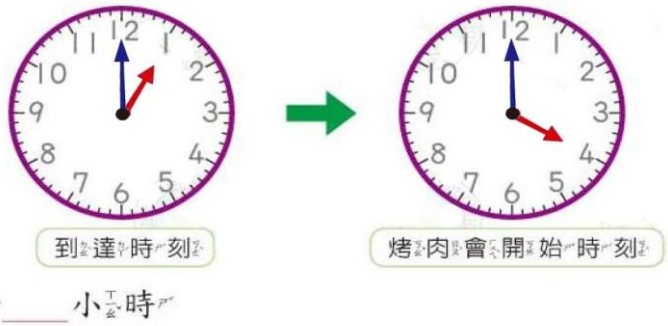
今天吃早餐的時間是（上午　下午）＿＿時＿＿分。

本年度使用 12 時制報讀「上午」或「下午」幾時幾分。

4. 以撥鐘或鐘面點數，解決簡單的「加減」類型問題。教學前確認學生有足夠的撥鐘經驗，才能做有意義的鐘面點數。限整時刻且不處理跨午問題。

(1) 處理兩時刻之間的時間量。

例：世林參加烤肉會，他下午 1 點提早到場，還要等多久活動才會開始？



(2) 處理時刻加減時間量類型的問題，但進行時用點數而不用加法。

例 1：下圖是小華到圖書館的時刻，再過 2 小時就回家，小華何時回家？

由 9 開始。經過 2 小時（唱數 10、11），是 11 時。

例 2：下圖是小華看完電影的時刻，電影全長 2 小時，電影何時開始播出？

由 3 開始，往回經過 2 小時（倒數唱數 2、1），是 1 時。

5. 電子鐘雖非教學重點，但因為常用，學生應學會報讀，並與鐘面連結。

例：下面兩個鐘各是幾時幾分？

_ _ 時 _ _ 分

_ _ 時 _ _ 分

錯誤類型

1. 混淆時針與分針的刻度意義，如時針與分針混淆。
2. 超過 45 分，幾「時」容易弄錯，如 2 時 55 分，學生錯誤報讀為 3 時 55 分。應加強學生撥鐘過時的經驗，並注意觀察時針位置的變化。
3. 點數時間弄錯，例如從 3 點到 5 點經過幾小時，點數「時」，從 3、4、5 回答有 3 小時，讓學生實際撥鐘，清楚理解題意以及錯誤的原因。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能以鐘面時針與分針之位置正確報讀「幾時幾分」。
   (2) 能以正確撥鐘或點數，解決簡單時間加減類型問題（限整時不跨越中午）。
2. 注意事項：
   (1) 操作評量使用撥鐘要注意分針應指在正確的時間位置，不應有在半分鐘的情形。
   (2) 解決時間簡單問題前要有足夠的撥鐘經驗，紙筆評量要有鐘面圖讓學生點數。

N-2-14 時間：「年」、「月」、「星期」、「日」。理解所列時間單位之關係與約定。 **備註：**本條目可包含簡單計算問題（如暑假的總天數）。不做時間間隔問題。可觀察月曆結構模式。可教「閏年」，但只談「四年一閏」。	n-I-9

先備：N-1-6。

連結：N-2-13。

基本說明

1. 為因應日常生活所需，本條目處理「日」以上的時間單位約定。由於這些單位關係比較複雜，宜清楚條列，分開教學與練習。
2. 以年曆和月曆認識「1 年有 12 個月」、「月份的日數約定」、「2 月有 28 天，閏年時有 29 天」、「1 星期有 7 天」。
3. 初學時，「年」、「月」、「星期」、「日」似乎有自然的起點和結束點（如「一年起於 1 月 1 日，終於 12 月 31 日」）。但應用時也常作為時間量的單位（如「從今年 7 月 7 日到明年 7 月 6 日共經過 1 年）。兩種用法都很常用，兩者教師都應教學，並敏感注意學生理解的狀況。
4. 可以年曆和月曆為工具，觀察或做簡單的計算問題，前者如「每月至少有 4 星期」（非除法問題），後者如「暑假的總天數」。

條目範圍

1. 處理簡單計算問題的原則：可假設學生知道從每月初的 1 日到該月 18 日是 18 日，除此之外均宜透過點數日曆來計算。不處理一般的時間間隔計算問題。
2. 可觀察簡單的月曆結構模式，如某一日期之下一週、上一週、前一日、後一日的日期 (假設在同一月中)。
3. 教「閏年」時，只談「四年一閏」的規則。由於常用，「1 年 365 天、閏年 366 天」可以告知學生，但不必點數。
4. 關於「大月」「小月」，由於純屬文化約定，和數學學習無關。雖然規定大月 31 天，其他為小月較簡潔。但將月分成大月、小月和閏月也有其特色。我們不做任何推薦。類似的還有一週的開始為週日或週一的問題。

釋例

1. 認識「年」、「月」、「1 年有 12 個月」及解決簡單月分計算問題。建議老師準備連續三年或四年的年曆，若連續三年或四年沒有閏年，應再增加閏年的年曆。

   (1) 透過年曆，認識「年」、「月」。

   例 1：今年是民國幾年？去年呢？明年呢？

   例 2：今年的第一個月是幾月？最後一個月是幾月？去年呢？明年呢？

   例 3：今年一共有幾個月？去年呢？明年呢？

   (2) 配合年曆，透過點數與簡單計算，解決月分計算問題。

   例 4：從 2 月開始練習跑步到 6 月，共練習幾個月？

   例 5：楊老師訂報從 9 月開始到隔年 1 月，共訂了幾個月的報紙？

   例 6：蓋一間房子預計要 1 年 3 個月。1 年 3 個月是幾個月?

   例 7：母象懷孕約需 22 個月會產下大象寶寶。22 個月是幾年幾月？

2. 認識每月的「日」數與平年、閏年：

   透過查閱年曆認識每個月的日數、日期、星期幾。

   例 1：拿出 107 年和 108 年的年曆查查看，填入每個月的日數。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
107年	31											
108年	31											

(1) 那幾個月是 30 天？　(2) 那幾個月是 31 天？

(3) 107 年的 2 月有幾天？108 年的 2 月分有幾天？

(《部》第四冊第 35 頁)

平年、閏年：平年時 2 月有 28 日，閏年時 2 月有 29 日，因此平年有 365 天，閏年有 366 天。

例 2：拿出年曆查查看：

(1) 今年的第一天是幾月幾日？明年第一天的日期和今年一樣嗎？

(2) 今年最後一天是幾月幾日？明年最後一天的日期和今年一樣嗎？

(3) 今年的中秋節是幾月幾日星期幾？

(4) 你的生日是幾月幾日？今年生日是星期幾？明年生日是星期幾？

3. 與星期有關的問題。

(1)「1 星期有 7 日」是人為約定的週期，由星期日到星期六，從星期六到星期五，或從某一天開始連續七天，都可說是 1 星期。

例：暑假期間，銘義、華維、立光都規劃了一星期的旅遊：

107 年 7 月

日	一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

A. 銘義家從 7 月 8 日到 7 月 14 日去澎湖旅遊，一共有幾日？

B. 華維家從 7 月 14 日出發，旅遊 7 天，會在幾月幾日結束旅遊？

C. 立光家旅遊一星期，從 7 月 10 日結束，他們在幾月幾日出發？

(2) 一個月有幾個星期又幾日（翻閱年曆，了解每個月有四個星期又幾天）

例 1：108 年 4 月有幾個星期又幾日?108 年 10 月有幾個星期又幾日?

例 2：拿出年曆數數看，每個月是不是有 4 個星期又幾天？

有些學生可能以為一星期一定從星期日到星期六，教師須提醒學生連續 7 日就是 1 星期。

(3) 星期幾的問題。

例 1：林叔叔要上 1 星期的游泳課，這星期三第一次上課，下星期幾結束？

例 2：曉琳要連續練習 2 星期書法，從上星期四開始，下星期幾結束？

4. 用月曆點數或計算天數。

例 1：拿出日曆，資訊展從 6 月 8 日開始展覽到 6 月 17 日，共展覽了幾天？

例 2：慈玟全家旅遊，從 1 月 27 日到 2 月 3 日停送羊奶，羊奶一共停送幾天？

107 年 1 月

日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

107 年 2 月

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28			

例 3：阿姨生產住院 6 天，11 月 1 日出院，阿姨幾月幾日住院生產？

107 年 10 月

日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

107 年 11 月

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

簡單計算，最多可包含兩個月，不宜超過。

例 4：暑假從 7 月 1 日開始到 8 月 29 日結束，用月曆數數看或算算看暑假共有多少天？

5. 月曆的結構

例：奶奶生日是 8 月 19 日星期一。運用月曆回答下列問題：

108 年 8 月

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

(1) 奶奶生日前一個星期一預訂了蛋糕，預訂蛋糕是哪一天？

(2) 奶奶的朋友從國外寄的生日卡，在生日的下個星期一才寄到，收到生日卡的日期是哪一天？

(3) 奶奶生日前一天，曉華做生日禮物，做生日禮物是幾月幾日星期幾？

(4) 曉華在奶奶生日後 1 天完成暑假作業，完成日期是幾月幾日星期幾？

學生熟悉月曆後，可問學生「8 月 17 日是星期六，不看月曆你知道上個星期六是幾月幾日？下個星期六是幾月幾日？」

錯誤類型

1. 用月曆計算日數，學生自行列式常列錯算式，例如：「從 6 月 8 日到 6 月 17 日，共有幾日？」學生常列成 $17-8=9$（應為 10 日），本年度只要求點數。
2. 一個月有幾個星期？是指有幾輪完整的連續 7 日，而非月曆上有幾個橫排。教師先強調一星期是指連續 7 日，並用月曆展示其意義。
3. 學生常誤認這星期五到下星期五是 1 星期或 7 日，讓學生在月曆上點數理解。

評量

1. 評量重點：
   (1) 透過年曆認識 1 年有 12 個月、平年 2 月有 28 天，閏年時有 29 天。
   (2) 能藉由年曆和月曆，用點數或計算解決和月、星期、日有關的生活問題。
2. 注意事項：
   (1) 評量簡單生活計算問題時，應提供相關的月曆或年曆，讓學生能以點數方式解題，教師不需要求列出算式。
   (2) 國小不引入閏年與平年的判斷方法，因此不需評量。
   (3) 雖透過月曆點數知道 1 個月有 4 個星期又幾天，但學生尚未學習除法，不宜過度評量這類問題，若要評量必須提供月曆。
   (4) 瞭解月曆的結構可參考釋例(5)的例題，不宜過度評量。

S-2-1 物體之幾何特徵：以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體（包含平面圖形與立體形體），並連結幾何概念（如長、短、大、小等）。 **備註：**本條目之活動以實際物體為主。幾何特徵指非嚴格定義的頂點、角、邊、面、周界、內外。	s-I-1

先備：S-1-2。

連結：S-2-2。

基本說明

1. 本條目以操作活動為主。讓學生從身邊的實際物體著手，辨認其幾何特徵，並做描述與討論。教師準備的實際物體應有較明顯的特色，讓學生可以察覺其幾何特徵。幾何特徵包括非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外。
2. 藉由對實際物體觀察、辨認、察覺其中的幾何要素，如角、邊、面，進行對簡單幾何形體

（包含平面圖形與立體形體）的歸納與認識，也可與（長度之）長、短；（面積之）大、小等幾何概念連結。

3. 原則上，本條目的進行應在 S-2-2 之前。本條目著重對實際物體的觀察與察覺，S-2-2 則針對明確的幾何形體進行活動。

條目範圍

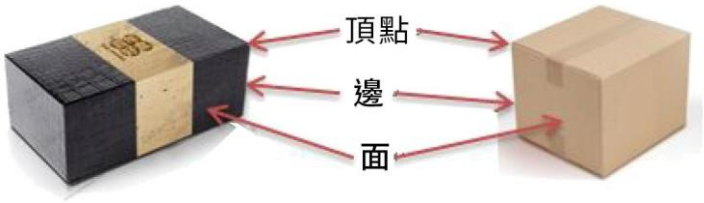
1. 本條目之活動應以教師所準備的常見實際物體為主。
2. 針對待察覺的幾何特徵，教師應給予學生探索、察覺與溝通的機會，徐徐引導，不急著下結論。
3. S-2-2 與 S-2-3 不見得要區分成不同單元，立體與平面形體也不見得要合在一單元中。教師應斟酌自己課程安排的邏輯。

釋例

1. 建議教師多安排感官操作活動，讓學生透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動，協助學童察覺身邊物體的幾何特徵，包括非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外，並能以非嚴格定義的語言加以描述與討論。

(1) 認識日常生活與身邊常見的形體的頂點、邊、面。

●辨認立體形體的頂點、邊、面。



●辨認常見立體形體的內外。

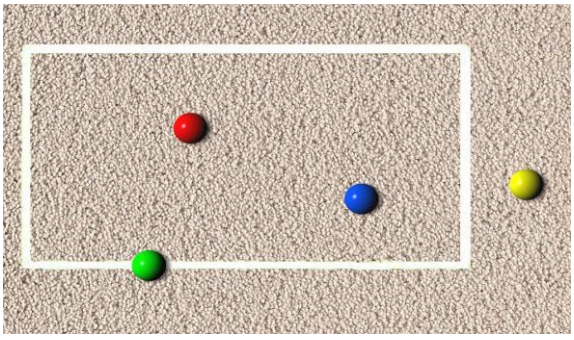
左圖鉛筆在盒內，橡皮擦在盒子外。右圖烤雞在烤箱內，餅乾在烤箱外。

●用非嚴格的語言描述常見立體形體的頂點、邊、面，如「物體尖尖的角角」、「平平的面轉彎的地方」、「物體摸起來平平的地方」。

(2) 辨認平面圖形的的邊、角、周界、內外。

●平面圖形的邊與角：

●平面圖形的周界與內外：



藍球和紅球在長方形周界內，黃球在周界外，綠球在周界上。

(3) 用非嚴格的語言描述常見平面圖形的頂點、角、邊、周界、內外，例如：「圖形上尖尖的點」、「圖形左上方的角落」、「圖形的邊邊」、「邊邊圍起來的範圍」、「柵欄圍起來的地方」、「圖形邊邊圍起來的外面」等等。注意：學生在這時候言語分不清楚頂點與角是正常的。

2. 可以在活動中，直接比較不同形體的邊的長短或面的大小。重點是概念的連結，而不是測量與數量。

錯誤類型

由於是在活動中初步認識幾何的概念，嚴格來說，沒有典型的錯誤。教師反而要小心不要太過嚴格。

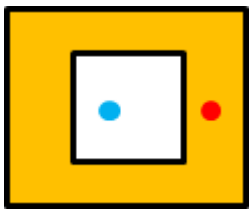
評量

1. 評量重點

在操作活動中辨認日常身邊形體的特徵：非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外。本條目僅作操作評量。

2. 注意事項

評量內外概念時，應迴避複雜而容易引起誤解的圖形，如「環」狀圖形或螺旋狀圖形。



S-2-2 簡單幾何形體：以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。 **備註：**可做溝通使用之命名教學，但勿發展為嚴格定義之學習（S-4-7、S-4-8）。可配合資料分類與呈現之教學（D-2-1）。	s-I-1

先備：S-1-2。

連結：S-2-1、S-2-3、D-2-1。

後續：S-3-1、S-3-2、S-3-4。

基本說明

1. 本條目以操作活動為主。由教師提供各種標準平面圖形與立體形體教具（想成 S-2-1 實際形體的理想化），由學生進行探索、辨認，並描述學生在意的幾何特徵。可與 D-2-1 部分結合，進行分類活動。亦可考慮與 S-2-4 合併進行。另建議平面圖形可早於立體形體並分開進行。
2. 教師可開始約定常用詞「頂點」、「角」、「邊」、「面」，以利教學溝通。但並非嚴格定義，尤其是角。另外本條目雖然會用到許多標準平面圖形和立體形體，但目的不在定義這些形體，即使使用常用名稱，其重點也僅止於溝通，以利學生探索並描述特定圖形的特殊性質。
3. 平面圖形可發現的特徵包括：「頂點數」、「邊數」（如「三邊」形、四邊形）、「邊長特徵」（如三邊一樣長）、「對稱特徵」（有些轉動或翻轉會跟原來一樣，但有些不行）等等。因此教具可準備各種三角形（如正三角形、等腰三角形、直角三角形、一般三角形）、四邊形（正方形、長方形、菱形、箏形、平行四邊形、一般四邊形）、六邊形（正六邊形），並有各種大小。也可觀察圓和以上圖形的差異。
4. 立體形體可發現的特徵包括，「頂點數」、「邊數」、「面數」、「面的特徵」（各面看起來是不是一樣，哪些面一樣）、「邊長特徵」（邊是不是一樣長）等等。教具可準備常見之正方體、長方體（含某對面為正方形之長方體）、角錐、角柱，並有各種大小。也可觀察球、圓柱和以上形體的差異。

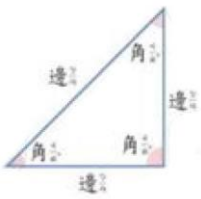
條目範圍

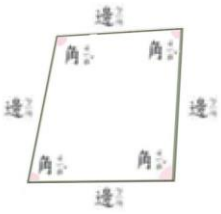
1. 本條目可和 S-2-3、D-2-1 整合教學，並配合 D-2-1 中分類的深入討論。
2. 不強調「平行」「垂直」這類更深的幾何概念。若學生察覺，可請他說明。
3. 切勿將圓、球、圓柱放入不恰當的活動中，徒增教學困擾。
4. 在活動中，教師可鼓勵學生歸納查覺到的形體之構成要素或性質，但不需要強調該性質是否能刻畫或定義這些圖形，也不需要做進一步的推理。
5. 本條目是學生首次接觸標準形體，圖形名稱只要足以協助教學現場溝通即可，不一定要是正式名稱，就算使用正式名稱，也請揀選容易理解的名稱即可。教科書或教師不宜將課程發展成命名教學單元。

釋例

1. 可做連結 S-2-1 與 S-2-2 的活動，以此認識常見形體。
   例：師生共同準備盒子、罐子、球、水果、漏斗、甜筒等實物。讓學生指認像圓錐、球、長方體、正方體、圓柱等的東西。
2. 透過觀察與操作，發現平面圖形的特徵，包括：「頂點的數目」、「邊的數目」(「三邊」形、四邊形)、「邊長的特徵」、「對稱的特徵」等等。
   (1) 平面圖形有幾個頂點？幾個邊？幾個角？

   例 1：三角形有 3 個頂點、3 個邊和 3 個角。(左下圖)

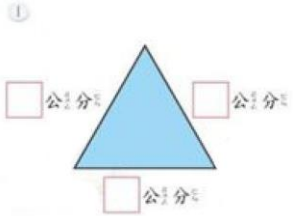


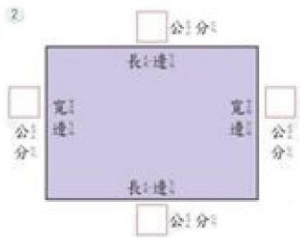


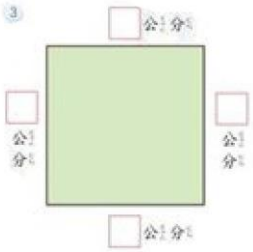
   例 2：四邊形有 4 個頂點、4 個邊和 4 個角。(右上圖)

   (2) 平面形體邊長的特徵

   例：正三角形 3 個邊一樣長、正方形 4 個邊一樣長。

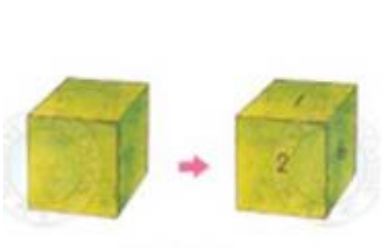


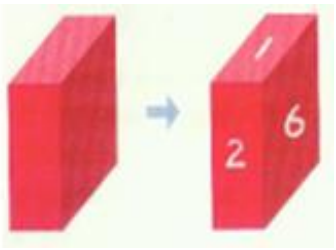




3. 透過觀察與操作，發現立體形體的特徵，包括：「頂點的數目」、「邊的數目」、「面的數目」、「邊長的特徵」、「對稱的特徵」等等。
   (1) 點數立體形體的面數。

例：正方體（或長方體）有幾個面？（寫上數字）數數看。





(2) 點數立體形體有幾個邊。

例：正方體（或長方體）有幾個邊？（寫上數字）數數看。(下左圖)

(3) 比較立體形體的面，形狀大小一樣大嗎？

例：描下正方體的一個面，和其他面比比看，大小一樣大嗎？（下中圖）

(4) 比較立體形體的邊，長度一樣嗎？（上右圖）

例：把正方體的一個邊描下來，和其他的邊比比看，長度一樣嗎？

4. 可和 D-2-1 結合進行分類活動。

(1) 教師可以提示「哪些圖形有 3 個邊？」「哪些形體有 6 個面？」等等。

(2) 雖然可以進行「兩條邊一樣長的圖形有哪些?」「三條邊一樣長的圖形有哪些?」的活動，但不適合作為分類的依據，尤其不宜問混淆二年級學生認知的問題，如「正三角形是不是等腰三角形？」「正方形是不是長方形？」等。

(3) 可以在活動中，問「(平面)圖形的頂點數和邊數是不是一樣多？」

錯誤類型

1. 學生可能認為沒有擺正的圖形如成正方形或正三角形，就不是正方形或正三角形。教師要加強溝通，把圖形拿在手中轉動，強調這是同一個圖形。
2. 學生點數立體形體的面數或邊數時，由於缺乏點數技巧，常造成重複點數或漏數(答案可能正確！)，教師可指導用著色、標記、標數字等方式正確點數。
3. 把立體形體中兩面共享的邊，數成 2 個邊(如正方體，有 6 個正方形面，每面 4 個邊，因而誤算正方體有 24 個邊。)教師可展示模型強調共享的邊只能算 1 次。

4. 進行立體圖形活動時，應避免提到「角」，學生可能混淆頂點、面上的角，甚至立體形體的尖角。

評量

1. 評量重點：
   (1) 活動評量：學生是否能掌握基本幾何形體的特徵如頂點、邊、面。
   (2) 活動評量：能正確點數「頂點數」「邊數」「面數」。
2. 注意事項：
   (1) 本條目以活動為主，學生還在建立幾何概念，應已溝通和釐清錯誤為主。
   (2) 紙筆評量宜以容易正確呈現的平面圖形為主。

S-2-3 直尺操作：測量長度。報讀公分數。指定長度之線段作圖。 **備註：**由此開始建立學習與使用測量工具的良好習慣。測量都會有誤差，教師教學和評量時應注意區分誤差和錯誤的差別。	n-I-7

先備：N-1-5。

連結：N-2-11、S-2-4。

後續：N-3-10、N-3-11、N-3-12。

基本說明

1. 直尺是學生學習的第一個測量工具，其刻度的報讀與標記的熟悉，有助於學生舉一反三學習其他量（如容量、重量、角度、時間）的測量工具。本條目雖強調 15 公分的直尺，但學生應能類推至其他較長的尺。
2. 本條目旨在強調正確運用測量工具量出長度的重要性。使用標準直尺（15 公分尺），先對齊 0 與欲測（直）線狀物之一端，將尺對齊線狀物，再正確讀出另一端的刻度，得到線狀物的長度。
3. 能用直尺畫出直線，包括畫出指定長度之線段。由於學童手部肌肉可能尚未發展成熟，教師不宜過度評量。
4. 給定兩點，讓學童畫出以此兩點為端點的線段，再測量線段的長度，得到兩點間的距離。學生剛開始未必會特意對齊刻度與兩點，但最後應教導學生直接利用直尺讀出兩點的距離（一點對齊刻度 0）。以上活動可讓學生體會兩點決定一直線的意義，但不必歸納成結論。本活動限 15 公分內。
5. 教師應討論下列兩常見長度測量問題：(a) 斷尺時（尤其指無刻度 0 的情況），如何測量長度；(b) 被測線段長度超過直尺長度時應如何測量。
6. 實際測量一定會發生誤差，教師教導學生使用「大概」或「大約」幾公分的描述方式。另

一方面，評量時教師應小心區分誤差和錯誤的差別，回到學生錯誤的原點，協助克服其問題。

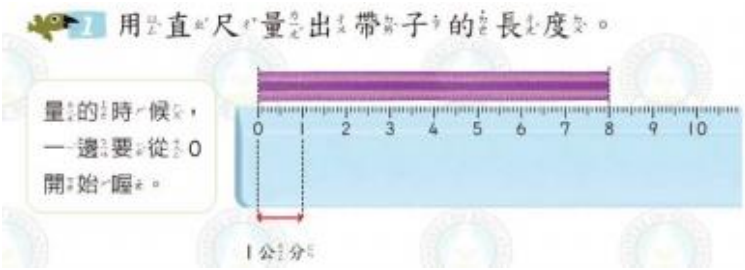
條目範圍

1. 初期測量活動布題 (例如畫出指定長度之線段)，長度應小於直尺長度 15 公分。後期測量較長線段時，建議測量次數不超過兩次，即長度小於 30 公分。
2. 學生應建立使用數學工具的良好習慣，不然容易出現某些常見錯誤。(參考錯誤類型 1. 2.)。
3. 「兩點距離」是常用口語，教師不必強調嚴格定義與性質，藉由操作讓學生自然習得即可。

釋例

1. 能正確使用標準 15 公分直尺，量出欲測線狀物的長度 (基本說明 2.) 。

例 1：



(《部》第三冊第 44 頁)

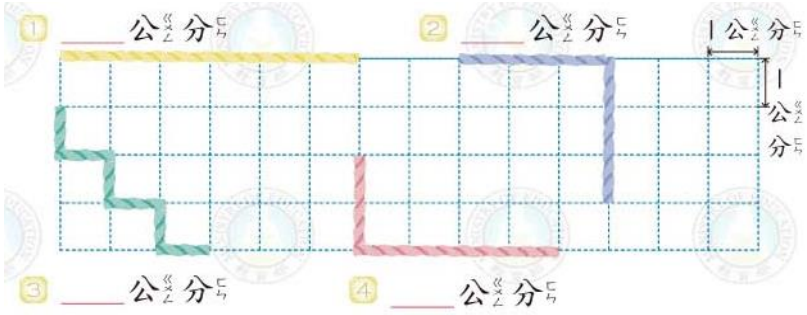
先對齊 0 與直線物的一端，將尺對齊直線物，再讀出另一端的刻度，因此帶子的長度是 8 公分，表示帶子的長度是 8 個 1 公分。

(1) 測量長度的回答需完長包含「單位數」8 和「單位」公分。

(2) 初期實測物件應比直尺短且盡量為整公分。(較長物件見後)

(3) 若物件不是整公分時，可用「大約 8 公分」、「接近 8 公分」、「長度在 7 公分和 8 公分中間」等方式來描述。

例 2：各種顏色的繩子有多長？填填看。



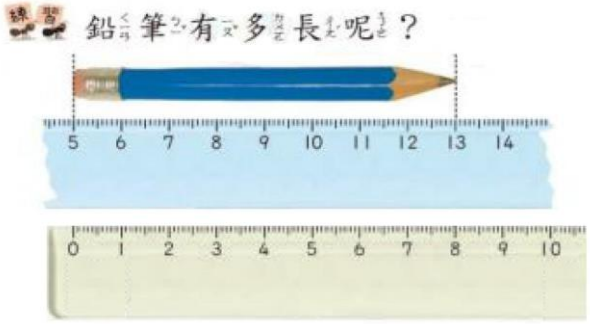
(《部》第三冊第 45 頁)

2. 給定兩點，讓學童先畫出通過兩點的線段，再測量其線段長度，得到兩點的距離。

(《部》第三冊第 46 頁)

3. 使用斷尺時（無刻度 0），測量欲測直線物的長度。

例：鉛筆一端對齊斷尺的刻度 5，另一端對齊斷尺的刻度 13，從刻度 5 到刻度 13 是多少公分？



(《部》第三冊第 50 頁)

可先用點數：指點刻度 5 到刻度 6，唱數 1；再指點刻度 6 到刻度 7，唱數 2；以此類推。最後指導學生能用減法算式：$13 - 5 = 8$。

4. 欲測直線物的長度超過直尺長度時，如何測量其長度。

第一步：學生以 0 對齊一端，在 15 公分處作暫時記號。

第二步：移動尺，讓 0 對齊所做記號，測量剩下的部分為 5 公分，因此總長度為 15 + 5 = 20 公分。

5. 畫指定長度的線段。

例：「畫出 12 公分的直線」。

學生先畫一點，以直尺刻度 0 對準此點，再沿直尺畫出 12 公分的線段。若學生先畫出較長直線，再用測量方式確定 12 公分長線段，並擦掉多出部分，也是正確的。若有多餘時間，也可以探討「畫出 20 公分線段」(線段的長度超過直尺長度) 的作法。

錯誤類型

1. 在未對齊 0 或斷尺時，學生可能誤以報讀的數字為長度。
2. 在斷尺的情況，例如由刻度 3 到 7，學生可能點數刻度：3、4、5、6、7，唱數 1、2、3、4、5，誤以為長度為 5 公分。

評量

1. 評量重點：

(1) 能用直尺畫出直線，包括畫出指定長度之線段。

(2) 給定兩點，能用直尺測量兩點距離。

(3) 能在非對齊刻度 0 時（如斷尺），測量長度。

(4) 能測量超過 15 公分線狀物的長度。

2. 注意事項：

(1) 評量直尺作圖時，由於學童肌肉尚未發展成熟， 教師不宜過度評量。

(2) 測量與報讀長度公分數時，應以整公分長度為宜。

(3) 欲測量線段長度宜小於 30 公分。

S-2-4 平面圖形的邊長：以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。 **備註：**周長計算為簡單加法連加，不受限於兩步驟加法的限制。本條目強調操作與簡單計算，但不處理公式。	n-I-7

連結：N-2-11、S-2-2、S-2-3。

後續：S-3-2。

基本說明

1. 本條目以操作活動與直尺實測為主，運用 S-2-3 所學，測量平面圖形的邊長，也可進行相應的周長計算。
2. 認識特殊幾何圖形的邊長關係。例如正三角形三邊等長 (即使三角形未命名，仍可進行此活動)，等腰三角形兩腰等長，正方形四邊等長，長方形對邊等長等等。當然「對邊」、「等腰三角形」、「腰」這些詞不見得出現在教學現場。教師若要使用這些專詞，應予以充分之引導與說明。
3. 介紹簡單幾何圖形的內部、外部、周長，並測量簡單幾何圖形的周長。知道正三角形周長是邊長的 3 倍，正方形的周長是邊長的 4 倍，也會計算例如長方形的周長。因此，本條目教學應放在學生比較熟悉十十乘法之後。

條目範圍

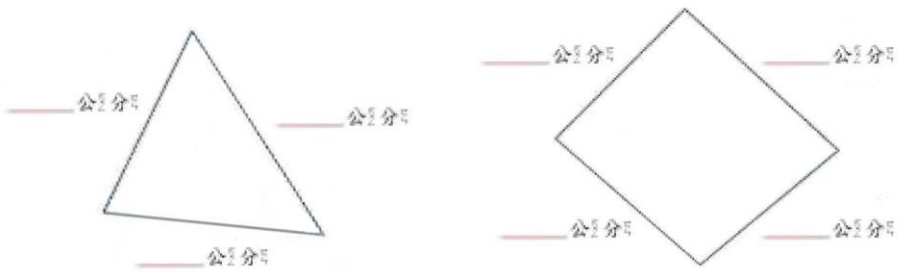
1. 周長計算是簡單加法連加，不受限於兩步驟加法的限制 (N-2-8)。
2. 基本上以操作活動為主，發現幾何性質，並做簡單計算。不強調邊長性質是否能刻畫所測的平面圖形，也不強調公式。

釋例

1. 測量平面圖形的邊長。

   運用 S-2-3 所學測量平面圖形的邊長

   例 1：量一量，下列圖形每一邊有多長。

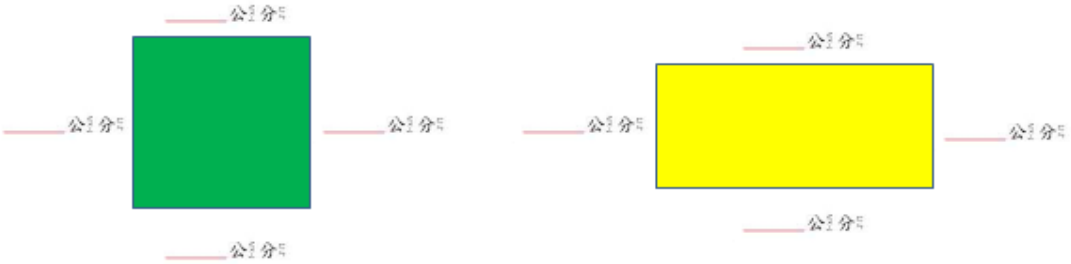


2. 認識特殊幾何圖形的邊長關係

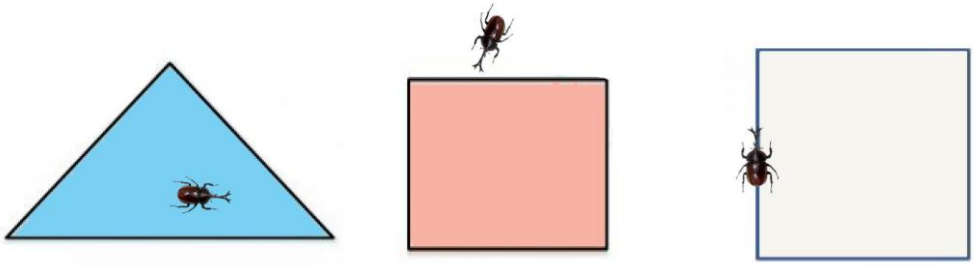
   透過實測活動，認識正三角形三邊等長，等腰三角形兩腰等長，正方形四邊等長，長方形對邊等長。(註 :「對邊」、「等腰三角形」、「腰」在教學上不一定要出現。教師若使用這些專詞，應予以充分之引導與說明。)

例 1：量一量，底下兩個三角形的每一邊有多長？紅色三角形的 3 個邊都一樣長嗎？藍色三角形的 3 個邊都一樣長嗎？那些邊長度一樣長？

例 2：量一量，底下兩個四邊形的每一邊有多長?綠色四邊形的的 4 個邊都一樣長嗎？黃色四邊形的 4 個邊都一樣長嗎？哪些邊長度一樣長。



3. 幾何圖形的內部、外部和周界。

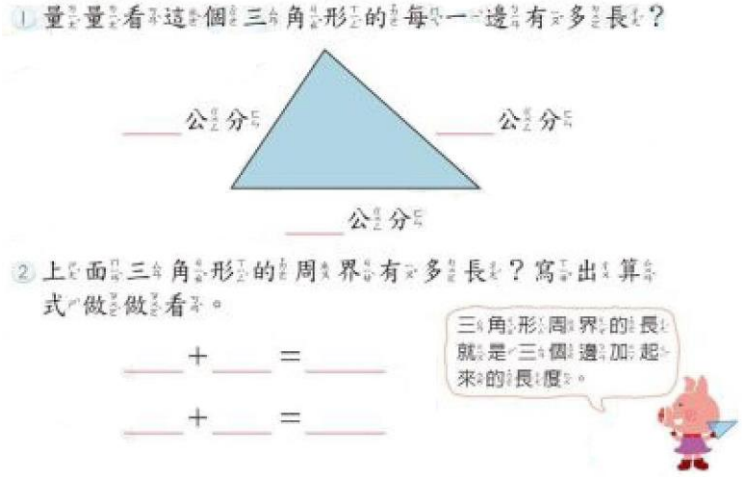


獨角仙在三角形內部　　獨角仙在長方形外部　　獨角仙在正方形周界上

(《部》第六冊第 8 頁)。

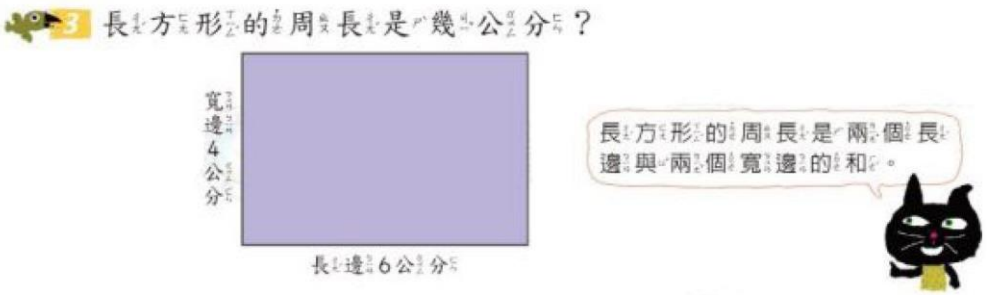
4. 測量並計算簡單幾何圖形的周長

例 1. 量一量，三角形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？



例 2. 量一量，正方形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？

例 3. 量一量，長方形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？



本問題有很多列式的可能，學生只要能說明自己的算式即可。

評量

1. 評量重點：

(1) 實測平面圖形邊長，知道正方形四邊相等、長方形兩對邊長相等、正三角形三邊相等、等腰三角形兩腰相等。

(2) 認識周長是平面圖形周界的長度，透過實測與加法計算一般平面圖形周長.

(3) 知道正三角形周長是邊長的 3 倍，正方形周長是邊長的 4 倍。

2. 評量注意事項：

(1) 評量重點 1. 所提專有名詞（對邊、等腰三角形、腰）在教學上不一定出現。

(2) 此條目重點在透過實測活動，認識特殊幾何圖形的邊長關係，而非以邊長關係來定義平面圖形。教師的評量重點不是幾何圖形的命名。

(3) 評量圖形邊長測量時，其邊長應為整公分數。

(4) 評量以乘法進行周長計算時，須以乘法十十乘法為範圍。

S-2-5 面積：以具體操作為主。初步認識、直接比較、間接比較 (含個別單位)。 **備註：**本條目相當於 N-2-12 的部分。	n-I-8

R-2-1 大小關係與遞移律：「 > 」與「 < 」符號在算式中的意義，大小的遞移關係。 **備註：**教學不出現「遞移律」一詞。本階段應在加減法單元中完成，不須獨立單元教學。	r-I-1

先備：R-1-1。

連結：N-2-1、N-2-11、N-2-12。

基本說明

1. 大小比較是兩個數量之間的基本關係，在一年級已進行過教學。本條目旨在引入「 > 」、「 < 」(或「 = 」) 符號來記錄這種關係。從情境中學習比較，最初可能連著單位，但最後要統一以「 > 」、「 < 」(或「 = 」) 記錄數的大小關係，如「12 > 5」、「5 < 12」，並能說明記錄與原情境的關係。
2. 從日常經驗或一年級學習，學生對「大小」遞移關係有一定的理解。本年度除從更多量的直接比較學習遞移關係外，更重要是將遞移關係當作可以推理應用的規律，甚至能回答不涉及數量的問題，如「小明的錢比小美多，小美的錢比小華多，誰的錢最多？」也應討論等號和不等號混合的比較關係，如「小明的錢和小美一樣多，小美的錢比小華多，小明和小華的錢誰多？」
3. 除了 2. 這類直接的問題，較難問題請教師斟酌教學時間，只在活動中討論，不做紙筆評量。像「小明的錢比小美多，小美的錢比小華少，誰的錢最多？」「小明的錢比小美多，小美的錢比小華多，小華的錢比小清多，小美的錢比小清多嗎？」等都屬於較難的問題。

條目範圍

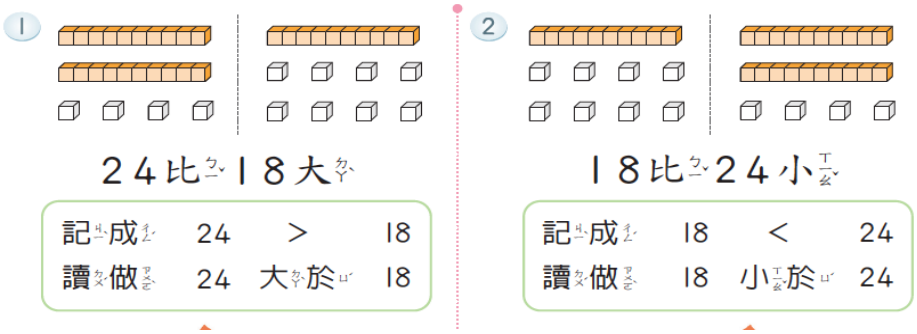
1. 本條目的重點在確認學生理解基本的遞移關係，教科書或教師不宜針對遞移關係做過度評量 (參見基本說明 3.)。
2. 課本和教學不出現「遞移律」。本條目不需獨立單元教學。
3. 二年級學生容易在比較詞上出現紊亂，建議評量時以直接而簡易布題為主。

4. 為釐清題目有時會使用線段圖，建議教科書及評量此類型題目時，應提供線段圖，協助學生標示解題。

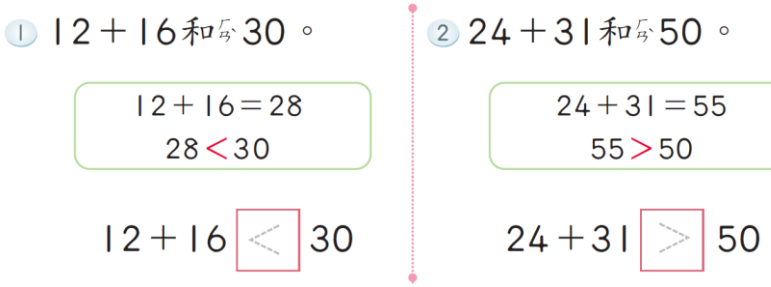
釋例

1. 引入「＞」與「＜」的符號表示大小比較的結果。

(1) 池塘裡有 24 隻水鴨和 18 隻白鵝，比較水鴨和白鵝的數量，運用「＞」與「＜」紀錄比較的結果，並能根據紀錄結果說明水鴨和白鵝的數量多少關係，例如：哪個多（或少）？多（或少）多少？



(2)「＞」與「＜」的符號與算式：



2. 提供圖示，透過直接比較，認識長短的遞移關係：

(1) 甲比乙高（矮），乙比丙高（矮），比較甲、丙高矮的關係。

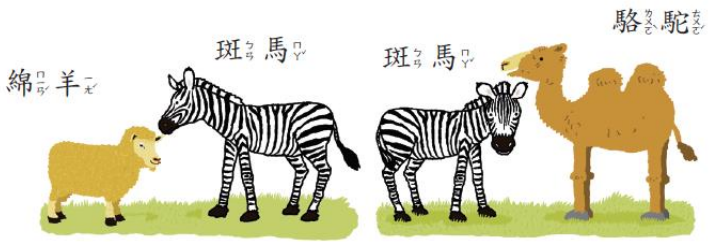
驢子比小英高，小英比企鵝高。

圈圈看，驢子比企鵝（高，矮）。

（《部》第四冊第 67 頁）

綿羊比斑馬矮，斑馬比駱駝矮。

圈圈看，綿羊比駱駝（高，矮）。



（《部》第四冊第 67 頁）

(2) 甲和乙一樣長，乙比丙長（短），甲、丙長短的關係。

例：圈圈看，緞帶比毛線（長，短）。

（改自《部編本》第 4 冊 p.68）

(3) 甲比乙高（矮），乙和丙一樣高，比較甲、丙高矮的關係。

例：圈圈看，哥哥比小珍（高，矮）。

（取自《部編本》第 4 冊 p.65、p66）

3. 透過文字敘述，將遞移關係應用在已經學過的各種量的比較情境中：

(1) 小夫的錢比大雄多 5 元，大雄的錢比胖虎多 10 元。

圈圈看，小夫的錢比大雄（多，少）。

(2) 宜靜的錢比 100 元多，大雄的錢比 100 元少。

圈圈看，宜靜的錢比大雄（多，少）。

(3) 爸爸的身高低於 170 公分，叔叔的身高高於 170 公分。

圈圈看，爸爸的身高比叔叔（高，矮）。

錯誤類型

1. 弄混「＞」和「＜」。教師或可提示「開口處」數字較大。

2. 在遞移關係問題中困惑於比較用詞之複雜度。教師應體認現階段學生之閱讀程度，教學和評量勿過難。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能正確使用符號「＞」、「＜」與「＝」。
   (2) 能回答較簡單的遞移關係問題。
2. 注意事項：
   本年度遞移關係評量的布題，應以直接為原則，避免複雜的布題。

R-2-2 三數相加，順序改變不影響其和：加法交換律和結合律的綜合。可併入其他教學活動。 **備註：**先在加法的「併加型」(合成型)情境中說明。教學不出現「結合律」一詞。	r-I-2

先備：R-1-2。

連結：N-2-8。

基本說明

1. 本條目運算律指的是三數相加，誰先加，誰後加，都不影響其結果，這是合成分解模型的自然結果。一旦確立後，學生可以應用於其他類型的問題或靈活應用於加法計算，甚至更多步驟的運算。
2. 本條目應該併入兩步驟應用問題教學活動（N-2-8），不需另立單元教學。

條目範圍

1. 教學時透過合成分解模型（併加型）來分析理解最自然。
2. 雖然以加法規律來說，這是加法交換律和結合律的綜合，但本條目完全不強調其中的推理關係或代數意義。課本或教學更不該出現「交換律」、「結合律」的名詞。不需另立單元教學。

釋例

由於二年級還沒有學習連加併式，因此本條目旨在讓學生透過生活情境，理解到三個數用不同順序加在一起，答案都一樣。本條目教學時，建議可以和 N-2-8 兩步驟問題合併，學生可以列出兩步驟的算式解題。例如：

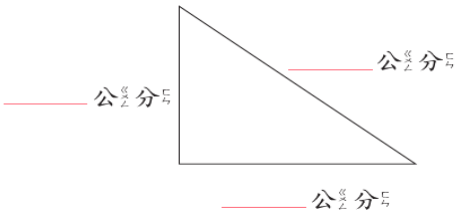
(1) 併加型情境：

「小明有 3 顆糖，小華有 2 顆糖，小麗有 8 顆糖，合起來共有多少顆糖？」，學生可以先算：$3+2=5$，再算：$5+8=13$；也可以先算：$8+2=10$，$10+3=13$，或者先算：$3+8=11$，$11+2=13$。以上不同順序的做法都是正確的解題方式。教師教學時可以鼓勵學生提出不同的做法，並引導學生觀察為何不同的做法，算出來的結果都是

一樣的。

(2) 算三角形周長：

●量量看下面三角形各邊的邊長，再算出三角形的周長。和上例同理，學生可以將三個邊長以不同的順序，兩兩相加，求出周長。



(3) 探索活動：四個數相加的情境，讓學生知道這個規則其實不限於三個數。數字設計可以分成兩組容易相加的數，讓學生體會運用這個規律的好處。

● 罐子裡有四種不同顏色的珠子，紅珠子 50 顆、藍珠子 28 顆、黃珠子 50 顆、綠珠子　22 顆。這四種顏色的珠子共有多少顆？」

錯誤類型

學生在二年級尚未學習連加併式，若學生出現併式（不論是直式或橫式併式），教師應予以肯定，再請學生依題意要求，說明先算什麼？再算什麼？把做法一步一步用算式寫出來。

評量

1. 評量重點：

(1) 理解三個數用不同順序加在一起，答案仍然一樣。

(2) 能靈活運用此規律解題。

2. 注意事項：

雖然我們建議教師能設計布題中的數字，讓學生能充分運用此規律。但因為學生尚未學習併式，請不要評量下數這類情境不恰當的問題，例如：

(1) 豬小弟有 19 元，豬二哥比弟弟多 28 元，豬大哥比二哥多 1 元，豬大哥有幾元？

(2) 序數型情境的加法問題也不適用。

R-2-3 兩數相乘的順序不影響其積：乘法交換律。可併入其他教學活動。 **備註：**「乘法交換律」不宜太早教學，建議在 2 年級後期，以行列模型教學。教學不出現「乘法交換律」一詞。	r-I-2

連結：N-2-6、N-2-7。

基本說明

1. 初學乘法時，應先專心學習乘法的意義，故乘法交換律不宜在二年級上學期學習。

2. 學習乘法交換律，應先學習將問題轉化為行列模型的圖示，如釋例 1.，該圖可看成「一列

有 6 個，3 列有幾個？」，也可看成「一行有 3 個，6 行有幾個？」，因此6×3和3×6的結果一樣都是 18。

3. 計算規律的教學最後要能靈活應用規律本身，因此要有機會讓學生解決釋例 4. 這類與情境衝突的問題。

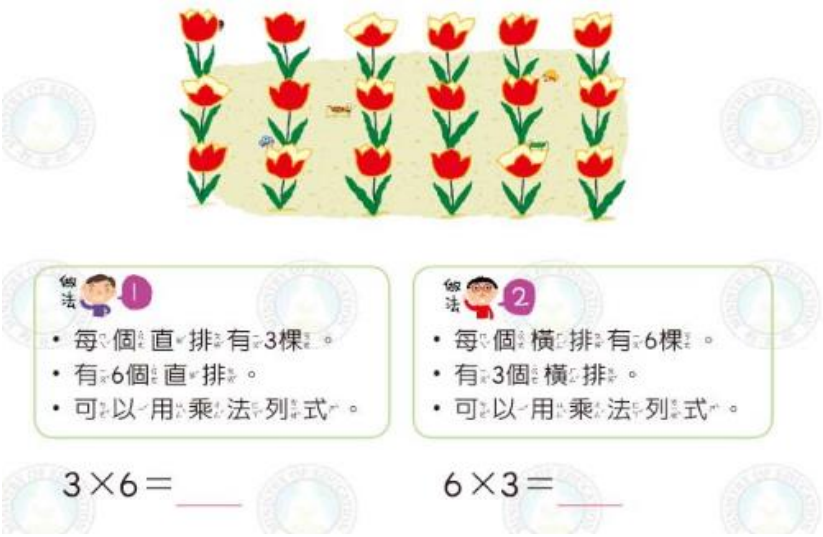
條目範圍

1. 課本和教學不出現「乘法交換律」一詞。不需另立單元教學。
2. 乘法交換律確立後，原則上當然可應用於乘法計算。故教師在評量上，應細緻處理學生是否理解乘法意義的問題（見 N-2-6）。

釋例

1. 在具體情境中，透過行列模型的排列方式，認識乘法交換律。

   例：下圖的花共有幾棵？用乘法算式記下來，並說說看。



(《部》第四冊課本 P59)

由此可知3×6和6×3的積一樣。

2. 觀察「十十乘法表」中和乘法交換律對應的對稱模式，引起學生的好奇心。

   例：請學生拿出「十十乘法表」，任選二個數字如 5 和 8，查查看「5×8」和「8×5」，請學生說說看有什麼發現？再請學生任意選兩個數字，看看有什麼發現？ 透過不同學生的不同選擇，建立被乘數和乘數交換位置的乘積相同的深刻印象，並可以利用來減輕記憶「十十乘法表」 的負擔。

3. 在超過十十乘法的範圍，已可將問題轉化為行列模式，觀察其規律：

例：「一個橡皮擦 5 元，老師買了 12 個，總共要付多少元？」

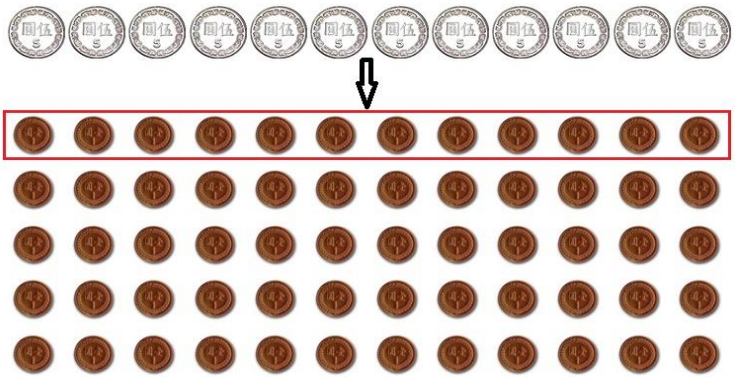
解法 1：

將問題想成 12 個 5 元硬幣來理解(如下圖)，

乘法算式：$5 \times 12 = 60$　（5 要連加 12 次）

解法 2：

可將 1 個 5 元換成 5 個 1 元，將問題轉化「行列模型」呈現(如下圖)，

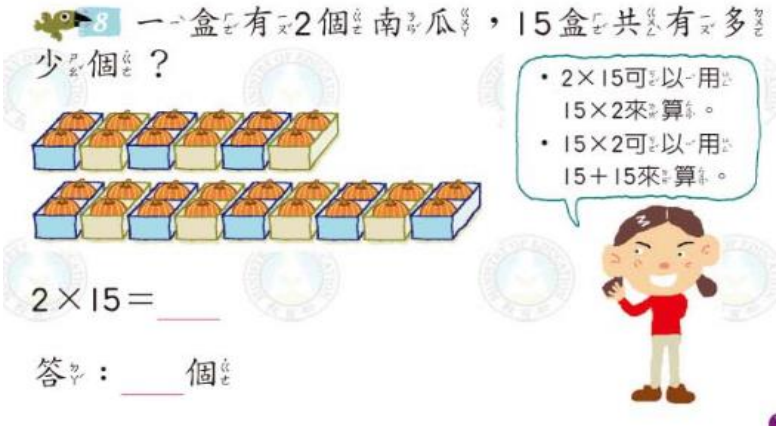


乘法算式：$12 \times 5 = 60$（12 連加 5 次）。

教師可詢問學生，從上面不同乘法算式，是否發現一樣的規律？

4. 應用乘法交換律，簡化計算。

例：



評量

1. 評量重點：

能理解兩數相乘的順序不影響其積，並能應用。

2. 注意事項：

(1) 乘法交換律的評量經常造成教師和家長的衝突，主因在於學生所列算式之「被乘數」與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，有可能是學生完全不理解題意而弄

錯，也有可能是學生完全清楚題意，只是有自己的解釋，或直接運用乘法交換律。教師評量應以學生是否理解為考量，不能只是光從算式來判斷。教師可追問學生列式的原由，看看學生是否誤會題意、隨意列式、有意義轉換題意、已明瞭交換律等等，再作評量之判斷。

(2) 針能應用乘法交換律解決一位數乘以二位數的應用問題。例如：「同樂會跳舞分組，每組 2 人，18 組多少人？」，學生應理解正確列式為「2×18」，但可以轉成「18×2」來計算。

R-2-4 加法與減法的關係：加減互逆。應用於驗算與解題。 **備註：**應用加減互逆到驗算時，只用加法驗算減法答案，但不用減法驗算加法答案。	n-I-3 r-I-3

先備：N-1-3。

連結：N-2-3。

基本說明

1. 在 N-1-3 教學活動中，學生已初步經驗加法和減法的互逆關係。二年級在 N-2-3 的加減法解題活動中，更深入學習此重要關係，並應用於解題活動。
2. 如 N-2-3 之說明，合成分解模型最適合說明加減互逆關係，應先以這類問題導引，等學生熟悉後再應用於其他類型的問題。(參見 N-2-3)
3. 加減互逆的常見應用之一是驗算。驗算不是重新執行原來的方法，而是用不同方式檢查計算的正確性。例如驗算 31 − 14 = 17，可用加減互逆，檢查 17 + 14是否等於 31。
4. 單純的括號算式問題如 23 + (　) = 36；50 - (　) = 15；(　) + 18 = 40；(　) - 15 = 45，可用來檢查學生是否能抽象理解加減互逆關係。

條目範圍

1. 應用加減互逆到驗算時，原則上只用加法驗算減法答案，因為大家認為不宜要求一般學生用較困難的減法驗算加法答案。但若有靈活的學生堅持使用，這完全符合加減互逆的學習目標，當然也不需禁止。
2. 「加減互逆」一詞建議不出現在教學與課本中，也不需另一單元教學。

釋例

1. 從合成分解模型探討加減互逆的關係：

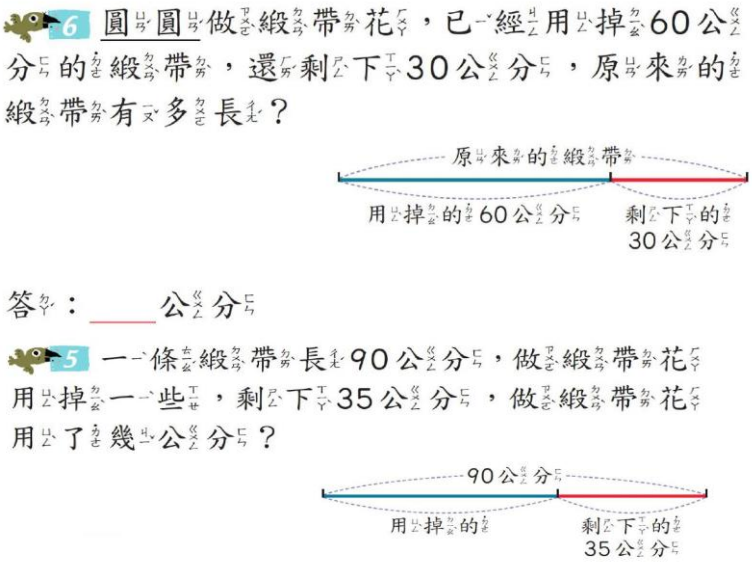
(1) 讓學生觀察下圖，教師可以提問：

- 紅珠子幾顆？藍珠子幾顆？(9，8)
- 這串珠子一共有幾顆？怎樣列式？（9＋8＝17、8＋9＝17）
- 一串珠子有 17 顆，將藍珠子 8 顆全部拿走，剩下幾顆紅珠子？怎樣列式？（17－8＝9）
- 一串珠子有 17 顆，將紅珠子 9 顆全部拿走，剩下幾顆藍珠子？怎樣列式？（17－9＝8）讓學生觀察上面列出來的四個加減算式，說說看有哪些數字？有哪些符號？

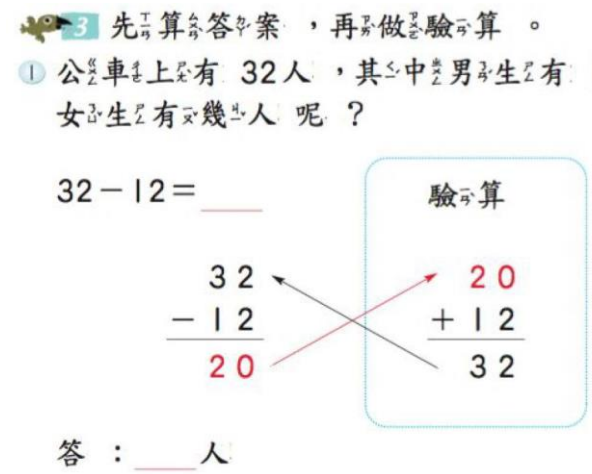
2. 利用線段圖和還原的想法讓學生理解加減互逆的關係：

下面例題，建議教師除了利用線段圖表徵題意，也可用還原的想法幫助學生理解。

例如：把剩下的 30 公分和用掉的 60 公分還原回來，會不會和原來的緞帶一樣長？



3. 用加法做減法的驗算：



（《部》第三冊課本 P3）

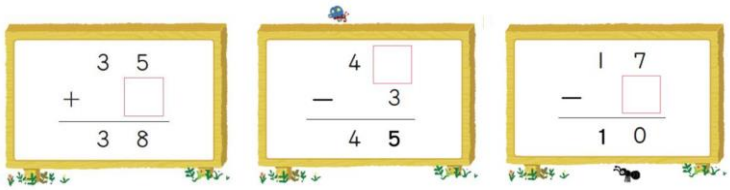
4. 利用加減互逆關係解決單純的有括號算式問題（含直式及橫式）。例如：

(1) 有括號的直式問題。

小杰做對了下面的算式，但不小心把墨水滴在算式上，請幫小杰把數字填上去。

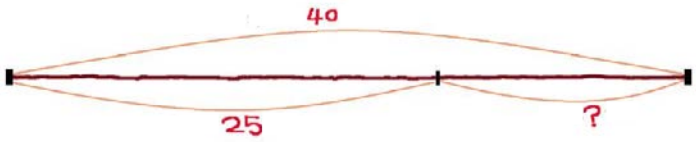
$$\begin{array}{r} 6\ \square \\ +\quad 3 \\ \hline 6\ \ 6 \end{array}$$

(2) 類似示例：

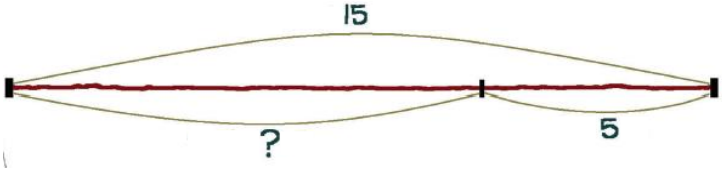


5. 有括號的橫式問題

(1) $25 + (\quad) = 40$，利用下列線段圖，理解可以用減法「$40 - 25$」來算。

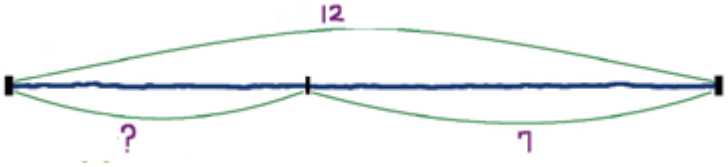


(2) $(\quad) + 5 = 15$，利用下列線段圖，理解可以用減法「$15 - 5$」來算。



(3) $(\quad) - 7 = 9$，利用下列線段圖，理解可以用減法「$7 + 9$」來算。

(4) $12 - (\quad) = 7$，利用下列線段圖，理解可以用減法「$12 - 7$」來算。



錯誤類型

第一次觀察線段圖，學生可能會在意實際長度，教師可以設計衝突的情境如「尺或紙張不夠長，怎麼辦？」這時教師可以引導學生理解「在圖上將問題的數量標示清楚，大家看的懂就好。」教師不用特別介紹「線段圖」的名詞。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能理解加減互逆，並運用於驗算和解題。
   (2) 能利用加減互逆解決單純的有括號的算式問題。
2. 注意事項：
   (1) 老師提供線段圖表徵時，雖不一定力求精確，但宜有相對的合理性。
   (2) 學生若不理解單純的括號算式問題解如 $61-(\quad)=25$，可提供線段圖協助。

D-2-1 分類與呈現：以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現資料、生活物件或幾何形體。討論分類之中還可以再分類的情況。 **備註：**非正式表格與統計圖表教學（見 D-1-1 備註）。可配合平面圖形與立體形體教學（S-2-2）。	d-I-1

先備：D-1-1。

連結：S-2-1、S-2-2。

後續：D-3-1。

基本說明

1. 本條目以操作活動為主，主要分成兩類活動：(a) 學生承繼 D-1-1 的經驗，對教師給定的資料或學生主動蒐集的資料，做分類、紀錄、呈現、說明與討論；(b) 在老師的引導下，學習資料在分類中可以再分類。本條目的進行重在體驗，作為日後學習的先備經驗，教師勿過度評量
2. 活動 (a) 至少包含和幾何特徵（S-2-1）與幾何圖形（S-2-2）有關之幾何形體，運用幾何特徵作為分類標準，同時強化幾何概念和分類的學習。
3. 活動 (b) 的進行應該包含兩種常見的資料分類方式：甲類如「動物有狗、貓……狗有柴犬、柯基、土狗、……，貓有暹羅、波斯、….」「整理東西，分別放入幾個抽屜，每個抽屜中的東西再分放在一些小盒子中。」第一層分類之下的子分類，彼此可能沒有很大關係。乙類如「把下列圖形分類，先用顏色分，再依邊數來分」，這時其他同學可能會採用「先用邊數分，再依顏色分」。這種情況被分類的物件，同時具有多種特徵，只是分類特徵採行的順序不同。

4. 活動 (b) 乙類的進行，建議由老師引導進行，安排不同分類特徵順序由不同小組進行分類、紀錄和呈現。
5. 教師教學仍應注意 D-1-1 基本說明 5 提到的注意事項。由於本年度包含明確幾何形體分類，教師更應用心安排，讓學生領會「第一，分類所依據的是同一個概念下的不同分組；第二，同一物體出現在兩個類別中，反映分類可能不妥當。」

條目範圍

1. 和 D-1-1 相同，低年級圖表是非正式圖表，可以發揮學生的創意。正式表格或統計圖表的呈現是中高年級的課題。
2. 雖然學生可自由呈現他喜歡的紀錄方式，但教師應藉由事先的課程規劃，減少活動或布題資料量的數目，分類項目及數量範圍也要有所限制，活動時透過提示和引導，協助學生建立清楚易懂的表現方式，釐清自己的意願。不然低年級學生進行討論時，可能會一團混亂。

釋例

1. 承繼 D-1-1，學生已有基本蒐集資料並加以整理、呈現之經驗。本年度結合 S-2-1、S-2-2，學習處理幾何形體。

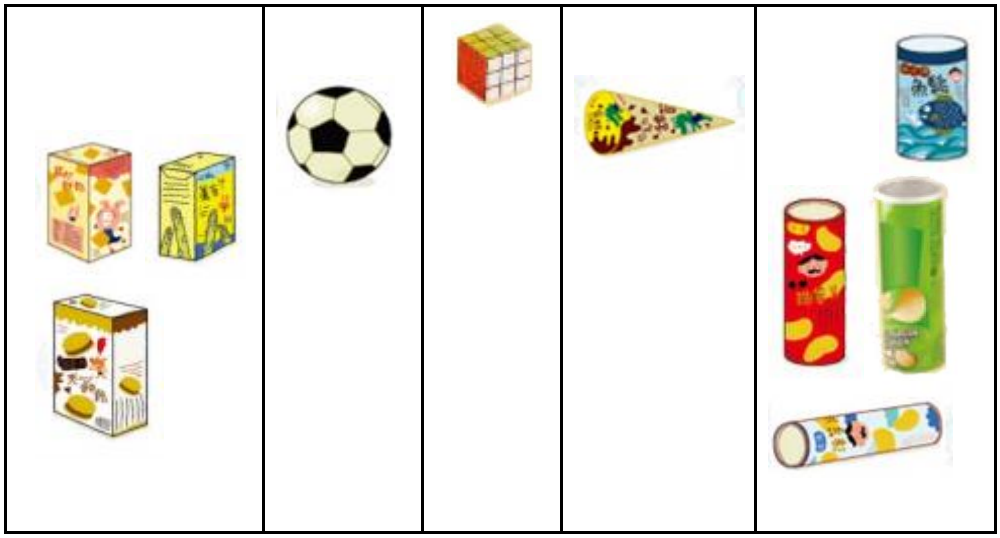
   (1) 蒐集生活中常見的立體形體，進行分類、記錄，並能說明與討論。

   例：將下列蒐集到的形體進行分類，並說明與討論，再作記錄 。

小明的分類：用平平的面和彎曲的面來進行分類。

只有平平的面	只有彎曲的面	有平平的面、也有彎曲的面

小英的分類：用形狀來進行分類。



(2) 以上的分類和呈現範例僅供參考。低年級資料蒐集與呈現活動的重點，是由學生發揮想像力來進行自己的分類和呈現。評量重點是學生能清楚說明自己的分類依標準，也能參考他人意見修改。當然如果學生分類標準很薄弱，教師也可以給予引導。

2. 活動 (b) 甲類之分類活動。

例 1：教師和學生蒐集常用的文具、物品、雜物。要求學生安排將物品分到兩個或三個抽屜中，每個抽屜中的物品，再做分類，放到小盒子、夾子、袋子中。

讓學生體驗，先分出大類，之後再在每一大類中，進行小分類。由於每一大類性質可能差異很大，底下的子分類也可能沒有關係。

例 2：如果教學現場適合，也可請學生描述他們希望如何整理他們的衣物、書籍、玩具。重點是物品能先分大類，再分小類。

●：小雅想要用下面的分類整理她的衣物：

上衣類──夏天類（短袖）、冬天類（長袖）。

褲子類──牛仔褲類，休閒褲類。

洋裝類──素色類、印花類。

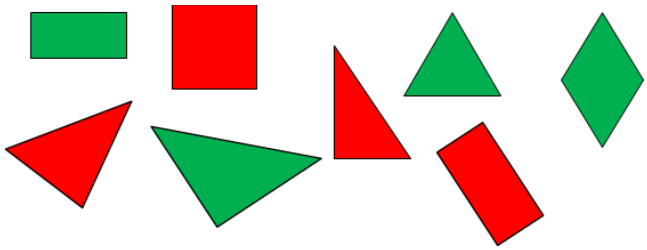
裙子類──長裙類、短裙類。

襪子類──短襪類、長襪類。

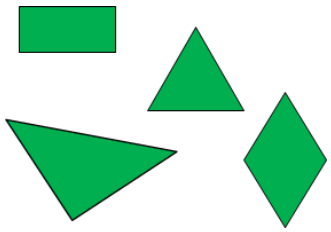
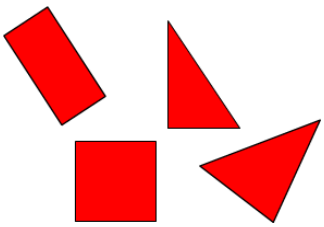
3. 活動 (b) 乙類之分類活動。

這種分類的物品可能同時有多種特徵，當學生採行特徵的順序不同，就有不同分類方式。建議由老師安排並訂立分類標準，較能控制活動進行品質。

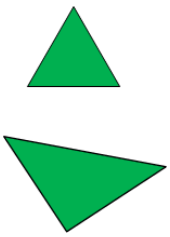
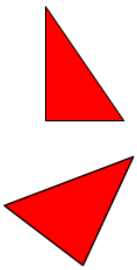
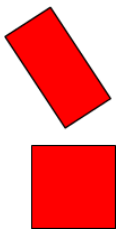
例 1. 將下列的圖形卡進行分類並記錄。



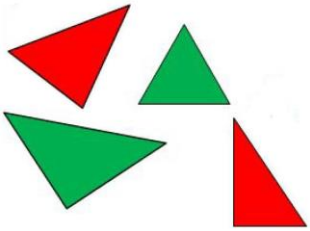
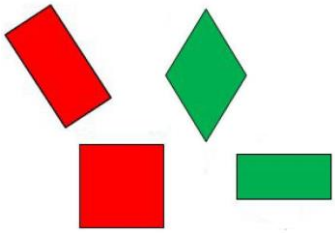
小賢的作法：先依顏色分成兩堆、再依圖形的邊數分類。

綠色	紅色
	

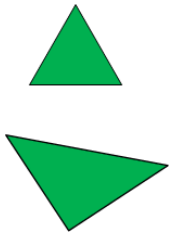
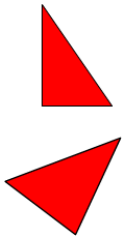
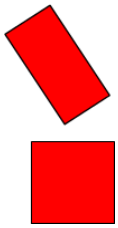
再依形狀又繼續分成四堆。

綠色		紅色	
三角形	四邊形	三角形	四邊形
			

小芳的作法：先依圖形的邊數分類分成兩堆、再依顏色分類。

三角形	四邊形
	

再依形狀又繼續分成四堆。

三角形		四邊形	
綠色	紅色	綠色	紅色
			

例 2：二年甲班有 21 位小朋友，10 位男生(6 位穿運動服，4 位穿制服)，11 位女生（5 位穿運動服，6 位穿制服）。

這 21 位小朋友有兩種分類方式：

第一種：男生（10）── 運動服男（6）、制服男（4）。

女生（11）── 運動服女（5）、制服女（6）。

第二種：運動服（11）── 運動服男（6）、運動服女（5）。

制服（10）── 制服女（6）、制服男（4）。

錯誤類型

和 D-1-1 相同，教師應謹慎處理分類的「錯誤」。本條目是體驗分類的操作活動，除非學生的分類方式明顯有問題或太隨性，否則教師不宜介入太多。

評量

1. 評量重點

(1) 學生能在老師引領下，進行幾何形體的分類、紀錄、呈現與討論。

(2) 能說明自己分類的依據，並理解別人的分類方式。

(3) 能在教師引導下，進行分類中的子分類活動，並說明分類的依據。

2. 注意事項

(1) 分類的資料量不宜太龐大。

(2) 做分類中的子分類時，限於二層的分類─子分類，不做三層以上更複雜的子分類。

3 年級學習內容解析

N-3-1 一萬以內的數：含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「千」。位值單位換算。 **備註：**教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。	n-Ⅱ-1

先備：N-2-1。

連結：N-3-2、N-3-3、N-3-5、N-3-8、N-3-11。

後續：N-4-1。

基本說明

1. 承繼二年級的學習，學生繼續結合點數、位值積木、位值表來認識新的數與其應用。學生至此應熟悉「個」、「十」、「百」、「千」之位值系統，做為 N-4-1 學習「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」等位值單位之基礎。
2. 新增的位值單位為「千位」。學生應理解四位數的位值意義，能完整讀出四位數。能運用位值做四位數大小比較。進行相對應的新單位換算活動，主要是「1 個萬是 10 個千」、「1 個萬是 10000 個一」。相對應的數詞序列練習如「過千」(1999→2000→2001) 或 (3980→3990→4000→4010) 等。
3. 能結合位值與局部數數，知道如何用數數完成「1999 + 2」、「3002 - 3」、「1985 + 30」的「計算」。也可做簡單的「連續加 1000」活動 (3225→4225→5225)。
4. 本年度仍可在相關課程進行含「千元」在內的使用錢幣活動 (續 N-1-4、N-2-5)，讓學生能靈活運用位值、幣值、數感解題，並熟悉四位數。

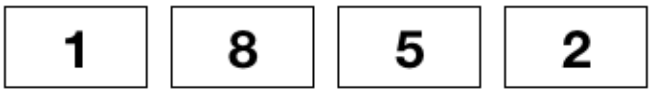
條目範圍

1. 教學可進行到最後的「一萬」，但不進行超過一萬的教學。
2. 到了四位數，學生已不宜進行大規模的點數活動，教師應靈活運用 N-3-11、R-3-2，協助學生從觀察數列的模式變化與位值概念來協助解題。

釋例

1. 可以透過下面的問題讓學生理解四位數的位值意義：
   - 拿出位值積木來做做看， 3 個一 + 2 個十 + 4 個百 + 5 個千是多少？，學生可以現在位值表上紀錄每個位值積木代表的值。
   - 學生熟悉點數位值積木，能完整讀、寫、做出四位數之後，也可建議讓學生試試看不透過位值積木，直接做上述題目。
   - 透過上述方法，處理數字中有 0 的情形，例如：3 個一 + 5 個千是多少？

2. 數詞序列的練習，除了「過千」的練習，也可以做如下的問題，更熟悉「千」的位值意義：
   - 三千張籃球比賽門票的編號為 1 至 3000，門票號碼以 112 結尾的人獲得獎勵，寫下所有獲獎數字。引導學生，從 0112 開始，做做「連續加 1000」活動，0112→1112→2112。
3. 下面的活動也是培養數感，靈活運用位值的選擇，建議可以讓學生練習：
   - 小美的卡片上有下面這些數字：



每張卡片只能使用一次，她可以用卡片顯示的最小四位數字是什麼？
同樣的，也可以提出最大四位數字是多少的問題。

錯誤類型

這階段學童尚在建立位值的抽象概念，如果位值概念模糊，會產生很多奇怪的做法。教師可善用位值表及數學積木，協助學生建立位值概念及運用：

例如：2 個千，9 個百，11 個十是多少？學生的迷思可能包括：

迷思一、答案寫成 2911　→位值概念模糊，只是依次將數字寫下。

迷思二、答案寫成 2910　→知道十位不能超過 10，忽略 11 個十中的 10 個十。

迷思三、答案寫成 2010　→十位記得進位，卻忘了百位也應進到千位。

迷思四、答案寫成 3910　→知道 11 個十要進位，百位的 9 加 1 會超過 10，故直接加到千位。

評量

評量重點：

1. 能說、讀、聽、寫 10000 以內的數。
2. 能做 10000 以內的位值單位換算，但限於一階單位換算。
3. 能運用位值概念比較 10000 以內數的大小。
4. 能以數數解決多一、少一或多十、少十或多百、少百的過千問題。

N-3-2 加減直式計算：含加、減法多次進、退位。 **備註**：須處理數字中有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。	n-II-2

先備：N-2-2。

連結：N-3-1。

基本說明

1. 本條目在確認學生有基本能力進行一般的加減直式計算。利用位值概念，學生應能理解加

減直式計算的意義，並能在四位數的情況熟練計算。其目標在日後萬一需要計算更高位數時，能舉一反三的應用直式計算。

2. 一般加法直式計算，至少要完整處理加法多重進位。減法退位較為困難，應熟練一次退位的計算，並理解多重退位的計算方式。

條目範圍

1. 教師應運用位值表協助學生處理數字中出現 0 的情況，讓學生完整經驗各種不同狀況。
2. 學習直式計算，初期應先在有位值記號的算式表格中學習，養成位值對齊的習慣，再做無位值記號的練習。
3. 進退位直式計算經常有協助計算的添加數字（例如出現在算式的上方），教師宜將此視為輔助學生計算的手法，不可視為格式。若有學生不需這類手法，總能算出正確答案，當然達成本條目之評量標準。

釋例

1. 讓學生理解加減法的意義，可以提出下列問題：

   ● 哪一個式子可以找到 5631+280 的答案？

   (1) 5 個一＋6 個一＋3 個一＋1 個一＋2 個一＋8 個一。

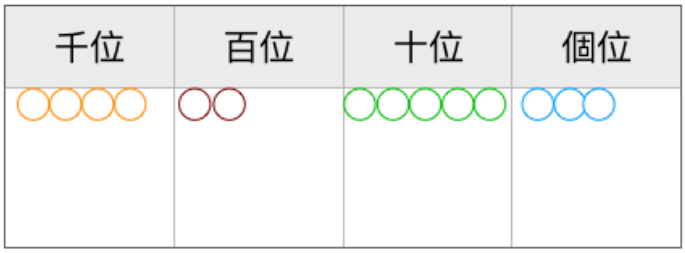
   (2) 5 個千＋2 個千＋6 個百＋8 個百＋3 個十＋1 個一。

   (3) 5 個千＋6 個百＋2 個百＋3 個十＋8 個十＋1 個一。

2. 減法退位較為困難，下例說明多重退位的減法過程。位值表中的圓圈是國外教科書常用的表徵，教師可換成自己常用且學生熟悉的表徵。

   ● 4253−2697。

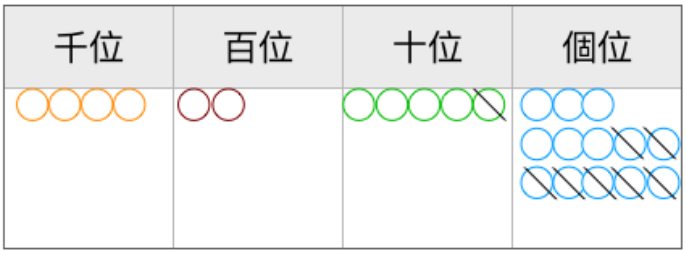
   (1) 在位值表上表示 4253 這個數



$$\begin{array}{r} 4253 \\ -\,2697 \\ \hline \end{array}$$

   (2) 接著看看被減數個位的 3 個一夠不夠減去減數的 7 個一？發現不夠減，因此從被減數十位的 5 個十退 1 個十換成 10 個一，加上原有的 3 個一，變成 13 個一，十位剩下 4 個十。

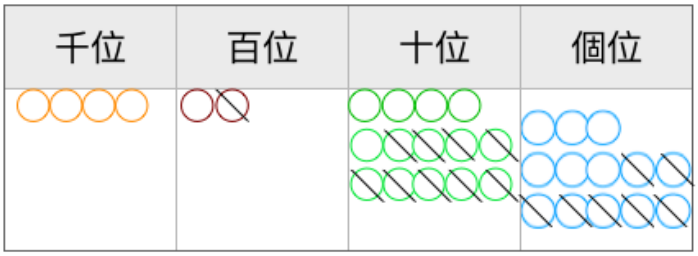
13 個一減去 7 個一，剩下 6 個一。



$$\begin{array}{r} 4\ 10 \\ 4\ 2\ \cancel{5}\ 3 \\ -\ 2\ 6\ 9\ 7 \\ \hline 6 \end{array}$$

(3) 被減數十位的 4 個十夠不夠減去減數的 9 個十？不夠減，從百位的 2 個百退 1 個百換成 10 個十，加上原有的 4 個十，變成 14 個十，百位剩下 1 個百。

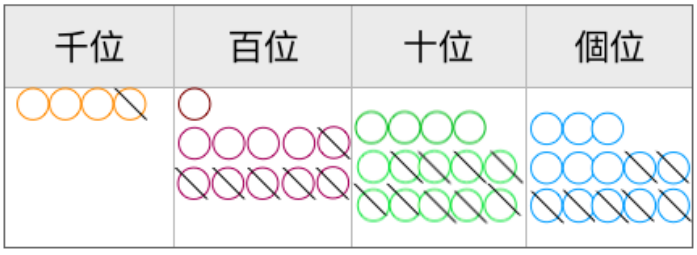
14 個十減去 9 個十，剩下 5 個十。



$$\begin{array}{r} 10 \\ 1\ 4\ 10 \\ 4\ \cancel{2}\ \cancel{5}\ 3 \\ -\ 2\ 6\ 9\ 7 \\ \hline 5\ 6 \end{array}$$

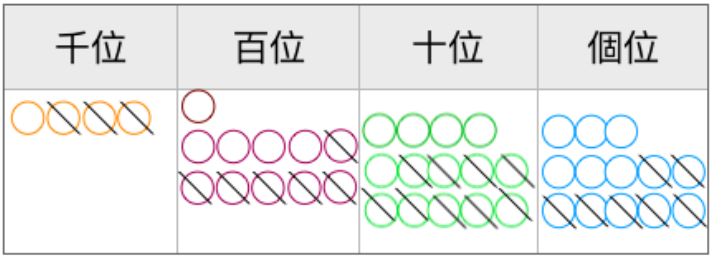
(4) 百位的 2 個百夠不夠減去 6 個百？不夠減，從千位的 4 個千退 1 個千換成 10 個百，加上原有的 1 個百，變成 11 個百，千位剩下 3 個千。

11 個百減去 6 個百，剩下 5 個百。



$$\begin{array}{r} 10\ 10 \\ 3\ 1\ 4\ 10 \\ \cancel{4}\ \cancel{2}\ \cancel{5}\ 3 \\ -\ 2\ 6\ 9\ 7 \\ \hline 5\ 5\ 6 \end{array}$$

(5) 千位的 3 個千減去 2 個千，剩下 1 個千。結果為：



$$\begin{array}{r} 10\ 10 \\ 3\ 1\ 4\ 10 \\ \cancel{4}\ \cancel{2}\ \cancel{5}\ 3 \\ -\ 2\ 6\ 9\ 7 \\ \hline 1\ 5\ 5\ 6 \end{array}$$

N-3-3 乘以一位數：乘法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被乘數為二、三位數。 **備註：**須處理被乘數有 0 的題型。教學可先在有位值的表格中學習計算。最後須能以一列算出答案。多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作經驗與數感，而非分配律教學。	n-Ⅱ-2

先備：N-2-6、N-2-7。

後續：N-4-2。

基本說明

1. 在二年級，學生已經學會用連加一數的概念，解決簡單的乘法問題（N-2-6），並已熟悉十十乘法（N-2-7）。對於更複雜的問題，連加已經不敷使用，因此引入簡潔的乘法直式計算。
2. 教師先在簡單情況（如兩位數乘以一位數），用位值積木說明乘法直式計算的基本概念，並用位值表協助學生正確的紀錄（包括進位的情況），再告知一般的計算程序並練習。
3. 雖然小三已學習到四位數，但在乘法直式計算時，被乘數應限定在二、三位數。
4. 和加減直式計算一樣，教師應由淺入深引導學生。例如先以直式紀錄乘數小於 10 的十十乘法；整十與整百乘以一位數；二位數乘以一位數（含進位）；三位數乘以一位數（含進位）。

條目範圍

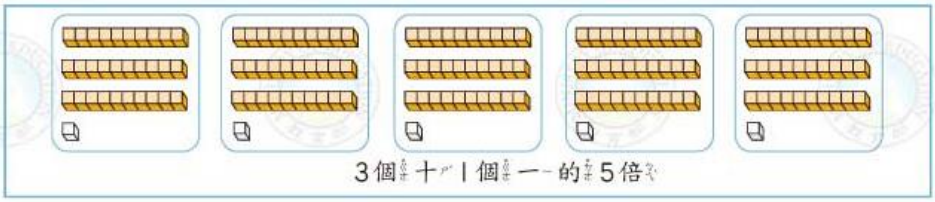
1. 應特別處理被乘數為三位數，且十位為 0 的情況（如 207×3）。
2. 先在有位值的表格中學習對齊，再進行一般計算。
3. 乘以一位數的直式計算，最後須能以一列算出答案。
4. 多位數乘以一位數隱含之分配律來自操作與數感，教師不需談及分配律。

釋例

1. 不進位乘法：用位值積木說明乘法直式計算的基本概念，並用位值表協助學生正確的做乘法直式紀錄。

例 1：31 的 5 倍是多少？

- 先利用位值積木，了解「3 個十和 1 個一」的五倍，等於「3 個十」的 5 倍和「1 個一」的 5 倍，讓學童理解其意義，知道 31×5 是 1×5 與 30×5 的和。



（《部》第五冊課本 P.62）

- 將上面的理解，利用位值積木和帶位值的算式，說明乘法直式計算的意義和程序（尚非標準直式計算）。

（《部》第五冊課本 P.62）

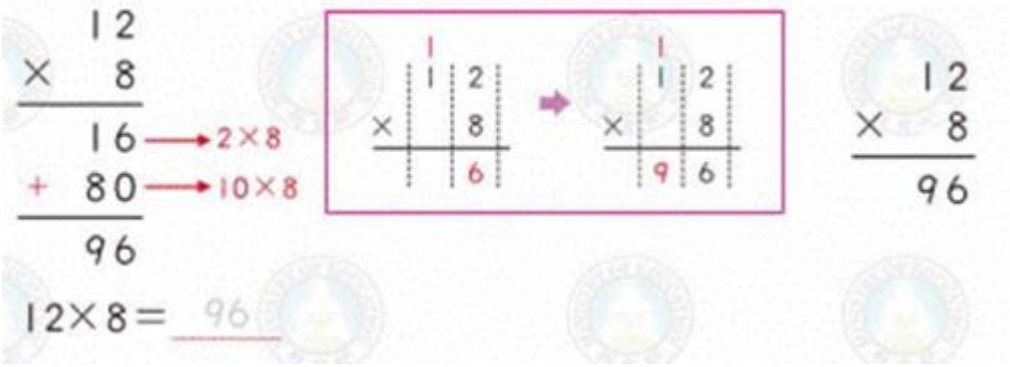
● 使用帶位值算式，指導學生以乘法直式將上述兩列計算過程合併寫成一列，算出答案。

(《部》第五冊課本 P.63)

2. 進位乘法：同 1.，讓學生先理解個位和十位要分別計算再取和，但著重說明乘法過程出現進位的處理方式。

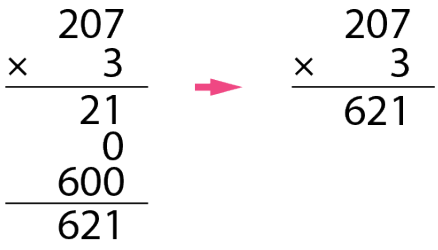
例 1：1 打鉛筆有 12 枝，8 打鉛筆有多少枝？用乘法直式算算看。

列出乘法算式 12×8，再利用比較非正式的直式計算，理解如何分開計算，知道 12×8 是 2×8 與 10×8 的和。在本例著重說明乘法過程出現進位的處理方式。最後能以標準乘法直式計算一列算出答案。



3. 三位數乘以一位數：引用二位數乘以一位數的經驗，讓學生逐漸熟悉「乘以一位數」的計算原理與方法。新出現的現象是三位被乘數中十位有 0 的處理方式。

例 1：207 的 3 倍是多少？用乘法直式算算看。



4. 本年度應練習以乘法交換律計算一位數乘以二位數(或三位數)的問題。

例 1：「一盒月餅有 6 個，105 盒有多少個月餅？」

先列式為「6 × 105」，這個問題似乎超越本年度的範圍，也不適合用連加法，但是運用乘法交換律（R-2-3），用「105 × 6」以直式計算，就可以得到答案 630。

錯誤類型

1. 三位數乘一位數，被乘數的十位為 0 時（如 207 × 3），有些學生忽略 0 × 3 的計算，誤答為 207×3=81。
2. 乘法遇到進位時，學生常常會漏掉。教師可指導學生進位時，可以在被乘數上方以較小數字寫出進位的數字，可以發揮提醒的作用。
3. 混淆或無視位值概念，只背十十乘法口訣，將逐段的乘法記錄全部靠右對齊或亂對。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能熟練二位數乘一位數乘法直式計算。
   (2) 能熟練三位數乘一位數乘法直式計算。
2. 評量注意事項：
   (1) 教師宜在教學課堂中同時評量學生學習進展，讓學生多練習並熟練。
   (2) 初期評量，教師應該提供位值表，協助學生對齊各位數，最後則須能以一般格式（不須位值表輔助）算出答案。

N-3-4 除法：除法的意義與應用。基於 N-2-9 之學習，透過幾個一數的解題方法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十十乘法範圍的除法，做為估商的基礎。 **備註：**建議先處理整除情境，再處理有餘數的情境。教學中應有乘、除法並陳之單元，讓學生能主動察覺乘法與除法問題的差異。	n-II-3

先備：N-2-9。

連結：N-3-5、N-3-6、R-3-1。

基本說明

1. 運用 N-2-9 的前置經驗，先學習整除（餘數為 0）的情境，從「分裝」和「平分」兩種不

同的情境（包含連續量和離散量），理解除法與「商」的意義，並學習除法的橫式記法，為「被除數÷除數＝商」（如 42÷6＝7）。然後再學習有「餘數」的情境，知道「餘數」的意義，並能用橫式記為「44÷6＝7 餘 2」或「44÷6＝7…2」。

2. 從 N-2-9，透過「幾個一數」的想法，理解如何用乘法解決除法問題。熟練十十乘法範圍的除法，做為除法估商的基礎（如 N-3-5）。在除法的情境裡，也要和乘法的「倍」語言作連結。由以上學習經驗，理解乘法和除法的密切關係（見 N-3-6、R-3-1）。
3. 理解除法的意義包括：「餘數為 0 即是整除」、「餘數小於除數」，以及「被除數減餘數後就可被整除」的事實。並能運用「除數×商＋餘數＝被除數」（包含除）或「商×除數＋餘數＝被除數」（等分除）的策略來做驗算。
4. 學生應知道「分裝」和「平分」兩類問題的關係如下例：「18 顆糖果，一人分 3 顆，可分給多少人？」與「18 顆糖果，平分給 6 人，每人可分得幾顆？」教師可用排列模型說明 18÷3＝6 和 18÷6＝3 的內在關係。
5. 在除法的平分情境裡，習慣被平分之物擁常會「先處理大的數，再處理小的數」的手法（見釋例），日後可以協助理解除法直式計算（N-3-5，及後續整數和小數直式計算）及日後分數除法（如：$5\div2=2\frac{1}{2}$）的前置經驗。
6. 教師可以透過觀察餘數模式的活動（R-3-1），介紹奇數和偶數的概念。

條目範圍

1. 教學中應有乘除法並陳之單元，讓學生能察覺乘法與除法問題的差異。
2. 帶餘數的除法橫式記錄僅為溝通之用，在日後數學學習並不重要，勿過度強調。
3. 三年級之除法教學，教師應避免使用連減法來解題。

釋例

1. 除法的應用問題，布題時要小心餘數的處理方式。在整數的平分情境中（等分除），通常餘數會捨去（亦即問剩下多少？）；而在分裝的情境中（包含除），會根據情境決定捨去餘數（(問剩下多少？）或在商數進 1。

(1) 例 1：20 顆蘋果，平分給 3 個人，每個人分到幾顆？剩下幾顆？

20÷3=6…2。

答：每人分到 6 顆，剩下 2 顆。

驗算：6×3+2=20（本式針對教師。對學生而言是兩步驟計算。）

(2) 例 2：20 公升的水，裝到容量 3 公升的水壺，可以裝滿幾個水壺？

20÷3=6…2。

答：裝滿 6 個水壺，剩下 2 公升。

驗算：3×6+2=20（本式針對教師。對學生而言是兩步驟計算。）

(3) 例 3：20 公升的水，裝到容量 3 公升的水壺，需要幾個水壺才夠？

20÷3=6...2，

6+1=7。

答：需要 7 個水壺。

2. 基本說明 5.「在除法的平分情境裡，習慣被平分之物擁常會『先處理大的數，再處理小的數』的手法」的說明：

(1) 例 1：(本例也可當作操作活動)「有 8 張 500 元紙鈔、4 個 50 元硬幣，5 個 10 元硬幣，要平分給 4 個人，要怎麼分？還剩多少？」

● 平分活動本不一定先分哪一項，但是老師可以引導學生，如果先分大的「單位」，可以先大致知道分到多少 (這是一種估算的態度)。

例如本題，4 個人先分 8 張 500 元紙鈔，所以每人分到 2 張 500 元紙鈔，是 1000 元；再繼續分 4 個 50 元硬幣，每人 1 個 50 元硬幣，是 50 元；再分 5 個 10 元硬幣，每人分得 1 個 10 元硬幣，還剩 1 個 10 元硬幣。

所以平分後，每人分得 2 張 500 元紙鈔、1 個 50 元硬幣、1 個 10 元硬幣 (或$1000+50+10=1060$元)，還剩 1 個 10 元硬幣。學生注意到先算出的 1000 元，佔了答案的大部分。

(2) (本例也可當作操作活動，假設可以換錢)「有 4 張 100 元紙鈔、1 個 50 元硬幣，要平分給 3 個人，要怎麼分？」

● 先分大的「單位」除了前述的好處，也在於這個處理順序，可以比較順利平分。例如本題，3 個人先分 4 張 100 元紙鈔，所以每人分到 1 張 100 元紙鈔，還剩 1 張 100 元紙鈔；由於剩下的還有 1 個 50 元硬幣，所以將 1 張 100 元紙鈔換 2 個 50 元硬幣，恰好有 3 個 50 元硬幣，每人再分得 1 個 50 元硬幣。所以每人共分得 1 張 100 元紙鈔和 1 個 50 元硬幣 (或$100+50=150$元)。如果先分 50 元硬幣，會比較複雜甚至無所適從。

(3) 接著教師可以連結到比較正式的教學，例如「444÷3」是多少？444 可以想成 4 片百位積木、4 條橘色十位積木、4 個白色積木，問題是要將這些平分成 3 份。

● 步驟一： 4 片百位積木，平分成 3 份，分得 1 片百位積木，剩下的 1 片百位積木，先換成 10 條橘色積木。

● 步驟二：現共有 14 條橘色積木，平分成 3 份，分得 4 條橘色積木，剩下的 2 條橘色積木，換成 20 個白色積木。

● 步驟三：現共有 24 個白色積木，平分成 3 份，分得 8 個白色積木。

● 最後共分得 1 片百位積木、4 條橘色積木和 8 個白色積木 (也就是 148)。事實上，這

就是 444÷3=148 直式計算的原理，連結 N-3-5 的學習。

評量

評量重點：

1. 理解如何用乘法經驗解決除法問題，並能列出除法算式。認識除號、被除數、除數、商與餘數，並知道它們的關係。
2. 能用除法解決生活中的除法問題，含整除和非整除問題。
3. 熟練十十乘法範圍內的除法計算。

N-3-5 除以一位數：除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。 **備註：**除法直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。被除數為二、三位數。	n-II-3

先備：N-2-9。

連結：N-3-4。

後續：N-4-2。

基本說明

1. 在二年級(N-2-9)，學生已經在十十乘法的九九乘法範圍內，熟悉如何用乘法來思考除法問題。教師可運用「分裝」或「平分」的概念，用位值積木說明除法直式計算的基本概念，用位值表協助學生正確紀錄(包括餘數的情況與使用)，再告知一般的計算程序並練習。三年級的被除數在三位數之內，除數為一位數。
2. 除法直式計算的格式和加、減、乘法非常不同，教學應由淺入深，先從九九乘法範圍開始，讓學生慢慢熟悉其格式與約定，知道商、餘數、以及整除時的記法。
3. 當被除數的位數增加到一般兩位數與三位數後，最重要的操作是估商，學生應以九九乘法的經驗來協助估商。這也是以後除數位數增加後做除法的前置經驗(N-4-2)。

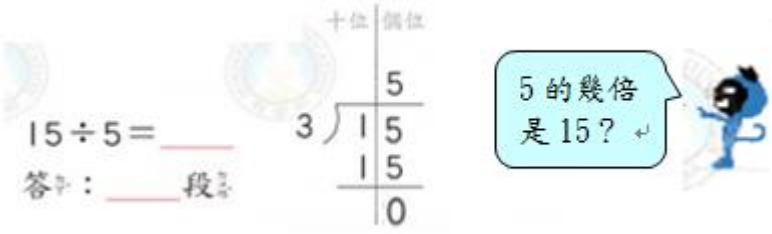
條目範圍

1. 必須特別解釋被除數中有 0 時的直式計算方式，例如 40÷6、40÷3、405÷4、405÷7、405÷8、240÷9、500÷3 等等。可在有位值的表格中學習計算。
2. 除法計算對三年級學生仍較困難，教師應多花時間理解學生的困難，除法直式的熟練應到四年級才完成。

釋例

1. 九九乘法範圍的除法。除法直式計算教學應先從九九乘法開始，可以先利用位值定位板讓學生熟悉直式計算的意義與方法，並在此約定整除和有餘數的記法。

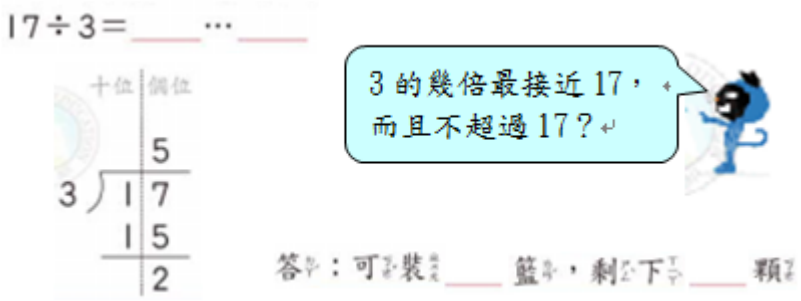
(1) 先處理整除情況，如 8÷2、15÷3、56÷8。如「15 公分的緞帶，5 公分剪一段，可以剪成幾段？」



（修改自《部》第五冊課本 P.93）

(2) 有餘數的情況，如 9÷2、17÷3、50÷6。如「17 顆梨子，每 3 顆裝 1 藍，最多可裝成幾藍？剩下幾顆？」

有餘數時，必須藉由九九乘法的熟練來估商（除數的幾倍最接近被除數，但不超過被除數），並算出餘數。為了日後除法計算的流暢，教師應鼓勵學生直接熟練九九乘法估商。



（修改自《部》第五冊課本 P.96）

2. 多位數除以一位數。雖然數字超過簡單九九乘法的範圍，但是只要理解直式計算的意義，就知道九九乘法範圍的除法（包括整除和非整除的估商）仍然是的基本要件。理解直式計算的意義，學生就能理解商的處理方式。（參見 N-3-4 基本說明）。

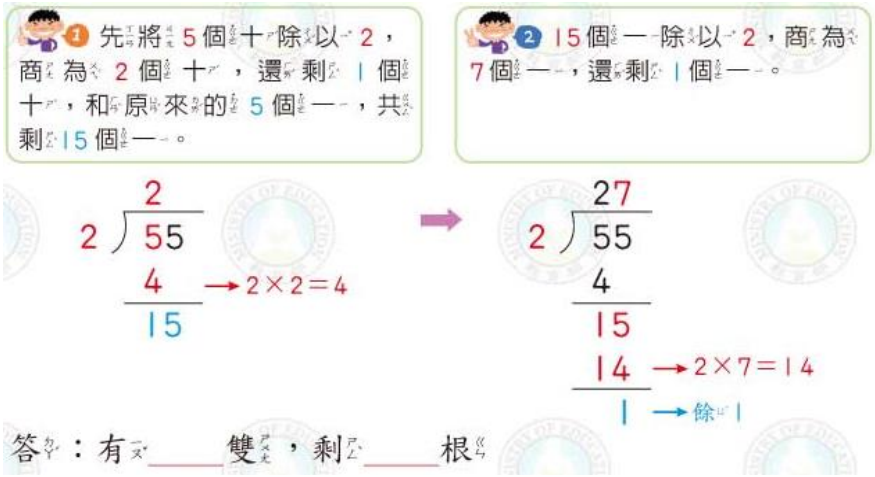
(1) 例 1：「42 元平分給 3 人，每人分得幾元？」

42 是 4 個十和 2 個一。關鍵是用九九乘法協助先分 4 個十，學會正確記商在十位，再把剩餘的十化為一，再重複以上步驟，便能完成計算。細節請見下圖。

(《部》第六冊課本 P.92) .

(2) 例 2 :「55 根筷子，2 根配成 1 雙，共有幾雙筷子？剩幾根筷子？」

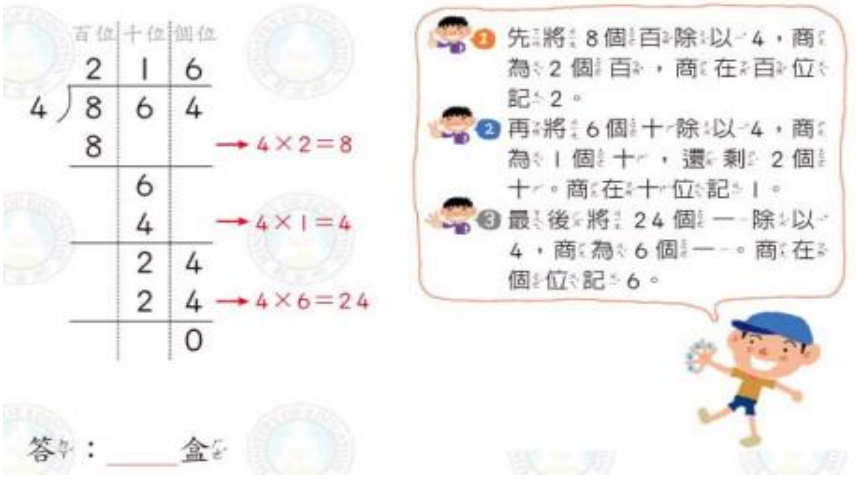
本題有餘數，但進行方式同上(見下圖)，九九乘法和正確記商仍然是正確計算的關鍵。



(《部》第六冊課本 P.93)

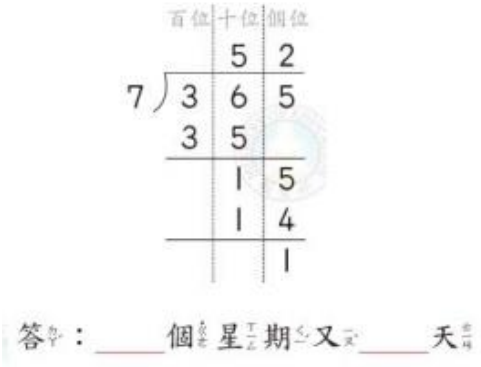
(3) 例 3：「864 個乒乓球 4 個裝 1 盒，可裝幾盒？」(整除)

本題是三位數除以一位數，學生推廣三位數除以一位數的計算原理，關鍵仍在九九乘法和正確記商。



(《部》第六冊課本 P.94)

(4) 例 6：「一星期有 7 天，平年一年 365 天是幾星期又幾天？」(有餘數)



(《部》第六冊課本 P.97)

3. 0 的處理：一如其他四則計算，當計算要件中有 0 時，均要特別小心。本條目要注意被除數有 0 與商有 0 時的處理。學生在這類情況容易犯錯，教師要特別提醒計算的意義與方法，初期更要詳細且一貫的說明計算的意義，並用位值定位版來輔助。

(1) 例 1：「620÷6」。本題被除數和商都有 0。

(《部》第六冊課本 P.94)

620÷6=103…2

(2) 例 2：「801÷2」

(《部》第六冊課本 P.95)

801÷2=400…1

錯誤類型

1. 除法直式計算很容易發生對齊的錯誤，主要都是因為學習太形式化，不理解直式計算的原理。
2. 不會處理 0。這是常見的錯誤，多出自形式學習，不理解計算的意義。教師需詳加說明計算的步驟和意義。

評量

評量重點：

1. 能做二位數除以一位數的直式計算。
2. 能做三位數除以一位數的直式計算。

N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係（R-3-1）。 **備註：**可使用解題策略協助學生理解與轉化問題（例如「倍」的語言、空格算式、乘除互逆等）。本條目不須另立單元教學。	n-II-2 n-II-3

先備：N-2-6。

連結：N-3-4、R-3-1。

基本說明

1. 和加減法類似（參考 N-2-3 說明），從學生初學乘法和除法（N-2-6、N-3-4）的基本應用之後，只要調整問題的問法，學生就可以更深入理解乘法和除法的密切關係（參見 R-3-1）。
2. 乘數或被乘數未知形同除法問題；被除數未知形同乘法問題；除數未知形同另一除法問題，再加上乘法和除法的各種應用情境，產生各式各樣的應用解題。教師應依學習難易安排學習的順序，並教導學生分析問題的方法。
3. 在 N-2-9 首次學習分裝與平分問題，學生已經有將這類除法問題轉換成乘數或被乘數未知問題的認識，建議可先從這類問題著手，把問題解釋成對應的分裝與平分情境，用除法解題。除數未知問題相對比較困難，可最後出現。
4. 處理這類問題，首先是要正確讀懂題意，然後轉化問題、列式並解題。教師可協助學生發展分析問題的工具，例如「倍」的語言、待填充的算式、排列模型、線段圖等來理解與轉化問題（參見 R-3-1），但要避免過度強調工具的必要性。

條目範圍

1. 和 N-2-3 相同，學生可以自由運用他擅長的分析方式，只要能正確列出答題橫式並計算解題即可。教師協助學生思考的策略工具，不宜成為評量時固定的答題格式，避免過度干擾學生靈活的乘除互逆思考。
2. 不需另立單元教學。

釋例

1. 關於乘除應用問題的類型，學生已學過基本的乘法求積問題（N-2-6）與基本的除法求商問題（N-3-4），其中除法問題還粗分成「平分」情境（等分除）和「包裝」情境（包含除；測量情境）。

   在除法問題中，學生也學習過最基本的乘除互逆，也就是可以將除法應用問題，轉換為乘法問題來思考，例如：

   (1) 包含除：「36 顆巧克力，每 4 顆裝成 1 盒，可裝成幾盒？」，寫成除法算式是「36÷4」，可以想成「4 的多少倍是 36？」，得出答案 9。

(2) 等分除：「36 顆巧克力，平分給 9 人，每人分得幾顆巧克力？」，寫成除法算式是「36÷9」，可以想成「多少的 9 倍是 36？」，得出答案 4。

2. 本條目處理更進階的乘法應用問題 (被乘數未知或乘數未知) 與除法應用問題 (被除數未知或除數未知)，再配合除法的兩種情境，可以得出多種乘法或除法應用問題，除了基本類型之外條列如下：(注意：所列是應用問題的類型，而非算式類型。)

(1) 乘法情境：

- 被乘數未知。如「1 盒巧克力裝幾顆，9 盒巧克力才可裝完 36 顆？」
- 乘數未知。如「1 盒巧克力有 4 顆，幾盒巧克力合起有 36 顆？」

(2) 除法包含除情境：

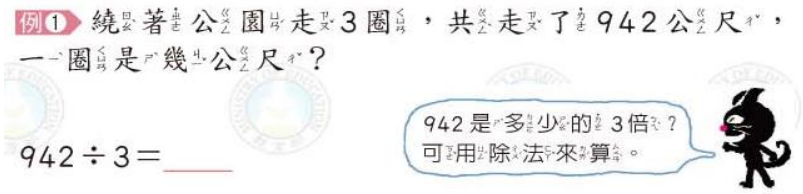
- 被除數未知。如「有一些巧克力，每 4 顆分裝成 1 盒，共裝了 9 盒，原來有幾顆巧克力？」
- 除數未知。「36 顆巧克力，1 盒裝幾顆，可裝成 9 盒？」

(3) 除法等分除情境：

- 被除數未知。如「有一些巧克力，平分給 9 人，每人分得 4 顆，原來有幾顆巧克力？」
- 除數未知。如「36 顆巧克力，平分給幾個人，每人可分得 4 顆巧克力？」

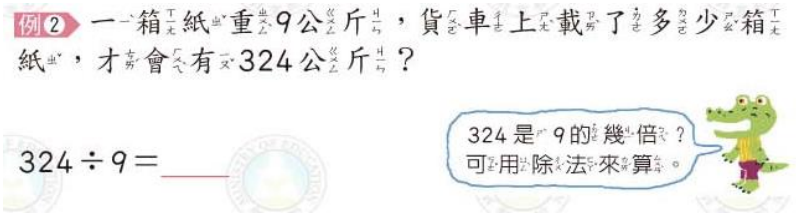
3. 在布題或解題時，初期應以較小數字優先，讓學生穩固文字情境轉換為算式解題之能力後，再做較大數字。在解題時可以利用「倍」的語言、待填充的算式、線段圖或排列模型來分析問題，再用乘除互逆關係來解題。

(1) 例 1 (見下圖題幹)。這是被乘數未知的問題。



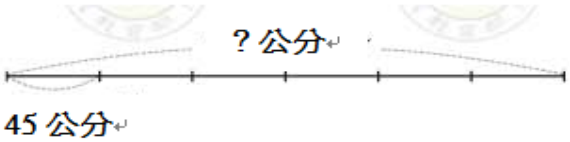
(《部》第六冊課本 P.98)

(2) 例 2 (見下圖題幹)。這是乘數未知的問題。



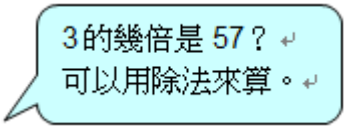
((《部》第六冊課本 P.98)

(3) 例 3：「一條緞帶平分成 6 段，每段 45 公分，這條緞帶原來長幾公分？」。這是等分除中被除數未知的問題。



45×6= _____。

(4) 例 4：「果園主人將 57 顆蘋果平分給全班小朋友，每位小朋友分得 3 顆，這一班小朋友共有多少人？ 」這是等分除情境中除數未知的問題。



57÷3= _____。

(5) 例 5：「紙廠有一些紙要裝箱送店，每箱可裝 12 公斤，共裝了 9 箱。原來有幾公斤的紙？ 」這是包含除的被除數未知的問題。

分析問題，把問題轉化成「每箱裝 12 公斤，共有 9 箱，共有多少公斤？」變成一個熟悉的乘法問題。

12×9= _____。

(6) 例 6：「512 包衛生紙，1 箱裝幾包，可裝成 8 箱？」這是包含除的除數未知的問題。

分析問題，把問題轉化成「512 包衛生紙，平分成 8 箱，每箱裝幾包？」變成標準的等分除問題：

512÷8= _____。

也可把問題表示成「多少的 8 倍是 512？」用乘除互逆解題。

錯誤類型

學生不了解題意，只看數字碰運氣解題。教師可請學生說明其算式的意義。

評量

評量重點：

1. 能用乘與除的關係解決乘數或被乘數未知的應用問題。
2. 能用乘與除的關係解決除數或被除數未知的應用問題。

N-3-7 解題：兩步驟應用問題 (加減與除、連乘)。連乘、加與除、減與除之應用解題。不含併式。 **備註：**乘除混合、連除在四年級 (N-4-3)。	n-II-5

先備：N-2-8。

連結：N-3-4。

後續：N-4-3、R-4-1。

基本說明

1. 本年繼續學習各種兩步驟問題(N-2-8)，進行結合加、減、除的日常應用問題，包括加除、除加、除減、減除之應用解題，另外也包含連乘問題，但不含乘除混合與連除。做與除法有關的應用問題，需注意餘數的處理。
2. 兩步驟問題的學習要領，可參考 N-2-8，其關鍵仍在判斷題意，分析步驟，並運用四則運算解題經驗來解題。
3. 同 N-2-8，教師需注意不同解題 (列式方式) 的可能，並鼓勵學生討論。
4. 不含將兩步驟併成一算式的併式教學。(見 R-4-1)

條目範圍

1. 如同 N-2-8，兩步驟問題的多元作法可以討論，但不宜統一做法，也不宜做出計算規則的結論，更不宜直接下結論。規律之出現在四年級，併式教學之後。(見 R-4-2)
2. 涉及分配律的問題 (加除、減除)，應容許學生採用三步驟來列式，但老師應詳細說明為何可用兩步驟列式。
3. 乘除混合、連除在四年級。(N-4-3)

釋例

1. 做與除法有關的應用問題，需注意餘數的處理。例如：27 位小朋友要一起搭遊園小火車，6 個人做一節車廂，需要幾節車廂才夠？

   這個問題可以列式如下：

   27÷6=4 …3 →意思是可以坐滿 4 節車廂，剩下 3 個人。

   4 ＋ 1 =5 →意思剩下 3 個人，還需要 1 個車廂。

   第一個式子中的餘數，需要進一步引導學生思考如何讓剩下的人也搭上遊園小火車，3 個人雖然坐不滿一節車廂，但是仍需要 1 節車廂。
2. 涉及分配律的問題，應容許學生採用三步驟來列式，例如：5 公斤橘子，甲店賣 80 元，乙店賣 75 元，請問甲、乙兩家店 1 公斤橘子差多少元？

   這個問題有二種做法：

   作法 1：先算出 5 公斤橘子的差價：$80 - 75 = 5$ (元)。

5 公斤橘子差 5 元，那麼 1 公斤橘子差多少元，可以列式為：

$5 \div 5 = 1$（元）。

作法 2：甲店 5 公斤橘子賣 80 元，1 公斤買幾元，可以列式為：

$80 \div 5 = 16$。

乙店 5 公斤橘子賣 75 元，1 公斤買幾元，可以列式為：

$75 \div 5 = 15$。

兩家店 1 公斤橘子差多少元，可以列式如下：

$16 - 15 = 1$。

教師應仔細說明上列二種做法，雖然有步驟不同，但是都是解決這類問題的恰當列式。

評量

評量重點：

1. 能解決加與乘的兩步驟應用問題。
2. 能解決減與乘的兩步驟應用問題。
3. 能解決連乘的兩步驟應用問題。

N-3-8 解題：四則估算。具體生活情境。較大位數之估算策略。能用估算檢驗計算結果的合理性。 **備註：**估算解題的布題應貼近生活情境。本年級剛學除法，因此估算問題須簡單。	n-II-4

先備：N-2-4。

連結：N-3-3、N-3-4。

後續：N-4-4。

基本說明

1. 關於估算的基本說明，如掌握高位數與配合生活情境教學，參見 N-2-4。教師在做估算布題時，應掌握確算不好算或沒有必要尋求確算答案時，才是估算的時機。學生能正確做估算，可以提升學生的數感。三年級估算的數字範圍，應配合 N-3-1、N-3-3、N-3-4。
2. 三年級學習估算，數字建議只用靠近整百、整千的數字，其原則請參考 N-2-4 說明。估算的本意是用簡單的計算解決應用問題，教師應斟酌學生的能力，不要讓估算過程變複雜，失去估算的本意。
3. 延續 N-2-4 之加減估算，本細目將數字延伸到四位數。問題之答案以整千為準即可，勿出現「幾千幾百」的情況（N-4-4）。
4. 乘法估算建議只做三位數乘以一位數，被估算之數字僅限被乘數。由於剛學除法，本年除

法估算只做三位數除以一位數，被估算之數字僅限被除數，商以整百或整十為宜。(參見釋例 2.、3.)

5. 無論是日常生活或數學課的計算，應進行活動，鼓勵學生發展利用估算察覺計算結果是否合理的經驗。(參見釋例 4.、5.)

條目範圍

1. N-2-4 只學習加減估算，三年級是第一次學習乘除估算，因此一定要等乘除法之確算教學已有充分練習與認識後才進行。建議乘除估算出現在下學期，並避免和確算出現在同一單元。
2. 估算問題應為合理自然的應用問題，其中也包括利用估算來檢查計算問題的結果。由於這對學生應用數學到日常生活非常重要，也不妨發展一些計算的練習題，讓學生學習用估算來檢查結果是否合理。
3. 三年級剛學除法，布題應簡單明白即可，並注意不要和原來的除法計算問題弄混。例如「298 顆糖果，每 3 顆裝 1 袋」，可裝 99 袋，剩 1 顆；或「297 顆糖果，每 3 顆裝 1 袋」可裝成 99 袋。這時如果用估算檢查，把糖果總數估成 300 顆，除以 3 得大約 100 袋，這和前述的 99 袋相比差不多，得知「商」99 應該是正確的。請注意教師命題時，不要將估算問題變得不自然或更複雜。
4. 檢查計算結果正確性並不只有估算的策略 (如檢查尾數)，其他非估算的檢查策略應在別的單元進行，避免混淆教學目標。

釋例

1. 四則估算會用到的計算，基本上是單步驟的加、減、乘、除計算，在估算布題時，加、減估算的問題，其數量範圍建議靠近整百、整千的數字；乘除估算的問題，由於三年級乘除計算的限制，對於被乘數、被除數有最多只能是三位數的限制。

   要指導學生如何恰當的估計數字，教師布題應留意數量範圍，只進行整百和整千的估算，其範圍建議如 190 到 210 估為 200；1900 到 2100 估為 2000 (其餘類推)。並留意不要給中間的數字，例如像 350 或接近 350 的數字，這類數字等到四年級時學習四捨五入等取概數的方法再來練習。
2. 乘法估算建議只做三位數乘以一位數，被估算之數字僅限被乘數。

   例：一件衣服賣 198 元，買 3 件大概多少元？哪一個選項是正確的？

   (1) 500　　(2) 600　　(3) 700

   教師引導學生思考，198 最接近幾百，學生可以容易找出 198 最接近 200，所以用200×3來估計買 3 件衣服的錢，學生可以簡單心算就得出 600。
3. 由於三年級初學除法，除法估算只做三位數除以一位數，被估算之數字僅限被除數，商以整百或整十為宜。

例如：橘子 396 個，每 8 個裝 1 袋，橘子全部裝完，袋數最接近多少？哪一個選項是正確的？

(1) 40　　(2) 50　　(3) 60

因為學生剛學除法，先不要直接問「大約可以裝成多少袋？」，避免學生對答案應是 49 或 50 產生疑惑。引導學生估計 396 最近幾百，學生可以容易找出 396 最接近 400，所以用 $400 \div 8$來估計袋數最接近多少，學生可以簡單心算就得出 50。

4. 估算的用途之一是協助檢查日常生活的計算是否正確。教師應進行活動，鼓勵學生發展用估算察覺計算結果是否合理的方法。

例：「媽媽買 599 元的衣服 2 件，店員告訴她總額是 1398 元，你覺得得合理嗎？怎麼檢查？」。

由於一件衣服約 600 元，2 件大約是 1200 元，但 1398 元已經接近 1400 元，因此知道店員一定算錯了。

這個例子，也可以改問「一件衣服賣 599 元，媽媽想買 2 件，她帶 1500 元夠不夠？」

5. 由於在學校學習計算也是學生的日常經驗，教師也應提醒學生可以用估算協助自己檢查計算是不是有錯誤。例如底下算式的計算答案都是錯誤的，問學生要怎麼樣很快察覺錯誤？

$1954 + 3089 = 6043$，

$4010 - 1999 = 3011$，

$395 \times 4 = 1880$，

$395 \div 5 = 69$。

評量

1. 評量重點：

(1) 能用大位數估算解決生活中的四則應用問題。

(2) 能用估算協助檢驗計算結果的合理性。

2. 評量注意事項：

除了釋例 5.這類問題外，教師布題應盡量與日常生活結合，讓學生能學以致用。

N-3-9 簡單同分母分數：結合操作活動與整數經驗。簡單同分母分數比較、加、減的意義。牽涉之分數與運算結果皆不超過 2。以單位分數之點數為基礎，連結整數之比較、加、減。知道「和等於 1」的意義。 **備註**：本年級分數教學只用「分數」一詞，不出現「真分數」與「假分數」的名詞，也不含帶分數的教學 (N-4-5)。應區分真分數與假分數之教學 (例如分開於上、下學期)。初步認識分數的應用時，情境應以連續量為主。若要處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位須為以整體數量為分母的單位分數 (如 1 盒餅乾有 6 塊，則只處理分母 6 之分數，不處理 2 或 3 的情況)。	n-II-6

先備：N-2-10。

連結：N-3-10。

後續：N-4-5、N-4-6、N-4-8。

基本說明

1. 承繼 N-2-10 之單位分數，本年度之分數教學目標為熟悉簡單分數之概念、符號與應用；以整數點數與單位分數為基礎，處理簡單同分母分數之比較、加、減；在和不超過 2 的情況下，初步認識超過 1 的分數記號和意義，並知道「和等於 1」的意義。
2. 分數教學和整數相同，要能以說、讀、聽、寫、做的過程，讓學生學習分數的記號和概念；做分數的數數，以建立分數的量感。同時也要學習如「$\frac{2}{3}$ 個披薩」的用法，讓學生知道整體 1 的單位為何。學習分數時，學生可能會混淆點數的單位 (如把 $\frac{1}{3}$ 個披薩稱為 1 塊披薩) 和整體 1 的單位 (即 1 個披薩)，建議教學時，最後都應強調後者 (這是分數應用的重點)，而在點數過程中，讓學生建立和整數經驗的連結，完成分數比較與運算的學習。學生到最後應熟悉「3 個 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{3}{4}$」之類的抽象理解，並能運用於分析分數的各種相關概念。
3. 作為分數表徵的「圓形模型」(如披薩)、「長度模型」(如直尺、繩子) 皆應在教學中充分發展，前者適合初學之溝通，後者和長度測量和數線模型有關。
4. 學生應運用整數經驗來理解同分母分數的分與合、比較、加減、整數倍的意義與計算方式。學生在理解分數運算的意義時，雖然可能要透過明確的整體 1 的單位 (如 $\frac{2}{6}$ 個披薩加 $\frac{3}{6}$ 個披薩是 $\frac{5}{6}$ 個披薩)，最後則應能在無單位的純分數進行計算 (如 $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$)。
5. 透過點數過程和圖示表徵，自然理解如 $\frac{4}{4}$ 個披薩是 1 個披薩，因此 $\frac{4}{4} = 1$。學生應透過底下算式，理解分數和 1 的關係與轉換：

   $\frac{6}{6} = 1$ ，$\frac{7}{6} > 1$，$\frac{5}{6} < 1$。

   $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$，$1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$。(1 的分與合對應整數 6 的分與合)

條目範圍

1. 本條目所謂「簡單分數」，應限定為分母不大於 12。
2. 建議區分真分數與假分數之教學（例如分開於上、下學期），並不含帶分數的教學。「真分數」與「假分數」不需出現在教學現場，可僅用「分數」。
3. 為避免混淆，建議初步認識分數的應用時應以連續量為主，如 $\frac{1}{2}$ 公尺、$\frac{3}{10}$ 公升、$\frac{3}{4}$ 公斤。其中需要注意的是重量，在三年級時，應假設所處理的為密度均勻的物體，因此重量連續量教學可透過分數平分的意義來處理。
4. 處理離散量情境，必須與連續模型表徵強烈結合，而且其計數單位需為整體數量為分母的單位分數，如 1 盒餅乾有 6 塊，只處理分母 6 之分數（如 $\frac{4}{6}$ 盒），而不用來處理分母為 2 或 3 的情況。
5. 在圓形或長方形模型中，學生應能察覺同一分數，透過整數點數可能有不同的表徵方式。教師切勿用「等積異形」的方式來說明與教學，擾亂學生的認知。

釋例

1. 接續二年級「單位分數的認識」後，三年級處理「簡單同分母分數」，除了分母限定在 12 以內，先利用連續量結合操作活與整數經驗，認識簡單同分母分數。

   例 1：拿出一條白色紙條，跟著老師先對摺，再對摺一次，打開這條紙條

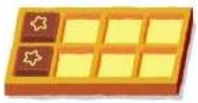
   (1)「這條紙條被「平分」成幾份？」

   (2)「把其中 1 份塗色，塗色部分是這條紙條的幾分之幾？」（複習單位分數）

   (3)「剩下的白色部分是這條紙條的幾分之幾？」

   紙條被分成 4 份，1 份塗上綠色，剩下白色有 3 份，是 4 份中的 3 份，記成$\frac{3}{4}$，讀做 4 分之 3。

2. 在離散量表徵，必須與連續模型表徵強烈結合，明示 1 和計數單位，也可使用實物表徵，如 1 盒巧克力有 8 顆：

   $\frac{2}{8}$ 盒

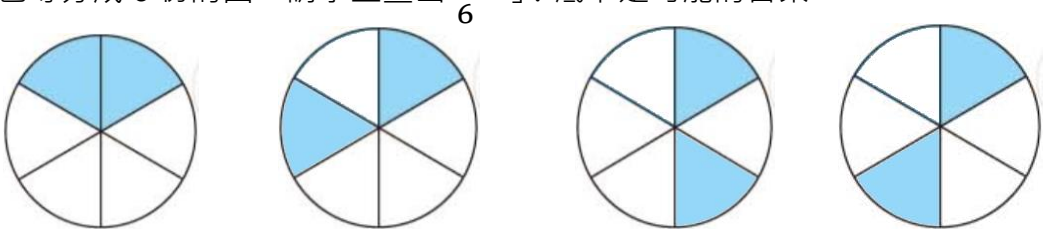
   $\frac{5}{8}$ 盒

   $\frac{8}{8}$ 盒

   提醒學生 $\frac{8}{8}$ 盒其實就是 1 盒。

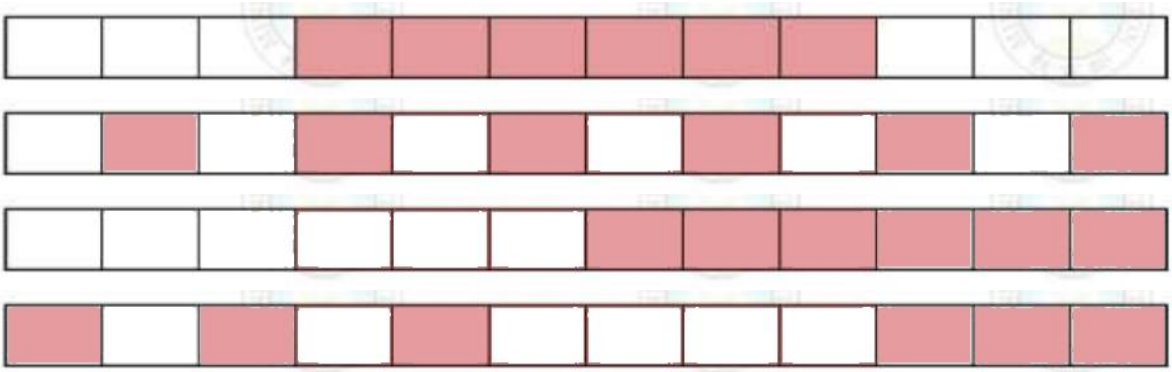
3. 分數的認識與表徵重點在結合整數點數經驗與單位分數。

(1)「給定已等分成 6 份的圓，請學生畫出 $\frac{2}{6}$。」：底下是可能的答案。

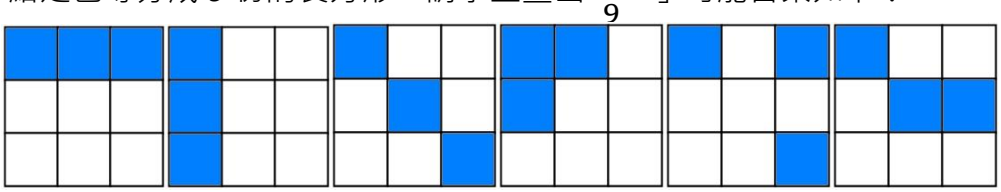


(2)「給定已等分成 12 份的紙條，請學生畫出$\frac{6}{12}$。」可能答案如下：

教師多讓學生熟悉不同的模型，上例是圓，本例是像紙條的瘦長方形，下例是一般長方形。



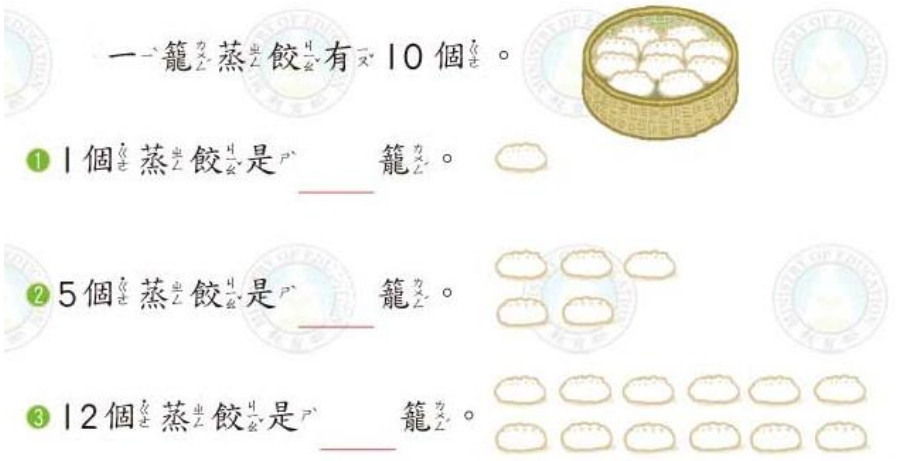
(3)「給定已等分成 9 份的長方形，請學生畫出 $\frac{3}{9}$。」可能答案如下：



4. 在分數教學會強調把 1 個物品平分成幾等份，其中的幾份是幾分之幾。例如 1 披薩平分成 8 塊，1 塊是 $\frac{1}{8}$ 個披薩，5 塊是 $\frac{5}{8}$ 個披薩，那 8 塊是 $\frac{8}{8}$ 個披薩，也是 1 個披薩。因此學生知道 $\frac{2}{2}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{8}{8}$ 都是 1，但也要練習把 1 寫成 $\frac{□}{□}$ **的形式**

5. 分數的加法和減法範圍較九年一貫數學領域擴增，不限制在真分數範圍或 1 以內，並能做比較和加減計算。但因為以概念的理解為主，故限制運算結果不超過 2。所以學習完真分數後，也要以整數點數的方式，認識不大於 2 的 (假) 分數，及其加法與減法。舉例如下：

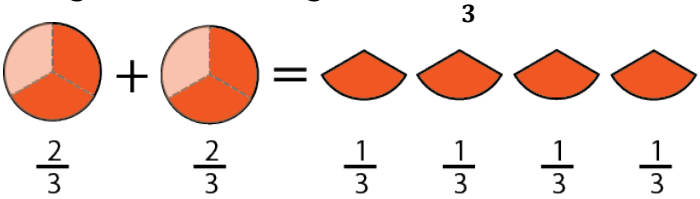
(1) 例 1：



(《部編本》第 6 冊 29 頁)

(2) 例 2：「 $\frac{2}{3}$ 個披薩和 $\frac{2}{3}$ 個披薩合起來是幾個披薩？」

善用圖示，掌握 $\frac{1}{3}$ 的個數，2 個 $\frac{1}{3}$ 和 2 個 $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ 合起來是 4 個 $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{3}$ 。



(3) 例 3：「做勞作小美用了 $\frac{5}{6}$ 條緞帶，小貞用了 $\frac{4}{6}$ 條緞帶，他們一共用了多少條緞帶？」

在解題時，必須強調 1 條的單位，並善用圖示或線段圖解說。

(4) 例 4：算算看

$\frac{10}{7}$ - $\frac{3}{7}$ =____ ；$\frac{3}{5}$ + 1 = _ _ ；$\frac{7}{4}$ - 1=____ 。

錯誤類型

1. 分數加法的典型錯誤是將分母部分相加成為新的分母，分子部分相加成為新的分子，例如 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ **得到錯誤答案**。教師須釐清單位 1 是什麼。把 1 分成 3 份，每份是 $\frac{1}{3}$ ，**二份合起來是** $\frac{2}{3}$ ，**所以** $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ **。**
2. 同分母分數相減少見 1. 的錯誤，但學生可能以為分母相減為 0 可省略，結果寫出 $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$ 的錯誤答案，只剩分子部分。建議教師回歸到 $\frac{2}{3}$ 是 2 個 $\frac{1}{3}$，2 個 $\frac{1}{3}$ - 1 個 $\frac{1}{3}$ 是 1 個 $\frac{1}{3}$，**也就是** $\frac{1}{3}$ 。

評量

基本評量：

1. 能說、讀、聽、寫同分母之分數。
2. 能透過整數點數的經驗，理解簡單同分母分數的加、減與比較，並能列出正確的分數算式。
3. 熟悉 1 的合成與分解（同分母分數層次）。
4. 能解決相關的簡單分數應用問題。

N-3-10 一位小數：認識小數與小數點。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「十分位」。位值單位換算。比較、加減（含直式計算）與解題。 **備註：**小數之學習必須與整數經驗緊密連繫。小數應用情境應以連續量為主。	n-II-7

先備：N-2-10。

連結：N-3-9、N-3-12、N-3-15。

後續：N-4-7。

基本說明

1. 小數和分數都擴展整數概念，但有很不同的表徵。概念上，小數可以想成特別的分數，宜借重分數學習的經驗，例如以 0.1（$\frac{1}{10}$）為單位的點數，過 1 的問題，比較、加、減的意義等。但小數位值表示也讓小數和整數學習緊密相連，如位值表、單位轉換與直式計算。另外，小數源自連續量應用，所以也應和長度、直尺經驗（長度模型）連結。相較於分數，小數教學上更應和連續量緊密結合。
2. 三年級學習一位小數，新增位值單位為「十分位」，位名的由來是因為 $\frac{1}{10}=0.1$ 的關係，這也是最基本的分數和小數轉換基礎。學生應知道 2.6 是 2 個 1 和 6 個 0.1 的和。
3. 應進行小數的說、讀、聽、寫、做活動，讓學生熟悉小數的意義和符號。利用點數的策略，理解小數的比較、加、減的意義。這些活動也應配合「直尺模型」來進行，和 N-3-11 連結，並作為日後數線學習的基礎（N-4-8）。
4. 三年級最後，學生應熟練用小數位值表示做比較。也能用直式計算一位小數的加、減。直式計算方式和整數時並無不同，重點放在小數點的處理，並注意到加減和乘法有不同的約定。
5. 在連續量的應用中，連結數與量的關連是理解小數的重要脈絡。事實上，測量物體長度無法剛好量完（S-1-1、S-2-3）的疑問，可以當作學習小數的自然動機。常用的學習入口是具「公分」「毫米」刻度之直尺（N-3-12）、有 10 等分刻度的 1 公升量杯等（N-3-15）。學生應知道 1 毫米是 0.1 公分，100 毫升是 0.1 公升，並能連結「公分」「毫米」轉換與「1」、「0.1」轉換（如 3 公分 4 毫米是 3.4 公分，或反過來）。基於測量情境的特質，學習小數並不需限制在 1 或 2 以內（見 N-3-9）。學生應知道「身高 144.5 公分」「體重 40.7 公斤」「水瓶容量 2.1 公升」的意義並習慣其用法。

條目範圍

1. 小數之學習，在位值表示上應與整數經驗緊密聯繫，但也應和分數 $\frac{1}{10}$ 的意義作連結。但一位小數教學不必遵守 N-3-9 分數和不超過 2 的規定。小數教學的說明與計算上應更著重整數經驗和位值表之運用，視為整數經驗的延伸。
2. 小數應用應以連續量為主。若要處理離散量，其基本原則同 N-3-9。而且最好總量為 10，

如 1 盒餅乾有 10 塊，0.3 盒餅乾是 3 塊餅乾。

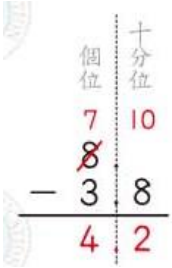
3. 可連結 N-3-12，做一位小數之公分數和幾公分幾毫米的轉換，如「2.7 公分」是「2 公分 7 毫米」。

釋例

透過 $\frac{1}{10}=0.1$ 的關係，熟練 0.1 為單位的點數後，結合整數經驗使用位值表做加法或減法的直式計算如下：

例 1：在 0.8 公升的綠茶中，加入 0.4 升的養樂多，共有多少少公升的綠茶養樂多？

例 2：原長 8 公分的蠟筆，用到剩下 3.8 公分，用掉了多少公分？



錯誤類型

不論是在計數或計算，常發生如「0.9 + 0.1 = 0.10」的錯誤，10 個 0.1　不能記成 0.10 也不能讀成「零點十」，教師應和整數位值表做連結，10 個 0.1 合起來必須「進位」成 1。因此 10 個 0.1 是 1.0 = 1。或用分數協助：10 個 0.1 是 10 個 $\frac{1}{10}$，因此是 $\frac{10}{10}=1$。

評量

基本評量：

1. 能說、讀、聽、寫一位小數，並能做位值單位之換算。
2. 能透過整數點數的經驗，理解一位小數的加、減與比較，並能列出正確的小數算式。
3. 能透過整數經驗，做一位小數之加減直式計算。
4. 能解決相關的一位小數應用問題。

N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。 **備註：**數線須從 0 開始。運用長度加減法（N-2-11），理解在數線上做加、減的意義。	n-II-8

先備：N-2-11、S-2-3。

連結：N-3-1。

後續：N-4-8。

基本說明

1. 數線是整合整數、小數、分數，理解這些數都是相同的數的重要模型，更是日後整合數系、坐標、坐標幾何；函數等重要課題的基礎。三年級的數線僅限於整數，學生要學習數線的報讀與標示，以及在數線上兩數比較、加、減的意義。
2. 數線的先備經驗是一年級開始的數字有序表示與點數方式（N-1-1），以及長度學習使用刻度尺的經驗（S-2-3）。小學的數線和直尺類似，只是半線，以左邊的 0 為起點，右邊不做限制，因此數線可以想成很長的尺，和常用的刻度尺不同。
3. 學生應理解數線和刻度尺類似，從 0 開始，以 1 為（長度）單位，往右「點數」，得 1、2、3、4、5……。學生應能報讀某點對應的數字，或指出某數字所對應的點。建立數線上「點」和「數」對應的習慣。
4. 學生應理解數線上點的「右左」和數的「大小」關係的對應。數線上的加減法有兩種先備經驗：(a) 整數的局部「順數」「倒數」，(b) 長度分解合成的情境。學生應整合兩者，讓日後學習更順暢。

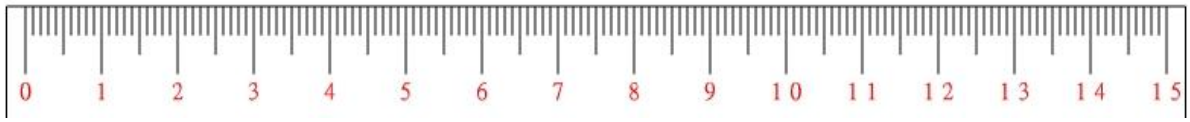
條目範圍

1. 三年級數線的初步學習，以及數線的正式評量，數線須從 0 開始。但學生由其生活經驗（包括二年級使用直尺的斷尺經驗），可以理解局部擷取的數線，因此教師基於教學有需要，仍可使用局部數線、示意性的簡易數線。
2. 並非所有長度加減法的題型都適合說明數線上加減的意義，教師應針對數學學習的目的慎選情境。
3. 本條目不要求學生自繪數線，課堂相關布題或評量，皆應附數線。

釋例

1. 數線引入教學：

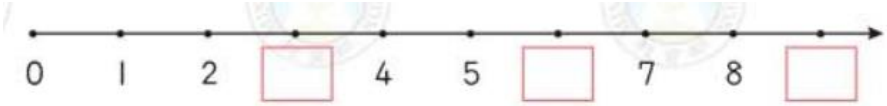
(1) 回顧直尺的結構：我們使用直尺（如下圖）來量長度，尺面上有很多刻度，最左邊的刻度是 0，標示 1 的位置表示從 0 到 1 是 1 公分，標示 7 的位置表示從 0 到 7 是 7 公分。



(2) 認識數線：下面的直線，最左邊的點是 0，在 0 的右邊找一點標上 1，取 0 到 1 的長度為單位，往右固定單位 1 取一點標出 2，再往右找一點標出 3，依此類推。下圖標示到 15，但如果直線夠長，還可以不斷標下去，所以通常在直線最右邊標上箭頭，表示向右還未結束，可以繼續標示。這樣的線我們稱為「數線」。

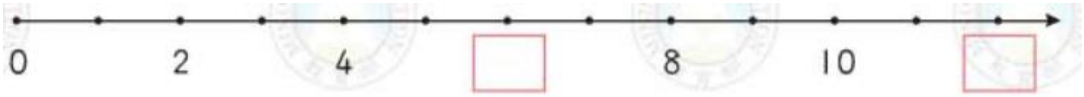
2. 數線的報讀與標示：(以下例題圖示取自《部編本》第 3 冊第 1 單元)

(1) 例 1：讀讀看，□中的數字是多少，填入□中。



(2) 例 3：先把代表 5 和 8 的點圈起來，並在下方寫出 5 和 8。(往前移到例 2)

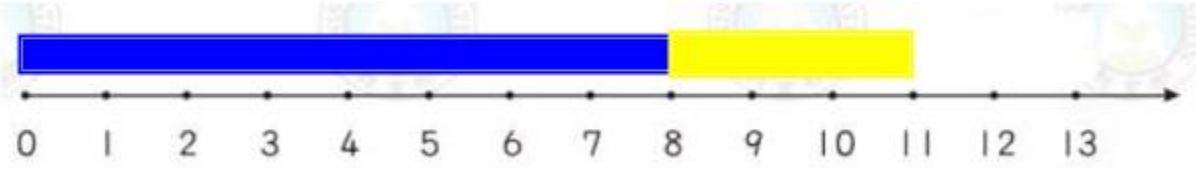
(3) 例 2：2 個一數，在□中填入代表點的數字。



註：教師也可做熟悉的如 5 個一數。

3. 數線上的加與減：

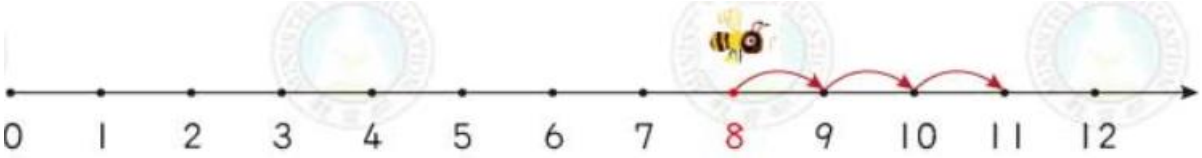
例 1：有二條紙帶，藍色紙帶長 8 公分，黃色紙帶長 3 公分，接在一起有多長？在數線上做做看。



藍色紙帶 8 公分，再往右加黃色紙帶 3 公分，就是兩條紙帶的總長。

$8 + 3 = 11$。

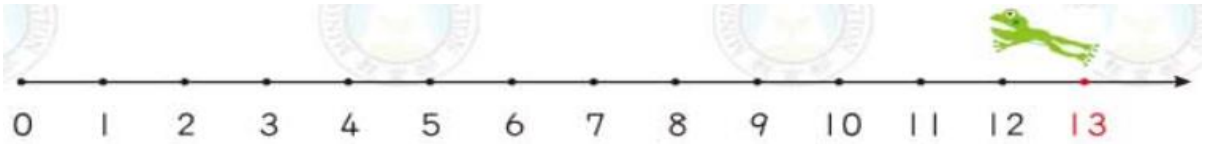
例 2：小蜜蜂從 8 向右連飛 3 格，會停在哪一個數字上？



$8+3=11$。

比較本例和上例，理解在數線上做加法的意思。

例 3：小青蛙從 13 開始向左跳 4 格，會停在哪一個數字上？



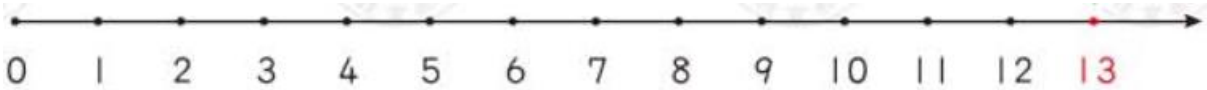
$13-4=9$。

◎ 雖然可以在數線上完成，但解題時仍要求學生列出算式求出答案。

4. 數線上的兩數比較：學生已熟悉整數比較，這裡主要是驗證數線上的數，越右邊越大。(以下例題圖示取自《部編本》第 3 冊第 1 單元)

(1) 例 1：找出 5 和 11 的位置，畫⊡作記號。

11>5　　11 在 5 的 (左邊　右邊)。



(2) 例 2：找出 50 和 60 的位置，畫△作記號。

50<60　　50 在 60 的 (左邊　右邊)。

雖然從簡易數線的引入，就是 0 在左邊，往右數字加大，但也要從這類題目，做如「數線上的數字，往右邊不斷的增大，往左邊不斷的減少。」或「在數線上，越右邊的數越大，越左邊的數越小」的總結。

錯誤類型

1. 在數線上計數時，重複計算開始的位置，例如從 8 往右 3 格，計數為 8、9、10。教師提醒學生應確定往右 1 格為 9，因此應計數為 9、10、11。
2. 數線上的加減，有時學生先進行加減計算，算錯時在數線上標示錯。

評量

基本評量：

1. 連結直尺經驗，能報讀與標示整數數線。
2. 理解在數線上做數的比較、加、減的意義與方法。

N-3-12 長度：「毫米」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 **備註：**基於 N-3-1 的限制，單位換算時，公尺數限個位數。自 3 年級後，量的計算可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。	n-II-9

先備：N-2-11。

連結：N-3-7、N-3-10。

後續：N-4-9。

基本說明

1. 承續 N-2-11，學習新長度單位「毫米」。認識「1 公分＝10 毫米」、並利用學過的「1 公尺＝100 公分」的經驗（N-2-11），認識「1 公尺＝1000 毫米」。由於長度是很多教師進行分數和小數的入口，可連結 N-3-10，知道「1 毫米＝0.1 公分＝$\frac{1}{10}$ 公分」。能做一位小數之公分數和幾公分幾毫米的轉換（如「2.7 公分」就是「2 公分 7 毫米」）。
2. 三年級起，也可教導學生認識量的常用英文單位。如公尺（m）、公分（cm）、毫米（mm）。
3. 單位換算。知道「3 公分 4 毫米是 34 毫米」，也知道「34 毫米是 3 公分 4 毫米」。不強調「毫米」化「公尺」的問題，若要做應透過先換「公分」，再換「公尺」的程序。
4. 同 N-2-11 之處理原則，常用單位教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單計算。

條目範圍

1. 「公尺」換算到「毫米」的轉換，公尺數限個位數。
2. 三年級後，量的計算皆可使用複名數協助加減計算（不做乘除），加強和位值系統的連結。本條目，進、退位只處理「公分」、「毫米」十進位之情形，其餘「公尺」、「公分」部分，建議不做進位或退位之直式計算。另外，也不做三個單位同時出現的複名數計算。
3. 學生雖然知道連乘的兩步驟計算，但受限於乘法經驗，尚無法處理如「3 公尺」化成「3000 毫米」的問題。因此「1 公尺＝1000 毫米」僅為告知。
4. 三年級直尺教學應含「毫米」刻度。

釋例

1. 「毫米」的實測、估測和量感：

   ● 量量看，50 元硬幣的厚度和課本的厚度分別是多少？

   估估看，把正確的答案圈出來。

   (1) 一粒米的長度大約是多少？

   5 公尺　　5 公分　　5 毫米

   (2) 一個小白積木的邊長大約是多少？

   1 公尺　　1 公分　　1 毫米

(3)小朋友將兩手臂打開後的寬度大約是多少？

1 公尺　　1 公分　　1 毫米

2. 利用複名數協助加減計算，以「公分」、「毫米」為例：

● 例 1：小樹苗第一個星期長了 1 公分 7 毫米，第二個星期長了 2 公分 1 毫米。它兩個星期共長了幾公分幾毫米？

(《部》第六冊第 11 頁)

● 例 2：小花貓出生時有 15 公分長，從出生到現在長了 2 公分 7 毫米，小花貓現在有多長？

(《部》第六冊第 11 頁)

例 3：小黑貓從出生到現在長了 3 公分 2 毫米，牠現在有 14 公分 5 毫米，小黑貓出生時有多長？

(《部》第六冊第 13 頁)

3. 長度單位換算問題：

注意「1 公尺=1000 毫米」不透過連乘計算，僅為告知。

● 例 1：哥哥的身高是 1 公尺 40 公分，可以換成多少毫米？

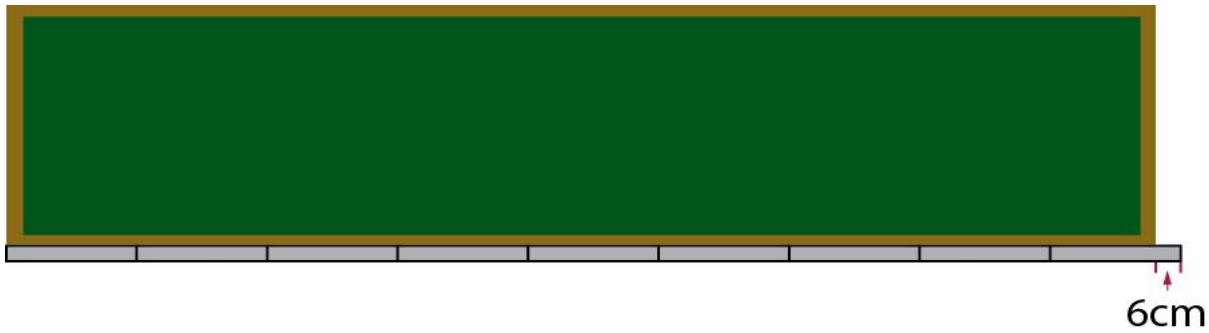
（《部》第六冊第 7 頁）

● 例 2：一枝竹竿長 2500 毫米，可以換成幾公尺幾公分？

（《部》第六冊第 7 頁）

4. 長度問題也可和二步驟問題結合：

● 例：亮亮用 30 公分尺測量黑板的長度，黑板的長度比用尺測量 9 次還少 6 公分，請問黑板的長度是多少？



對於學生讀題的可能疑義，教師可清楚說明（見上示意圖）。

先算：$30 \times 9 = 270$　　（先算測量 9 次的總長）。

後算：$270 - 6 = 264$　　（減去多出來的 6 公分）。

答：264 公分。

錯誤類型

1. 學生會忽略問題中使用的是不同單位，直接以測得的數值比較長度。
2. 回答問題時，答案只說或寫數值，沒有單位。教師應再次強調，這樣的答案並不完整，無法和他人正確溝通答案。

評量

1. 評量重點：

(1) 能用「毫米」進行實測與簡單估測，並從活動中掌握「毫米」的基本量感。

(2) 能做「毫米」、「公分」、「公尺」的單位換算，並應用於長度之比較和計算。

(3) 能進行複名數（複合單位）之加減法計算（本年級除「公分」「毫米」之外不含進退位，不做三單位。）

2. 評量注意事項：

(1) 估測和量感的培養以活動和討論為主，不宜做紙筆評量。若要進行紙筆評量，請參考釋例 1.。

(2) 長度常用單位的評量時答案要包含單位。

(3) 複名數不做乘法計算。

N-3-13 角與角度（同 S-3-1）：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 **備註：**用直尺或三角板的直角來認識與複製直角。教學應處理角大小與邊長長短或面積大小混淆之常見錯誤。	n-Ⅱ-9

連結：S-3-1。

後續：N-4-10 = S-4-1。

基本說明

1. 認識角的構成要素為頂點與兩邊。認識角度的概念關心的是「張開的幅度」，既不是角中區域的面積，也不是角邊的邊長。
2. 透過疊合做角的直接比較。能複製一角（描繪、剪紙、摺紙），並用來協助做角的間接比較。
3. 透過日常物體、直尺、三角板、正方形、長方形來認識直角經常出現的情境。能繪製直角。透過和直角的直接比較，認識比直角小的角是「銳角」（尖尖的角）；比直角大的角是「鈍角」（鈍鈍的角）。熟悉之後，學生應能以直角的直覺或以手大拇指和食指張角之模擬練習，協助判斷一角是否為銳角或鈍角。

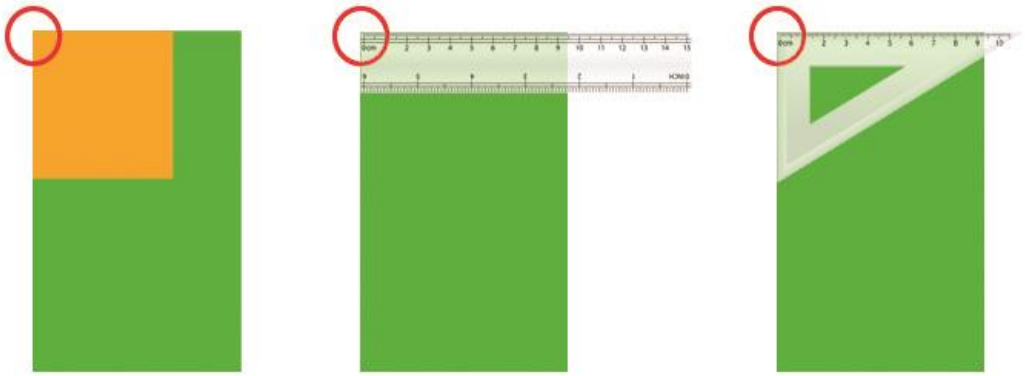
條目範圍

1. 學生可以直尺或三角板為工具，認識、描繪並複製直角。
2. 透過疊合的直接比較，釐清基本說明 1.中，邊長長短或面積大小混淆之錯誤。
3. 本條目只初步認識「銳角」和「鈍角」，不談「銳角三角形」或「鈍角三角形」。本年度也不談 180 度與超過 180 度的角，也不使用量角器。（N-4-10、S-4-1）。

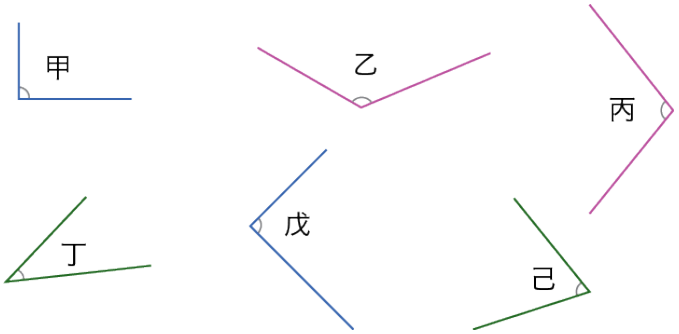
釋例

1. 認識直角、銳角和鈍角（不談銳角三角形或鈍角三角形）

(1) 例 1：請拿三角板中最大的角和正方形、長方形及直尺的角比一比，說說看，有什麼發現？



(2) 例 2：下圖哪些角比直角小？哪些角比直角大？說說看，你是怎麼知道的？



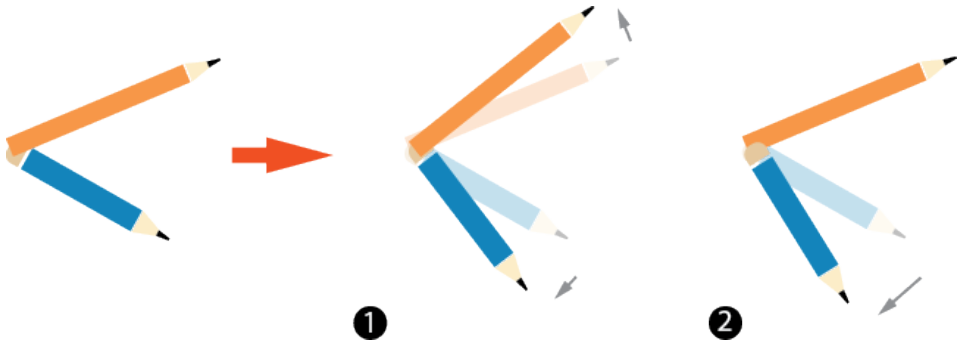
雖可使用工具，但教師應鼓勵學生透過直覺觀察。若在認識「銳角」與「鈍角」的教學後，也可問學生「哪些角是銳角？哪些是直角？哪些是鈍角？」。

(3) 例 3：想一想：生活中哪些角是銳角？哪些角是鈍角？說說看，你是怎麼知道的？教師可讓學生察覺「銳角」是尖尖的角；「鈍角」是鈍鈍的角。

2. 認識角的概念及角的比較之後，可做如下的應用：

例：試試看，拿出 2 枝鉛筆做一個角。

- 將你做角和同學的角比比看，誰的比較大？
- 想一想，怎麼做才能使角張開的比較大？



錯誤類型

1. 混淆角度的概念為角中區域的面積，如：面積大的角較大；又例如教師使用的三角板和學生使用的三角板大小不同，學生以為相應角的角度也不同。
2. 混淆角度的概念為角邊的邊長，如：邊長長的角較大。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能認識角的構成要素為頂點與兩邊。
   (2) 能做「角」的直接比較、複製和間接比較。
   (3) 能判斷比直角小的角是「銳角」；比直角大的角是「鈍角」。
2. 評量注意事項：
   (1) 透過具體操作，讓學生進行「疊合」做角的直接比較；或複製一角（描繪、剪紙、摺紙）進行角的間接比較時，以活動和討論為主。進行評量時，請考量學生操作時的誤差。
   (2) 布題判斷一角是否為銳角或鈍角時，勿取和直角很接近的角。

N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。 **備註：**應用平方公分板（百格圖），協助點數簡單圖形如正方形、長方形、三角形之面積，但不發展一般公式。	n-II-9

先備：N-2-12。

後續：N-4-11。

基本說明

1. 同 N-2-11 之處理原則，常用單位教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單計算。承續 N-2-12，學習面積的常用單位「平方公分」，其英文單位為「cm^2」。
2. 學習使用百格圖（每格 1 平方公分），去度量指定圖形區域的面積，並用點數得到面積的平方公分數。其中點數可包含兩個半格合為 1 格的點數（半格限橫切、縱切與對角切三種）。活動應包含簡單幾何圖形如正方形、長方形、等腰直角三角形（名詞不出現）的面積。
3. 包含畫出指定面積圖形的活動。
4. 透過直接比較（一區域包含於另一區域）以及 2. 的經驗，討論不規則區域的面積的範圍（如釋例 4.）。這項活動的重點是整合直接比較和本條目的學習，作為面積估算的前置經驗，非面積估算的教學。
5. 本條目的計算可包含兩圖形的面積總和或差異；點數的簡化（整數倍）；百格圖上指定的圖形面積。

條目範圍

1. 以點數計算處理簡單圖形如正方形、長方形、等腰直角三角形的面積，但不發展一般公式，此處只是先備經驗。教師教學可給出適當提示，讓學生靈活的計算面積（例如「一列有幾

個格子？」「總共有幾列？」)

2. 所有計算結果都不牽涉到分數或小數。半格面積的點數，以「2 個半格合成 1 格」的原則來點數，而不是做分數加法（因為 N-3-9 分數加法經驗不夠）。

釋例

1. 面積的量感與估測
   - 面積的量感比長度更不容易掌握，教師可建議學生以身上或身邊常用之物為單位協助估測，例如大拇指指甲是不是和「1 平方公分」差不多？用手掌印和正方形或長方形比較，看看大概是多少平方公分，並可用來協助估測課本的面積等。
   - 用下列問題，協助學生掌握適當的量感。

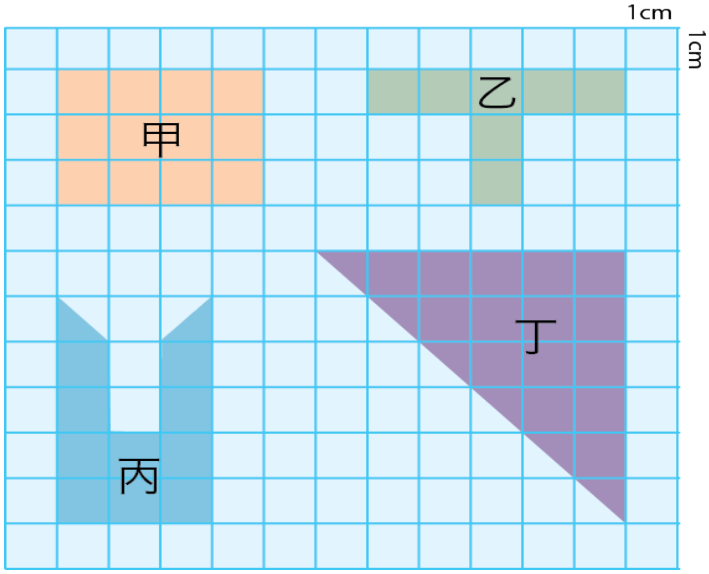
   (1) 一張郵票的面積大約是

   2 平方公分　　20 平方公分　　200 平方公分

   (2) 一張鈔票大約是

   1 平方公分　　10 平方公分　　100 平方公分

2. 圖形面積的討論
   - 例 1：先數出甲、乙、丙、丁圖形的面積，再回答下列問題：



   (1) 哪一個圖形的面積最大？

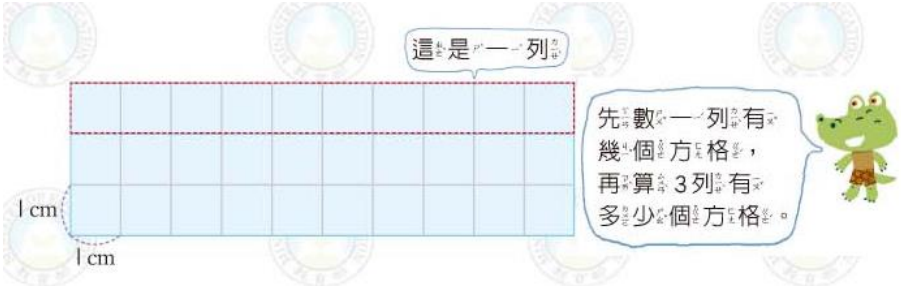
   (2) 哪兩個圖形的面積相等？

   (3) 甲圖形和乙圖形的面積合起來是多少平方公分？

   (4) 乙的面積比丁的面積小多少平方公分？

3. 透過乘法算式簡化點數（非面積公式教學）。

● 例 1：用乘法算算看，藍色長方形裡有幾個方格？面積是多少？



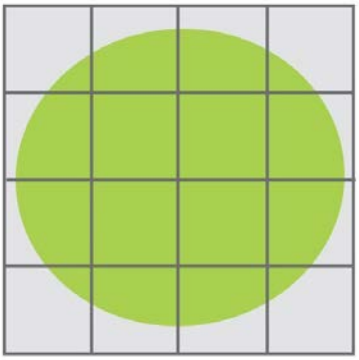
（《部》第五冊第 60 頁）

● 例 2：長方形的兩邊分別是 6 公分和 4 公分，面積是多少？

（《部》第五冊第 60 頁）

4. 援用基本說明 4，透過直接比較，討論不規則區域的面積的範圍。

● 例 1：小明說：「下圖的綠色區域面積比 4 平方公分大，比 16 平方公分小。」說說看，他是怎麼知道的。



綠色區域包含在一個邊長 4 公分的正方形內，所以綠色區域面積比此正方形面積小，但此正方形面積是 16 平方公分，所以綠色區域面積<16 平方公分。

綠色區域中有一個邊長 2 公分的正方形，所以綠色區域面積比此正方形面積大，但該正方形面積是 4 平方公分，所以綠色區域面積>4 平方公分。

錯誤類型

1. 學生若在點數圖形方格，尚未形成策略，而產生漏數或重複數的情形，可以引導其標示記號加以輔助。

2. 學生若於切割拼湊上的能力不足，宜讓學生對 S-3-4 幾何形體之操作加以補強。

評量

1. 評量重點：
   (1) 知道邊長 1 公分的正方形面積是 1 平方公分。
   (2) 能使用百格圖（平方公分板）協助實測（點數）或簡單計算幾何圖形的面積。
   (3) 能畫出指定面積的圖形。
2. 注意事項：
   (1) 進行圖形方格點數的簡化（整數倍）時，不發展一般面積公式（N-4-11）。
   (2) 計算結果都不牽涉到分數或小數。

N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 **備註：**基於 N-3-1 的限制，單位換算公升數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。	n-II-9

先備：N-2-12。

連結：N-3-10。

後續：N-5-15。

基本說明

1. 承續 N-2-11，學習容量常用單位「公升」、「毫升」(也稱為毫公升)，並認識「毫升」的英文單位為 ml。認識「1 公升 = 1000 毫升」(1l=1000 ml)。
2. 熟悉單位換算如「3 公升 650 毫升是 3650 毫升」或「1200 毫升是 1 公升 200 毫升」。由於容量是很多教師進行分數和小數教學的入口，因此可連結 N-3-10，知道「0.1 公升 $=\frac{1}{10}$ 公升=100 毫升」或「100 毫升=0.1 公升 $=\frac{1}{10}$ 公升」，並能做如「2.7 公升」就是「2 公升 700 毫升」的轉換。
3. 同 N-2-11 之處理原則，常用單位教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單計算，計算應包含加減乘除四則運算。加減計算可以使用複名數協助，加強和位值系統的連結。

條目範圍

1. 「公升」、「毫升」的轉換問題，公升數限個位數。
2. 量的計算皆可使用複名數協助加減計算（不做乘除）。三年級時複名數建議不做「公升」「毫升」之間的進位或退位之複名數計算。

釋例

1. 透過容量實測活動，建立量感：
   (1) 例 1：「請全班同學拿出水壺，利用量杯量量看，你的水壺裝滿水的容量是多少毫升？」

學生可透過 100 ml 的小容器，實測將裝滿水的水壺之容量後，分別回答。並建立對自己水壺容量的量感。

(2) 例 2：「假如每日健康飲水量是 1800 毫升，你的水壺至少要裝滿幾次水，才能達到目標呢？」這個問題屬於操作活動的一環，不是除法計算問題（否則除數是三位數），學生可以用自己的想法來回答、驗證和彼此溝通。如果教師找好 1.8 公升的容器或標示，學生可以實際操作，學生也可以做簡單的估算或計算。以 400 ml 水壺為例，

- 學生可以操作知道要裝滿 5 次才夠。
- 可以從自己的經驗猜測可能是 4 次或 5 次，再驗證如 400×4＝1600，還不夠，400×5＝2000，可以了，所以是 5 次。
- 雖然有些學生會用連加來算，但如果有 1800 毫升的實體水量可對照，應鼓勵學生以量感猜測，並用乘法來驗證。

(3) 鼓勵學生尋找日常生活中常用物品的容量，可以協助自己掌握對容量的量感，上述的水壺是一例，店裡的飲料杯或罐也常常標示容量等等。

2. 容量單位換算：

(1)「一桶果糖 3600 毫升是多少公升多少毫升？」

3600 毫升是 3000 毫升+600 毫升，但因為「1 公升=1000 毫升」，所以 3000 毫升是 3 個 1000 毫升，也就是 3 公升。因此，3600 毫升=3 公升 600 毫升。

(2)「一瓶柳橙汁有 2.7 公升，是幾公升幾毫升？也就是多少毫升？」（本題必須假設學生已有一位小數經驗）。

- 2.7 公升是 2 公升+0.7 公升，但「0.1 公升=100 毫升」，所以 0.7 公升等於 7 個 0.1 公升，也就是 7 個 100 毫升，等於 700 毫升。因此 2.7 公升=2 公升 700 毫升。
- 因為「1 公升=1000 毫升」，2 公升是 2 個 1000 毫升，等於 2000 毫升。所以 2 公升 700 毫升是 2000 毫升加上 700 毫升，也就是 2700 毫升。2.7 公升=2700 毫升。

(3) 上面的步驟是學生初學時可能的思考步驟，經過多次學習後，學生應能熟練換算。

3. 利用複名數協助加減計算：

(1) 例 1：「爸爸買了一桶 7 公升 560 毫升的紅色油漆和一罐 420 毫升的去漬油，把它們全部混合後，共有多少公升多少毫升？」

公升	毫升
7	560
+	420
7	980

答：7 公升 980 毫升。

(2) 例 2：「一桶紅茶有 18 公升 750 毫升，一桶奶茶有 16 公升 90 毫升，一桶奶茶比一桶紅茶多幾公升幾毫升？」

公升	毫升
	6 10
18	~~7~~50
−16	90
2	660

答：2 公升 660 毫升

評量

1. 評量重點：
   (1) 能使用「公升」、「毫升」進行實測與估測，並從活動中培養量感.
   (2) 能做「公升」、「毫升」的單位換算和比較。
   (3) 能做「公升」、「毫升」的計算和應用，解決生活中容量的問題。
2. 評量注意事項：
   (1)「公升」、「毫升」的轉換問題，公升數限個位數。
   (2) 使用複名數協助加減計算（不做進位或退位之直式計算）。

N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。 **備註：**基於 N-3-1 的限制，單位換算公斤數限個位數。可使用複名數協助加減計算（複名數不做乘除）。	n-II-9

先備：N-2-12。

後續：N-5-13。

基本說明

1. 承續 N-2-11，學習重量常用單位「公斤」(kg)、「公克」(g)。認識「1 公斤＝1000 公克」(1 kg = 1000 g)。
2. 重量的學習依賴秤重工具。學習「公斤」、「公克」時，常用 3 公斤秤和 1 公斤秤。學生應借重讀「直尺」的經驗來學習重量的報讀，同時應注意重量指針回到 0 時，不見得是 0 公斤。
3. 熟悉單位換算如「5 公斤 650 公克是 5650 公克」或「4840 毫升 4 公升 840 毫升是」。

若已學習過容量，也不妨引用其經驗，連結 N-3-10，告知學生「0.1 公斤 = 1/10 公斤=100 公克」或「100 公克=0.1 公斤 = 1/10 公斤」，能做如「1.5 公斤」是「1 公斤 500 公克」的轉換。由於重量並非視覺量，除非特別安排，學生不容易掌握其意義，教師不必過份強調。

4. 參考手冊 N-2-11（一般量處理原則）和 N-2-12（重量的特殊性）。重量單位教學活動應包含完整的實測與簡單計算，另外教師可設計教學活動協助學生察覺重量之量感，並回答簡單估測問題。計算應包含加減乘除四則運算。加減計算可使用複名數協助，加強和位值系統的連結。

條目範圍

1. 重量的量感和估測較不容易，教師勿過度評量。
2. 「公斤」、「公克」的轉換問題，公斤數限個位數。
3. 量的計算皆可使用複名數協助加減計算（不做乘除）。三年級時複名數建議不做「公斤」「毫升」之間的進位或退位之複名數計算。
4. 教學時，教師也可告知學生日常用的電子秤，但不使用來教學。

釋例

1. 透過重量實測活動，建立量感：
   (1) 例 1：「請全班同學拿出書包，利用秤子量量看，你的書包裝滿東西和沒有裝東西的時候分別有多重？」學生透過實測，測量書包裝滿時和空書包時的重量分別是多少。同時學習「公斤」和「公克」的報讀，後者不用太精確 。
   (2) 例 2：「算一算，你帶的物品有多重？」書包中的東西很多，很難一一測量再加起來，所以這兩個例子，提供一種測量多物件重量的有用方法。
   (3) 請學生找找看，挑出常用物品量量看，有哪些和 1 公斤差不多重，再左手、右手拿拿看，體驗它的重量感。
2. 重量單位換算：
   (1)「一顆西瓜重 4650 公克是多少公斤多少公克？」
   4650 公克是 4000 公克+650 公克，但因為「1 公斤=1000 公克」，所以 4000 公克是 4 個 1000 公克，也就是 4 公斤。因此，4650 公克=4 公斤 650 公克。
   (2)「一個鳳梨重量有 1.5 公斤，是幾公斤幾公克？也就是多少公克？」（本題必須假設學生已有一位小數經驗）。
   - 1.5 公斤是 1 公斤+0.7 公斤，但「0.1 公斤=100 公克」，所以 0.5 公斤等於 5 個 0.1 公斤，也就是 5 個 100 公克，等於 500 公克。因此 1.5 公斤=1 公斤 500 公克。

● 因為「1 公斤=1000 公克」，所以 1.5 公斤=1500 公克。

(3) 上面的步驟是學生初學時可能的思考步驟，經過多次學習後，學生應能熟練換算。

3. 利用複名數協助加減計算：

(1) 例 1：「家裡本來有 1 公斤 305 公克的米，媽媽再買 2 公斤 455 公克的米，現在家裡的米有多少公斤多少公克？」

公斤	公克
	1
1	305
+ 2	455
3	760

答：3 公斤 760 公克。

(2) 例 2：「小裕的體重是 38 公斤 700 公克，小琳的體重是 29 公斤 450 公克，兩人的體重相差多少公斤多少公克？」

公斤	公克
2 10	6 10
~~3~~8	~~7~~00
−29	450
7	250

答：7 公斤 250 公克。

評量

1. 評量重點：

(1) 能使用「公斤」、「公克」進行實測.。

(2) 能做「公斤」、「公克」的單位換算和比較。

(3) 能做「公斤」、「公克」的計算和應用，解決生活中重量的問題。

2. 評量注意事項：

重量的量感和估測較不容易，教師勿過度評量。

N-3-17 時間：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。 **備註：**時間加減問題以認識加減問題類型為原則（較深入者見 N-4-13），處理時刻或時間量等常見加減問題。本年級加減限（1）同單位時間量；（2）時、分複名數加減（無進、退位）。	n-II-10

先備：N-2-13。

後續：N-4-13。

基本說明

1. 認識比日短的時間單位：「日」(N-2-14 已介紹)、「時」、「分」、「秒」。知道「1 日 = 24 時」、「1 時 = 60 分」及「1 分 = 60 秒」，並能做如「2 時 45 分是 165 分」的換算。受限於乘除法經驗不足，現無法做兩階段的單位換算，也不做小單位化為大單位如「時」化「日」、「分」化「時」、「秒」化「分」的問題。
2. 同 N-2-11 之處理原則，「時」、「分」、「秒」這些常用單位的教學活動應包含完整的實測、量感、估測。由於時間的量感與估測較困難，教師勿過度評量。
3. 三年級的時間計算僅作時間加減，初步認識加減問題的各基本類型。時間加減計算包含時間量和時刻兩種時間概念，包含了「時間量的加減」、「時刻 + 時間量 = 時刻」、「時刻─時刻 = 時間量」、「時刻—時間量 = 時刻」各類型。

條目範圍

1. 基於日常需要，教師也可簡單介紹 24 小時制，只以時間報讀為主，不牽涉計算 (N-4-13)
2. 單位換算時，注意乘數需為一位數 (N-3-3)。不做兩階的單位換算 (如 1 時是 3600 秒)。
3. 加減問題以認識基本說明(3)時間加減類型為原則，而且因為時間單位進位複雜，無法如十進位系統做簡單單位換算，因此三年級加減限。
   (1) 「時間量的加減」限同單位時間量的加減。
   (2) 複名數的加減限最常見的「時」「分」和「分」「秒」，且無這些單位之間的進、退位計算。

錯誤類型

學生有時會混淆時間量和時刻的概念，教師可以用最簡單而具體的布題(包含時鐘操作)，讓學生理解問題的意義，並至少能從操作中，慢慢掌握解題的方法。

評量

評量重點：

1. 能使用「日」、「時」、「分」、「秒」描述時間長度與報讀時刻。
2. 從活動中培養基本的時間量感。
3. 能做「日」、「時」、「分」、「秒」的簡單單位換算和比較。
4. 能做基本的時間加減問題。本年度限於 (1) 同單位時間量；(2) 時、分複名數加減 (無進、退位)。

S-3-1 角與角度 (同 N-3-13)：以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。 **備註：同 N-3-13。**	n-Ⅱ-9

S-3-2 正方形和長方形：以邊與角的特徵來定義正方形和長方形。 **備註：**知道如何判斷斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。	s-II-1

先備：S-2-1、S-2-2、S-2-4。

連結：N-3-13(S-3-1)、N-3-14、S-3-4。

後續：S-4-3、S-4-5、S-4-8。

基本說明

1. 本條目的重點是從邊和角的特徵來認識最基本的平面圖形：正方形和長方形。和量有關的教學如周長和面積，不是本學年的重點。可以在活動中初步認識，但不做計算公式的結論。
2. 學生知道「正方形是四邊相等且四角為直角的四邊形」。知道「長方形是兩對邊相等且四角為直角的四邊形」。並能用直尺和三角板來檢查一四邊形是否為正方形或長方形。
3. 運用直尺和 N-3-13 的直角教學，可以畫出指定邊長的正方形和長方形。
4. 利用直接比較，說明邊長較大的正方形面積較大。

條目範圍

1. 用工具輔助，知道斜擺的長方形或正方形依舊是長方形或正方形。
2. 不進行其他平面圖形教學。(S-4-7、S-4-8)
3. 周長和面積只限定在活動中，不做公式的結論 (S-4-3)。
4. 雖然學生在認知上，可能傾向於認為正方形和長方形不同。但教師不宜討論正方形是不是長方形的問題，尤其不可做出「正方形不是長方形」的結論。

釋例

運用直尺和 N-3-13 的直角教學，畫出指定邊長的正方形和長方形。

(1) 例 1. 利用直尺和三角板畫出一個長邊 5 公分、寬邊 3 分的長方形。

● 步驟 1：用直尺畫一條長 5 公分的直線 (如圖 1 藍線)。

圖 1

● 步驟 2：用三角板在直線的兩端各畫出一個直角 (如圖 2 紅線)。

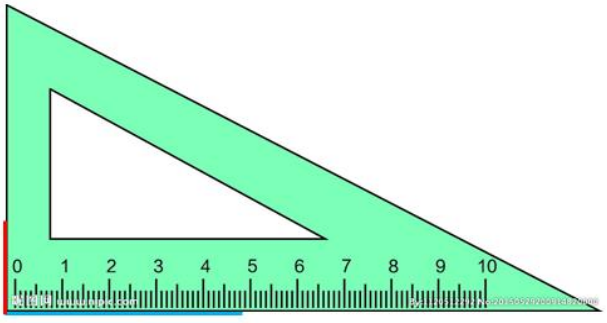


圖 2

● 步驟 3：用直尺在直角另一邊各畫一條長 3 公分的直線（如圖 3 紅線）。

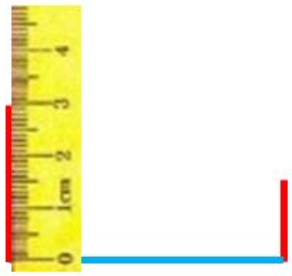


圖 3-1

圖 3-2

● 步驟 4：用直尺連接成一個長方形(如圖 4 藍線)。

圖 4-1

完成圖

(2) 完全相同的步驟，可以進行「用直尺和三角板畫出一個邊長 4 公分的正方形」的活動。

錯誤類型

有些學生認為斜置的正方形（看起來像菱形）不是正方形，若可以轉動或走動，教師可建議學生換個角度檢視，就知道這是正方形。另外也可以透過讓學生從正方形的「邊」、「角」特徵來理解。

評量

評量重點：

1. 能知道長方形的兩個長邊一樣長，兩個寬邊一樣長；正方形的四個邊一樣長。
2. 知道斜擺的長方形(或正方形)仍是長方形(或正方形)。
3. 可利用直尺和三角板畫出指定邊長的長方形或正方形。

S-3-3 圓：「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。能使用圓規畫指定半徑的圓。 **備註**：知道圓心是認識圓的重要定義元素，但是圓心並不屬於圓。	s-II-3

後續：S-5-3。

基本說明

1. 從常見的圓形物件開始（如時鐘、鍋蓋、輪子等），逐漸辨識出圓心、圓周和半徑這些圓的特徵。認識圓（周）上的點和圓心的距離（半徑）都相等。
2. 學習使用圓規畫圓，學生能說明為何圓規所畫的曲線是圓，並指出圓心的位置。能用直尺和圓規畫出指定半徑長度的圓。學生在學習中，知道用圓規筆尖與針尖間的距離，可協助測量線段的長度。

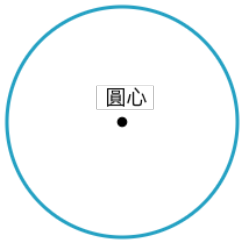
3. 半徑一詞既可以指圓心到圓上任一點的線段，同時也指此線段的長度。教師應讓學生慢慢習慣此常用約定。同理，也可用在直徑的學習上，既指兩端點在圓上且過圓心的線段，也是半徑的兩倍。
4. 可以利用直接比較，說明半徑較大的圓其面積較大。但不需要處理相對應的周長問題。

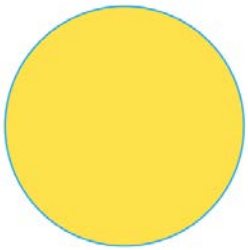
條目範圍

三角形、四邊形、圓在數學上指的是周界的部分。但在小學時為了溝通方便，也常常會包括內部的區域。教師在適當活動時可強調釐清，例如作正方形時（S-3-2）時，只畫出周界的四根線段即可；作圓時也只要用圓規作圓即可。「圓心」是認識圓的重要定義元素，老師應協助釐清，圓心在圓的內部，但並不在圓上。不過畢竟在小學時，用「圓盤」表示圓也是常見的習慣，因此教師進行圓相關活動時，應確認溝通沒有問題。

釋例

什麼是圓？生活中處處可見圓，圓堪稱一種完美的形狀。每個圓都有一個中心點，這個中心點恰好位於圓圈的中心，圓心在圓的內部，圓是如左圖中的藍色線條，每一點到中心點的距離都相等，但在小學有時為了溝通方便，圓還會包括內部的區域（右圖黃色區域）。因此教師在進行圓的相關活動時，應確認和學生的溝通沒有問題。





評量

1. 評量重點：

   (1) 認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」的意義。

   (2) 能用圓規畫出指定半徑的圓。

   (3) 透過直接比較，知道半徑長的圓面積比較大。

2. 評量注意事項：

   習慣上，半徑或直徑既指線段，也指線段長；圓既指圓周部分，也可能意指整個圓盤。教師在布題和平糧時應注意這一點，讓學生熟悉這些日後經常使用的約定，而非反其道而行。

S-3-4 幾何形體之操作：以操作活動為主。平面圖形的分割與重組。初步體驗展開圖如何黏合成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。 **備註：**以操作體驗平面圖形關係與空間感為目標，啟發學生探討與發現之興趣，但不做任何數學知識的歸納。展開圖活動只是初步體驗，勿做過多複雜推理活動。本條目不做操作以外的紙筆評量。	s-II-4

先備：S-2-1、S-2-2。

後續：S-2-1、S-2-2。

基本說明

1. 延續二年級以來的平面幾何與立體幾何經驗，讓學生體驗各種幾何活動，藉以作為發展四年級更豐富幾何活動之前置經驗。教師進行本條目的重點，不在知識的累積，而是從豐富的活動操作中，體驗各種幾何形體的特殊性與關係。建議應至少包含下列活動並請參考釋例。
2. 運用一年級的前置幾何經驗，分割一平面圖形並重組為其他幾何圖形。讓學生體驗全等操作與平面圖形間的關係。例如「將長方形依對角線剪開，可以重組出哪些簡單的圖形？」（除原來長方形外，還有兩種等腰三角形，兩種平行四邊形，一種箏形）。注意：學生可以在活動體驗這些圖形的特殊性，但不需如前述括弧中，使用這些圖形名稱。本活動是 S-5-2 平面圖形面積的前置經驗。
3. 在活動中體驗如何將立體形體的外圍分解成平面的展開圖，或反過來，體驗如何將展開圖組合成立體圖形；事實上，學生應有分割立體形體成展開圖，並將此展開圖逆向組合成原立體圖形的經驗（此時形體應較簡單）。本活動除了體驗立體空間感外，也可加強學生認識平面圖形和立體形體的關係，並作為高年級學習立體形體的先備經驗。(S-5-5、S-6-4)
4. 建議提供簡單的立體形體與其平面視圖間對應的活動。例如拿出一些正方體積木的堆疊形體，並讓學生經過移動或旋轉該形體，再從一些可能的平面視圖，選擇正確的圖形或排除錯誤的圖形。本活動並不強調這類問題的空間推理部分，而是藉由此活動讓學生熟悉立體形體在平面的表現方式，並在活動中初步學習做簡單的空間推理。
5. 本條目的重點是從活動中，體驗各種平面與空間形體的幾何操作，不是形體命名或定義的課程，也不必歸納出任何關於特定形體的知識結論。所以此活動也可視為數學和美勞的綜合活動，在偏重美勞體驗時，不妨處理較複雜而多元的形體，也可鼓勵學生創作與試驗。

條目範圍

1. 本條目可以斟酌在活動中做簡單推理，但切忌繞過實作活動，只做複雜的想像與推理活動，反而應該視本類活動為日後幾何推理必備的實際體驗。
2. 從彼此的比較中，學生應知道同一形體可能有不同的展開圖。另外，教師也可提供範例，

說明並不是所有類似展開圖的平面圖形都可組合成一立體形體。

3. 本條目不做操作以外的紙筆評量。

釋例

1. 本條目重視操作，教學時使用合宜的教具，教師應在操作活動準備、試作、教學注意事項如下：

(1) 操作活動準備：

- 教用教具須準備較大、用來展示或解說使用的形狀或立體。
- 依照活動，依據學生人數（或組別）加上教師試作數量準備教具。

(2) 各式教具(包含老師及學生使用)、文具用品(如剪刀、白膠)，在備課時應準備並清點，所需數量務必足夠。

(3) 試作：課前備課應試作學生操作部分，瞭解操作困難點、關鍵點、可能的問題，以期在課堂針對性給予建議、重點示範、分段操作或避免發生問題等。

(4) 教學注意事項：

- 操作用具的安全與正確使用的指導，如剪刀的使用。
- 操作教具發放、收回：依照班級上課常態，適時發放與收回教具(通常說明目標與注意事項再發教具，完成操作與討論後收回)。
- 操作中注意溝通清楚，配合教師用教具呈現，妥適處理試作的困難點、關鍵點，以及避免產生可能的問題。

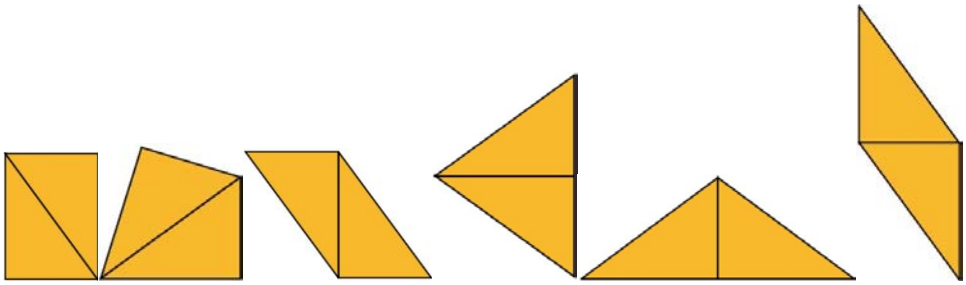
(5) 立體五連方塊可利用容易組合的方塊、有磁性的方塊或使用白色積木用白膠黏貼。

2. 平面圖形的分割與重組：

(1) 例 1：把長方形圖卡(左圖)沿著虛線分成兩個三角形（右邊兩圖）。

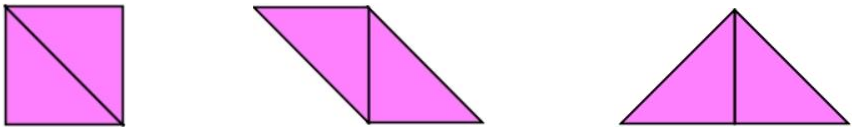
- 疊疊看，這兩個三角形正好可以疊在一起嗎？
- 拚拚看，把兩個三角形一樣長的邊拼起來可以拼成那些形狀。
  - 本題是操作活動，進行活動前教師先準備足夠的圖卡，供學生操作，圖卡分成兩個三角形準備安全剪刀讓學生體驗，或使用已有刀模的紙卡或由老師事先切割好。
  - 也可使用平行四邊形、等腰三角形等來剪和拚。
  - 雖然可以完全疊合，不必引入全等(S-4-6)。
  - 透過移動和旋轉，兩個三角形可以拼在一起，鼓勵學生多元操作，例如兩三角形加以旋轉、移動或是翻轉，可以拼成底下六種圖形（不要評量學生可拼成幾

種不同的圖形)。



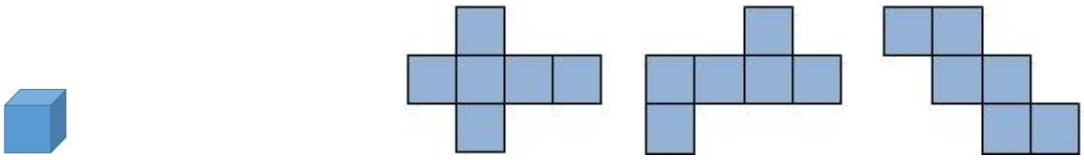
例 2：把正方形圖卡(左圖)沿著虛線分成兩個三角形（右二圖）。

- 疊疊看，這兩個三角形正好可以疊在一起嗎？
- 拚拚看，把一樣長的邊拼起來可以拼成那些形狀？
  可拼成底下圖形：



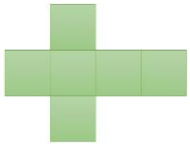
3. 立體形體的展開圖；用展開圖黏合成立體形體：

(1) 例 1：試試看，將正方體（左圖）的一些邊剪開，讓這個形體的面仍然連在一起，而且可以攤平在桌面上（稱為正方體的展開圖）。



- 不要求學生找出所有展開圖，但可利用全班同學得到的展開圖，知道一個立體形體的展開圖可能有許多種。
- 本例使用正方體。教師也可用長方體、柱體或圓柱體等。圓柱體的展開圖是兩個圓和一個長方形(或平行四邊形)的組合。
- 老師在備課時除準備足夠教具之外，也應實際操作了解學生的困難，上課時才能提供協助。另外，需準備多個較大的教師用立體，提供學生多種展開圖的樣式(不用窮盡)。

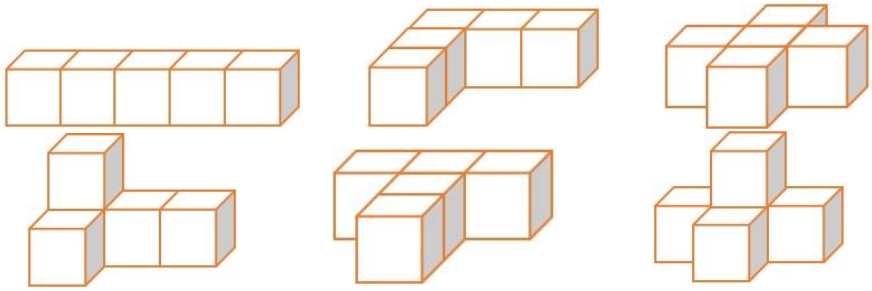
(2) 例 2：試試看，把盒子的展開圖如下圖，重新黏成立體的盒子。



- 可配合美勞體驗，活動進行前，教師應準備好多個展開圖、膠帶或適合黏貼的物品。
- 準備展開圖教具，可參考本條目最後附錄 1。

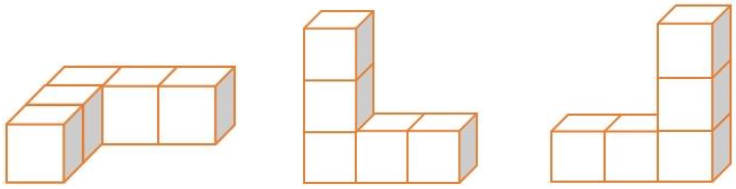
4. 立體形體間的對應與操作的活動：本例題以 5 個積木來進行，這是上限，若教師想先進行更簡單的 4 積木活動也可以。

(1) 例 1：請同學參照下圖用 5 個正方體積木組成一個立體形體。請同學比較看看（移動和旋轉），彼此做的是一樣的還是不一樣的立體形體？



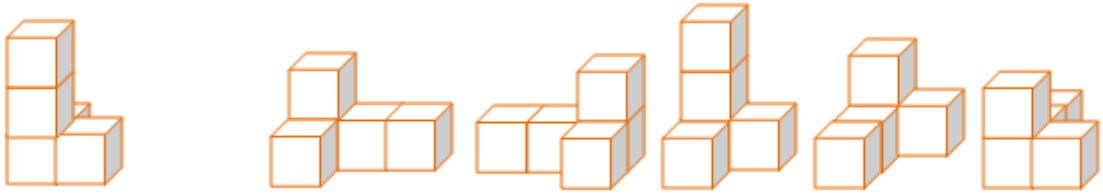
- 可配合美勞體驗，組合積木或黏合白色積木。
- 學生只要做出幾個立體形體即可。本例旨在仿製和實際操作比較，和立體推理無關。
- 至少都有一個面連在一起的 5 個正方體積木，不妨簡稱為五連方塊。五連方塊的各種造型參見本條目附錄 2。

(2) 例 2：「觀察看看，底下三張圖是同一個立體圖形嗎？」若學生有疑問，可以繼續活動：「**仿下面三圖製作立體形體**。再轉轉看，看看這三個形體是一樣的嗎？」

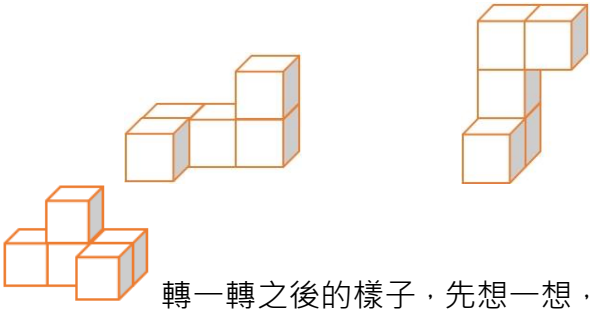


- 經過移動和旋轉最後會相同的就是一樣的立體（高中以前暫不考慮空間鏡射的全等），本例重點在學生的操作，觀察一個立體在不同的視角所看到的樣子。

(3) 例 3：「仿作左圖積木，轉轉看，可以將它擺成右邊哪些圖的樣子？」

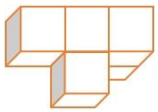
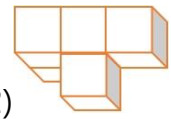
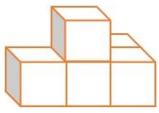
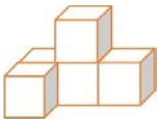


(4) 例 4：「下面兩圖是同樣的立體嗎？想想看，再用積木模仿做出來。檢查看看一不一樣，說說看你是怎麼做的。」



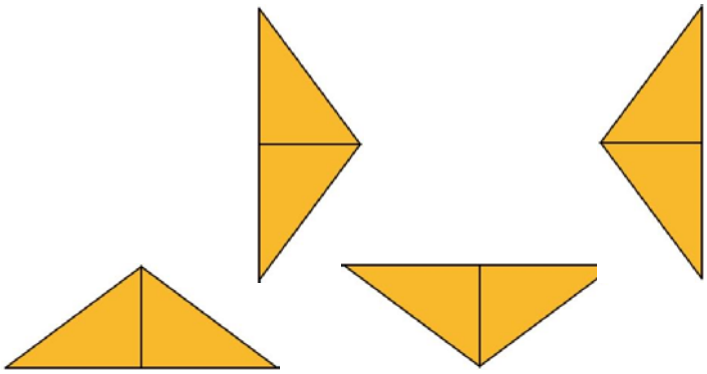
(5) 例 5：下面哪個是 轉一轉之後的樣子，先想一想，再用積木仿製，轉一轉，

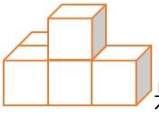
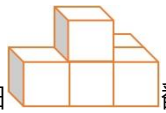
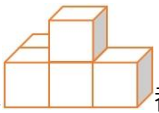
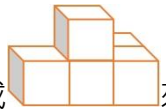
看看你的想法對不對。

(1)  (2)  (3)  (4) 

錯誤類型

1. 學生認為底下四個圖是不同的圖形。這是溝通的問題，教師告訴學生轉轉看就知道是相同的圖形。



2. 誤認  是可以由  翻轉得到。教師可針對邊側突出的兩個積木，指導學生怎麼翻轉  都無法變成  來驗證。

評量

1. 評量重點：

   本條目以操作活動為主，只做操作評量，以操作活動評量以下重點：

   (1) 能正確完成平面圖形的分割與組合。

   (2) 能將立體形體分解成平面的展開圖。

   (3) 能將展開圖組成立體形體。

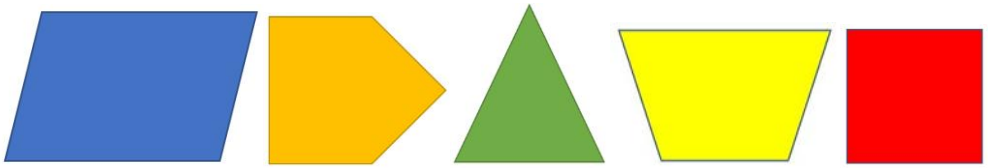
   (4) 能利用白色積木進行造型活動，並能旋轉、翻轉或移動成指定的樣貌。

2. 評量注意事項

   本條目以操作活動為主，除正確操作外，應以溝通和釐清錯誤為主。

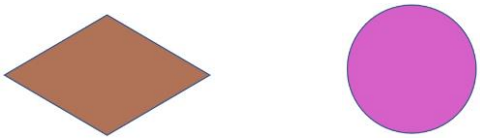
探索

1. （探索，適合教師有充分教學時間再進行）把下面的圖卡剪一刀（沿直線剪開）分成兩部分，再拚成一個長方形，做做看。



(1) 本例以操作為主，預設長方形與前例剪和拚的經驗，教師可引導學生嘗試怎麼剪，才能拼成長方形(例如先摺看看再剪)。本例不牽涉圖形命名，教師可以顏色提示。

(2) 並不是所有的圖都能剪一刀拼成長方形，如下圖。



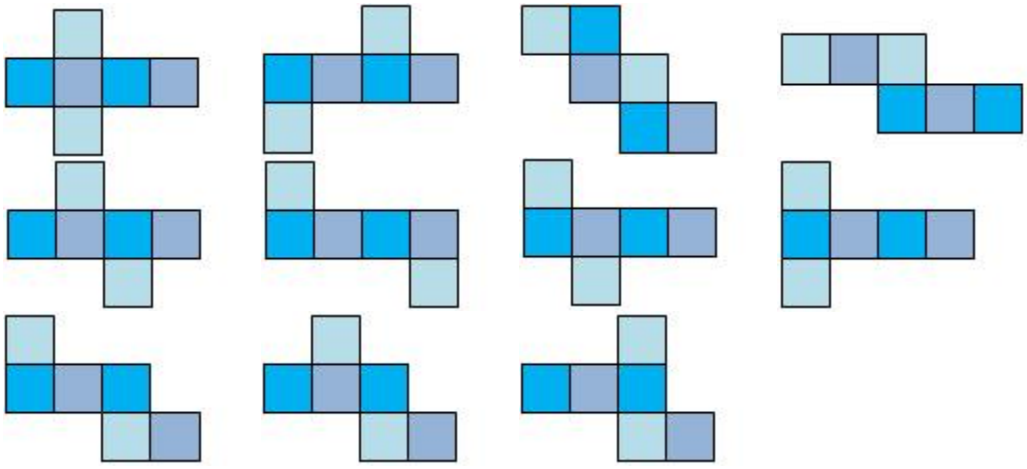
2. （探索，適合有充分教學時間再進行）

「試試看， 可以黏成立體的盒子嗎？」

本探索旨在讓學生知道，並不是有六個面、看起來像展開圖的平面圖形都可以組成一個盒子狀的立體。

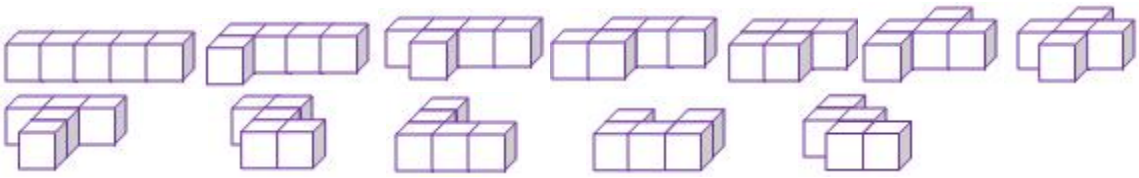
附錄

1. 正方體展開的 11 種展開圖。

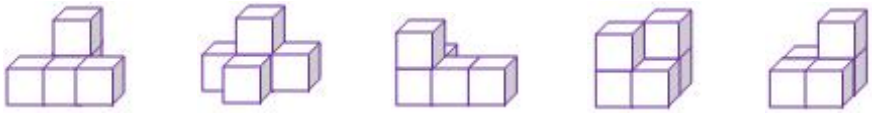


2. 五連方塊共有 29 種：

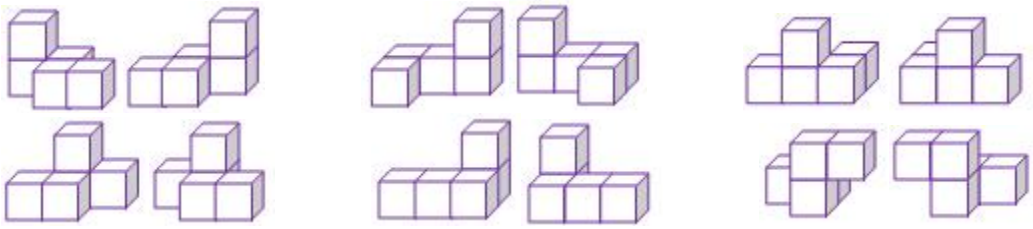
(1) 一層的圖形有 12 種：



(2) 二層以上自鏡射對稱的有 5 種：



(3) 二層以上互為鏡射對稱的有 6×2＝12 種：



R-3-1 乘法與除法的關係：乘除互逆。應用於驗算與解題。 **備註：**理解例如「3 的幾倍是 15」、「什麼數的 4 倍是 12」要用除法列式解題。	r-II-1

先備：N-2-9。

連結：N-3-4、N-3-6。

基本說明

1. 在除法教學中 (N-2-9、N-3-4)，學生已初步在「十十乘法」範圍中經驗過乘法和除法的互逆關係，同時，更在 N-3-6 的乘除法解題活動中，學習並應用此重要關係。
2. 乘法的排列模型最適合用圖示說明乘除互逆的關係，教師應在教學將「分裝」(包含除)與「平分」(等分除)類問題皆轉化為此模型，理解能用互逆關係解題的理由。
3. 乘除互逆的常見應用是驗算，例如計算得 84÷7＝12，可用乘除互逆，檢查 12×7 是否等於 84。
4. 若要檢查學生是否能抽象理解乘除互逆的關係，可以運用含括號的算式問題如 8×(　)＝72；(　)×3＝42；72÷(　)＝9；(　)÷7＝13，讓學生在「十十乘法」範圍中練習，同時教師應鼓勵學生將答案代入括號內做驗算。

條目範圍

1. 應用乘除互逆到驗算時，原則上只用乘法驗算除法答案，不用較困難的除法驗算乘法答案。但若有靈活的學生要使用，也不宜禁止。
2. 承續乘法的「倍」用詞，知道「3 的幾倍是 15」「什麼數的 4 倍是 12」可用除法來列式與解題。
3. 「乘除互逆」一詞建議不出現在教學中，也不需另立單元教學。
4. 基本說明 4 的練習不應該附著在應用情境之上，學生才能專心理解乘除互逆關係。

評量

評量重點：

1. 能理解乘除互逆，並運用於驗算和解題。
2. 能利用乘除互逆解決單純的有括號的算式問題。

R-3-2 數量模式與推理(Ⅰ): 以操作活動為主。一維變化模式之觀察與推理，例如數列、一維圖表等。 **備註:** 含學生之簡單推理與說明。本教學活動不可出現公式，此非本條目之學習目標。可結合表格教學（D-3-1）。	r-Ⅱ-2

連結：N-3-4、D-3-1。

後續：R-4-2。

基本說明

1. 模式的察覺是科學的起步，能夠察覺、描述、分析、紀錄、應用模式，人類才得以進一步的建立知識。人類最早是在變化中察覺模式，因此最初學習的是一維的變化模式，本條目初步探索這個有趣的課題。
2. 本條目在操作活動中進行，教師可以提出各種系列(一維)已含簡單規律的文字系列、圖象、物件組合、數字、(一維)表格等，啟發學生觀察變化的模式，並能說明與溝通。教師在適當的問題裡，還可以要求學生繼續該模式，推理下一步、兩步的變化。
3. 教師的問題必須暗含規律，並且斟酌學生能理解與推理的程度，以學生能體認到觀察模式的樂趣為前提。問題或內蘊規律過難，對小學生相當於紊亂，反而不利於本條目的學習目標。

條目範圍

1. 本條目的重點是在活動中，啟動學生察覺模式的興趣，並希望學生能樂於說明、分析與簡單推理。不可要求學生用公式來表示規律(R-6-3)，也不要求學生做許多步(例如超過三步)的預測。
2. 教師的問題要豐富而多變化，數列和一維表格比較形式化，應該擺在活動的後面，也不應該是模式活動的全部。
3. 無規律的一維表格（D-3-1）如真實的身高或體重紀錄不適合進行本條目。
4. 教師的布題最好能規則明顯，易於察覺或猜測。但一維模式的觀察畢竟是一種歸納，規則並非只有一種。評量時，教師切莫以為自己心中的規律是「正確」的規則。若學生對於變化的規律見解不同，應請學生說明，合理者皆應鼓勵。

釋例

1. 一維模式活動，重點在讓學生延一個方向察覺變化的規律，並能做說明，或依據學生發現的規律，猜測下一個項目。一維模式的布題有兩種主要的方式，請見下面釋例。

   有些學生可能未能找到規律，無法溝通或猜測下一個，此種狀況可讓找出規律的同學先行發表，就容易溝通或找出規律。

2. 第一類：逐項呈現。(注意：有些變化可以延續到無窮，有些不行)

   (1) 簡單數列：

   - 1 、 2 、 3 、 4 、 5、 6、(　　)。
   - 1 、 3 、 5 、7 、 9 、 11、(　　)。
   - 10、 9 、 8 、7 、 6 、5、(　　)。
   - 6、16、26、36、46、56、(　　)。
   - 1、10、100、1000、10000、(　　)。
   - 19、28、37、46、(　　)。

   (2) 符號列：

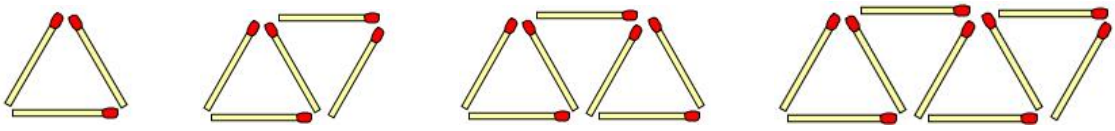
   - ○○○○○○○○○○ 、○○○○○○○○ 、○○○○○○ 、○○○○、(　　)。
   - ⇄、⇆、⇄、⇄、⇄、(　　)。
   - ○、○▲、○▲★、○▲★○、○▲★○▲、○▲★○▲★、(　　)。

   (3) 與幾何圖形結合：

   - 「想想看，第五個圖形是什麼？畫畫看。」

   (4) 模式和數量結合。例如底下是用火柴棒連著擺放成三角形。

   - 「想想看，第五個圖形應該怎麼畫或怎麼擺？」

   - 「第五個圖形要用到幾支火柴棒？第六個圖形呢？」

     教師可引導學生用表格來記錄，並觀察數量的變化

三角形數目	1	2	3	4	5	6
火柴棒數	3	5	7	9	11	

   (5) 餘數的規律（本問題也適合出現在 N-3-4)。

● 例 1：除以 2 的餘數規律。

算式	2÷2	3÷2	4÷2	5÷2	6÷2	7÷2	8÷2	9÷2	10÷2
	● ●	● ● ●	● ● ● ●	●● ● ●●	●● ● ●● ●	●● ●● ●●	●● ●● ●● ●●	●●● ●●● ●●	●●●● ● ●●● ●
餘數	0	1	0	1	0	1	0	1	0

教師可同時介紹奇數和偶數的概念。

● 例 2：除以 3 的餘數規律

算式	3÷3	4÷3	5÷3	6÷3	7÷3	8÷3	9÷3	10÷3	11÷3
	● ● ●	● ● ● ●	●● ●● ●	● ● ● ● ● ●	●● ● ●● ●●	●● ● ●● ● ●●	●● ● ●● ● ●● ●	●●● ● ●●● ●●●	●●● ● ●●● ● ●●●
餘數	0	1	2	0	1	2	0	1	2

3. 第二類：整體呈現。這是第一類的特例，但是呈現的方式比較緊湊又有趣。

(1) 雙色棋子的擺放規律：

● 「想想看，下一顆是黑子還是白子？」

●○●○●○●○●○

這類問題也可改寫成第一類：

●、●○、●○●、●○●○、●○●○●、……

或

1、10、101、1010、10101、……

● 「想想看，下一顆是黑子還是白子？」

○●●○○○●●●●

(2) 符號擺放規律

● 「想想看，下一個是○、▲還是★？」(同 (2) 2. 最後一題)

○▲★○▲★○▲★○▲

● 「想想看，下一個是那一個方向的箭頭？」

4. 混合的模式：這類問題較難，建議比率要少，而且變化因素限兩種

(1)「想想看，下一個是什麼？」

1、11、102、1003、10004、100005、(　　)

(2)「想想看，接下來是什麼記號？」

評量

1. 評量重點：

   在活動中，察覺一維的變化模式，並能說明，並做一、兩步的推理。

2. 評量注意事項：

   參考條目範圍 4。教師切忌以自己安排的規律為標準答案，只要學生言之有理皆應鼓勵。本條目的重點是學生能察覺模式並做合理的說明推理。

D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。 **備註：**製作表格不限於日常資料統計性題材，也可應用於觀察數量模式的變化(R-3-2)。	d-II-1

先備：D-2-1。

連結：R-3-2。

後續：D-4-1。

基本說明

1. 以操作活動為主。學生學習報讀、說明與製作和生活相關的表格。本條目相對於低年級的非正式圖表，學習較正式的一維和二維表格，格中填寫的是數字。在低年級曾做過的統計蒐集與統計活動，應配合年級的增長，再進行完整的製作一維表格活動。
2. 一維表格通常表示考慮的因素只有一個，例如「各班人數表」是以不同班級為考慮因素、「餐廳簡單菜單」是以不同的品項為考慮因素。
3. 二維表格（含列聯表）表示考慮的因素有兩個，例如「各班閱讀調查表」可以想成兩個因素：讀物種類與班號；「各餐廳菜目比較表」是以餐廳和品項為考慮因素。
4. 常用的二維表格範例如功課表、火車時刻表，是更複雜的二維表格，可以作為更深入又有用的範例來學習。

條目範圍

1. 製作表格可不限於日常資料蒐集與統計的題材，也可應用於觀察與分析數量模式的變化。（R-3-2）
2. 小學時期還不需強調表格的名稱與嚴格格式。但教師可提供範例，並說明適當的名稱可以加強溝通的效果。

釋例

1. 製作表格可不限於日常資料蒐集與統計的題材，也可應用於觀察與分析數量模式的變化。

(1) 例 1：下面的表格是植物園中四種樹木的種植的數量：

樹的種類	棵樹
桂花	200
油桐	100
台灣欒樹	50
樟樹	50

可以根據上表。問下列問題：

- 「哪種樹的數量最多？」
- 「樟樹的數量和哪一種樹一樣多？」
- 「桂花的數量和另外三種樹的總量相比，誰多誰少？」

(2) 例 2：下表表示水果店每日的蘋果賣出的數量：

星期	星期一	星期二	星期三	星期四
數量	75	50	10	5

根據上表，問下列問題：

- 「星期一賣出多少蘋果？」
- 「哪一天賣的蘋果最多？哪一天最少？」
- 「你會怎麼描述水果店的蘋果生意？」
- 「水果店的生意越來越差嗎？討論看看。」(水果店不一定只賣一種水果；也許這種蘋果已經到產季最後等等)

2. 二維表格的列連表範例：

例：下表為景新國小三年級學生做完健康檢查之後，保健室做的全年級肥胖程度表。

	不肥胖	輕度肥胖	中度肥胖	總計
男	45	19	6	
女	60	18	2	
總計				

根據上表，回答下面問題：

- 「三年級男生有多少人？」
- 「輕度肥胖的學生共有多少人？」
- 討論一下或由教師引導，將各項目的人數，計算後記入恰當的格子裡。
- 「男生的人數比較多？還是女生比較多？」
- 「男生還是女生的肥胖人數（含輕度肥胖和中度肥胖）比較多？」
- 「男生中是不是不肥胖的人數>輕度肥胖人數>中度肥胖人數？女生呢？不論性別呢？」
- 請學生把最右邊的男生數和女生數加總？同時也把最下邊的不肥胖人數、輕度肥胖人數、中度肥胖人數加總？
- 「上面的兩種加總人數答案一樣嗎？說說看，為什麼？」

評量

評量重點：

1. 能報讀、說明與製作生活中的一維表格。
2. 能報讀、說明與製作生活中的二維表格。

4 年級學習內容解析

N-4-1 一億以內的數：位值單位「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」。建立應用大數時之計算習慣，如「30萬1200」與「21萬300」的加減法。 **備註：**教學可進行到最後的「一億」，但不進行超過一億的教學。	n-Ⅱ-1

先備：N-3-1。

連結：N-4-1、N-4-2、N-4-4、N-4-9。

後續：N-5-1。

基本說明

1. 學生一般的生活經驗很少超過「萬」，大數的學習意味著學習經驗不在自限於環繞學生的日常經驗，因此應配合大單位（N-4-9）、自然科、社會科或閱讀的學習內容，同時擴展學生的數學學習與自然或社會知識。
2. 在三年級已學習「萬」以內的「個」、「十」、「百」、「千」位。四年級學習「億」以內的新位值單位「十萬」、「百萬」、「千萬」。學生應認識新位名的關係，並能讀寫八位數。學生理解超過萬的部分，可與過去「個、十、百、千」之經驗相連結。
3. 到四年級，學生應熟練加減直式計算。八位數的計算雖然比較瑣碎，但教師仍應確認學生原則上會計算。
4. N-4-1 的數字範圍是大數的入口，所以也要開始學習大數的處理方式。例如將 23400000 簡寫成「2340 萬」的習慣；可以運用來做比較，如 2501 萬 > 2500 萬；在數字簡單情況，可以運用類似單位的想法，做如「30 萬 1200+6 萬 500 = ？」的計算。
5. 學習大數的情境，有時問題只需要大概的數值就能回答，可將數量較少的部分捨棄不計，因此學生也應學習概數並利用來進行估算（參見 N-4-4）。

條目範圍

1. 教學可進行到最後的「一億」，但不進行超過一億的教學。（N-5-01）
2. 所謂熟練加減直式計算，原則上是位數不設限時仍理解計算，但也不要過於繁瑣，重點在於不讓學童自我侷限於較小位數的計算，並且有處理大數計算的經驗。
3. 學生還不需要知道「千萬」是「十萬」的 100 倍。

釋例

1. 建立應用大數時之計算習慣，如「30 萬 1200」與「21 萬 300」的加減法。這種加減法也可以利用類似量複名數加減法的方法來計算。並提醒注意從「萬」退位時，要換成 10000，而非習慣的 10。

	萬	一
	29	10000
	~~30~~	300
−	21	1200
	8	9100

2. 學生學習用數的展開式來表示一個數。由於會用到加、乘混合的算式記錄，這個表示法的教學需要在安排在四則混合計算的教學之後。

   例如：下面哪個算式可以表示 18090 這個數？

   (1) 180+90。

   (2) 10000+8000+900。

   (3) 10000+8000+90。

   說明：我們可以先將 18090 這個數放入位值表中，如下圖：

萬位	千位	百位	十位	個位
1	8	0	9	0

   18090 是由 1 個萬、8 個千和 9 個十所組成。可以表示成如下的算式：

   $18090 = 10000 + 8000 + 90 = 10000 \times 1 + 1000 \times 8 + 10 \times 9$。

3. 大數的讀法要特別注意以「萬」來分段讀出的約定，有時和連續多個 0 同時出現，會造成學生讀寫的問題。

   (1)「24136752」。可想像將數分成兩段 24136752，2413 的部分是熟悉的「兩千四百一十三」加上「萬」，因此全部讀成「兩千四百一十三萬六千七百五十二」

   (2)「20075002」讀成「兩千零七萬五千零二」。連續的 0 分在「萬」的左右兩段，讀法和四位數讀法一樣。

   (3)「12000084」一樣要分成兩段，讀成「一千兩百萬零八十四」。

錯誤類型

1. 在大數時，有些學生有讀數字的困難。原因之一是學生對位值不熟，再加上大數的約定讀法（例如要讀出「萬」），教師可提供位值表協助。
2. 另一種常見的困難，是大數中牽涉到零的讀與寫（尤其是有連續 0 的情況），由於這牽涉到常用約定，教師仍需費心，但是也不用過度評量。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能說、讀、聽、寫八位數。
   (2) 能使用大數的簡記法，並應用於日常生活（配合概數的學習）。
   (3) 原則上能做八位數的加減直式計算，但勿過度評量。
2. 評量注意事項
   隨著數字越來越大，讀寫中零的處理差異請勿過度評量，畢竟這並不真的妨礙溝通。

N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。 **備註：**直式計算乘數與除數限三位。直式計算須注意0的教學。較大位數除法須進行估商的教學。知道如「1600×200」與「60000÷400」這類算式，可發展出更簡單的計算方法。	n-II-2 n-II-3

先備：N-3-3、N-3-5。

連結：N-4-3。

後續：N-5-1。

基本說明

1. 三年級的乘除法直式計算，處理乘數與除數為一位數的情形，四年級則處理乘數與除數為多位數的情況。雖然四年級整數範圍到達八位數，但因為乘數與除數為多位數的乘除計算比較複雜，建議應減小數量範圍（見「條目範圍」）。
2. 乘法：乘數多位數的乘法計算，建議教師從兩位數乘以兩位數開始，以位值原理說明計算的方式，並建立與「乘數一位數」計算的關係。其他位數情況只要類推即可。
3. 除法：除數多位數的除法計算，除法直式比較困難，建議教師從二、三位數除以兩位數開始，以位值原理說明計算的方式，透過完整的範例，協助學生練習各種估商的情況。其他位數情況只要類推練習即可。另外，要特別處理「3000÷500」這類問題，如果先對消 0 去計算時餘數的處理方式。
4. 處理本條目時，要特別注意處理運算各數中出現 0 而造成錯誤的情況。另外對於「1600×200」與「60000÷300」這類算式，教師應協助學生發展出更簡單的計算方法。

條目範圍

1. 直式計算的乘數與除數建議以三位數為限。被乘數與被除數最好以三或四位數為限。但整千、整萬等如「1600×200」、「60000÷400」這類計算的規則不在此限。
2. 「一位數乘以三位數」的問題，的確可以用乘法交換律轉為「三位數乘以一位數」來計算。

教師應斟酌教學與評量的目標來處理並清楚溝通，不宜貿然認定此為錯誤。

3. 教學時，乘法和除法宜分成不同單元教學。
4. 整千、整萬這類除法算式不處理非零部分除法有餘數的情況如「42000÷4000」(即使雖然可算)。

釋例

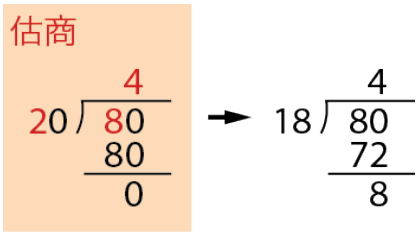
1. 估商的原則：三年級學生所學的除數為一位數的除法，只要運用十十乘法口訣，即可計算。若除數為二位數(以上)的除法，則須透過不斷估商與可能的修正，才能得出正確的商。估商的基本要領是檢視被除數和除數的高位數再運用十十乘法估商。底下完整以除數二位數為例，更高位數可類推。

   注意：估商運用時十十乘法時，經常透過包含除的方式去說明(見下例)，但是在做直式計算時，其說明則用等分除，才能正確理解商的位值記錄方式。由於估商只是計算的技巧，建議教師在估商時淡化包含除的成分，盡量引導學生注意十十乘法的運用模式，寫成直式時，則仍嚴謹依照直式計算之原理來說明。

   (1) 依 N-2-4、N-3-8 之原則，若除數為如 21、22、23 可估為 20 代替(這時商可能會高估)，27、28、29 可估為 30(這時商可能會低估)，以此試算去估計商的大小，再進行計算，若不正確，再進行微調。

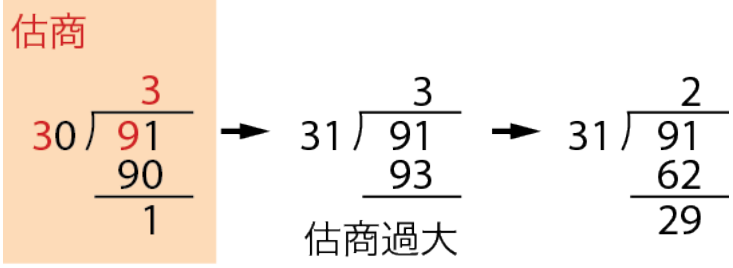
   ● 例 1：(不必修正)「80÷18」。

   先將除數估為 20，用 80 除以 20 來估商，80 為 8 個十，20 為 2 個十，8÷2=4，估商為 4。寫成直式時，是 80 個一去平分(成 20 份)，所以商為 4 個一，記在個位。以此完成計算，不必修正。



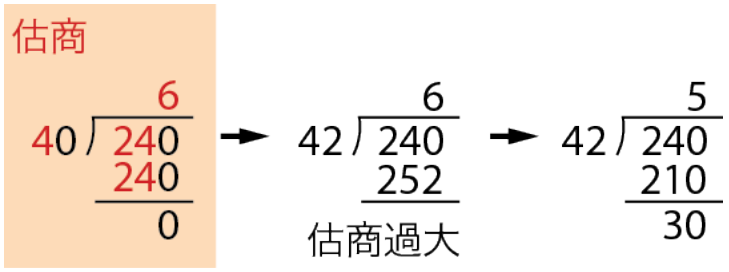
   ● 例 2：(修正過大的商)「91÷31」。

   先將除數估為 30，用 91 除以 30 來估商，91 有 9 個十，30 為 3 個十，9÷3=3，估商為 3。寫成直式時，是 90 個一去平分，所以商為 3 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過大，將 3 調小為 2，以此完成計算。



● 例 3：(修正過大的商 Ⅱ)「240÷42」。

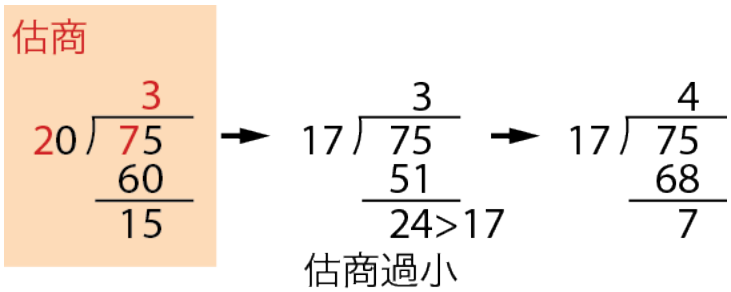
先將除數估為 40，用 240 除以 40 來估商，240 有 24 個十，40 為 4 個十，24÷4=6，估商為 6。寫成直式時，是 240 個一去平分，所以商為 6 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過大，將 6 調小為 5，以此完成計算。



* 事實上，由於本題 240 正好是 40 的倍數，而 42 比 40 大，數感好的學生可以直接估商為 5。

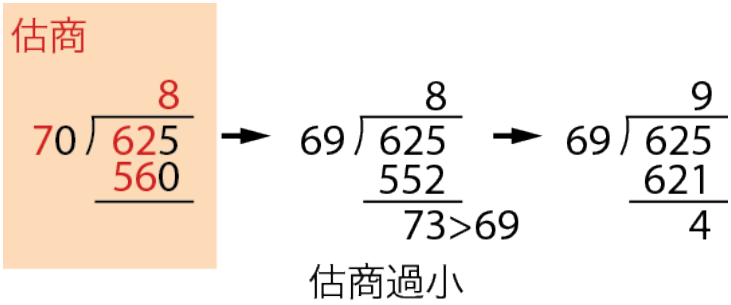
● 例 4：(修正過小的商)「75÷17」。

先將除數估為 20，用 75 除以 20 來估商，71 有 7 個十，20 為 2 個十，7÷2=3 餘 1，估商為 3。寫成直式時，是 70 個一去平分，所以商為 3 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過小，將 3 調大為 4，以此完成計算。



● 例 5：(修正過小的商 Ⅱ)「625÷69」。

先將除數估為 70，用 625 除以 70 來估商，625 有 62 個十，70 為 7 個十，62÷7=8 餘 6，估商為 8。寫成直式時，是 625 個一去平分，所以商為 8 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過小，將 8 調大為 9，以此完成計算。

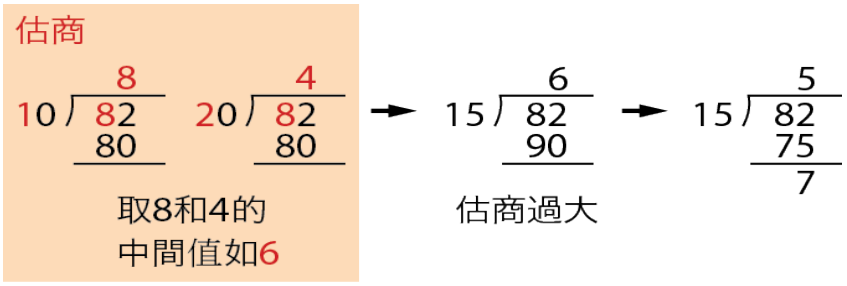


(2) 若除數不在上述估算的範圍，由於上述兩種估商會提供商的最小和最大的範圍，可以取兩者的中間值估商，再做調整。事實上，這類估法只有在除數較小時，才有可能做較多次調整，若學生較熟悉十位數為 1 的數的倍數 (尤其是 14、15、16 三數)，也能

讓估商更容易。

● 例 6：(不宜估為整十的除數)「82÷15」。

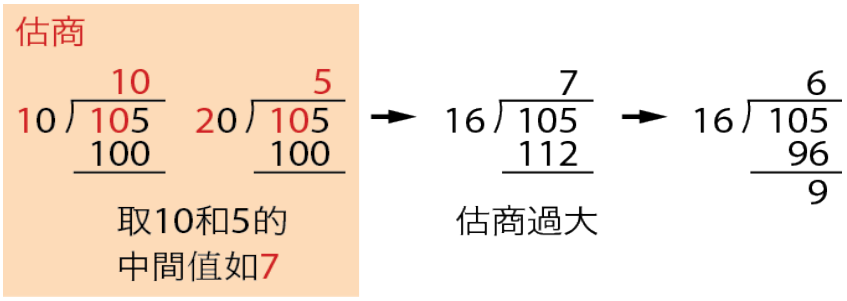
若將除數估為 10，依前法估商為 8；若將除數估為 20，依前法估商為 4，取 8 和 4 的中間值，估商為 6。寫成直式時，是 82 個一去平分，所以商為 6 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過大，將 6 調小為 5，得以完成計算。



註：若學生熟悉 15×6=90，則可直接估為更小的 5。

● 例 7：(不宜估為整十的除數　Ⅱ)「105÷16」

若將除數估為 10，依前法估商為 10；若將除數估為 20，依前法估商為 5，取 10 和 5 的中間值，有 7 和 8 兩個選擇，由於 16 偏大，取較小的估商為 7。寫成直式時，是 105 個一去平分，所以商為 7 個一，記在個位。以此計算，發現所估之商過大，將 7 調小為 6，得以完成計算。



註：若選擇估商為 8，則要調整兩次。若熟悉 16×6=96，則可直接估為 6。

(3) 上述之估商方法只是一種比較平實的技巧，並非固定非此不可的程序。只要學生的乘除數感越好，就越能快速估出正確的商。老師在指導時，務必以鼓勵為原則，說明估商的基本想法，但不要強使學生都遵守一樣的方法。

2. 三位數或四位數除以二位數的示例。

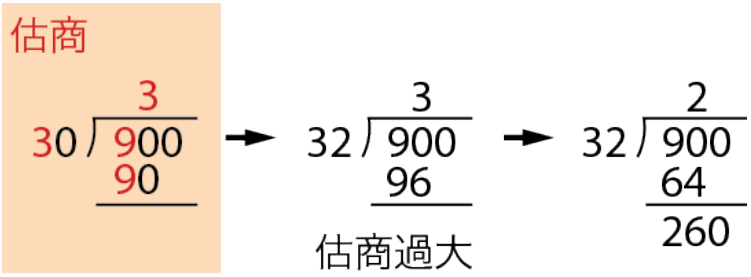
前述 1.估商示例，已說明商為一位數的情況。底下示例的商都是二位數或三位數，重點在估商應用的說明。

(1)「900÷32」。

● 第一步：十位的商。

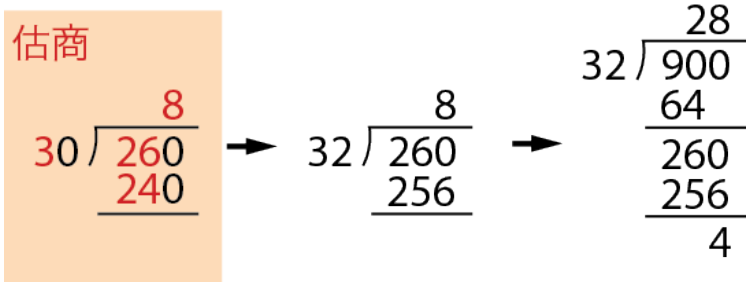
先將除數估為 30，用 90 除以 30 來估商，估商為 3。寫成直式時，是 90 個十去平分，所以商為 3 個十，記在十位。以此計算，發現所估之商過大，將 3 調小為

2。



- 第二步：個位的商。

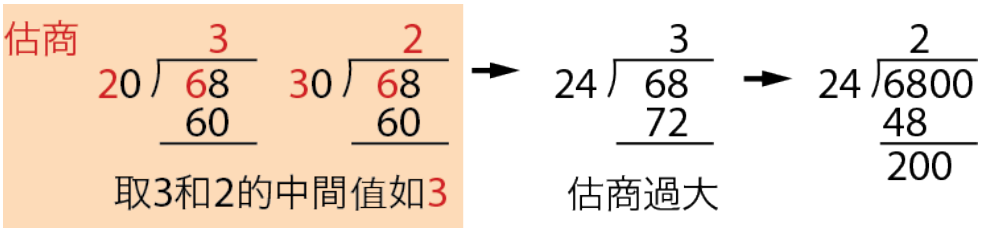
  用 260 除以 30 來估商，估商為 8。寫成直式時，是 260 個一去平分，所以商為 8 個一，記在個位。以此完成計算如下：



(2)「6800÷24」。

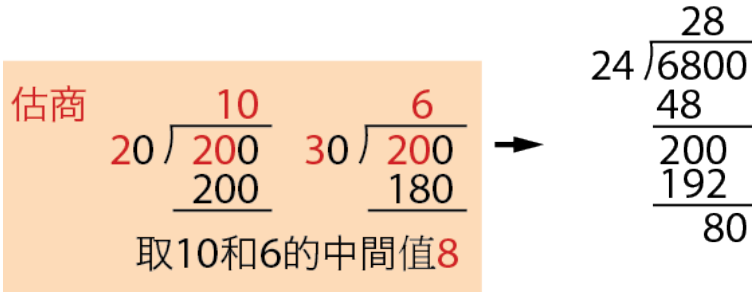
- 第一步：百位的商。

  68÷24 用 20 估商為 3，用 30 估商為 2，任取一值估商為 3。寫成直式時，是 68 個百去平分，所以商為 3 個百，記在百位。以此計算，發現所估之商過大，將 3 調小為 2。



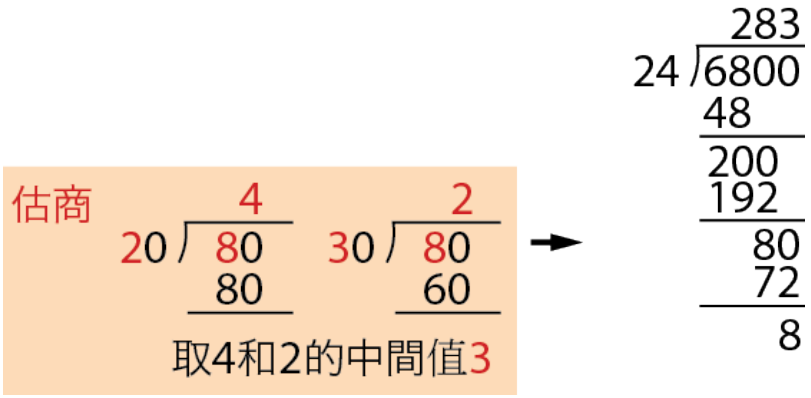
- 第二步：十位的商。

  200÷24 用 20 估商為 10，用 30 估商為 6，其中間值，估商為 8。寫成直式時，是 200 個十去平分，商為 8 個一，記在十位。



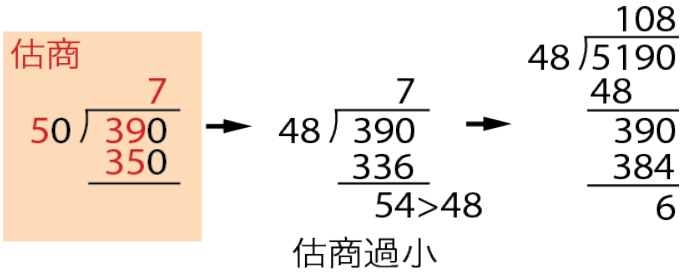
● 第三步：個位的商。

80÷24 用 20 估商為 4，用 30 估商為 2，其中間值估商為 3。寫成直式時，是 80 個一去平分，商為 3 個一，記在個位。



(3)「5190÷48」。

第一步比較簡單，商的百位記 1；第二步因還剩 39 個十，不夠分，商的十位要記 0，將 39 個十化成 390 個一；第三步做「390÷48」，先將除數估為 50，估商為 7，需記在個位。計算後發現所估之商過小，將 7 調大為 8，完成計算如下：



3. 理解多位數乘法位數的特性：

(1) 討論「乘以 10」、「乘以 100」、「乘以 1000」的規律：利用直式計算的經驗知道，「乘以 10 就是在被乘數後面加 1 個 0」、「乘以 100 就是在被乘數後面加 2 個 0」、「乘以 1000 就是在被乘數後面加 3 個 0」。

(2) 應用：「1000×10000」、「100×100000」的規律：

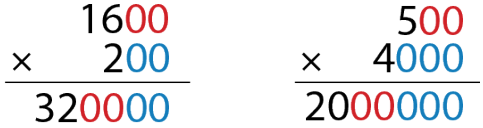
由 1.知道，這類問題答案中 0 的數目，就是被乘數和乘數的 0 的數目的總和。

1000×10000=10000000，

100×100000=10000000。

(3)「1600×200」和「500×4000」。

● 運用直式計算發現規律：



計算「1600×200」：因為 16×2=32，所以 1600×200=320000。

計算「500×4000」：因為 5×4=20，所以 500×4000=2000000。

- 運用乘法規則發現規律：(此方法適合數感比較好的學生，請教師斟酌)

  發現規律：因為 1600=16×100; 200=2×100，所以

  1600×200=(16×2)×(100×100)=32×10000=320000。

  運用規律直接計算：

  500×4000=(5×4)×100000=2000000。

(4)「答案位數合理性」的討論。

討論如下列問題「大雄計算出 3878×589=17572，靜香說『不可能！』為什麼？」不要直接去計算，開放學生發表意見，可能的想法：

- 「做直式計算時，光是乘以 5 (百位) 的部分，就已經至少六位數，當然不可能。」「3×5=15 還會再進一位，所以至少是七位數。」
- 「3878 大約是 4000，589 大約是 600，所以 4000×600=2400000，答案絕對不可能是五位數。」
- 「四位數最小是 1000，三位數最小是 100，相乘至少是 100000，所以答案至少是六位數。」

教師可以繼續討論，「你們覺得四位數乘以三位數最多是幾位數。」

從上述討論，老師可以說明並做結論「四位數乘以三位數只可能是六位數或七位數」。

(注意：上面並沒有真的討論為什麼不可能是八位數。)

4. 理解多位數除法位數的特性：

(1) 討論「除以 10」、「除以 100」、「除以 1000」的規律：在被除數尾數 0 的數多時，進行此活動。

教師可把「254000÷100」的問題轉化成問「什麼數乘以 100=254000」的問題，再利用前面的規律提示，「什麼數後面再加 2 個 0 就是 254000」，於是得到答案是 2540，因為 2540 為尾巴再加 2 個 0 就是 154000。

結論：「除以 10 就是在被除數後面移除 1 個 0」、「除以 100 就是在被除數後面移除 2 個 0」、「「除以 10 就是在被除數後面移除 3 個 0」

(2) 應用：「100000÷100」、「10000000÷1000」的規律：

用 (1) 的經驗知道，這類問題的答案中的 0，數目就是被除數和除數的 0 的數目的差。

100000÷100=100000=1000，

10000000÷1000=10000000=10000。

(3)「60000÷300」和「20000÷4000」。

- 可以這樣說明 ((2)其實也可這樣說明)，60000 是 600 個百，300 是 3 個百，所

以「60000÷300」相當於計算「600÷3」; 20000 是 20 個千，4000 是 4 個千，所以「20000÷4000」相當於計算「20÷4」，再用心算解題。

60000÷300=60000÷300=600÷3=200，

20000÷4000=20000÷4000=20÷4=5。

- 另一個在本年度偏難的解釋方法，只適合數感較好的學生：

  60000÷300=60000÷100÷3=600÷3=200，

  20000÷4000=20000÷1000÷4=20÷4=5。

(4)「答案位數合理性」的討論。

以討論方式問例如下列問題「胖虎計算 6410÷803，得出商是 308，靜香說『不可能！』為什麼？」不要直接計算，開放學生發表意見，可能的想法：

- 「做直式計算，光是第一個商最高只可能是十位，答案最多是二位數，不可能是 220。」
- 「604 比 803 小，直式計算的商只有個位數，不可能。」
- 「6410 大約是 6400，803 大約是 800，6400÷800=64÷8=8，答案大約是 8，絕對不可能是三位數。」
- 「四位數不超過 10000，三位數最小是 100，所以四位數除以三位數不會超過 10000÷100=100，所以答案最多是二位數。」(比較高深)

從上述的討論，老師可以說明並做結論「四位數乘以三位數只可能是二位數或個位數，有沒有餘數都一樣」。

評量

評量重點：

1. 能做直式乘法計算（被乘數限四位、乘數限三位），位數多的乘法勿過度評量。
2. 能做直式除法計算（被除數限四位、除數限三位），位數多的除法勿過度評量。
3. 能結合 0 的點數做整百、整千、整萬等等之乘除法（如「1600×200」、「60000÷400」），其數量範圍不受 1.和 2.限制，但實質計算部分應以「十十乘法」或可心算的簡單乘除法為限。

N-4-3 解題：兩步驟應用問題（乘除，連除）。乘與除、連除之應用解題。 **備註：**由於除法有等分除和包含除兩種類型，教學應注意題型的多元性。可和併式學習一起進行（R-4-1）。	n-II-5 r-II-3

先備：N-3-7。

連結：R-4-1、R-4-2。

後續：N-5-2。

基本說明

1. 承續 N-3-7，本年繼續學習兩步驟問題，進行結合乘與除的日常應用問題，包括乘除、除乘、連除應用解題。做與除法有關的應用問題時，建議只處理整除的情況。
2. 兩步驟問題的學習要領可參考 N-2-8，其重點在判斷題意，分析步驟，並運用四則運算解題經驗來解題。
3. 本年度開始學習將兩步驟併成一算式的併式教學（見 R-4-1），也開始學習四則運算的規律（見 R-4-2），因此教師除了需注意不同解題（列式）方式的可能並鼓勵學生討論之外，也應該做出運算規律的結論。

條目範圍

1. 本條目的運算和除法有密切關係，由於除法有等分除和包含除兩種類型，教師教學應注意題型的多元性。
2. 可和併式一起進行（R-4-1）。
3. 本年度兩步驟教學，由於牽涉到併式，應留意複習二、三年級兩步驟問題之併式。
4. 本條目著重概念學習，不需配合 N-4-2，計算的數字應限定在更小位數。

釋例

1. 乘除兩步驟應用問題的類型，除法有等分除和包含除兩種類型，舉例如下：

(1) 等分除情境：「1 個箱子裝 80 個橘子，將 5 箱橘子平分給 40 人，每人可分得幾個橘子？」

本題有兩種做法：

- 做法 1：

  先算：80×5=400　　（ 5 箱共有幾個橘子？）

  再算：400÷40=10　　（再將全部橘子平分給 40 人，每人得幾個？）

  若依 R-4-1 併式，則可合寫成

  80×5÷40=10。

- 做法 2：

  先算：80÷40=2　（1 箱橘子平分給 40 人，每人得幾個？）

  後算：2×5=10　（1 箱橘子每人分 2 個，5 箱每人可分幾個？）

  上面的算式可併式寫成

  80÷40×5=10。

  事實上，本例也說明先乘後除和先除後乘的結果一樣。(見 R-4-2)

(2) 包含除情境：「4 個蘋果賣 99 元，媽媽買了 12 個蘋果，要付多少元？」(本題刻意安

排 4 個蘋果 99 元的情境，無法以整除的方式算出一個蘋果的價錢）

先算：12÷4=3　　（12 是 4 的幾倍。）

後算：99×3=297　（12 個是 4 個的 3 倍，所以 12 個的價錢也是 4 個的 3 倍。）

上面的算式可併式寫成：

99×(12÷4)=297。

2. 連除兩步驟應用問題的類型可粗分成「先包含除後等分除」、「先等分除後包含除」、「先包含除後包含除」三種作法，不論是哪一種做法，都要留意題幹中的數量是否整除。舉例如下：

(1) 例 1：「240 個蘋果包裝成禮盒，每盒裝 8 個蘋果。再將這些禮盒平分裝在 5 個箱子裡，1 個箱子裝幾個禮盒？」

本題有兩種作法。

● 先包含除後等分除：

先算：240÷8=30　　（240 蘋果可裝成幾盒？）

後算：30÷5=6　　（30 盒平分到 5 箱裡，1 箱有幾盒？）

上面的算式可以併式寫成

240÷8÷5=6。

● 先等分除後包含除：

先算：240÷5=48　　（1 箱可裝幾個蘋果？）

後算：48÷8=6　　（1 箱有 48 個蘋果，8 個裝 1 盒，1 箱可裝幾盒？）

上面的算式可以併式寫成

240÷8÷5=6。

(2)「240 個蘋果包裝成禮盒，每盒裝 8 個蘋果，一箱可裝 6 盒，總共可以裝幾箱？」本題是「先包含除再包含除」的問題。

先算：240÷8=30　　（240 蘋果可裝成幾盒？）

後算：30÷6=5　　（30 盒蘋果，6 盒裝 1 箱，可裝幾箱？）

上面的算式可以併式寫成

240÷8÷6=5。

評量

評量重點：

1. 能做乘除兩步驟問題。(參看 R-4-1、R-4-2)
2. 能做連除兩步驟問題。(參看 R-4-1)

N-4-4 解題：對大數取概數。具體生活情境。四捨五入法、無條件進入、無條件捨去。含運用概數做估算。近似符號「≈」的使用。 **備註：**估算解題的布題應貼近生活情境。以概數協助估算須包含四則估算。	n-II-4

先備：N-3-8。

連結：N-4-1、N-4-9。

後續：N-5-1、N-5-11。

基本說明

1. 承繼 N-3-8，學生理解在應用情境中，計算不見得需要確算，忽略數據中較小的部分，不但可以保持重要的資訊，又比較容易處理與溝通。配合四年級處理「億」以內的數，學生經驗擴展到更多的自然或社會知識時，正式介紹概數。概數的學習，應配合具體生活情境進行。
2. 概數顧名思義就是大概準確的數字，捨棄數字中較小位數的部分。在應用上，不論四捨五入法、無條件進入或無條件捨去法，都必須妥適選擇所取概數的位數。在四年級初學時，教師應在問題中指定位數讓學生有所依循。但也要透過討論，讓學生體驗取不同位數的差異，知道取概數是否恰當，依賴於問題的情境。
3. 除了配合情境，學習如何以四捨五入法、無條件進入或無條件捨去法單純取概數外，更重要的是運用概數協助做估算。四年級的重點是利用概數做整數加減估算，也可討論簡單的乘除估算。用概數做計算時，應只用四捨五入法。

條目範圍

1. 概數的學習不能只有單純的數字問題，不但要盡量引入有用的應用情境，且其問題與概數的取法應以合理自然為原則。
2. 協助四則估算時，本年度以整數加減估算為主。若要討論簡單的乘法和除法問題，建議只對被乘數或被除數取概數，且乘數或除數為個位數。
3. 留意 N-4-02 對被乘數、被除數的限制。

錯誤類型

學生運用四捨五入法有時會出錯。教師可圖示讓學生理解四捨五入法的意義。

評量

1. 評量重點：

   (1) 能適切運用四捨五入法、無條件進入法、無條件捨去法解決日常問題。

   (2) 能運用四捨五入法，協助進行估算。
2. 評量注意事項：

   「先取概數，再做估算」與「先確算，再取答案之概數」是兩種不同的布題。教師評量時

應注意這個區別，並注意情境是否自然、題幹敘述是否清楚。

N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。**備註：**本條目教學，分子和分母的數字都不用太大，以能流暢學習同分母分數計算為目標。帶分數整數倍教學不宜強迫學生化成假分數進行，其中隱含之分配律思維來自操作經驗與數感，此非分配律教學。	n-II-6

先備：N-3-9。

連結：N-4-6、N-4-8。

後續：N-5-4。

基本說明

1. 在 N-3-9 中已初步認識同分母分數之比較、加、減的基本概念。因此本條目分數教學，應配合學生計算成熟度，更流暢的完成比較、加、減與整數倍等操作（不自限於小於 2 的範圍）。
2. 學習「真分數」、「假分數」、「帶分數」的概念與溝通方式；熟練假分數和帶分數的轉換，知道假分數之分子除以分母的商和餘數就是帶分數之整數部分和分子部分（但和 N-5-6 整數相除無關）；知道帶分數中的整數能協助學生定位該分數的大小（N-4-8），並能做帶分數之比較與計算（包含減法的借 1）。
3. 應用分數於量的問題，建立分數和連續量應用的密切關係。
4. 利用分解合成模型，延伸整數經驗到分數加減如：加法交換律與結合律、加減互逆，甚至能做簡單的兩步驟應用問題（由於初學，建議不要求併式）。

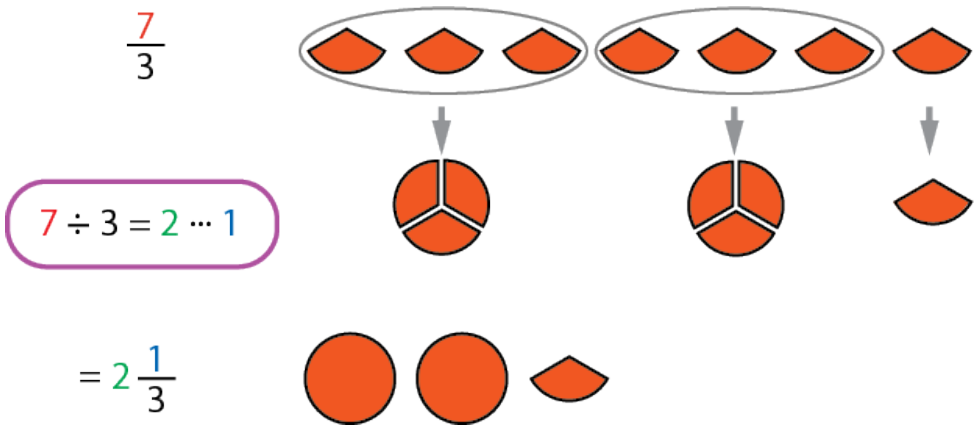
條目範圍

1. 數字（尤其是分母）不用太大，以能流暢進行同分母分數計算為目標。建議分母除 100 之外，應小於 20。
2. 透過操作與數感，讓學生理解帶分數整數倍中隱含之分配律，不可強迫學生化成假分數來計算。

釋例

1. 「將假分數$\frac{7}{3}$化為帶分數」。

   $\frac{7}{3}$ 是 7 個 $\frac{1}{3}$，由於 3 個 $\frac{1}{3}$ 可合成一個 1，7÷3=2...1，因此是 2 個 1 和 1 個 $\frac{1}{3}$，也就是 $2\frac{1}{3}$。（如下圖）

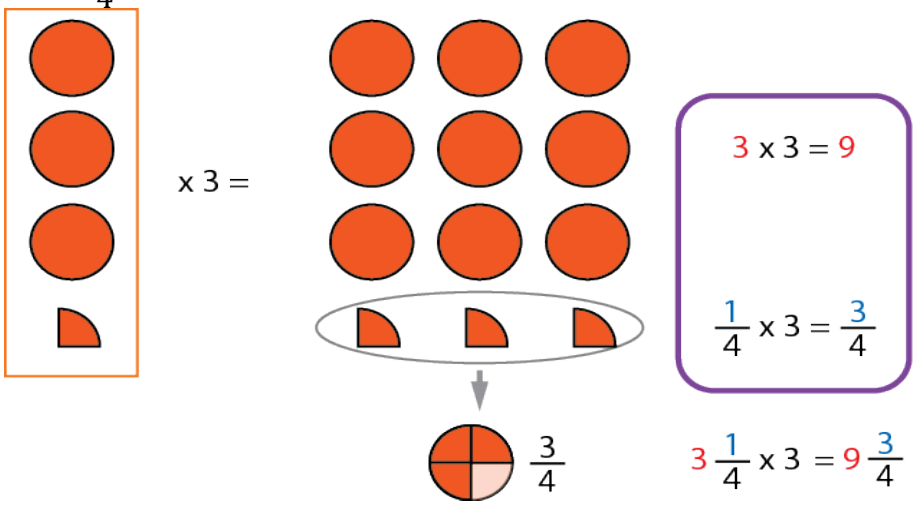


- 由於學生尚未學到「整數相除，其結果為分數」(N-5-6)，因此教師教學不可出現 $\frac{7}{3}=7\div3$ 的算式，只要如上寫出整數除法算式 7÷3=2...1，再寫出 $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$ 即可。

2. 分數的整數倍計算，包含了「真分數×整數」、「假分數×整數」、「帶分數×整數」的題型。其中帶分數×整數，不宜讓學生總是化為假分數來計算，但因尚未學習分配律，應詳細解釋（見下）宜注意數字不宜過大。

   例：「宜青和哥哥、姊姊三人，每人各吃 $3\frac{1}{4}$ 個鬆餅，他們三人一共吃了幾個鬆餅？」

   說明：如下圖，3 個的 3 倍是 3×3=9 個，$\frac{1}{4}$ 個的 3 倍是 $\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$ 個，合起來是 $9\frac{3}{4}$ 個，記成 $3\frac{1}{4}\times3=9\frac{3}{4}$（個）。



評量

評量重點：

1. 能做假分數和帶分數之變換。
2. 能做同分母分數的比較、加、減與整數倍。

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。 **備註：**簡單異分母分數指一分母為另一分母之倍數。與小數互換之簡單分數指分母為2、5、10、100。	n-II-6

連結：N-4-5。

後續：N-5-4。

基本說明

1. 由自然的比較或加減問題出發，讓學生在簡單異分母分數的情況（如 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ ）中，從操作（如細分）和討論活動中，理解等值分數的意義與操作方法。
2. 能在簡單異分母分數的情況下，透過等值分數，化成同分母分數再做分數的比較與加減。
3. 透過等值分數，在分母為 2、5、10、100 的情況下，做簡單的分數與小數互換。
4. 本條目相對於 N-5-4，相當於 N-3-9 相對於 N-4-5。教師應著重在概念的討論與理解，而非計算的熟練，也不必特別延伸處理帶分數和假分數的等值分數（當然學生已熟悉的 $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}$ ....不在此限）。

條目範圍

1. 簡單異分母分數指一分母為另一分母之倍數，如（2; 4、6、8、10）; (4; 8)（3; 6、9）;（5; 10）四組。尤其應以操作上最簡單的第一類開始。
2. 對於分母非呈倍數的等值分數，建議可以操作活動探索與討論如何將 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 化成等值分數並做比較，但原則上僅限於此。
3. 與小數互換之簡單分數指分母為 2、5、10、100。其中 100 的部分應透過 10 來進行，如 $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{50}{100}$。
4. 學生在操作過程中，可能發現擴分或約分的規則，應予以鼓勵，但不必下結論，更不可提早進行約分、擴分和通分的形式教學。(N-5-4)

評量

1. 評量重點：
   (1) 理解等值分數的意義。
   (2) 能做簡單異分母分數的比較、加、減。
   (3) 能做簡單分數與小數的互換。
2. 評量注意事項：
   本條目重點在於認識等值分數的意義，切勿變成 N-5-4 之教學過度評量。

N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。 **備註:**小數之學習必須與整數經驗緊密連繫。直式計算應注意小數點位置的教學。小數應用情境以連續量為主。	n-Ⅱ-7

先備：N-3-10。

後續：N-5-1。

基本說明

1. 本條目延伸 N-3-10，學習二位小數的意義（其學習重點請先參考 N-3-10）。新增位值單位為「百分位」，位名由來是因為 $\frac{1}{100}=0.01$。學生應知道 4.35 是 4 個 1、3 個 0.1 和 5 個 0.01 的和；知道「0.1 是 10 個 0.01」；並知道 0.10 其實就是 0.1，並應記成 0.1。多位小數的讀法，整數部分和小數部分很不一樣（如數字「124.35」讀作一百二十四點三五），教師應確實教導學生正確的讀法。
2. 四年級結束時，學生應熟練二位小數之比較以及直式計算二位小數的加、減、整數倍（加減直式計算要點請參考 N-3-10）整數倍之計算是本年度的新學習主題，由於小數乘法直式計算和整數同中有異，教師一方面要援引學生整數乘法的計算經驗，另一方面要提醒學生，乘法直式計算被乘數與乘數必須靠右對齊的約定，因此必須注意小數點之處理方式。總之，本年小數學習重點是更加熟悉小數之表示與計算，以作為 N-5-1 位值系統學習的基礎。
3. 小數在連續量的應用，仍舊是小數學習的重點。學生尤其應熟悉「公尺」「公分」的關係，可描述為 1 公分是 0.01 公尺，能做「5 公尺 45 公分是 5.45 公尺」或反過來之轉換。另外學生應知道「身高 1.45 公尺」、「兩地距離 14.52 公里」、「鋼櫃重 145.06 公斤」「水桶容量 4.15 公升」的意義與用法，並能在量的情境中做比較與計算。

條目範圍

1. 小數之學習，在位值表示上應與整數經驗緊密聯繫，但也應和分數 $\frac{1}{100}$ 的意義作連結。二位小數的直式計算中，建議整數位數限兩位，並留意加減和乘法計算中小數點的處理方式，以及答案最後位恰好為 0 時的處理方式。
2. 小數應用應以連續量為主。若要處理離散量，其基本原則同 N-3-10。
3. 不處理小數除以整數的問題。（N-5-9）

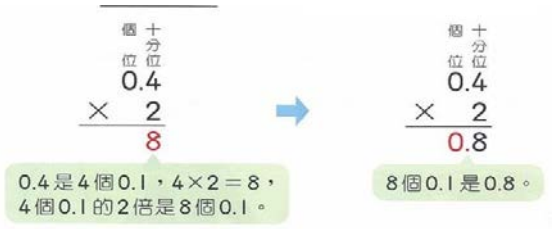
釋例

1. 一位小數的整數倍：由於整數倍是第一次教學，因此應先回到一位小數，熟悉其意義以及以直式計算小數整數倍的約定。

   (1) 例 1：「1 瓶蔓越莓汁有 0.4 公升，伶君買了 2 瓶，共有幾公升？買 5 瓶呢？」

   ● 0.4 公升的 2 倍是 0.4+0.4=0.8 公升，記成「0.4×2=0.8」。若用直式計算，先告知學

生乘法直式計算的約定：「被乘數和乘數必須往右對齊」，因此小數乘法計算不像加減法要對齊對應的位數（或小數點）。直式計算的結果要正確標出小數點，此時被乘數和積的小數點要對齊，答案才正確。



（《部》第八冊第 103 頁）

- 0.4 公升的 5 倍是 2 公升，記成「0.4×5=2」。但寫成直式計算時，如果仿造整數計算的方法，積會出現 2.0 的答案。這時教師要援引或複習三年級的學習：「2.0 就是 2」請學生劃掉答案中的 0 和小數點。

2. 例 2：「怡秀用手機打電話給媽媽，通話費要每秒 0.2 元，她講了 28 秒，共要付幾元？」透過整數乘法經驗做直式計算，提醒學生 28 要靠右對齊，最後答案要加上小數點（和被乘數對齊），寫成「5.6」。

3. 兩位小數的整數倍，其意義、計算方式、小數點對齊方式和一位小數相同，不再舉例。

錯誤類型

1. 學生可能把整數讀法的習慣用在小數部分，這只是初期的不適應，教師只要請處說明，並多做說、讀、聽、寫之練習即可。
2. 學生在處理如 0.04×5 的直式計算時，依整數習慣，答案常記為 0.20（算是有點道理的錯誤），請提醒學生依照位值記數的約定，10 個 0.01 已經化成 1 個 0.1，所以 20 個 0.1 要記成 0.2。

評量

評量重點：

1. 能說、讀、聽、寫二位小數，並能做比較。
2. 能用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。 **備註：**標記限一位小數（相當於分母等於10）與分母不大於5的分數。以等值分數思維（N-4-6）協助學生認識整數、分數、小數為一體。因初學等值分數，本條目不處理分數和小數的混合計算問題。	n-Ⅱ-8

先備：N-3-11。

連結：N-4-6。

後續：N-7-5。

基本說明

1. 學生在 N-3-11 中，已有基本的數線經驗。本條目則連結分數、小數、長度量、數線的經驗，學習將分數和小數標記在數線上的方法。由於學生初次學習，應將重點擺在意義的認識。所有教學活動和評量，數線應都已等分好。
2. 認識整數、分數、小數其實都是「數」，彼此有一致的關係，是小學數與量的重要學習目標。學生要透過在數線標記、在數線比較、在數線計算等活動，加強這項認識。
3. 本條目標記小數限一位小數，學生透過小數與直尺關係的學習，應很容易理解標記小數的方式。
4. 分數限同分母（含 N-4-06 等值分數容許之情況），標記有兩種途徑，一是透過等值分數（N-4-06）化為一位小數（此時分母為 2、5、10）；或透過分數的意義，以及分數和長度量結合的經驗，來標示一般的分數。學生應認識帶分數的整數部分對應到數線上的整數。
5. 整數、分數、小數三種數可以做透過數線做混合比較大小的活動，教學時最初可以分數數線和小數數線並置比較，再標示於同一條數線上。注意這些教學活動進行時，所有數線之單位 1 必須一樣長。最後希望加強學生數線上「大的數在右，小的數在左」的認知。

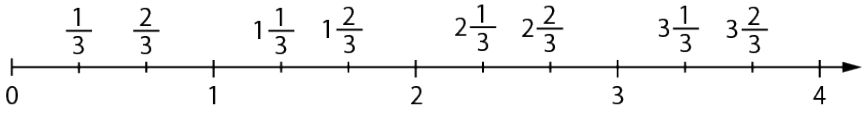
條目範圍

1. 由於本條目的重點在初步認識，因此小數標記限一位小數（相當於分母等於 10），分數限分母為不大於 5 的分數。不同分母的分數僅限於分母為 2 和 4（等值分數）。
2. 所謂數線上的大小比較僅限於學生已經能比較大小並驗證於數線之情況，絕非利用數線為工具，來比較分數和小數的大小。加減計算時，（同分母）分數和小數應分開進行，目的在確認分數或小數都和整數一樣，可在數線上進行加減計算。教師應體認此條目之目的在於認識整數、小數、分數都是數，計算本身並非重點。
3. 不做乘除活動。
4. 本年度開始數線不一定要從 0 開始。

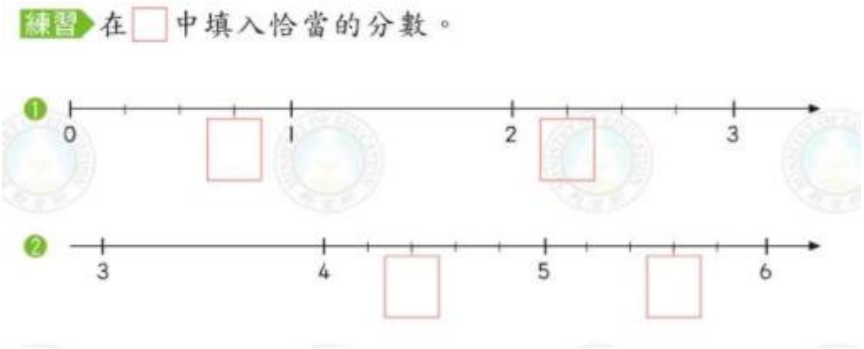
釋例

1. 分數數線的認識和標記。

(1) 例 1：處理分數數線，教師應先準備分數數線（如下），讓學生學習報讀，理解數線上整數和分數的分布關係，並連結先前的學習經驗。



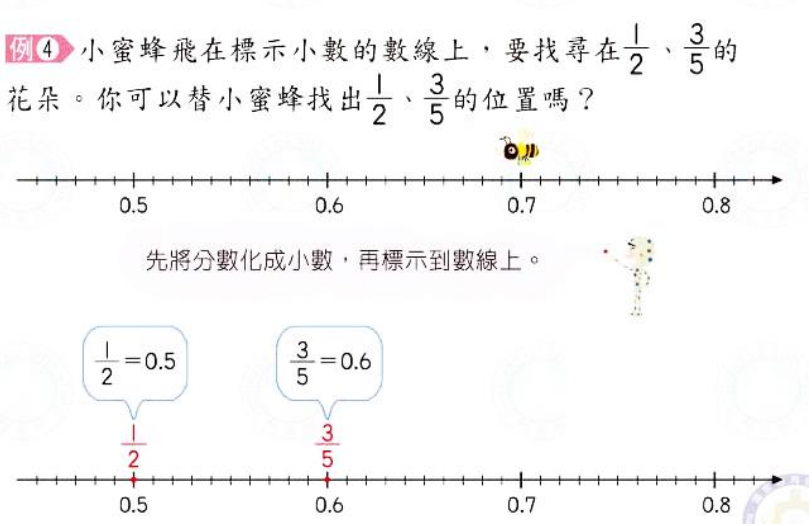
(2) 例 2：報讀分數數學之後，請學生學習在等分好且已標記整數的數線上學習標記分數，確認學生學習。



（《部》第九冊第 81 頁）

2. 分、小數的等值和標記。

(1) 運用等值分數，將分母為 2 或 5 的分數，標記在小數數線上。

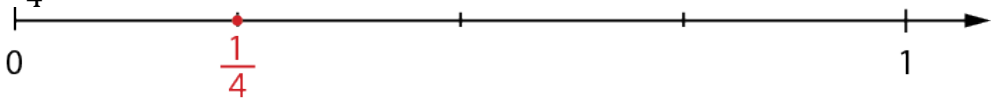


（修改自《部》第九冊第 83 頁）

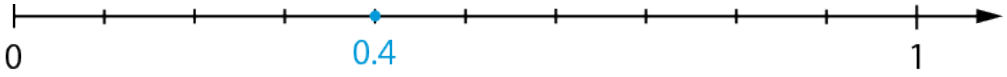
3. 透過單位長相同的數線進行分數和小數的大小比較

例：給二條單位長相等的數線，一條 0 到 1 四等分，另一條十等分。進行底下活動。活動前，先引用等值分數的經驗，確認學生理解「$\frac{1}{4}<0.4$」。

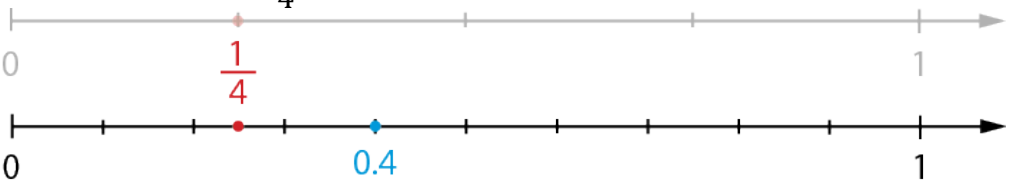
(1)「將 $\frac{1}{4}$ 標記在數線上」。



(2)「將 0.4 標記在數線上」。



(3) 將兩條數線相疊，把「$\frac{1}{4}$」標記在有「0.4」的數線上。



(4) 問學生並討論：

- 「在整數的數線上，越大的數，是在越右邊，還是越左邊？」
- 「在數線上，$\frac{1}{4}$ 在右邊？還是 0.4 在右邊？」
- 「我們剛剛用等值分數比較過，是$\frac{1}{4}$ 比較大？還是 0.4 比較大？」
- 「是不是比較大的數在越右邊？」

錯誤類型

有些學生會因為單位長不同而產生疑惑，教師應溝通清楚，另外在做比較性問題時，最好使用單位長相等的數線。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能報讀和標記簡單分數和一位小數在數線上。
   (2) 能在數線上做整數、分數、小數的比較（勿過度評量）。
   (3) 能理解在數線上分數（或小數）加減的意義。
2. 評量注意事項：
   (1) 在做比較問題，涉及兩條數線的表現時，單位長一定要取成相等，上課時如此，評量時更要注意，避免造成不必要的評量錯誤。
   (2) 避免如「在數線比較 $\frac{1}{4}$ 和 0.3」的問題，由於兩數太過接近，學生可能會混淆。

N-4-9 長度：「公里」。生活實例之應用。含其他長度單位的換算與計算。 **備註**：量的大單位教學仍應協助學生建立基本量感。	n-II-9

先備：N-3-1。

連結：N-4-1、N-4-4。

後續：N-5-12、N-5-13、N-5-14。

基本說明

1. 學生學習比較大的數後（N-4-1），「公里」是學生第一個學習會跨出人體尺度的大單位，擴展了學生的學習範圍，同時也扮演學習大單位的示範功能。
2. 認識「1 公里＝1000 公尺」的定義，並能由此得到「1 公里＝100000 公分」。由於「公里」超出學生常用的人體單位，因此必須結合在地生活實例，讓學生對這個單位產生認識與量感（例如「大概是操場跑幾圈」）。
3. 在教學上，應和 N-4-1 呼應，認識較大的數和較長的長度。另外，也應結合 N-4-4，使用概數和估算的語彙解決問題。
4. 應結合其他已知的長度單位進行長度單位的換算與計算，如「公里」、「公尺」、「公分」。能用乘法做大單位換算成小單位的問題，但反過來的方向，因為除法經驗不足，暫時只用「3408520 公分＝34085 公尺 20 公分＝34 公里 85 公尺 20 公分」的策略即可。

條目範圍

1. 「公里」估測並不容易，教師可借用「學生走 1 公里大概幾分鐘」的策略，將「公里」的量感再度轉回人體尺度的問題，可用在地環境為例。估測活動不要執著於精確，更不要發展成速度的教學。
2. 複名數的學習雖可和直式計算相互加強，但只是方便工具，不需過分強調，其處理原則一如三年級量的學習（如 N-3-12、N-3-15 等），只運用於加減（但在本年可進退位），不做三階複名數，不做乘除。

釋例

長度雖然是視覺量，但因為 1 公里太長，學生很難用視覺感受，更何況生活中絕少 1 公里的直線道。因此公里量感的培養必須結合日常生活的經驗（利用公路標示、學校場地、地標距離、步行體驗等），以多元方式，結合路線規劃，感受 1 公里的長度量，例如

(1) 從某省道 205 公里標示牌，到 206 公里的標示牌，共有 1000 公尺，是 1 公里。

(2) 校園裡，舉例從校門口到操場 100 公尺跑道起點，走到終點，再沿著操場 2 圈，再走到司令台剛好 1 公里。

(3) 操場 1 圈 200 公尺，走 5 圈共 1000 公尺，是 1 公里。

(4) 100 公尺的跑道，跑去再跑回來是 200 公尺，來回跑 5 次共 1000 公尺，是 1 公里。

(5) 設計路線（例如校外教學），讓學生步行體驗走 100 公尺（或 200、500、甚至 1 公里）所需的時間或步數。若能實際試走 1 公里，體驗其長度更佳。

建議 1：教師備課，請盡量利用學校地圖、Google 地圖或類似電子地圖，尋找適當的地標與路線（馬路、校園操場、跑道、建築物等），設計長度 1 公里的路線，或者整百公尺的路線以來回或倍數取代。

建議 2：由於各種量的大單位教學，是要更擴張學生的生活與想像經驗，因此像是校外教學的活動，由於涉及較長的旅行路線與距離，更應該和「公里」的學習結合。

錯誤類型

有些學生會誤以為 1 公里是 100 公尺，教師可透過課堂活動的體驗，如 100 公尺的跑道、200 公尺的操場等，和 1 公里=1000 公尺做比較，讓學生知道 1 公里比 100 公尺長很多。

評量

1. 基本評量：

   (1) 認識「公里」單位，並能運用於日常生活。

   (2) 能運用「公里」、「公尺」、「公分」的換算來解決問題。

2. 評量注意事項：

   量感的評量，不宜過於嚴格，並注意評量的方式。建議盡量在活動中進行。

N-4-10 角度：「度」（同S-4-1）。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識180度到360度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。 **備註：**量角器教學須包括從量角器左右兩側進行量角之活動。	n-II-9

先備：N-3-13(S-3-1)。

連結：S-4-1、S-4-2、S-4-5、S-4-6、S-4-7。

後續：S-5-1、S-5-3、S-5-4。

基本說明

1. 承續 N-3-13(S-3-1)，學習角之常用單位「度」，記成「°」。教學活動應包含完整的量角器實測、量感、估測與簡單計算。應用直尺的經驗，可協助學生使用量角器測量角的度數。學生應多經驗特別角度，如 30 度、45 度、60 度、90 度（直角）、120 度、135 度、150 度、180 度（平角）、360 度（周角），並應用於協助量感與估測。
2. 在做角的合成（加）與分解（減）的過程中，理解超出 180 度角的意義，並認識「平角」與「周角」。能運用平角與周角的概念，做有特別幾何意義的角分解。如平角扣掉 120 度角是 60 度，周角扣掉 90 度是 270 度。
3. 學生能運用直尺與量角器做出指定角，重點是直角（S-4-5）與銳角（S-4-7），以及小於

平角的鈍角（S-4-7）。

4. 學生最後應能以計算，來回答角的合成（加）、分解（減）、比較問題。學生應知道大於 90 度的角是鈍角，小於 90 度的角是銳角。
5. 教師可結合日常生活或自然領域之題材應用角度的概念，例如觀測的方位角或仰角、時針和分針展開的夾角（整點或半點）、扇子張開的角度、兩臂張開角度的體感等。

條目範圍

1. 量角器遠比直尺複雜，因此量角器教學應按部就班而確實，小心各種可能錯誤，如中心的位置；邊與 0 度線或 180 度線的對齊；從左側與從右側量起的度數報讀方式不同等，教師應仔細檢查。
2. 由於角度相對於長度更抽象，角度的估測活動不應要求太嚴格。
3. 畫指定角時，不畫超過 180 度的角。

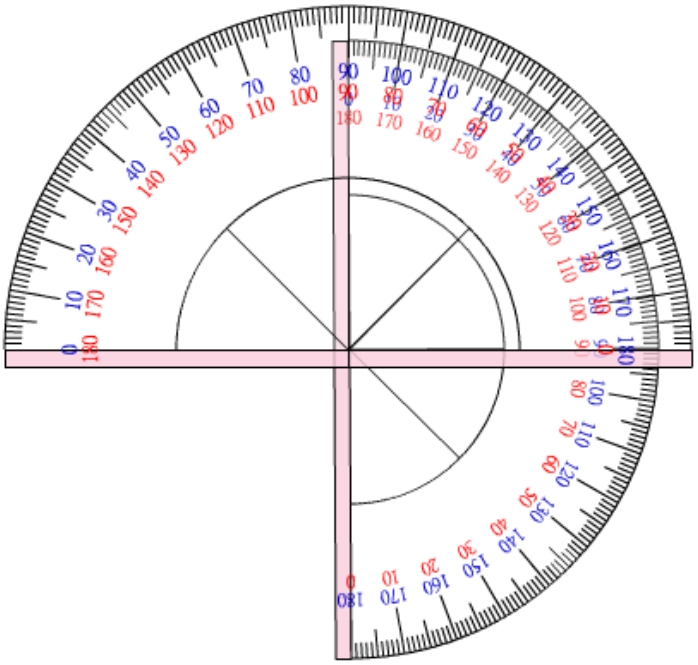
釋例

1. 量角器上的刻度和度量長度的直尺類似，量長度的直尺每個 1 公分都一樣長，因此可以累加長度，量角度的量角器上每個「1°」也都一樣大，同樣也可以累加度數，市面上很多量角器會把每「10°」特別顯眼方式呈現，方便計數和測量。

   以下兩個量角器的活動，可以活動可以用來檢驗量角器以及運用量角器做角的合成分解。（也可延伸到 (2) 使用兩量角器量大於 180 度的角）

   (1) 例 1：把量角器大小接近的兩位同學分成一組，做做看：

   - 把量角器的中心點對好，0 度線對齊，檢查看看量角器 30°、45°、60°、90°的線也疊合嗎？
   - 把量角器的中心點對好，轉動其中一個量角器讓 90°線和另一個量角器的 0°線對齊，不看數字只看刻度來檢查重疊在一起的刻度：每 10°的刻度線疊在一起、每 45°的刻度線也疊在一起。再轉動 10°檢查看看每個 10°刻度線會疊在一起嗎？數數看兩個量角器上重疊在一起的角度是幾度？你怎麼知道的？



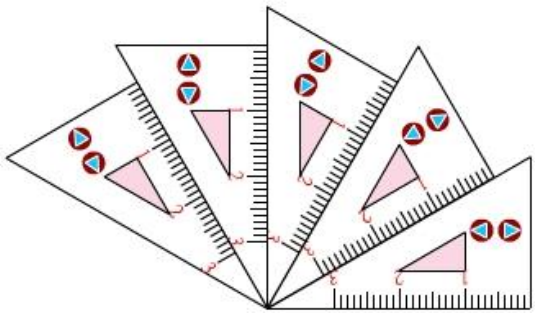
（使用 http://magicboard.cycu.edu.tw/工具繪製）

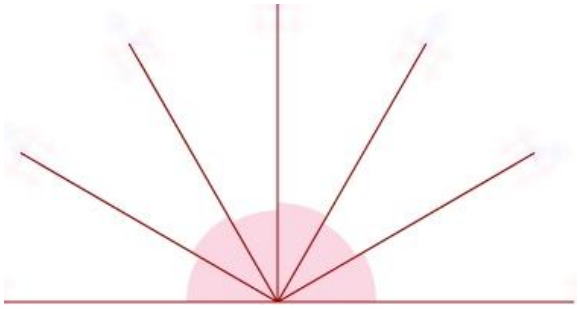
2. 30°角的合成與分解。學生可以用 30°角的圖形卡或使用 30°-60°-90°三角板來操作（依照需求分組），在測量確認 30°角後，可以操作 30°角的合成活動（例 1A）或 360°角拆解 30°角的活動（例 1B）：

   (1) 例 1A：

   - 把兩個 30°角拼起來，注意頂點要拼在一起，用量角器量量看是不是 60°。
   - 2 個 30°角拼成 60°角，再拼 1 個 30°角，是多少度？拼拼看，量量看。
   - 再拿 3 個 30°角，一個一個加入拼拼看，用了幾個 30°角，分別拼成幾度的角，先說說看，再量量看？

     量到 180°角時，可介紹「平角」的名稱，討論為什麼叫「平角」？

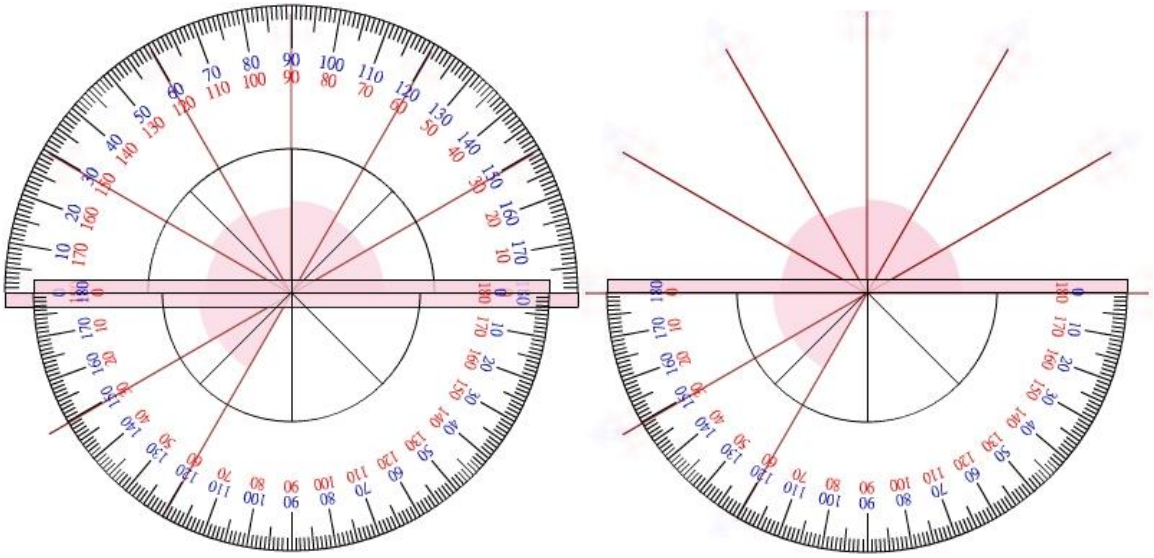




使用 5 個 30°角拼成 150°角　　使用 6 個 30°角拼成 180°角

（使用 http://magicboard.cycu.edu.tw/工具繪製）

- 再加入 1 個 30°角拼拼看，7 個 30°角拼起來是多少度？用量角器量量看，你會怎麼量？



- 這樣再繼續每次拿 1 個 30°角拼拼看，紀錄用了 30°角，是多少度。最後看看量到的什麼時候會拼成整整一圈，用了幾個 30°角？拼起來是多少度？用量角器量量看。

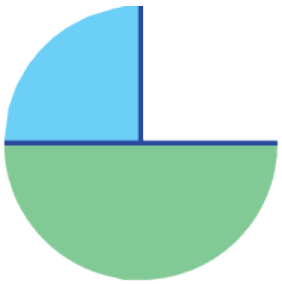
  量到 360°，可介紹「周角」的名稱，討論為什麼叫「周角」？

(2) 例 1B：

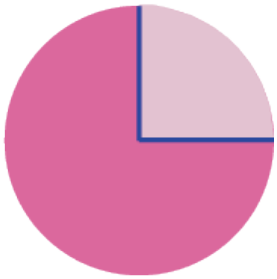
- 利用例 1A 拼成的 360°角，它用了幾個 30°角？
- 拿走 1 個 30°角，剩下的角是幾度？接著拿走 2 個 30°角，剩下的角是幾度
- 接著拿走 3 個 30°角，剩下幾個 30°角？剩下的角是幾度？
- 接著拿走 1 個 30°角，剩下幾個 30°角？剩下的角度是幾個 30°角？是幾度？

3. 對於超過平角的角，要注意溝通，並多做一些活動，豐富學生對這些角的理解。例如 270°角，可想成 3 個 90°的角的合成；平角與 90°角的合成；周角移除 90°角等。

3 個 90°角



與 90°角



周角減去 90°角

錯誤類型

1. 如 N-3-13，要注意學童混淆度數大小與邊長或面積的大小。許多學生誤以為老師使用的大量角器與自己使用的小量角器，會量出不同的結果，教學時可將學生的量角器與老師量角器疊合，透過 90°、60°、30°、10°等角度，確認兩個量角器上的角度都一樣，並用量角器釐清角度和邊長與面積無關。
2. 當角度超過 180°時，學生可能將注意力放在另一個小於 180°的角，造成理解與溝通上的錯誤。超過 180 度的角可利用角的合成或分解，避免學生觀注在比較小的角，或者透過旋轉角的旋轉幅度，加強學生的認識。教師布題也清楚溝通題意。
3. 學生使用量角器時，常誤將邊緣當作量角器的底線，造成角度測量的誤差。

評量

評量重點：

(1) 能操作量角器度量角度，並能做估測。

(2) 能理解角度加減的意義並做計算。

(3) 能理解大於 180 度的角的意義，並認識「平角」和「周角」。

(4) 能做出指定角度的角。

N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。 **備註：**基於N-4-2，本條目不做「平方公分」換到「平方公尺」的問題。不用複名數進行計算。	n-II-9

先備：N-3-14。

連結：S-4-3。

後續：N-5-12、S-5-2。

基本說明

1. 上承N-4-11，認識邊長1公尺正方形面積是「1平方公尺」，記成「$1m^2$」。並利用平方公尺板（萬格板）說明「1平方公尺 = 10000平方公分」（可連結S-4-3與N-4-2之100×100=10000）。

2. 教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單計算。

條目範圍

1. 面積的簡單計算不需使用複名數。
2. 不用除法進行「平方公分」換到「平方公尺」的問題。簡單的換算如「50000 平方公分 = 5 平方公尺」;「85000 平方公分 = 8 平方公尺 5000 平方分」仍可進行。

釋例

平方公尺量感建立應與生活結合，培養量感的教學舉例如下：

(1) 製作活動：1 m^2 是每邊 1 公尺的正方形(平方公尺板)面積，引導學生用報紙實做 1m^2 的大小。

(2) 鋪排活動：試試看要用多少本數學課本，才能鋪滿（覆蓋）1 m^2 的報紙（或 1 平方公尺板）呢？

- 也可選用 A4 紙張覆蓋，並感受 1 平方公尺有幾張（A4）紙張的面積，因為不一定會剛剛好，所以可用大約多少本的語言。

(3) 比較活動：量量看，教室（走廊）的一格，比 1m^2 大還是比 1m^2 小？把 4 張桌子拼起來，檢查看看四個桌面大小比 1 m^2 大還是比 1 m^2 小？

(4) 實測活動：量量看，走廊的面積有多少 m^2？

(5) 製作指定面積活動：在校園中鋪蓋一塊 12 m^2 的場地。

(6) 估測活動：教室前的黑板面積大概有多少平方公尺？量量看。

- 可利用學校中規律大小的磁磚、黑板、佈告欄的大小、1 個個人床墊的大小等的比較，教師依照學校與教室實際情境取材。

錯誤類型

1. 學生容易混淆「平方公尺」和「公尺」。教師應強調「公尺」是長度單位，「平方公尺」是面積單位;「1 公尺」是正方形邊長，「1 平方公尺」是正方形面積。如果學生清楚「公分」和「平方公分」的區別，則運用類比說明「公尺」與「平方公尺」的意義也一樣。
2. 學生常誤認 1 平方公尺 = 1000 平方公分。教師可利用萬格板解釋，1 格是 1 平方公分。1 平方公尺有 10000 格，1000 平方公分是 1000 格，只佔 1 平方公尺的很小一部分。教師甚至可在萬格板中指出 1000 格大概有多大（例如 100×10 的範圍）。

評量

評量重點：

(1) 認識「平方公尺」，並知道「1 平方公尺 = 10000 平方公分」。

(2) 能用「平方公尺板」做面積的簡單實測與估測。

(3) 培養對 1 平方公尺的量感，對面積作估測。

N-4-12 體積與「立方公分」：以具體操作為主。體積認識基於1立方公分之正方體。 **備註：**教學應注意體積不容易做直接與間接比較，應和1立方公分之正方體一起教學。	n-Ⅱ-9

先備：S-3-4。

連結：N-4-12、S-4-4。

後續：N-5-14、N-5-15、S-5-5。

基本說明

1. 如同其他量，認識體積應以操作活動為主，包含初步認識、直接比較、間接比較，比較遞移關係。但是體積的直接比較與間接比較活動並不容易進行，除簡單的體積概念介紹與教學示範之外，學生之操作活動上宜從規則排列的長方體或正方體入手。
2. 因為體積活動牽涉規則排列的長方體或正方體，因此本年也同時介紹「立方公分」，的常用單位。認識邊長 1 公分正方體體積是「1 立方公分」，記成「1 cm^3」。學生利用堆疊活動的經驗，可用 1 立方公分積木複製某 (簡單) 立體物件，並點數所使用的積木數量認識其體積。

條目範圍

1. 體積雖然是最實際的視覺量，但因為常見物體外部的屏蔽效果，除非物體差異很大，並不容易進行比較活動。但儘管如此，教師仍可採用特殊透明材質物體與結構簡單的正方體或長方體進行體積概念的教學，讓學生在比較上能和日常生活的「大」與「小」結合起來。
2. 本年度只進行初步認識與點數活動。
3. 教師應花時間，進行實體與課本或掛本視圖間之對應解說，讓學生慢慢適應立體形體之平面視圖，以利後續溝通。

釋例

老師可於備課時先製作一些用 1 cm^3 排出的緊密造型的立體 (可用白膠來黏合 1 cm^3 積木)，在課堂時讓學生自由仿做，再算出體積，這樣的活動可以溝通緊密排列的認知，加強學生理解立體堆疊形體的能力，促進學生的體積量感。另外，若有視圖配合，更可理解視圖上積木堆疊形體的意義，有利於上課、閱讀與評量。

(1) 例 1：「排出像圖 1 一樣的立體形狀，再算出它的體積。」

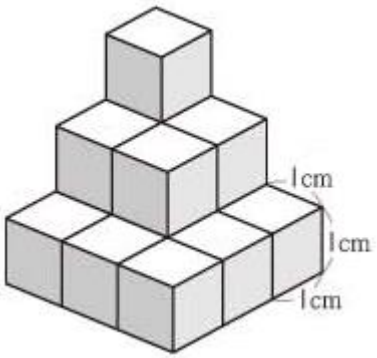
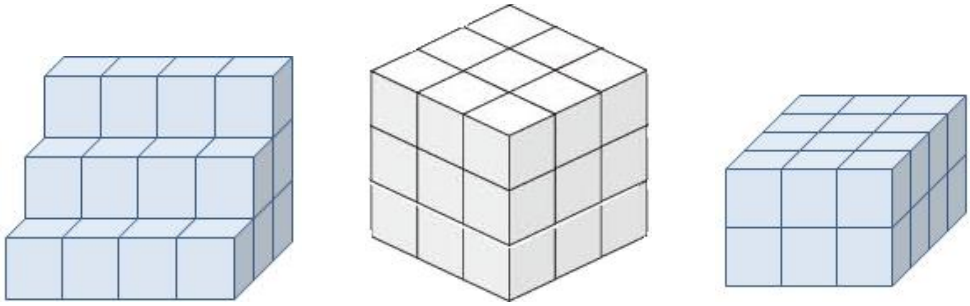


圖 1

(2) 例 2：「算算看，下面各個積木造型的體積是多少個 1 cm^3？體積是多少？」

1)　　2)　　3)



積木堆疊形體的體積計算，重點在於單位（1 cm^3）的點數，將每一層的積木加總得到整個造型積木的體積，而有些較為規則的立體可以用乘法協助算出有多少個積木。

教學時教師可用實物投影機或用較大積木幫助點數有幾個正方體，但實際的體積還是要用實際大小的模型來說明。

錯誤類型

1. 有些學生只點數看得到的正方體個數，背後有是否有積木，是否緊密排列，在只看到一個向度下，可能會影響點數的結果。相關活動必須溝通清楚，避免多種答案產生。
2. 關於錯用體積單位的學生，如將「立方公分」錯用為「平方公分」或「公分」指導學生時應強調「公分」是長度單位，「平方公分」是面積單位，「立方公分」才是體積單位，可連結過去學習經驗。

評量

1. 評量重點：

   (1) 能做簡單形體體積的直接比較與間接比較。

   (2) 認識「立方公分」的體積單位，並用來點數簡單形體的體積。

2. 評量注意事項：

   學生若不熟悉積木堆積的空間經驗（S-3-04），不容易理解視圖的意義，教師應盡量先行

診斷並加強教學。評量時布題圖形務需清楚。

N-4-13 解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24小時制。含時間單位換算。 **備註：**教學須包含各種類型的時間加減問題。建議不直接談時差，與時差有關問題，可在布題時先處理。	n-Ⅱ-10

先備：N-3-17。

後續：N-5-16。

基本說明

1. N-3-17 已在簡單的情況處理時間加減問題的基本類型：「時間量的加減」、「時刻＋時間量＝時刻」、「時刻－時刻＝時間量」、「時刻－時間量＝時刻」，本年的重點則是結合「時間單位變換」、「時間加減的進退位」與日常時間表示的各種變化形式，進行時間加減的解題應用。
2. 日常時間（時刻）表示的各種變化形式包括「跨時」、「跨午」（上午和下午）、「跨日」（後天、明天、昨天、前天）、「24 小時制」（與上下午之轉換）、「常見時間表示」（如電子鐘表示之轉換）。

條目範圍

1. 時間的單位換算可用除法來協助計算。如「144 分是幾時幾分？」144÷60＝2 餘 24，144 分＝2 時 24 分。時間單位換算宜限制在二階單位換算內。
2. 不做時差教學，但可進行與時差相關的應用解題，在布題時先告知解題的依據，如「舅舅昨天在洛杉磯搭飛機回台北，他上機的時間是臺灣時間下午 4 時……」。
3. 複名數計算之原則見 N-4-9。

釋例

跨日的時間加減問題問題，在布題上問法要明確，是問經過多少時間？切勿混淆「週期日（24 小時為 1 日）」與「時間日（固定時刻點，如：幾月幾日的那一天）」。

(1) 例 1：工廠機器從 3 月 1 日上午 9 時開始運轉至 3 月 3 日上午 9 時，請問機器運轉了運轉了幾日？是運轉了幾時？

（修自《部》第八冊課本 P.95）

3 月 1 日上午 9 時到 3 月 2 日上午 9 時是經過 1 日，

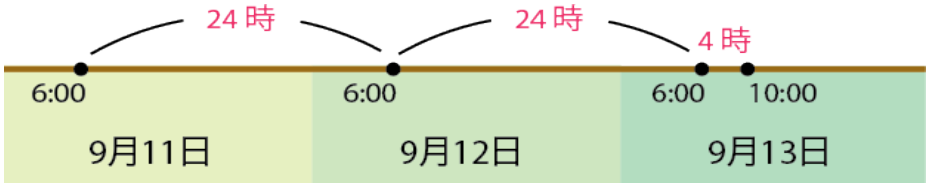
3 月 2 日上午 9 時到 3 月 3 日上午 9 時也是經過 1 日，

所以抽水馬達運轉了 1+1=2 日。

也可以將 1 日換成 24 時，寫成 24+24=48。

答：2 日（或 48 時）。

(2) 例 2：颱風過後，大樓地下室淹滿水，抽水馬達從 9 月 11 日上午 6 時開始運轉至 9 月 13 日上午 10 時，終於將淹水抽完。請問抽水馬達運轉了幾日幾時？



- 9 月 11 日上午 6 時到 9 月 13 日上午 6 時是 2 日，

  上午 6 時到上午 10 時是 10-6=24 時，

  所以抽水馬達運轉了 2 日 4 時。
- 也可以將 1 日換成 24 時，寫成 24+24+4=52 時。
- 也可以想成：9 月 11 日抽水馬達運轉了 24−6=18 時，

  9 月 12 日運轉了 24 時，

  9 月 13 日運轉了 10 時，

  總共運轉了 18+24+10=52 時。

  答：2 日 2 時 (或 52 時)。

錯誤類型

混淆「週期日」與「時間日」，教師應在布題時釐清問題之意義。

評量

1. 評量重點：

   (1) 能做跨時、跨午、跨日、24 小時制的時間加減問題。

   (2) 能做時間單位換算。

2. 評量注意事項：

   時差類問題的評量，應注意布題時處理方式。

S-4-1 角度：「度」（同N-4-10）。量角器的操作。實測、估測與計算。以角的合成認識180度到360度之間的角度。「平角」、「周角」。指定角度作圖。 **備註：**同N-4-10備註。	n-II-9

S-4-2 解題：旋轉角。以具體操作為主，並結合計算。以鐘面為模型討論從始邊轉到終邊所轉的角度。旋轉有兩個方向：「順時針」、「逆時針」。「平角」、「周角」。 **備註：**不處理超過360度的問題。	s-Ⅱ-4

先備：N-3-13(S-3-1)。

連結：N-4-10(S-4-1)。

基本說明

1. 在小學，旋轉角的概念可作為學習角度的應用。旋轉角由始邊開始轉到終邊，構成一個角，角度的大小可以用來描述旋轉的程度。但是旋轉有兩種方向：順時針與逆時針，因此必須結合角度大小與轉向（如「順時針旋轉 30 度」「逆時針旋轉 150 度」）才能完整描述旋轉角。
2. 旋轉角的典型教學活動是結合鐘面教學，藉由鐘面上的時針或分針旋轉，讓學生認識旋轉、旋轉中心、始邊、終邊與旋轉角，以及順時針與逆時針的意義。老師的教學重點在於自然應用角度概念於旋轉，而不是將旋轉角視為新的量。
3. 學生應熟悉幾個和旋轉角有關的應用，例如「向右轉」是順時針轉 90 度；「向左轉」是逆時針轉 90 度；「向後轉」則是旋轉 180 度(即一平角)，且順時針與逆時針轉 180 度的結果一樣。也知道一個人旋轉 360 度（順時針或逆時針），就是轉了一整圈（所以稱為一周角），回到原來的方向。
4. 透過鐘面活動，學生應熟悉鐘面數字與角度的關係，也能運用點數或簡單計算回答如「分針順時針從 3 走到 7，是轉了幾度角？」若學生在自然領域或社會領域已有部分經驗，也可結合方位，說明如「從正北逆時針轉到正西方是旋轉 90 度。」
5. 教師也可以處理加減相關的計算問題，旋轉角問題的題幹應明述是順時針或逆時針，計算結果不宜超過 360 度。另外，雖然高中時會約定順逆時針的正負約定，但在小學只要謹守順時針或逆時針的敘述方式即可。例如逆時針旋轉 30 度後，再逆時針旋轉 50 度，是逆時針旋轉 30+50=80 度。另外也可探索討論，順時針旋轉 20 度，再逆時針旋轉 30 度，是逆時針轉 30-20=10 度。教師應將問題轉化成角的合成分解問題，而不是用「正負」或「向量」的觀點來討論。

條目範圍

1. 活動應至少包含鐘面教學、人的旋轉動作、方向或方位的變換。
2. 教師教學不處理超過 360 度的問題。在活動中學生自然的探索不在此限（如「轉兩圈是 720 度」等）。

錯誤類型

學生有時會搞錯順時針與逆時針的方向，或在做加減時，忽略順時針與逆時針的條件。

評量

1. 評量重點：
   (1) 理解旋轉角。知道例如「順時針旋轉 80 度」、「逆時針旋轉一個直角」的意思。
   (2) 能結合旋轉角與加減計算解決日常問題。
   (3) 知道旋轉一個「平角」和「周角」意義。
2. 評量注意事項：
   本條目的評量，題幹應明述順時針與逆時針的條件。

S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。 **備註：**邊長限整數。最後學生的計算是依據定義以乘法計算，而非測量合成之結果。簡單複合圖形限兩圖形之組合。	s-II-1

先備：S-3-2。

連結：S-4-8。

基本說明

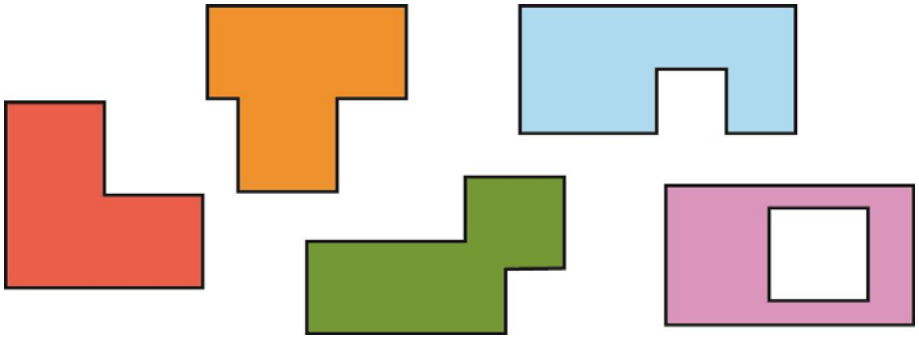
1. 在 S-3-2 的活動中，可能已初步探討正方形和長方形的周長與面積。本條目正式說明正方形與長方形的周長與面積的一般計算方法，並以公式紀錄此計算方法（R-4-3）。以運算公式的內在性質簡化繁瑣的實測活動，是數學的重要日常應用。但公式之教學應在操作活動與討論後再歸納總結，讓學生確實理解公式的意義，不可直接告知公式背誦就進行計算。
2. 正方形周長 = 邊長×4；正方形面積 = 邊長×邊長。
   長方形周長 = (長 + 寬)×2；長方形面積公式 = 長×寬。
3. 學生學習分析並處理簡單複合圖形的周長與面積。

條目範圍

1. 所有教學活動中長方形與正方形的邊長皆為整數。
2. 簡單複合圖形限兩圖形之組合：並置、疊合、扣除。重點不在繁瑣的計算，而是學習分析圖形，辨認圖中的正方形或長方形，並應用已知的知識。
3. 公式(長 + 寬)×2 只運用四年級併式的規則，並未討論分配律（R-5-2）。
4. 若時間允許，可以進行「長方形面積相等，形狀不一定相同」的討論（N-5-3 因數的前置經驗）。

釋例

簡單複合圖形限兩圖形之組合（並置、疊合、扣除）。示例如下：



注意：紫色圖形的周長是內外兩段周界的和。

錯誤類型

有些學生常混淆周長與面積的概念，以面積公式計算周長，或以周長公式計算面積。老師教學時須確認學生是混淆周長及面積的意義，或者學生不理解周長或面積公式的意義。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能計算正方形與長方形的周長。
   (2) 能計算正方形與長方形的面積。
   (3) 能計算簡單複合圖形的面積與周長。
2. 評量注意事項：
   (1) 簡單複合圖形之評量限兩圖形之組合。更複雜圖形僅適合探索。
   (2) 邊長限整數。
   (3) 已知正方形面積反過來求邊長問題只宜出現於探索活動，且邊長需小於或等於 10。

S-4-4 體積：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識1立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。 **備註：**同N-4-12備註。	n-Ⅱ-9

S-4-5 垂直與平行：以具體操作為主。直角是90度。直角常用記號。垂直於一線的兩線相互平行。平行線間距離處處相等。作垂直線；作平行線。 **備註：**透過操作和觀察知道平行線間距離處處相等，非數學證明。	s-Ⅱ-3

先備：S-3-1。

連結：S-4-7、S-4-8。

後續：S-5-1、S-5-2、S-5-4、S-5-6。

基本說明

1. 教師在學生初步認識階段，應引領學生注意生活中常見的垂直與平行現象：窗格、筆記本的格子、正方形或長方形磁磚的拼貼等。並特別引領學生注意到垂直、平行與長方形的密切關係。
2. 90 度的角稱為直角，讓學生檢查三角板、直尺中的直角，知道正方形和長方形都有四個直角。教師告知直角的常用記號，並讓學生學習標示。
3. 用三角板（或直尺）為工具，檢查一角是否為直角。知道「垂直相交的兩線所成的四角相等，且都是直角」。並由此注意到，用紙恰當摺兩次（如圓四等分的對摺）會自然得到 4 個直角。
4. 從窗格觀察到兩線平行的現象，知道正方形和長方形的對邊互相平行，且「兩平行線等寬」或「兩平行線間距離處處相等」。教師引導發現並總結平行的特徵：「垂直於一線的兩線相互平行」。
5. 學生能用三角板與直尺畫出「直角」、「過線上或線外一點作垂直線」、「指定寬度之兩平行線」、「過線外一點，畫出和此線平行的直線」。

條目範圍

1. 本條目結合觀察、操作和局部推理，了解生活常見的垂直和平行現象，因此像「平行線間距離處處相等」的解釋可活用學生的觀察，而非進行嚴格的數學證明。
2. 本年度的活動或評量問題，垂足均要落在直線上，五年級再處理延長線的垂直或平行。
3. 不談曲線的平行概念。

評量

1. 評量重點：
   (1) 理解「兩線垂直」的意義。
   (2) 理解「兩線平行」意義，知道「兩平行線間距離處處相等」。
   (3) 能用三角板與直尺作「過線上（外）一點作垂直線」、「指定寬度之兩平行線」、「過線外一點，畫出和此線平行的直線」。
2. 評量注意事項：
   畫垂直線或平行線時，應容許學生的操作有誤差。

S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能用平移、旋轉、翻轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。 **備註：**在具有平移或旋轉對稱特性的圖形上，學生可察覺豐富的全等模式。平移、旋轉、翻轉描述操作的方式，非名詞教學，名詞不應出現。	s-Ⅱ-2

連結：S-4-3、S-4-7、S-4-8。

後續：S-5-1、S-5-2、S-5-4。

基本說明

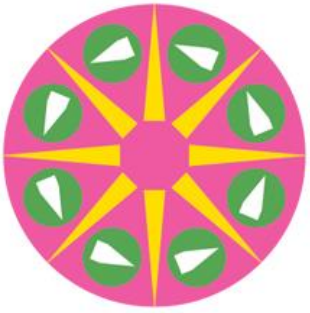
1. 在之前的幾何活動中，學生已經不斷運用全等操作如平移、旋轉、翻轉。本條目將正式介紹圖形全等的概念及性質，但全等的應用仍應以具體操作之幾何活動為主，教師不必急於做出結論。
2. 兩圖形若形狀和大小都一樣稱為「全等」圖形。教師可先從具有明顯平移、旋轉對稱的圖形上（見釋例），指認出全等的圖形。再利用圖形的疊合來檢驗其形狀和大小都相同──即兩圖形全等。
3. 運用疊合，知道簡單平面圖形的全等，意謂其頂點、邊、角能完全疊合，因此產生「對應點」、「對應邊」、「對應角」等概念。學生從全等活動中知道「全等圖形的對應邊相等，對應角也相等。」
4. 能應用全等概念到相關的平面圖形單元中（S-4-3、S-4-7、S-4-8），學生應從活動中知道全等的圖形會保持其特定的幾何性質：如全等圖形的周長相等、面積相等。

條目範圍

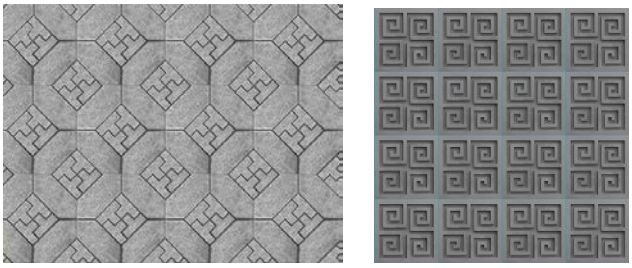
1. 平移或旋轉對稱圖形具有豐富變化的模式，提供學生更多的經驗，但其中的全等圖案的造型應求簡單容易指認、辨別、比較為原則。
2. 原則上，本年度教學在於觀察全等圖形具有相同的性質，而不是運用幾何特徵性質來判斷兩圖形是否全等，也不用做出結論。如「兩邊長相等的正方形是否全等」的討論，應只在操作活動中進行。
3. 上述用到「平移」、「旋轉」、「翻轉」等名詞，僅作為教師溝通之用，不需出現於教學中。

釋例

補充說明所說：「在具有平移或旋轉對稱特性的圖形上，學生可察覺豐富的全等模式。」指的是初期讓學生察覺全等圖形的活動，而非幾何對稱性教學（小學唯一的對稱性教學是 S-5-4「線對稱」）。由於平移對稱（下右圖）或旋轉對稱（下左圖）的設計圖樣，具有對稱產生的美感，容易吸引學生的目光，而且也容易察覺因為對稱性而重複出現的全等圖形。



日常生活常常可以看到許多具對稱性隊性拼貼或拼排而成物品，例如磁磚、磚牆、布、包裝紙、商標、標誌等，這些都是利用許多「相同的圖形」，有規則的重複出現而形成的，如下列各圖：



地面或牆面拼貼（圖形翻拍擷取自網路）

布紋或包裝紙（圖形翻拍擷取自網路）

商標或標誌（擷取自 wiki）

例 1：「找找看， 下圖中有哪些重複出現的圖形，它們是一樣的嗎？」

教學前，老師準備類似圖樣（包裝紙、照片、電子檔等），讓學生指認圖中重複出現的圖形，再討論「形狀和大小是否都一樣」。教師應準備圖樣上重複出現的「全等」圖形，提供學生驗證操作。

- 教學重點在讓學生察覺重複的模式，可以提供驗證的圖樣，引導學生用平移、旋轉、翻轉等操作去驗證是否疊合；也可用一個圖形當印章，討論或簡單示範這個圖形印章如何複製其他圖形；如使用包裝紙，可讓學生剪下一圖樣，拿來和其他圖形比對是否「全等」(即可以疊合，形狀大小一樣)。
- 何謂「一樣」的歧義：有些學生以為「一樣」只是單純的平移重疊。教師要引導或示範「旋轉」與「翻轉」的操作，就好像拼圖的操作一樣。
- 顏色的問題：一般包裝紙多為彩色，有時會形成干擾。對於同圖異色的圖案，教師應強調以「形狀大小一樣為準」。教師也可只提供黑色（單色）線條之圖形取代。
- 許多對稱圖形中有很多全等圖形的選擇，學生要取怎樣的圖形，老師應持開放的態度，能合理說明即可。

錯誤類型

1. 學生常會受到顏色干擾，以為不同顏色的全等圖形是「不同的」。教師應強調以「形狀大小一樣為準」。
2. 有些學生以為全等只是單純的平移重疊，教師要示範「旋轉」與「翻轉」的操作，讓學生理解全等的意義。

評量

評量重點：

1. 認識圖形全等的意義，並能實際操作檢查簡單圖形式是否全等。
2. 針對簡單平面圖形，知道全等圖形之「對應角相等、對應邊相等」，並能運用於解題。

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。	s-Ⅱ-3

先備：S-2-2、S-3-4。

連結：S-4-1、S-4-5、S-4-6。

後續：S-5-1、S-5-2、S-5-4。

基本說明

1. 小學前三年的幾何教學重點主要在於熟悉常見的幾何造型、常用操作方式與測量工具，辨認幾何形體的構成特徵，因此是先給定幾何形體，再加以操作或實測，察覺此形體的部分特性。小學後三年將採取以構成要素的性質來「刻畫」特定形體，並討論這些形體的其他性質。S-4-7 和 S-4-8 的目標便是先認識並命名常見的三角形與四邊形。

   * 注意：用「刻畫」而不用「定義」一詞，是因為這裡只強調認識幾何形體的順序改變了，「刻畫」只提供認識特殊形體的入口，小學生並未成熟到可以區分「定義」和「性質」，也不必強調邏輯「等價」的特性。
2. 「正三角形」是三邊等長的三角形，實測可知三個(內)角都相等是 60 度。「等腰三角形」是有兩邊相等（腰）的三角形，實測可知兩腰對應角相等。「直角三角形」是有一角為直角的三角形。介紹直角三角形時，也可順便介紹「銳角三角形」和「鈍角三角形」的概念。
3. 學生能用直尺和量角器畫出「指定邊長的正三角形」、「指定腰長的等腰三角形」、「直角三角形」。
4. 教師也可以引導進行拼貼活動，讓學生熟悉這些圖形的特性，並和其他幾何概念如垂直和平行連結。

條目範圍

由於學生認知心理尚未成熟，不必特別強調甚至評量「正三角形是不是等腰三角形」這類問題。教師可以發展活動，讓學生自然察覺這項事實，而非以形式推理「證明」或強行告知。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能從邊與角的特徵指認正三角形、等腰三角形、直角三角形。
   (2) 認識銳角三角形、鈍角三角形。
   (3) 能用直尺和量角器畫出「指定邊長的正三角形」「指定腰長的等腰三角形」「直角三角形」。
2. 評量注意事項：
   本條目的「作圖」並非所有三角形的作圖。**S-5-1 始有**三角形三內角和為 180 度的教學。

S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵(含平行)認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。 **備註：**作圖包含正方形、長方形、平行四邊形。	s-Ⅱ-3

先備：S-3-2、S-3-4。

連結：S-4-1、S-4-5、S-4-6。

後續：S-5-1、S-5-2、S-5-4。

基本說明

1. 小學前三年的幾何教學重點主要在於熟悉常見的幾何造型、常用操作方式與測量工具，辨認幾何形體的構成特徵，因此是先給定幾何形體，再加以操作或實測，察覺此形體的部分特性。小學後三年則採取以構成要素的性質來「刻畫」特定形體，並討論這些形體的其他性質。S-4-7 和 S-4-8 的目標便是先認識並命名常見的三角形與四邊形。
2. 正方形和長方形已於 S-3-2 中介紹。「平行四邊形」為兩組對邊平行的四邊形，實測可知兩組對角相等；「菱形」是四邊相等的四邊形，實測可知兩組對角相等；「梯形」是只有一組對邊平行的四邊形。
3. 學生能運用 S-4-5 的方法畫出「平行四邊形」。教師也可進行拼貼活動，讓學生熟悉這些圖形的特性，並和其他幾何概念如垂直和平行連結。學生應察覺「固定邊長的菱形有很多不同的形狀」(和正三角形不同)，能檢查「菱形兩組對邊是否平行」。和全等相關之活動包括「將平行四邊形 (或菱形) 沿對角線割開後之兩個三角形全等。」

條目範圍

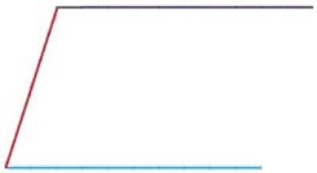
由於學生認知心理尚未成熟，不必特別強調甚至評量「正方形是不是菱形」、「長方形是不是平行四邊形」這類問題。教師可以發展活動，讓學生自然察覺這項事實，而非以形式推理「證明」或強行告知「包含關係」。

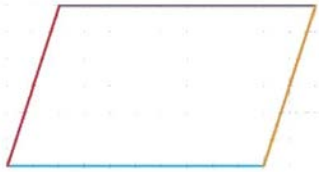
釋例

1. 在 S-3-02 已畫過指定邊長的正方形和長方形，對於平行四邊形，可由已有相鄰兩邊的的圖形來完成。教學時，也可以使用方格紙來畫平行線，更容易處理平行的兩邊和對邊一樣長的性質。

   例 1：有一個平行四邊形，已經畫了兩邊 (如圖)，完成這個平行四邊形。

步驟一：從紅線上方的端點開始，畫一條和藍線平行且一樣長的直線。(下左圖)





步驟二：再從藍色線右端畫一條和紅色線平行的線和上方的線相接。(上右圖)。

- 本題有很多作法，這裡是假設學生已學習「平行四邊形有兩組平行的邊，且這兩組相對的邊一樣長」的性質來畫圖。另一種直接用「平行四邊形兩雙對邊相互平行」的作法，是在紅線上方端點做和藍線平行的線；在藍線右方端點做和紅線平行的線，兩線相交處就是平行四邊形的第四個頂點。
- 以上兩種作法都用到 S-4-05「過線外一點，畫出和此線平行的直線」的能力，原理是先畫過此點和指定平行線垂直的線段，再畫過此點的垂直線段，由於兩線同時垂直同一線段，故此兩線互相平行，應用這原理，也可以直接利用兩個直角三角板來畫平行線。
- 本例也可以透過設計好的方格紙，利用方格來完成平行線，比較簡單。

2. 教師可以利用扣條，讓學生進行下列三角形和四邊形的活動，初步察覺三角形和四邊形的特性：

(1) 三角形是穩固的圖形，三邊固定後，無法任意改變三個角的角度。

(2) 四邊形不是穩固的圖形，拼成後雖然邊長固定，還是可改變四個角的角度。

(3) 用四根同長的扣條拼成菱形，調整角度，可以看到很多不同形狀的菱形。

(4) 用兩組分別同長的扣條拼成兩組對邊相同的四邊形，如果將其中一個角固定成直角，這個四邊形就不會再改變形狀，是一個長方形。如果換成四邊一樣長的情況，固定其中一個角是直角，圖形就固定成正方形。

錯誤類型

雖然教師在小學不主動處理「正方形、長方形或菱形是否平行四邊形」的問題，但一旦有學生堅持說這些圖形不是平行四邊形時，教師應請學生檢查這些形狀是否都有兩組平行的對邊，因此應該說「這些圖形是很特別的平行四邊形」。

評量

1. 評量重點：

(1) 能從邊與角的特徵（含平行）指認正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

(2) 能作出正方形、長方形、平行四邊形。

2. 評量注意事項：

確定學生能進行正方形、長方形、平行四邊形的作圖，若時間充裕，可再考慮其他圖形的做圖。

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。 **備註：**限整數。2、3年級已學習之兩步驟問題（N-2-8、N-3-7），也應複習並進行併式學習。	r-II-3

先備：N-2-8、N-3-7。

連結：N-4-3、R-4-2。

後續：R-5-1。

基本說明

1. 單論解題，併式並非必要，但能將所欲計算的步驟合併為一式，除了簡潔之外，也是日後學習代數的重要基礎。學生在本年度先學習如何將兩步驟的解題算式合併成一式，其中的關鍵是學習如何使用括號，知道括號中的運算應先計算。但是算式括號太多，會讓算式變得複雜，因此學生也得學習傳統四則混合計算的約定。
2. 併式時，先用括號「保護」先算的算式，是很好的策略。至於括號是否保留，有幾個教學原則：保留括號的算式不是錯誤的；為求算式簡潔，學生應有去括號的學習經驗；有些括號不能去掉。
3. 四則混合計算的規則為
   (1) 算式有括號時，括號內的運算先計算。
   (2) 其次，先乘除後加減。
   (3) 除上列之規定外，算式由左向右逐步計算。
   四則混合計算規則是傳統的約定，學生學習四則混合計算規則的目的在於簡潔與溝通，避免日後多步驟併式（包括國中後的代數式）因使用許多括號而太蕪雜。
4. 無論四則混合計算或併式計算都牽涉到多步驟的計算，教師可先引領學生學習逐次減項的計算要領，避免計算錯誤。若學生已經熟練而能跳躍步驟者，教師可予以鼓勵而非制止。
5. 有一些兩步驟問題的情境，有不同的解決策略，併為一式時會出現不同的算式，這類情境適合用來學習四則計算規律，配合 R-4-2 教學。
6. 併式和逐次減項是相反的程序，各有不同的學習目標。前者是學習將兩或多步驟的過程表達成一個算式，後者則是將一個兩或多步驟算式，有次序的利用計算削減步驟，最後算出該算式的答案。如果教師將這兩種主題放在同一課程，可能會顯得重複，但如果考慮應用計算規律（R-4-2），將併式的算式轉換成另一算式，再逐次減項算出答案，就能看出其中

的差異。

條目範圍

1. 雖然併式或四則混合計算與數字的形態無關，但為了讓學生專心學習，應只限定數字為整數，牽涉除法時，則只考慮整除的情況。
2. 除了本年度的 N-4-3 之外，也應同時複習 N-2-8 和 N-3-7 之兩步驟問題，並做併式練習，尤其是與 R-4-2 配合時。
3. 就學習併式而言，教師不見得要迴避如 (a+b)*c 之類的問題，但必須確定學生理解這個算式的意義。至於分配律則見於 R-5-2。

釋例

1. 本條目的併式是將兩步驟運算併成一個算式，如何將「先算」和「後算」的兩步驟合成一式的過程，可見下例。

(《部編本》第 7 冊 p.33)

2. 學生在初期學習併式時，可容許學生記錄成有加括號或省略括號的算式 (教師教學初期亦可兩者並置)，待學生熟練四則混合計算之規則後，應鼓勵依四則混合計算規則省略括號。
   (1) 例 1 :「學校上學年有 526 個學生，六年級畢業 82 人後，新學年又加入一年級新生 92 人，學校現在有多少學生？ 」
   初期學生可能記成 (526−82) + 92，熟練「由左往右算」的混合計算規則後，鼓勵學生記錄成 526−82+92。
   - 類例 1 :「一些巧克力，每 6 塊裝成一包，裝了 12 包，還剩下 3 塊，巧克力原來有幾塊？ 」
   - 類例 2 :「40 顆蘋果平分成 5 箱，其中 3 箱送禮，送禮的蘋果有多少顆？」

(2) 例 2：「一桶軟糖有 100 顆，分給 31 位小朋友，每位小朋友 3 顆，還剩下多少顆軟糖？」

初期學生可能記成 100−(3×31)；熟練「先乘除後加減」的混合計算規則後，鼓勵學生記錄成 100−3×31。

● 類例：「一打鉛筆賣 65 元，小明身上帶了 200 元，想買 3 打鉛筆，可找回多少元？」

3. 學生學習使用括號時，應讓學生理解不加括號或括號拿掉，依照混合計算的規則會和原意不同，嚴重影響溝通，因此教師教學時要注意學生「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」的問題。

(1) 例 1：「媽媽將 150 毫升的胡蘿蔔汁和 450 毫升的蘋果汁混合調成蔬果汁，將蔬果汁平分成 5 杯，每一杯蔬果汁有多少毫升？」

先算：150+450=600，

後算：600÷5=120。

正確的併式是：(150+450)÷5。但學生可能「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」，寫成 150+450÷5。依照「先乘除後加減」的約定，將會算出 150+450÷5=150+90=240 的結果，和正確答案 120 不同。

(2) 例 2：「哥哥到文具店買一本字典 400 元，一盒水彩 320 元，付了 1000 元，要找回多少元？」

先算：400+320=720，

後算：1000−720=280。

正確的併式是：1000−(400+320)，但學生可能「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」，寫成 $1000-400+320$，依照「由左往右算」的約定，將會算出 1000−400+320=600+320=920，，和正確答案 280 不同。

(3) 例 3：「巧克力 48 顆，平分給 3 位男生和 5 位女生，每人分得幾顆巧克力？」

先算：3+5=8，

後算：48÷8=6。

正確的併式是：48÷(3+5)，但學生可能「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」，寫成 48÷3+5，依照「由左往右算」的約定，將會算出 48÷3+5=16+5=21，和正確答案 6 不同。

4. 學生熟悉兩步驟併式後，可讓學生從兩步驟的併式算式來練習擬題。

(1) 例 1：「寫一個文字題表示 12×3÷9」。

作答舉例：

● 「一打鉛筆有 12 枝，買 3 打鉛筆分給 9 個人，每人可分得多少枝鉛筆？」

● 「一盒巧克力有 12 顆，老師買 3 盒巧克力，再每 9 顆裝成 1 小包，可裝成幾

小包？」等等

(2) 例 2：「寫一個文字題表示 100−(50+25)」。

作答舉例：

- 「妹妹到文具店買一本筆記簿 50 元，一枝原子筆 25 元，付了 100 元，要找回多少元？」
- 「哥哥閱讀一本 100 頁的故事書，上午讀了 50 頁，下午讀了 25 頁，還剩下幾頁沒有閱讀？」
- 「哥哥有 100 元，弟弟有 50 元。妹妹有 25 元，弟弟和妹妹合起來的錢比哥哥少多少元？」

學生可能因為忽略算式中的括號，擬出錯誤的題目：「超商的冷藏架上有 100 瓶飲料，賣掉 50 瓶後，再放進 25 瓶，現在冷藏架上有幾瓶飲料」。教學時應加澄清 100−(50+25) 與 100−50+25 的結果不同。

錯誤類型

1. 處理併式時，「應加括號而未加」或「不應去括號而去掉」。教師應提醒學生計算結果的錯誤。
2. 逐次減項時，有時發生等號標示有誤的情形。如：在算式右邊和下方都出現等號。

評量

1. 評量重點：
   (1) 熟悉四則混合計算之約定並能使用。
   (2) 能做二、三年級兩步驟問題之併式。(參見 R-4-2)
   (3) 能做乘除兩步驟問題之併式。(參見 N-4-3、R-4-2)
   (4) 能做連除兩步驟問題之併式。(參見 R-4-2)
2. 評量注意事項：
   學生若在併式之後活用計算規律解題，應予以鼓勵，不可視為錯誤。

R-4-2 四則計算規律（Ⅰ）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。 **備註：**加減部分，不做$a-(b-c)$之去括號。乘除只做「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘後除與先除後乘的結果相同」。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題(其中調整後的算式已無法以原情境來解釋) 。	r-Ⅱ-4

先備：N-2-8、N-3-7。

連結：N-4-3、R-4-1。

後續：R-5-2。

基本說明

1. 在進行 N-2-8、N-3-7 的兩步驟應用的活動時，有些學生可能已經知道同一問題有兩種正確作法。因此當本年度學生學習併式時 (R-4-1)，就有可能得到兩種併式的方式，只要學生意識到許多類似但數字不同的問題都有一樣的結果時，就建立了一項牽涉到兩步驟運算的四則計算規律。因此 R-4-1 和 R-4-2 雖然本質不同，但在教學上卻可以緊密結合。
2. 四則計算規則的完整教學應包含三部分：
   (1) 計算規律為何正確的說明與應用。前述 1.的方法是一種自然的說明方式，因為學生在活動中自然察覺到兩者都必然是正確的。另一種可能方式是運用學生已知的四則運算模型去分析理解。這個階段的目標是讓學生認識這的確是一項規律，可以應用到所有數。

   例：學校辦接力賽，每班總共要跑操場 6 圈。學校操場一圈是 200 公尺，按規定每人要跑 50 公尺，每班必須派出多少人？」可以先算總共跑多少公尺，再算共需要多少人，算式是 $200\times 6\div 50=24$。但也可以先算一圈需要幾個人，再算 6 圈需要多少人，算式是 $200\div 50\times 6=24$。由於在這個情境裡，兩算式結果之所以相等和數字無關，因此可知「先乘後除與先除後乘的結果相同」。
   (2) 純數字的規律練習：學習規律的方法之一是應用規律，但是規律是抽象的，涉及生活情境的應用問題，牽涉到情境的細節與合理性，反而會模糊學習焦點，因此應該提供學生單純數字的練習，但教學上必須小心布題，製造動機，讓學生有應用規律的動機，樂於運用規律。例如，遇到「176+88−76」可以用「176−76＋88」簡單計算。這是學生理解數學規律的抽象性的第一步。
   (3) 超越情境的應用：數學規律的抽象性超越特定的情境，一個數字算式可能可以應用到不同型態的情境，有些型態的情境和 (a) 不同，並無法自然有另一種算式的解釋。但既然我們可以用原算式來解題，透過四則計算規律，仍然可用另一算式協助解題，算出答案。超越特定情境正是學生理解數學規律抽象性的第二步。

   例：「一客牛排 280 元，買 8 客牛排的錢，可以買 28 個披薩，一個披薩多少元？」一般學生會列式為 280×8÷28，但學生可直接運用計算規律，用 280÷28×8=80 來算比較簡單。注意 280÷28×8 在原來情境中並不容易解釋。

   例：有 96 個布丁，每 8 個布丁裝一盒，每 3 盒裝一箱，可裝成幾箱？使用 96÷8÷3 合理，但使用 96÷3÷8 雖然無法解釋，卻能更簡單的算出答案 4。
3. 本年度的學習範圍。加減部分，除了已學過的 R-2-2，應包含例如 「先加再減與先減再

加的結果相同」、「連減的順序可交換」、以及「連減兩數相當於減此兩數之和」，但不需處理較難的 $a-(b-c)=a-b+c$。乘除部分可做「三數相乘，順序改變不影響其積」以及「先乘後除與先除後乘的結果相同」。

條目範圍

1. N-4-3 中的連除在本年度只進行併式（R-4-1），其計算規則在 R-5-2 處理。
2. 在課程中不使用「$a+b-c=a-c+b$」這類公式來記錄計算規律。
3. 四則運算規律之教學應以整數進行，除法必須整除。
4. 「三數相乘，順序改變不影響其積」牽涉到乘法交換律和結合律，但名詞「交換律」和「結合律」不宜出現在教學現場。

釋例

1. 我們用最簡單的例子：$a+b+c=a+c+b$ 說明「計算規律」教學的三個層次：

   (1) 規律為什麼是對的（從情境入手認識計算規則最容易了解）：

   「小英有糖果 3 顆，哥哥有 2 顆，妹妹有 4 顆，三人共有多少顆？」

   這種合成型的問題，由於其結構的關係，所有學生應該都能接受這三個數字的順序不管如何相加，答案都是一樣的 9 顆（R-2-2）。

   (2) 應用規律的練習：

   「59+86+1=」一般學生除非悶頭苦算，不然若先審視問題中的數字，就知道應該運用上述規律，改用下式來計算：

   59+36+1=59+1+36=60+36=96。

   類似的問題還有

   50+365+50=50+50+365=100+365=465，

   99+99+2=99+2+99=101+99=200（當然更靈活的學生會用

   99+99+2=99+1+99+1=100+100=200 來計算）。

   (3) 超越情境的應用：

   「買票排隊時小英排在第 19 個，小英後面第 56 個是小明，小明後面是小為，小為排在第幾個？」

   這是一個序數型的加法問題，可列式為「19+56+1=」，如果學生熟悉(b)的規律練習，可以計算如下：

   19+56+1=19+1+56=20+56=76 。

   因此小為是第 76 個。但是如果學生深究其中的意義，會發現這個算式在原題中似乎沒有意義（至少很迂迴）。

   如果教師堅持答題一定要符合情境，反而會破壞學生「應用數學規律」能力的培養。

處理這類問題，教師要回顧處理乘法交換律（R-2-3）的經驗：乘法的計算最終不見得要符合情境，因此不要貿然說學生是錯誤的，應先請學生發表他的作法再處理。

註：加減混合類的計算規律，在說明規律時，通常可用合成─分解類的問題，而要練習超越情境類的問題時，則多半可用序數型的問題。

2. 本年度四則計算規律（Ⅰ）的學習範圍，限於兩步驟計算，包含加減混合計算、乘除混合計算。加減部分，除了已學過的 R-2-2，應包含：

- 「先加再減與先減再加的結果相同」。
- 「連減的順序可交換」。
- 「連減兩數相當於減此兩數之和」。

乘除部分包含：

- 「三數相乘，順序改變不影響其積」。
- 「先乘後除與先除後乘的結果相同」。

(1) 例 1：「公車上原有 23 位乘客，停靠站牌有 5 位下車，有 7 位上車，公車開走後，車上有多少位乘客？」

做法 1：先算原有 23 位乘客走掉 5 位，再加上車 7 位，是先減再加。

$$23-5+7=18+7=25。$$

做法 2：先算原有 23 位乘客加上車 7 位，走掉 5 位，是先加再減。

$$23+7-5=30-5=25。$$

由此可知：「先加再減與先減再加的結果相同」。

註：如果教師請學生想像，上車的乘客都從前門上車，下車的乘客都從後門下車，則加和減的順序和結果無關的道理更明顯。

(2) 例 2：「哥哥到文具店買一盒水彩 320 元，一本字典 400 元，付了 1000 元，要找回多少元？」

做法 1：先算原有 1000 元扣掉水彩 320 元後，再扣掉字典 400 元。

$$1000-320-400=680-400=280。$$

做法 2：先算原有 1000 元字典 400 元後，再扣掉水彩 320 元。

$$1000-400-320=600-320=280。$$

由此可知：「連減的順序可交換」。

(3) 例 3：同上例.。除了做法 1 和做法 2，還有一種方法：

做法 3：先算字典 400 元和水彩 320 元總共花掉的錢，再算付 1000 元後，找回 $1000-(320+400)=1000-720=280$。

由此可知：「連減兩數相當於減此兩數之和」。

註：請學生想像，超商店員算錢時只是交換水彩和字典輸入的順序，沒有差別，做法 3 則是哥哥聽到店員告訴他總共該付多少錢。這些作法的結果都是一樣的。

(4) 例 4：「1 個箱子裝 80 個橘子，將 5 箱橘子平分給 40 人，每人可分得幾個橘子？」（參見 N-4-3）

做法 1：先算 1 箱橘子 80 個平分給 40 人，每人幾個，再算 5 箱共幾顆。

$80\div40\times5=10$。

做法 2：先算 5 箱共有幾個橘子，再平分給 40 人。

$80\times5\div40=10$。

由此可知：「先乘後除與先除後乘的結果相同」。

3. 連乘的規律除非用長方體體積的模型，否則並不容易用生活情境來說明，這是因為其中關鍵的於乘法交換律本身就經常超越生活情境，因此教師不必執著於要用生活情境來說明。幸好，四年級學生已熟悉乘法交換律，教師只要利用乘法交換律幫忙說明連乘的規律即可。不過，下列規則（乘法結合律）可以如下說明的：$a\times b\times c=a\times(b\times c)$，因此不妨提供學生討論：

例：「一個社區有 3 棟大樓，每棟樓有 8 層，每層有 4 戶，這個社區總共有幾戶？」

一般列式是：$4\times8\times3=32\times3=96$。但也可以先算 3 棟樓共有幾層：$8\times3=24$ 層，再算總共有幾戶，併式列為 $4\times(8\times3)=4\times24=96$，所以 $3\times8\times4=3\times(8\times4)$。於是，運用乘法結合律和乘法交換律，原則上就可以處理所有乘法順序可交換的問題，不過教師不必執著於說明所有情況。

評量

評量重點：

1. 能運用加減混合計算規則（含「先加再減和先減再加結果相同、「連減兩數等於減去此兩數之和」）。

2. 能運用乘除混合計算規則（含「三數相乘，順序改變不影響其積」、「先乘再除和先除再乘結果相同）。

R-4-3 以文字表示數學公式：理解以文字和運算符號聯合表示的數學公式，並能應用公式。可併入其他教學活動（如S-4-3）。 **備註：**如S-4-3的「長方形面積＝長×寬」、「正方形周長＝邊長×4」等。	r-II-5

連結：S-4-3。

後續：N-5-5、N-5-6、S-5-1、S-5-2、R-5-3、R-6-3。

基本說明

1. 用文字表示數學公式，可以讓學生開始體認單一公式足以表示非常多的特殊算式，這是日後代數學習帶未知數的算式之前置經驗。由於本條目要求以文字表示，因此能和學生的學習活動直接連結，意義清楚，遠比一般未知數具體，適合小學生學習。
2. 以本年活動為例，在進行 S-4-3 之活動後，教師可結合活動寫下公式，並鼓勵學生說明與應用：　正方形面積＝邊長×邊長。
   正方形周長＝邊長×4。
   長方形面積＝長×寬。
   教師不需處理長方形周長公式，若要呈現建議寫成（長+寬）×2（前提是已進行 R-4-1 併式教學），避免和 N-5-2 衝突，也暫時不處理分配律。當然，在活動中學生主動提出的各種說法不在此限。
3. 本條目是一檢查性條目，不需另闢單元處理。此條目也表示從四年級起，爾後教師可以在教學中將重要活動結果紀錄成公式，以利學習。

條目範圍

1. 本條目並未要求學生自行記錄成公式，教師應演示記成公式之過程與結論，學生學習的重點則是理解和應用。評量重點在能否理解與運用公式，既非要求學生背誦公式，也不是具有將數量關係表示成公式的能力（R-6-3）。
2. 教師進行公式教學，應只記錄基本結果，也避免在現階段進行公式推導，例如只需要「正方形周長＝邊長×4」，不需要再記一條「正方形邊長＝周長÷4」，更勿從原式直接推導出「正方形邊長＝周長÷4」。已知正方形周長是 32 公分時，學生應能運用乘除互逆，知道邊長是 32÷4＝8 公分，而非依靠背誦公式。
3. 教師應謹記兩個教學原則：「公式少記而能解決問題，才是理想的數學能力」與「公式教學是協助日後代數的學習」。
4. 本條目以文字為限，避免用符號（R-5-3）。

釋例

1. 在進行 S-4-3 長方形或正方形的面積和周長的算法時，教師演示如何以文字和運算符號表示面積或周長的公式。
   (1) 例 1：長方形面積公式。布題：「長 4 公分，寬 3 公分的長方形面積是多少平方公分？」

（《部》第八冊第 41 頁）

學生已學過邊長 1 公分的正方形面積是 1 平方公分，上左圖長 4 公分，寬 3 公分的長方形可以想成右圖。長 4 公分，表示一列有 4 格；寬 3 公分，表示有 3 列。因此總共有 4 ×3 = 12 個格子，也就是 12 平方公分。 將算式留在黑板上，在數字之下，依照題意寫上「長」、「寬」、「長方形面積」(「長方形」不見得要出現)

4 × 3 = 12 或 4 × 3 = 12

長 寬 長方形面積 長 寬 面積

然後，教師把上面的文字結合原來的算式，寫成：

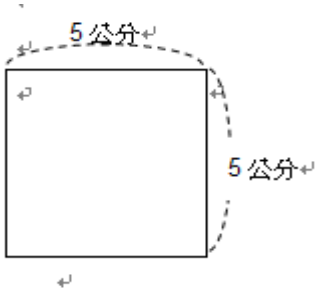
長×寬 = 長方形面積 (強調教學順序，適合暫時記錄)

或

長方形面積 = 長×寬 (強調教學重點，建議最後寫成此式)。

接著，教師應該再演示幾個例子，驗證或應用公式，並讓學生練習。

(2) 例 2：正方形周長公式。布題「邊長 5 公分的正方形周長是多少公分？」



正方形有 4 個一樣長的邊，邊長 5 公分，因此它的邊長是 5×4=20 公分。將算式留在黑板上，在數字之下，依照題意寫上「邊長」、「正方形周長」〈「正方形」不見得要出現〉

5 × 4 = 20 或 5 × 4 = 20

邊長 正方形周長 邊長 周長

教師把上面的文字結合原來的算式，寫成：

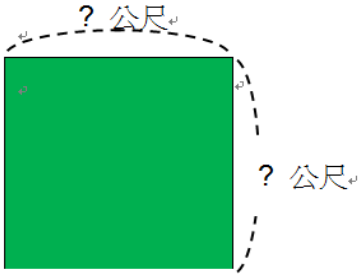
邊長×4 = 正方形周長 (強調教學順序)

或

正方形周長 = 邊長×4 (強調教學重點)。

2. 學生學習應用公式。除了正面直接的應用公式，學生還可以運用所學的數學知識，從公式做更多的應用。

例 1：「王爺爺在有一塊正方形的菜園，他沿正方形周邊圍籬笆，共圍了 24 公尺。王爺爺的正方形菜園邊長是多少公尺？」



正方形周長是 24 公尺，但是學生已經學過正方形周長公式：

正方形周長=邊長×4。

所以可以想成

邊長×4=24。

「什麼數的 4 倍是 24 呢？」運用乘法與除法的互逆關係，知道可以用除法「24÷4」來計算邊長，所以正方形邊長是

24÷4=6（公尺）。

評量

評量重點：能理解文字公式的意義並做應用。（應結合其他單元評量）

R-4-4 數量模式與推理（Ⅱ）：以操作活動為主。二維變化模式之觀察與推理，如二維數字圖之推理。奇數與偶數，及其加、減、乘模式。 **備註：**含學生之簡單推理與說明。如百數表模式、月曆模式之數字模式等。不可出現公式，此非本條目之學習目標。	r-Ⅱ-2

先備：R-3-2。

基本說明

1. 承續 R-3-2，本條目以操作活動為主，活動以學生發現的樂趣為前提。第一類活動是二維模式體驗。二維模式通常比較困難，教師應該小心難度的拿捏。建議教師的主要活動限於以長方形方式呈現的組合，其內容可包括文字、圖象、物件、數字等。
2. 二維模式以數字表格為例，可先從學生熟悉的物件開始，例如百數表、九九乘法表（基本加法表）、月曆等，觀察數字橫向、縱向、甚至斜向的關係。
3. 如同 R-3-2，二維模式活動旨在察覺、說明與溝通，若模式明顯，也可做簡單推理。若模式內涵規律過難，對小學生相當於沒有秩序，反而不利於本條目的學習目標，應該避免。
4. 第二類活動是理解奇數與偶數的定義，並能說明為什麼偶數與偶數的和或奇數與奇數的和一定是偶數；奇數與偶數的和或偶數與奇數的和一定是奇數。類似的活動也可以進行減法

與乘法的活動。這類活動不能只靠直式計算特例，希望學生能察覺為什麼一般都是正確的原因。

條目範圍

1. 同 R-3-2，本條目的重點是從活動中啟動學生察覺模式的興趣，讓學生樂於說明、分析與簡單推理。但是二維模式抽象規律的數學表示過難，完全不是本條目之學習目標，教學不需出現，也不應和 R-4-3 的重要公式教學混淆。
2. 本條目的評量應以實作評量為主。
3. 常見的九宮格、數獨、魔方陣由於牽涉到整體結構，大部分學生或許能理解其規則，卻無法「解答」，不適合本條目之學習目標。

釋例

1. 觀察二維數字表格，觀察數字在橫向、縱向或斜向排列的規律關係。

   (1) 例 1：**想想看，百數表中縱向與橫向的數字排列有什麼規律？**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

   可發現的規律包括

   - 橫向數字的「多 1、少 1」的變化。
   - 縱向數字的「多 10、少 10」的變化。
   - 縱向數字的個位數都一樣。(被 10 除的餘數)
   - 左上的數和右下的數差多少？右上的數和左下的數差多少？

如果改用從 0 開始的百數表

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

除了上述規律之外，還可發現

- 從右上到左下斜行的各位數字和是固定的，且等於最右上方（第一列）的數，如 9+0=8+1=7+2=…=2+7=1+8=9。
- 從左上到右下斜行可觀察到個位的數和為十位的數的差是固定的而且有規律。。
- 由 0 開始，從左上到右下的數，個位的數和十位的數相等。
- 如果把上面這排數叫作對角線，可發現圖中對稱位置的數，其個位的數和十位的數是交換的。如紅色的 25 和 52；橘色的 37 和 73 等。

(2) 例 2：觀察九九加法表（十十加法表也可以）。

- 先請學生發現有什麼有趣的數字模式，請他們發表。

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

● 請學生把奇數塗上相同的顏色，問學生有沒有發現有趣的塗色模式。

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

● 從表上的模式，問學生有沒有發現「偶數+偶數」是奇數還是偶數？「奇數+偶數」呢？「偶數+奇數」呢？「奇數+奇數」呢？

● 請學生想想看，一般來說，這個規律是不是都正確？說說看為什麼？教師可以提示用「擺筷子」的情境想想看。(參見附錄)

(3) 例 3：觀察十十乘法表。

● 先請學生發現有什麼有趣的模式，請他們發表。

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- 請學生把奇數塗上相同的顏色，問學生有沒有發現有趣的塗色模式。

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- 從表上的模式，問學生有沒有發現「偶數×偶數」是奇數還是偶數？「奇數×偶數」呢？「偶數×奇數」呢？「奇數×奇數」呢？
- 請學生想想看，一般來說，這個規律是不是都正確？說說看為什麼？

  教師可以提示用「擺筷子」的情境想想看，偶數根的筷子的幾倍是不是都是偶數？奇數根筷子的偶數倍呢？奇數根筷子的奇數倍呢？

  讓學生擺擺看，看他們能不能發現什麼說明的策略。

(4) 例 4：想想看，月曆中縱向的數字排列有什麼規律？

107 年 10 月

日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

107 年 11 月

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

- 察覺月曆中橫向數字的「多 1、少 1」的變化，是 1 日 1 日的變化。
- 察覺月曆中縱向數字的「多 7、少 7」的變化，連結「一星期有 7 天」。
- 左上的數和右下的數差多少？右上的數和左下的數差多少？
- 在上圖 10 月的月曆中，每縱行除以 7 的餘數是不是正好等於「星期幾」(星期日的日數正好都是 7 的倍數，想成星期 0)。「你有沒有很快可以算出幾日是星期幾的辦法？」

(5) 例 5：想想看，下面遊覽車座位表中縱向與橫向的數字排列有什麼規律？問學生會不會繼續排下去？

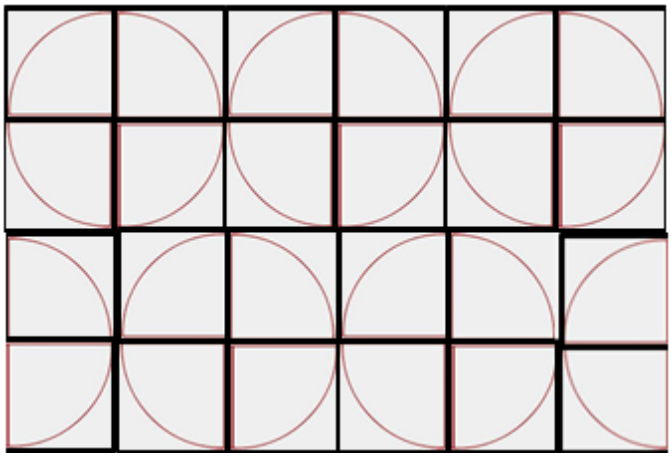
駕駛座

1	3	中間走道	4	2
5	7		8	6
9	11		12	10
13	15		16	14
17	19		20	18
21	23		24	22
25	27		28	26
29	31		32	30
33	35		36	34
37	39		40	38
41	43		44	42

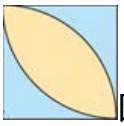
2. 另一大類二維模式是幾何類的拼磚問題。但是這類問題很容易衍生許多困難問題，為了讓學生容易察覺和說明發現的規律，教學時只限於一種方形磚，其變化僅限於平移、90 度旋轉、水平或垂直翻轉（見釋例），方磚圖樣也力求簡單。只要讓學生能延不同方向〈縱向、橫向或斜向〉察覺變化的規律，欣賞規律變化的美感，能加以說明，並能依據所發現的規律，來猜測下一個方磚的擺法即可。

(1) 例 1：用圖卡 A 排列成下圖。觀察看看有什麼排列的規律，如果要再往左、往右排一排，或往上、往下排一列，應該怎麼排？

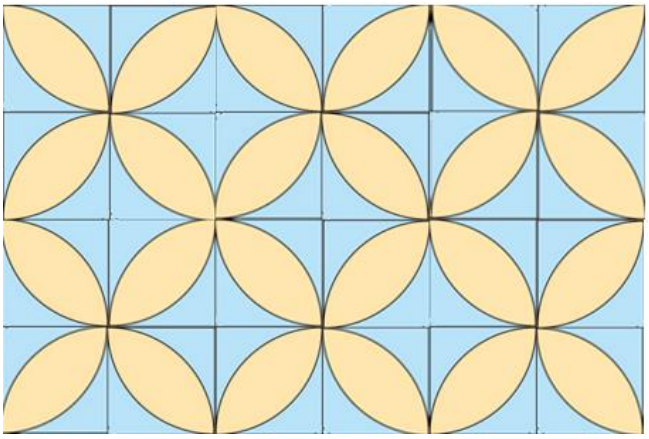
圖卡 A



(2) 例 2：**用圖卡 B 排成下圖。**觀察看看有什麼排列的規律，如果要再往左、往右排一排，或往上、往下排一列，應該怎麼排？

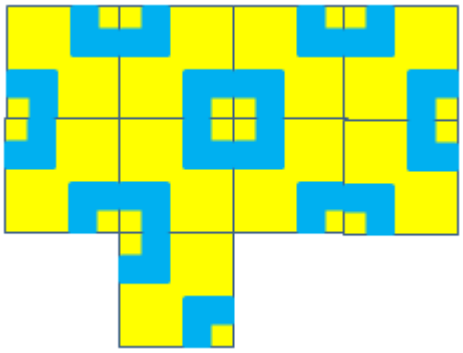


圖卡 B



(3) 例 3：**用圖卡 C 排成下圖。想想看最下面一列還缺三張圖卡，應該怎麼排？**

圖卡 C



評量

1. 評量重點：

   (1) 學生能察覺、說明與溝通某些二維數字表的模式（如月曆、百數表、十十乘法表、十十加法表等）

   (2) 學生能察覺、說明與溝通奇數與偶數之加、減、乘模式。

2. 評量注意事項：

   本條目以實作評量為主。

附錄

奇數和偶數的加法規律

連結 N-3-4 和 R-3-2，知道能被 2 整數的數（餘數為 0），是偶數；被 2 除餘數為 1 的數

是奇數。

偶數	2	4	6	8	10	……
算式	2÷2 ● ●	4÷2 ●● ●●	6÷2 ●●● ●●●	8÷2 ●●●● ●●●●	10÷2 ●●●●● ●●●●●	…… ……
餘數	0	0	0	0	0	0

奇數	1	3	5	7	9	……
算式	1÷2 ● 	3÷2 ●● ●	5÷2 ●●● ●●	7÷2 ●●●● ●●●	9÷2 ●●●●● ●●●●	…… ……
餘數	1	1	1	1	1	1

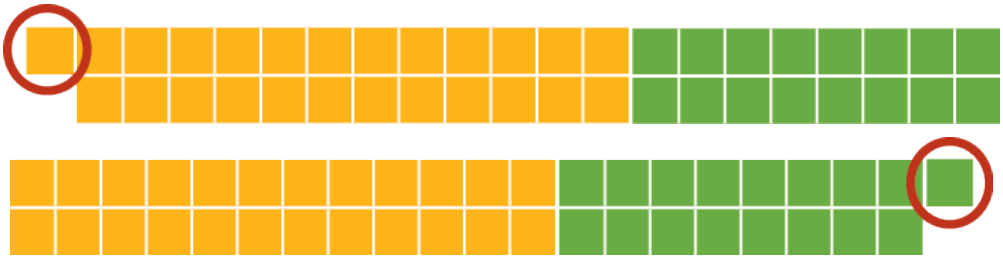
將偶數與奇數表示成如下兩圖的標準圖示（也可想成筷子的奇偶）

偶數： 　奇數：

底下是四個偶數與奇數和規律的圖示說明：

(1) 偶數與偶數的和一定是偶數。

(2) 奇數與偶數的和或偶數與奇數的和一定是奇數。



(3) 奇數與奇數的和一定是偶數。

D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。 **備註：**教學與示例應注意處理「分類資料」與「有序變化性資料」之差別。	d-II-1

先備：D-3-1。

後續：D-5-1。

基本說明

1. 報讀原則類同 D-3-1，指的是資料的正確閱讀與分析，能回答關於資料的直接問題，也包含透過閱讀而簡單延伸的問題，其中可能包含和其他數學概念與計算有關的問題。至於需要更成熟推理能力的問題，不在小學報讀的範圍。
2. 本條目開始學習常見之統計圖。統計圖的學習分成兩階段，先學習報讀統計圖，再學習如何製作統計圖。本年度為配合其他領域教學，先學習報讀長條圖與折線圖，製作長條圖。折線圖之製作在五年級（D-5-1）。
3. 長條圖常用來表示不同分類數量的多寡，並進行比較，是最簡單的統計圖。教師可從最基本的直立長條圖開始介紹，然後介紹橫式長條圖，甚至較複雜的長條圖。折線圖類似長條圖，但通常用於呈現有序（尤其是隨時間變化）的資料，學生從折線的變化理解資料數量的變化情形。
4. 介紹統計圖也應同時介紹統計圖常見之元件，例如統計圖名稱、不同軸的意義與標示、分類名稱、數量軸運用的單位、代表省略的波浪線等。
5. 統計圖廣泛使用於許多學科，因此報讀活動同時也是連結數學與其他學習領域的窗口，甚至可以碰觸學生能力可理解的社會議題。在報讀活動的教學（不是製作！）中，教師不需自限於學生生活的統計圖，只需小心配合四年級學生的數字範圍與運算能力，挑選適合的題材即可。
6. 製作統計圖的目的是與他人溝通，在小學雖然不需依從制式的約定，但仍應清楚標示出統計圖之基本元件：圖表名稱、軸、分類組別、數量軸的單位，若有需要，也可畫出波浪線。

條目範圍

1. 教師應注意長條圖和折線圖的使用時機不同，並反映在希望學生能報讀與分析的問題中。
2. 長條圖和折線圖都是以長度表示數量的多寡而非面積。許多廣告利用這個錯覺誤導判斷，教師可以用一兩個例子，讓學生警惕。至於和面積有關的直方圖，為避免混淆將在 D-7-1 中介紹。
3. 斟酌教學重點與時間，不需要處理太複雜之統計圖類型，例如累積長條圖、多條折線並列之折線圖等。
4. 學生會製作長條圖後，教師可以因應其他領域需要，結合學生資訊電腦相關課程或能力，

學習透過學校常用軟體製作長條圖，其中包括設定長條圖之基本元件如分類組別、數量、圖表名稱、兩軸單位與說明。

錯誤類型

1. 長條圖迷思：資料數量對應的是高度，而不是長方形的寬度或面積，尤其後者是呈現統計圖的常見陷阱。
2. 當某些組別資料為 0 時，仍須呈現在統計圖，有些學生可能會忽略。

評量

評量重點：

1. 能報讀與說明生活中的長條圖。
2. 能報讀與說明生活中的與折線圖。
3. 能製作簡單長條圖。

5 年級學習內容解析

N-5-1十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。 **備註：**熟練十進位系統「乘以十」、「除以十」所延伸的計算如「300×1200」與「600000÷4000」之處理。	n-III-1

先備：N-4-1、N-4-7。

連結：N-5-8、N-5-9。

後續：N-6-4、N-7-8。

基本說明

1. 本條目總結小學位值表示法的經驗，整合整數和小數的學習。教師應複習並在本年度擴展位值表示法的範圍，大數部分至少到「千兆」位，小數位數至少到「千分位」(三位小數)。並說明每往左一位相當於 10 倍，每往右一位相當於 0.1 倍 ($\frac{1}{10}$ 倍，除以 10)。學生應理解依照位值表示法，原則上會有更大的數與更小的數。
2. 教師可舉恰當的範例，讓學生感受到數的表示幅度很大 (如長度、時間、人口等)。
3. 本條目也應讓學生理解以前所學習的計算方法 (加、減、乘、除)，原則上都可以依位值表示的約定，往更大或更小的位數延伸。教師可以在教學時以恰當的範例示範如何做計算。
4. 尤其在乘除法時，教師應提供恰當例題，結合位值的認識與取概數的方法，讓學生熟練像「200×4000」、「300×1200」與「8000000÷4000」、「600000÷4000」這類問題的計算方式。
5. 學生利用鄰位差 10 倍的事實，開始學習兩階的換算。例如知道鄰兩位如「千萬」是「十萬」的 100 倍。

條目範圍

1. 處理本條目時，教師不要讓學生做過多大位數的繁複計算，許多大數與小數的計算，通常用概數就已足夠。
2. 基本說明 4. 中的乘除計算，有利於日後學習科學記號。(N-7-8)
3. 綱要附註與基本說明 4. 強調的是整數關係，若時間允許教師也可以處理小數之間、整數和小數間的類似問題，但學生之經驗較不足，布題之數字應更簡單。

釋例

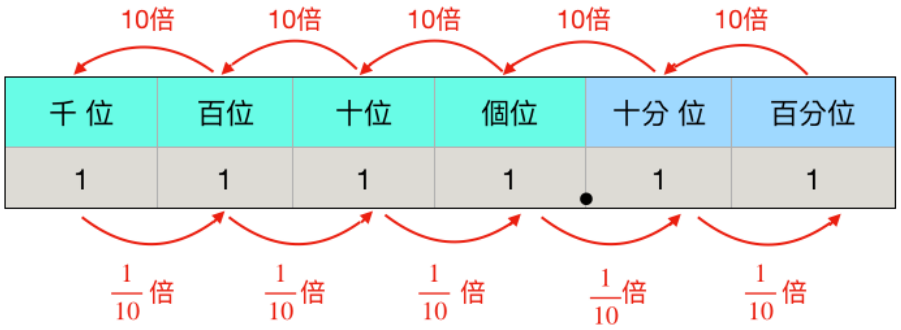
1. 利用位值表說明數字的值，每往左一位相當於 10 倍，每往右一位相當於 0.1 倍 ($\frac{1}{10}$ 倍，除以 10)。可以探討相鄰兩數的關係 (相當於一階)、二階但在同一計數單位以及二階且跨計數單位的關係。

(1) 例 1：相鄰兩數的關係：

● 把 1111.11 填在位值表上，引導學生認識相鄰的 1 的關係：

相鄰的兩個 1，左邊是右邊的 10 倍，右邊是左邊的 $\frac{1}{10}$ 倍。

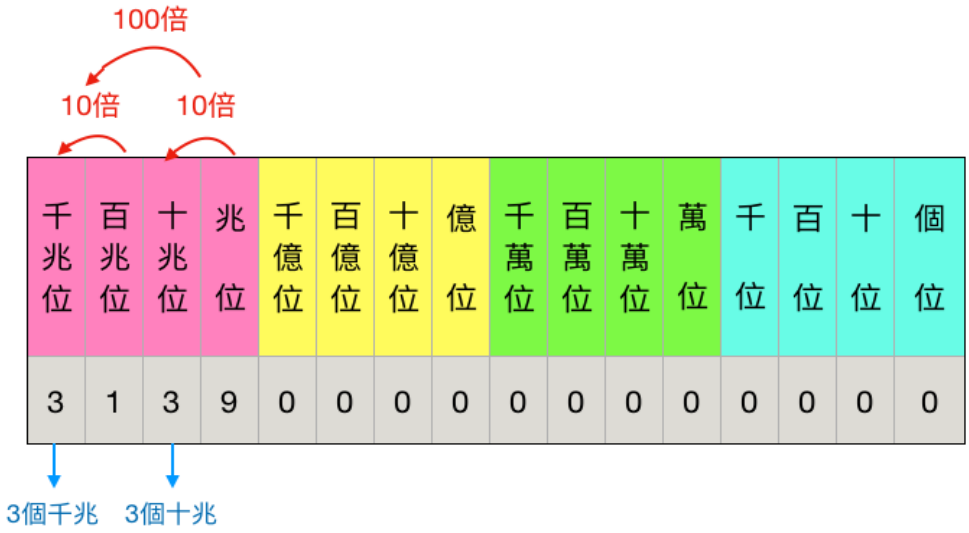
例如百位的「1」表示 100，十位的「1」表示 10，所以百位的「1」是十位的「1」的 10 倍。相當於 10×10=100 或 100÷10=10。



又例如十分位的「1」表示 0.1，百分位的「1」表示 0.01，所以十位的「1」是百分位的「1」的 10 倍，相當於 0.01×10=0.1 或 0.1÷10=0.01。

(2) 例 2：二階但在同一計數單位的關係

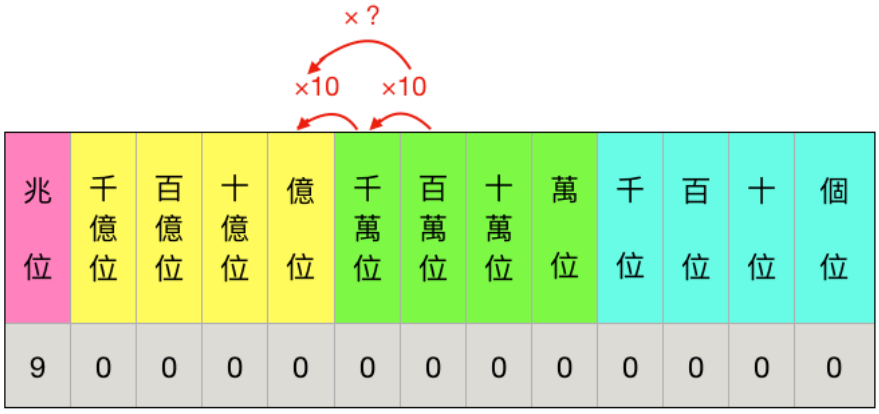
● 透過位值表，引導學生認識 3139 兆中，兩個「3」各表示多少，左邊的「3」是右邊的「3」的幾倍。



也可以反過來問學生，右邊的「3」是左邊的「3」的幾倍，可以連結到分數的乘法 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$的計算，進而求出右邊的「3」是左邊的「3」的 $\frac{1}{100}$ 倍。

(3) 例 3：二階且跨計數單位的關係

● 透過位值表引導學生認識一億是一百萬的幾倍。



兆位	千億位	百億位	十億位	億位	千萬位	百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

● 6 兆是 6 百億的幾倍。

兆位	千億位	百億位	十億位	億位	千萬位	百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2. 數的十進位表示法：

(1) 例 1：用連加的方式把「4605 是 4 個千、6 個百、0 個十和 5 個一合起來的」記下來，學生可以記錄如下：

4605=4000+600+0+5

教師可以進一步引導學生記錄下列形式：

4605=1000×4+100×6+10×0+1×5

向學生說明像「4605=1000×4+100×6+10×0+1×5」的記法，稱為數的十進位表示法。

(2) 例 2：30168 中的 3、0、1、6、8 各表示多少？用「數的十進位表示法」記記看。

3 表示 3 個 10000，0 表示 0 個 1000，1 表示 1 個 100，6 表示 6 個 10，8 表示 8 個 1。所以 30168=10000×3+1000×0+100×1+10×6+1×8。

3. 熟練十進位系統「乘以 10」「除以 10」所延伸的計算。

在 N-4-2，學生已學習過如「300×1200」與「600000÷4000」等問題之計算方式，本年度可以新的方式（1.、2.）理解原來的計算方式，也可將計算擴展到小數（3.）

(1) 以新概念理解 N-4-2 之整數乘法計算。

● 「100×1000=100000」和「300×1200=360000」。

從數的十進位表示，學生知道操作「×10」相當於在尾數加一個 0，例如 2×10=20。因此 100=1×10×10，連乘 2 次；1000=1×10×10×10，連乘 3 次，所以 100×1000 相當於 1 再做 5 次「×10」=100000，所以

100×1000=100000。

- 「300×1200=360000」的計算可理解為 (3×100)×(12×100)，因此

  300×1200=3×100×12×100=36×100×100=360000。

算法和 N-4-2 一樣，只是理解的方式不同。

(2) 以新概念理解 N-4-2 之整數除法計算。

- 「1000÷100=10」和「60000÷4000」。

  從數的十進位表示，學生知道操作「÷10」或「$\times\frac{1}{10}$」，在整十、整百、整千等請況相當於在尾數去一個 0，例如 200÷10=20。因此

  1000÷100=1000÷10÷10=10 或 1000÷100=1000$\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$=10（約分標記略），將這些觀點融會的結論，就是 N-4-2 的，1000÷100=10~~00~~=10。

- 「60000÷4000=15」可以改寫成「60000÷(4×1000)」，並計算為

60000÷4000=60000÷1000÷4=60÷4=15，其中 60000÷1000，也可寫成 60000$\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$=60。學生可驗證此算法和 N-4-2 一樣，只是理解方式不同。

60000÷4000=60~~000~~÷4~~000~~=60÷4=15。

(3) 小數部分的乘法。由於學生初學十進位的結構、分數乘法（N-5-5）和除以整數（N-5-7），建議若教師要處理，只處理最簡單的部分如下：

- 「0.031×10」、「0.031×100」、「0.031×1000」。

  0.031×10=0.31，

  0.031×100=3.1，

  0.031×1000=31，

  讓學生發現其中的計算規則，尤其是將「×10」和小數點往右移一格結合，並能說明這和前述整數乘法的關係。

- 「420÷10」、「420÷100」、「420÷1000」。

  420÷10=42，

  420÷100=4.2，

  420÷1000=0.42，

  讓學生發現其中的計算規則，尤其是將「÷10」和小數點往左移一格結合，並能說明這和前述整數除法規則的關係。

錯誤類型

在多位小數時，學生用整數習慣，可能將「2.004」讀作「二點零四」，而非「二點零零四」。建議教師比較「2.004」和「2.04」讓學生理解，如果只讀成「二點零四」，將無法分辨這兩個數，造成溝通障礙。

評量

評量重點：

(1) 能認識「兆位」至「千兆」位之大數。

(2) 能認識以「千分位」表示之小數。

(3) 能理解十進位的結構，以乘以 10 和乘以 $\frac{1}{10}$（除以 10）理解不同位名之關係。

(4) 能熟練如「300×1200」與「600000÷4000」的計算。

N-5-2 解題：多步驟應用問題。除「平均」之外，原則上為三步驟解題應用。 **備註：**以學生較熟悉、能直接併式之問題為原則。本條目要求併式。須含分配律情境之三步驟問題，以和分配律教學連結（R-5-2）。	n-III-2

先備：N-4-3。

連結：R-5-1、R-5-2。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 學生已完整學習兩步驟應用解題，本條目學習生活中常見之多步驟問題。但由於運算、題型、應用方式會隨步驟數增加而更複雜，為了讓學生能專心學習多重步驟的學習，同時又要練習併式(R-5-1)。教師應秉持三項原則 (a) 以三步驟問題為主；(b) 布題應清楚直接，以學生容易理解且容易併式為原則；(c) 不需窮盡所有可能之運算類型。
2. 多步驟問題必須包含兩類問題：(a) 認識「平均」的概念。由於這是常用概念，計算方式簡單明白，因此可不限於三步驟。(b) 和分配律有關的三步驟問題（R-5-2）。

條目範圍

1. 在本年度，教師可鼓勵學生盡量在列式時直接列成一式，並利用整數四則運算的性質來簡化計算，這是學習國中代數的重要前置經驗。
2. 本條目不處理較困難之解題（見 N-6-9）。

評量

評量重點：

1. 能解決三步驟之應用問題，並能做併式。
2. 能解決「平均」問題。

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。 **備註：**以概念認識為主，不用短除法（N-6-1、N-6-2）。	n-III-3

先備：N-3-4、N-4-6。

連結：N-5-4。

後續：N-6-1、N-6-2。

基本說明

1. 因倍數的學習是整數比較深入的題材，其前置經驗是對於整數乘法和除法的熟悉（尤其是整除的概念）。包括在十十乘法的範圍，可以解決如「24 可以寫成哪兩數相乘」的問題。
2. 找一數的因數應和整除做強烈連結，當然學生若已熟悉 2、5、10 倍數的模式不在此限。倍數則以乘法或幾個一數來列舉。本年度的學習數字不用太大，以明白的列舉圈選法學習公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的題材即可。
3. 學生應能從乘除關係裡，理解各數字之間的因倍數關係，例如 24=3×8 或 3×8=24，因此 3 是 24 的因數，8 也是 24 的因數，同時 24 是 3 的倍數，也是 8 的倍數。又如 24÷8=3（8 整除 24），因此 8 是 24 的因數，24 是 8 的倍數。
4. 因倍數學習一個重要目標可協助分數的約分、擴分和通分的學習（N-5-4），數字大小應相互配合為宜。學生應知道兩數的乘積是該數的公倍數，有時可初步協助做通分。

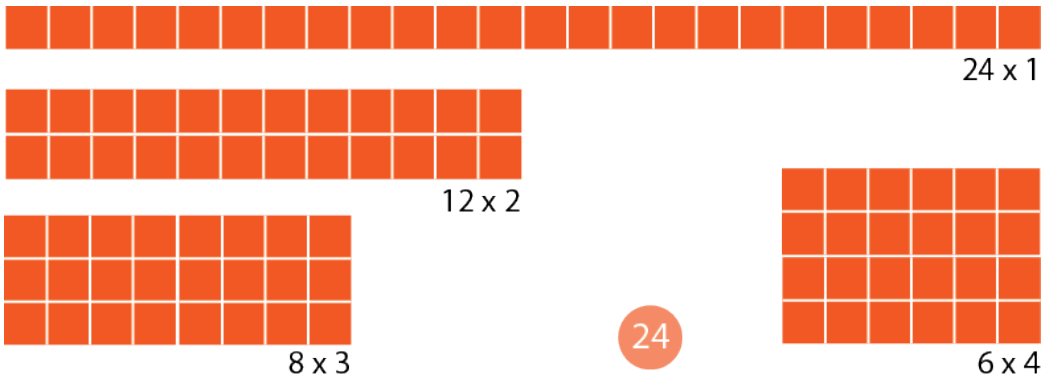
條目範圍

1. 本條目只是因倍數概念的初步學習，可在練習中慢慢熟悉其概念與常見數字，但暫不介紹短除法（N-6-1、N-6-2）
2. 在倍數教學中不提「0 是任一數的倍數」，因為在小學中用不到，反而會引起學生的困惑。
3. 本條目限定做兩數的公因數和公倍數。
4. 本條目處理的重點是求出公因數，因此互質的情況（即除了 1 之外沒有公因數）應視為特例，可不做也不需要出現「互質」一詞（N-6-2）。

釋例

1. 透過教學活動，用長方形數的操作，讓學生察覺因數的具體心象，適合作為因倍數教學的前置活動。

   例：給許多 1×1 的正方形（單位不拘），讓學生試著排出面積為 24 的各種長方形，並記錄成算式（如 24×1；12×2；8×3；6×4；4×6 等等）。可讓學生自然知道，24 的因數有 1、2、3、4、6、8、12、24。



做完 24 的活動後，教師可讓學生嘗試其他的數。經由這些活動，學生可以知道：

- 每個數都至少有一種表現成長方形的方式，即如 1×24 的排法。(1 和自己一定是因數)
- 一旦一個數有一種面積排法，而且長和寬不同，則把長和寬對調就會是另一種排法，如 24=6×4=4×6。(因數成對出現，除非如 16=4×4 的情況)
- 如果有秩序的由一邊由小往大排，不需要全部排完，就能掌握所有的可能排法。如 24 由 1×24、2×12、3×8、4×6 的排法就能知道另一半的排法。問學生怎麼看出已經可以不用再排了。
- 教師可以連結這個活動和「整除」或「乘除互逆」的連結，也可和「偶數一定有 2 的因數」做連結。
- 學生可能察覺有些數很難排 (質數)，有些數有很豐富的排法 (合數)。若學生積極表現，教師可以告知這種分類，但不必再延伸。
- 本活動千萬不要轉移成記錄有多少種排法的活動。

2. 可以用一些簡單心算問題，強化學生對因數能力的需求。

(1) 例 1：「24×25」或「25×24」。

假設學生很熟悉 4×25 和 25×4 等於 100，這些問題可用下列方式心算或計算：

24×25=6×4×25=6×100=600，

25×24=25×4×6=100×6=600。

類似的例子還有如：

26×5=13×2×5=130，

75×8=25×3×8=600。

另外整十、整百等的乘法，其實都算是這種想法的應用如：

1200×30=12×100×3×10=36×1000=36000。

(2) 例 2：「600÷24」。(本例假設學生知道連除的運算規則)

這個問題可用下列方式心算或計算 (用到 24=6×4)：

600÷24=600÷6÷4=100÷4=25。

類似的例子還有如：

270÷18=270÷9÷2=30÷2=15　　(18=9×2)

300÷75=300÷3÷25=100÷25=4。　(75=3×25)

3. 熟悉因倍數可以協助分數約分、擴分和通分的學習（N-5-4）。

例 1：「$\frac{24}{81}\times 9$」。

學生可以先利用 24、9、27 的公因數關係，先約分後再計算

$$\frac{\cancel{24}^{8}}{\cancel{81}_{\cancel{9}_{3}}}\times\cancel{9}=\frac{8}{3}$$

以避免數字過大。

4. 例 2：「$\frac{4}{9}+\frac{2}{27}$」。

$$\frac{4}{9}+\frac{2}{27}=\frac{12}{27}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$$

讓學生知道，直接將二分數的分母 9 和 27 直接相乘來通分，計算太複雜，本題學生若熟知 27 是 9 的倍數，就可簡單通分。

錯誤類型

學生有時搞不清楚「整除」和「因倍數」的關係。建議教師多做兩者轉換的問題。

評量

1. 評量重點：

(1) 認識因數、倍數的意義。

(2) 認識公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

2. 評量注意事項

因倍數其實是乘除能力的應用，但是教師在布題時，要注意除法必須整除。

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。 **備註：**通分不鼓勵以分母直接相乘。通分數字限（1）分母均為一位數；（2）一分母為另一分母的倍數，且兩數小於 100；（3）乘以 2、3、4、5 就可以找到兩分母之公倍數（如 12 與 18）。	n-Ⅲ-4

先備：N-4-6。

連結：N-5-3。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 本條目延續 N-4-6 等值分數之初步認識，開始熟習和等值分數相關的異分母分數題材。

2. 做異分母分數的加減或比較時，通常需要利用約分或擴分，將異分母分數通分成同分母之等值分數後，再進行加減或比較。教師宜先複習恰當情境（N-4-6），理解以約分和擴分求等值分數的意義，然後運用 N-5-3 的因倍數來理解約分、擴分、通分的作法。
3. 雖然可不要求將答案的分數化成最簡分數，但學生仍應在活動中理解將分數約分成簡單一點，有助於理解問題與答案的意義。因此在學生熟悉的數字時，教師宜鼓勵學童儘量將答案約分為較簡單的分數

條目範圍

1. 為了避免計算太難，通分數字限 (a) 分母均為一位數；(b) 一分母為另一分母的倍數，且兩數小於 100；(c) 乘以 2、3、4、5 就可以找到兩分母之公倍數（如 12 與 18）。
2. 通分時將分母直接相乘是常見的作法，但建議只用於數字很小的情況。當數字很大時，學生應知道先約分化簡通常會更容易計算。教師布題時應避免只能相乘（兩分母互質）且數字又大的情況。
3. 若教師做三分數兩步驟加減（加減混合）之布題，建議應以概念學習為目標，數字應小，採逐次減項計算，尤其不強調三分母同時通分的情況。

錯誤類型

教師應注意分數加減常見錯誤：分母與分子各自相加減。建議以最簡單的 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 而不是 $\frac{2}{4}$ 為例，並在說明中讓學生注意到問題中單位的重要性。

評量

1. 評量重點：

   (1) 能用約分、擴分處理等值分數並做比較。

   (2) 能用通分做異分母分數的加減。
2. 評量注意事項：

   若在題幹上加入內容物總量，時常干擾學生解題，例如「一瓶果汁 20 公升，媽媽將 1 瓶全部平分給 5 人，每人可分得多少瓶？」學生很容易答成「4 瓶」或「$\frac{20}{5}$ 瓶」。請確認此為教師本意。即時教師希望以認知衝突，讓學生更確立數學概念，也應確實為答錯之學生解決其疑惑，方能達成評量目的。

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。 **備註：**建立例如「的 $\frac{1}{2}$」和「$\frac{1}{2}$ 倍」的關連。	n-III-6

先備：N-4-5。

連結：N-5-6、N-5-7、N-5-8、R-5-3。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 五年級起分數與小數開始進入其乘除之學習，分數的乘除有一個特徵：意義的理解比較困難，算則卻比較容易。因此教師一旦輕忽，很容易造成學生會計算，但是卻不會應用的問題。
2. 學生在 N-4-5 已學習過分數的整數倍，不過分數乘法真正困難的部分是乘數是分數的情況。建議先處理整數乘以分數的情況，再處理被乘數為一般分數的情形。另外建議可先從乘數是單位分數的情況開始教學。
3. 「分數倍」的理解比較抽象，因此應該結合學生已經熟悉的整數乘法來類推，確認其合理性(見釋例)。學生最後應知道「$100\times\frac{1}{2}$」($\frac{1}{2}$ 倍)，就是「100 的 $\frac{1}{2}$(一半)」，也就是「100÷2」。也應知道「$100\times\frac{3}{4}$」($\frac{3}{4}$ 倍)，就是「100 的 $\frac{3}{4}$」，也就是「100÷4×3」。這類學習初期情境的布題，應注意『被乘數』必須能被『乘數』的分母整除，讓學生專心學習分數倍的概念。
4. 學完分數倍的意義後，可繼續處理被乘數不能被整除或是分數的情況，並建立其計算方式。例如整數的分數倍教學，最後會遇到「$5\times\frac{1}{4}$」這類問題，在計算上，必須用到整數相除(N-5-6)，重新解釋為「5÷4」，並因此得到「$5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$」。而處理分數的分數倍時，在計算時還會遇到例如「$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$」的問題，這和「$\frac{1}{5}\div 4$」的想法相關（N-5-7），但孰先孰後，請教師注意課程順序的安排。
5. 本條目的每一階段教學，最後都應該學習把約分用在計算上，這是本年分數計算的學習重點，也會出現在 N-5-6 和 N-5-7 的教學中。
6. 教師可用恰當符號來紀錄分數乘法的公式（R-5-3）。

條目範圍

1. 學生學習分數乘法時，最常發生的錯誤是認為「乘積一定比被乘數大」，這是基於整數乘法經驗的錯誤類推，只有理解「分數倍」的意義才能真正解決這個問題，教師可從「乘數為單位分數」這類比較明顯的情況來處理。

2. 建立「的$\frac{1}{3}$」和「$\frac{1}{3}$倍」的關連，將使分數乘法的分數倍變得比較容易理解。
3. 牽涉到被乘數或乘數是假分數或帶分數，應讓學生針對問題決定解題的策略。雖然一般來說，分數乘除將各數都化成假分數，有約分的好處，但也有情況如 $60\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=20\frac{1}{6}$，化成假分數反而不方便。

釋例

1. 乘數為分數(「分數倍」)的理解比較抽象，因此宜結合學生已經熟悉的整數乘法來類推，確認其合理性。例如1個披薩240元，2個披薩480元，3個披薩720元等，可記為

   $240\times 3=720$　(3個披薩的價錢是240元的3倍)，

   $240\times 2=480$　(2個披薩的價錢是240元的2倍)，

   $240\times 1=240$　(1個披薩的價錢是240元的1倍)。

   接下來，$\frac{1}{2}$個披薩應該怎麼記？怎麼計算呢？首先應記成

   $240\times\frac{1}{2}$($\frac{1}{2}$個披薩的價錢是240元的$\frac{1}{2}$倍)

   但是1個披薩240元，$\frac{1}{2}$個(半個)披薩的價錢應該是240元的$\frac{1}{2}$(一半)，也就是240÷2=120元。依此類推得到

   $240\times\frac{1}{2}=120$($\frac{1}{2}$個披薩的價錢是240元的$\frac{1}{2}$倍，亦即240元的$\frac{1}{2}$)，

   $240\times\frac{1}{3}=80$　($\frac{1}{3}$個披薩的價錢是240元的$\frac{1}{3}$倍，亦即240元的$\frac{1}{3}$)，

   $240\times\frac{1}{4}=60$　($\frac{1}{4}$個披薩的價錢是240元的$\frac{1}{4}$倍，亦即240元的$\frac{1}{4}$)。

   接著，可再處理$\frac{2}{3}$個披薩的價錢，記成

   $240\times\frac{2}{3}=160$　($\frac{2}{3}$個披薩的價錢是240元的$\frac{2}{3}$倍，亦即240元的$\frac{2}{3}$)，

   學生應可接受$\frac{2}{3}$個披薩的價錢是240元的$\frac{2}{3}$，就是把240平分成3份，取其中的2份，因此是240÷3×2=160。或者想成$\frac{2}{3}$個披薩是2塊$\frac{1}{3}$個披薩，但$\frac{1}{3}$個披薩的價錢是80元，所以2塊是160元。

   * 這類學習初期情境的布題，應注意被乘數必須能被乘數的分母整除，讓學生專心學習分數倍的概念。

2. 學完分數倍的意義後，可繼續處理「被乘數」不能被「乘數」的分母整除的情況，例如：「$5\times\frac{1}{4}$」，教師先引用$\frac{1}{4}$倍的意思，知道這就是5的$\frac{1}{4}$，因此就是「5÷4」，這時引用整數相除(N-5-6)的說明或其直接的計算結果，就可知道$5\times\frac{1}{4}$，就是「$5\div 4=\frac{5}{4}$」，因此

   $$5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}。$$

3. 分數乘法的計算公式為：

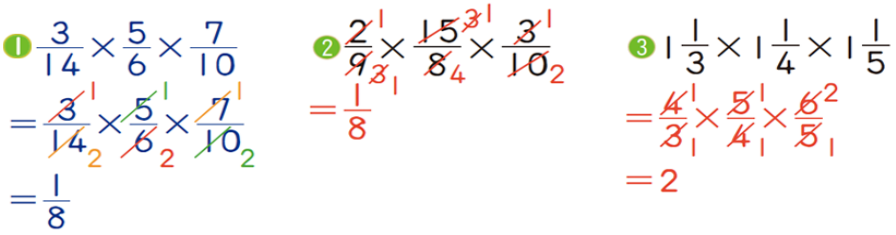
$$\frac{\text{分子 1}}{\text{分母 1}}\times\frac{\text{分子 2}}{\text{分母 2}}=\frac{\text{分子 1}\times\text{分子 2}}{\text{分母 1}\times\text{分母 2}}\text{，}$$

可以透過這個公式，讓學生理解乘法交換律在分數也是成立的，例如：

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2\times1}{3\times5}=\frac{1\times2}{5\times3}=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\text{，}$$

其中用到整數的乘法交換律：2×1=1×2、3×5=5×3。

4. 學生在 N-5-3 學習的公因數和最大公因數，在分數乘法計算上，可以做最佳的應用。把約分用在分數乘法計算上，既可以減低計算的繁複及錯誤，也可以讓學生體會簡化計算的便利性。例如：



（併自《部編本》10 冊 p.24 與其《教師手冊》p.46）

錯誤類型

1. 學生經常以為「乘積一定比被乘數大」。可以 $\frac{1}{2}$ 倍為例，由於 $\frac{1}{2}$ 倍就是「一半」，因此乘積不會比被乘數大。
2. 由於學生有「乘會變大，除會變小」的迷思概念，在記錄分數倍的式子時，有時會將「×」記成「÷」。

評量

評量重點：

1. 能理解分數倍的意義與其計算。
2. 能用約分簡化分數乘法計算。

N-5-6 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。 **備註：**本條目的困難在於概念理解而非計算，教師應積極協助學生突破整數除法有餘數之固定想法，並轉化成商為分數的合理性。包含除可和「比率」的課題結合（N-5-10）。	n-III-5

先備：N-3-4。

連結：N-5-9、N-5-10。

後續：N-6-3、N-6-5、N-6-6。

基本說明

1. 以分數（或小數）表示整數相除的結果，是學習分數的重要課題。六年級的「比與比值」以及國中之後幾乎所有整數除法應用都會採用這種記法（包括用計算機做除法原則上也是）。學生學習這項課題的困難，源於兩個事實 (a) 和以前學習除法的經驗（總要留心餘數）有衝突 (b) 算則太過簡單。因此學生經常發生計算沒有問題，但其實不了解其意義的情形，需要教師耐心處理。
2. 學習整數相除建議先從等分的情境入手。底下說明參見釋例 1.。
   (a) **單位分數：**以最簡單的**單位分數**情境學建立將整數相除記為分數的習慣，例如「將 1 個披薩，平分給 3 人，每人分到幾個披薩？」其除法算式記為 $1\div3=\frac{1}{3}$。
   (b) **真分數：**從真分數的情境，建立整個記法的合理性。例如「將 2 個披薩，平分給 3 人，每人分到幾個披薩？」算式應記為 $2\div3=\frac{2}{3}$。這類問題以圖示表示時，必須強調問題問的單位是幾個披薩，破除**學生可能將結果想成 $\frac{2}{6}$ 的迷思**。
   (c) **假分數和帶分數**：讓學生先熟悉以上記法的合理性之後，再來處理假分數──也就是和整數除法經驗衝突的地方，例如「將 7 個披薩，平分給 3 人，全部分完，每人分到幾個披薩？」教師必須強調全部分完，迫使學生思考如何平分餘數的部分。再處理這類被除數比除數大的問題時，有兩種作法，一種沿用 b.的想法，得到假分數；一種援引整數經驗，在平分餘數，答案是帶分數。

   教師要總結兩個要點，第一是強調以前學習的整數除法和此並無衝突，賦予餘數在這個記法中的意義，第二是由此再次確認「假分數和帶分數互換」的作法。
   (d) **等值分數**：若時間充裕，教師也可討論如「將 2 個披薩，平分給 4 人，每人分到幾個披薩？」的問題，其中有兩種思考方式，可得到 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 的等值分數結論。
3. 在平分情境之後，教師也應從除法的分裝（測量）情境來說明其意義，處理時宜從被除數大於除數的情況開始，比較符合測量的情境。教師可先回顧測量情境的除法意義，再進行類似釋例 2. 的活動。
4. 本條目的目標在於建立整數相除分數表示的方法與合理性，其中最重要的是處理餘數的轉化，認識到餘數並不是消失，而是融合在這個表示法中。
5. 整數相除的學習最終要能與一些常見的分數操作結合，例如帶分數與假分數轉換，約分化成較簡單的等值分數。

條目範圍

1. 本條目在布題的情境選擇與措辭均應盡量清楚達成教學目標，例如選擇容許分割的連續量

個別單位（如披薩），比較容易要求學生全部分完。若是不容易分割或易碎的物品（如糖果、香蕉、棒球等），只會徒增解釋的困難，模糊要說明的焦點。

2. 考慮分數日後的應用，應讓學生充分經驗連續量的應用情境。
3. 在分裝（測量）情境，被除數小於除數的情形，學生可能會疑惑算式為何可寫成除式，因此在基本說明中才建議先處理被除數大於除數的情形。等學生習慣處理餘數的分數表示後，就較能接受其意義。分裝（測量）情境餘數的處理和比率問題（N-5-10）可互相連結。例如每 10 公分剪 1 段，則 1 公分相當於 $\frac{1}{10}$ 段（$1\div10=\frac{1}{10}$），也就是整段的 $\frac{1}{10}$（比率）。
4. 條目範圍的「商為分數」指的是分數相除的結果（「商」）是分數，不是整數除法的「商」。

釋例

1. 以平分情境（等分除）說明整數相除：

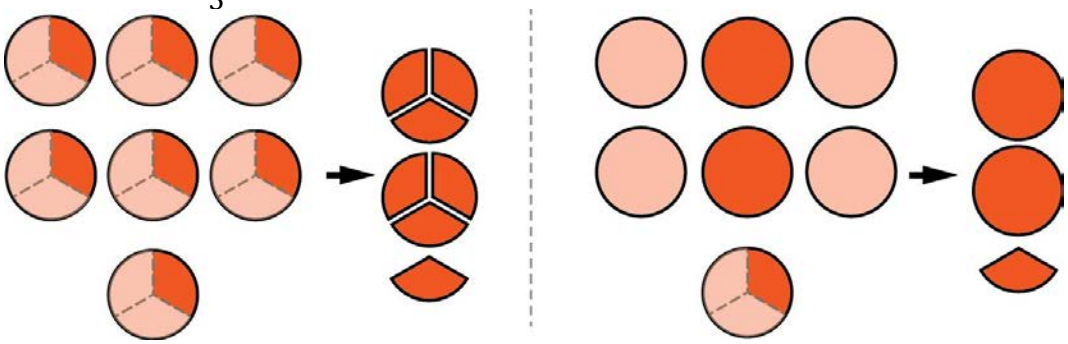
(1) 單位分數：「將 1 個披薩，平分給 3 人，每人分到幾個披薩？」這是一個除法問題，列成算式：$1\div3$。由討論知每人應分得 $\frac{1}{3}$ 個披薩（左下圖）。所以得出 $1\div3=\frac{1}{3}$。

(2) 真分數：「將 2 個披薩，平分給 3 人，每人分到幾個披薩？」算式記為 $2\div3$。經由 1. 的經驗或圖示（右上圖），知道每人分得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 個披薩。所以得 $2\div3=\frac{2}{3}$。

教師由此，可讓學生討論類似問題，逐漸發現答案其實就是「被除數/除數」（不用出現在課堂）的形式。

(3) 假分數和帶分數：「將 7 個披薩，平分給 3 人，全部分完，每人分到幾個披薩？」算式記為 $7\div3$。教師一定要強調「全部分完」，因此以前整數問題的餘數部分，還要繼續平分。

- 得到假分數的作法（下左圖）：1 個披薩每人分 $\frac{1}{3}$ 個，所以 7 個披薩每人分 $\frac{7}{3}$ 個，於是 $7\div3=\frac{7}{3}$。



- 得到帶分數的作法（上右圖）：先用整數除法，每人得 2 個披薩，還剩 1 個披薩。1 個披薩繼續平分給 3 人，由 2.每人分得 $\frac{1}{3}$ 個。因此每人分得 $2+\frac{1}{3}$ 個披薩，也就是 $2\frac{1}{3}$ 個披薩。所以 $7\div3=2\frac{1}{3}$。
- 教師在此應提醒學生「$\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}$」的作法仍然正確，而且透過這兩種思考方式，可以驗證這和假分數和帶分數的互換正好一致。教師尤其要提醒學生「被除數÷除數＝商…餘數」的整數算式，正好和「$\frac{\text{被除數}}{\text{除數}}=\text{商}\ \frac{\text{商}}{\text{除數}}$」的算式對應。（用實際的數字比對即可，本公式不宜出現在課堂上）

(4) 等值分數：「將 2 個披薩，平分給 4 人，每人分到幾個披薩？」算式記為 2÷4。

- 第一種作法：如 2，$2\div4=\frac{2}{4}$。
- 第二種作法：學生可能觀察到，這個問題可以想成「1 個披薩，平分給 2 個人」，$2\div4=\frac{1}{2}$，由此得到 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 的結論。

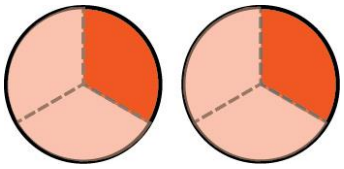
2. 以測量情境（分裝情境；包含除）說明整數相除。建議從被除數大於除數的情況做起。

例：「一條繩長 31 公分，每 10 公分剪 1 段，共可得到幾段？」這個問題相當於用一段長度為 10 公分的塑膠片去測量並標記。

由整數經驗知道 31÷10=3 餘 1，是 3 段再多 1 公分。教師再請學生思考與討論「1 公分是幾段」。由於 1 公分的長度是 10 公分的 $\frac{1}{10}$（和 N-5-10 比率連結），因此 1 公分長可以想成是 $\frac{1}{10}$ 段，因此可將測量結果，記成 $31\div10=3\frac{1}{10}$ 段（亦即 $3+\frac{1}{10}=3\frac{1}{10}$）。這時教師可援引 (1) 的結果，再次確認 $31\div10=\frac{31}{10}$ 的確等於 $3\frac{1}{10}$。

錯誤類型

1. 當問如「將 2 個披薩，平分給 3 人」這類問題時，學生可能誤以為答案是 $\frac{2}{6}$ 個披薩 (如下圖)。教師要強調問題問的單位是幾個披薩，以圖示破解學生的迷思。



2. 學生從帶餘數的整數除法轉移到整數相除的記法，會有答題適應的問題。為了避免學生只是形式死記，教師應注意布題，使學生容易理解餘數的新處理方式，並了解兩種記法並無衝突。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能從平分和分裝 (測量) 的觀點，理解整數相除為分數之意義與計算。
   (2) 能理解餘數在「整數相除為分數」裡的意義。
2. 評量注意事項：
   教師評量實應注意布題的問法，讓學生能確實理解評量的目標是答案寫成分數，而不是帶餘數的整數除法。

N-5-7 分數除以整數：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。 **備註：**等分除教學可運用乘法分數倍之經驗 (N-5-5)。包含除可和「比率」的課題結合 (N-5-10)。	n-III-6

連結：N-5-5、N-5-6、N-5-9、N-5-10。

後續：N-6-3。

基本說明

1. 分數除以整數可以視為整數相除 (N-5-6) 的推廣，也是分數除以分數 (N-6-3) 的前置經驗。本條目和分數乘法 (N-5-5) 在教學中有互補之處 (主要是除以 m 和乘以 $\frac{1}{m}$ 相當)，至於教學孰先孰後，但看教師的課程安排。
2. 教學上建議可先從被除數為單位分數開始
   (1) 單位分數：說明如「$\frac{1}{2}$ 張蔥油餅平分給 3 人，每人可分得幾張蔥油餅？」將答案記成 $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$。說明的策略主要在說明 6 的來源，或用圖形說明這相於將 1 張蔥油餅分成 6 份。
   (2) 一般分數：「$\frac{3}{4}$ 張蔥油餅平分給 2 人，每人可分得幾張蔥油餅？」由於 $\frac{1}{4}$ 張蔥油餅平

分給 2 人，每人可分得 $\frac{1}{8}$ 張蔥油餅。因此 3 個 $\frac{1}{4}$ 張蔥油餅平分給 2 人，可分得 3 個 $\frac{1}{8}$ 張蔥油餅，即 $\frac{3}{8}$ 張蔥油餅，記成 $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$ 。

說明二：$\frac{3}{4}$ 張蔥油餅是 3 個 $\frac{1}{4}$ 張，平分給 2 人，每人各先分得 $\frac{1}{4}$ 張。再將剩下的 $\frac{1}{4}$ 張平分，每人再分得 $\frac{1}{8}$ 張，每人共分得 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ 張蔥油餅。

(3) 教師最後要總結到「$\div m$」相當於「$\times \frac{1}{m}$」的事實，也可表示成公式（R-5-3），並讓學生完整經歷被除數是帶分數與假分數的情形，過程中也要練習約分。

3. 由於除法教學相對比較抽象，教師應鼓勵學生驗算，並理解其意義。

條目範圍

1. 在等分的情況「$\div m$」相當於「$\times \frac{1}{m}$」，只要透過如「平分給 3 人」，相當於「每人分 $\frac{1}{3}$ 」，也就是「$\frac{1}{3}$ 倍」的學習即可（N-5-5）。

2. 分裝（測量）情境中有部分問題，可考慮和比率思考結合（N-5-10）。

釋例

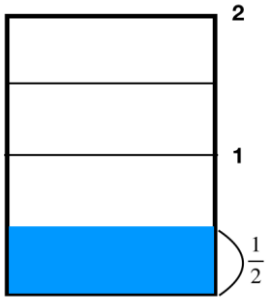
分數除以整數，依照基本說明 2. 的建議，可從等分除的情境入手，等到學生熟悉「$\div m$」相當於「$\times \frac{1}{m}$」後，可以再處理測量（分裝）的情境，建議最多只處理被除數為單位分數的部分，並和比率思考結合。

(1) 例 1：「將 $\frac{1}{2}$ 公升的水倒入容量 2 公升的水桶，$\frac{1}{2}$ 公升的水是幾桶水？」

這個情境的困難在於列出除法算式。老師可以先複習，如果問「8 公升的水倒入容量 2 公升的水桶，可以裝幾桶？」這個問題可以想成「2×（　　）＝8」，亦即「1 桶兩公升，幾桶是 8 公升？」，按照乘除互逆，可用 8÷2 來算。

等學生理解後，老師再回原題，此問題可以想成「2×（　　）= $\frac{1}{2}$」，亦即「1 桶兩公升，幾桶是 $\frac{1}{2}$ 公升？」，因此類推上例，可以列式為「$\frac{1}{2} \div 2$」。

教師可引導學生將問題想成比率問題（N-5-10）：$\frac{1}{2}$ 公升的水(部分量）佔 2 公升（全體量）的幾分之幾（比率）：若將將 2 公升想成是 4 個 $\frac{1}{2}$ 公升，則 $\frac{1}{2}$ 公升的水倒入水桶，是 $\frac{1}{4}$ 桶。（如下圖）

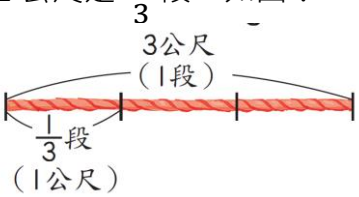


若學生已學過分數乘法，還可以驗算得

$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$。　（約分標記省略）

(2) 例 2：「一條繩子長 31 公尺，每 3 公尺剪一段，可剪成幾段？剩下幾公尺？」

可以先用整數除法計算列式為 31÷3=10…1，表示可以分成 10 段還剩 1 公尺。因為 3 公尺是 1 段，所以剩下的 1 公尺是 $\frac{1}{3}$ 段。如圖：



因此其算式為

$31 \div 3 = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$（段）。

教師應提醒兩種驗算式之間的關係：

$3 \times 10 + 1 = 30 + 1 = 31$，

$3 \times 10\frac{1}{3} = 30 + 1 = 31$，

其中餘數的 1 公尺等於每段 3 公尺中 $\frac{1}{3}$ 段的長度。

評量

評量重點：

1. 理解分數除以整數的意義與計算，並能做驗算。
2. 能用乘以單位分數的方式解決分數除以整數的問題。

N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。 **備註：**先連結「乘以 0.1」和「乘以 0.01」的意義和乘法直式計算的經驗再做推廣。小數乘法直式計算的方法和整數類似，但須留意小數點記法和小數加減時記法不同。	n-III-7

連結：N-5-1、N-5-5。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 本條目和 N-5-5 相同，主要是要理解乘數是分數或小數時的意義，雖然原則上這兩者的安排順序並無一定，但因為小數牽涉到較複雜的計算方法，容易干擾其意義的理解，因此傳統上都安排小數在分數之後教學，讓學生在學習小數時，可以專心學習其計算。
2. 學習小數時，可先從被乘數是整數開始，再處理小數的情況。因為小數是十進位位值系統，因此學習時主要先處理乘數是 0.1 或 0.01 的情況（相當於單位分數），並理解就結果而言，乘以 0.1 相當於小數點往左移一位，乘以 0.01 相當於小數點往左移兩位，並可以此類推。然後再處理其他乘數的情況。
3. 利用 2.的理解，教師可以用位值概念說明直式計算的方法。小數乘法的直式計算和整數乘法大同小異，但差異集中在答案小數點的位置，教師應發展解說的途徑，讓學生理解其道理。

條目範圍

1. 學生最多只要熟練兩位小數乘以兩位小數即可，其中整數位數宜少於二位。其他情況，教師只要示範，讓學生知道算則其實都一樣即可。
2. 和 N-5-5 相同，教師要處理學生認為乘積一定比被乘數大的錯誤迷思。

錯誤類型

1. 處理小數乘法乘積一定比被乘數大的迷思。
2. 小數乘法的直式計算中，學生時常不會處理小數點的位置。建議教師從最基本的情況讓學生理解算則意義與紀錄方式。
3. 直式計算乘積末尾為「0」的處理，因牽涉到小數點位置的問題，學生容易犯錯。建議教師需完整處理這類問題的處理方式。

評量

評量重點：

1. 能理解整數乘以小數與小數乘以小數的意義。
2. 能用直式計算協助整數或小數乘以小數的計算。
3. 知道一數乘以 0.1 和 0.01 的意義，並熟悉結果小數點的移動方式。

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。 **備註：**原則上只處理商限三位小數的情況。可讓學生從計算中發現可能有除不盡的循環現象，教師以概數處理這類問題（N-5-11），不處理「循環小數」的命名與課題。	n-III-7

先備：N-4-6。

連結：N-5-6、N-5-7、N-5-11。

後續：N-6-4。

基本說明

1. 本條目和 N-5-6、N-5-7 互為表裡，但基於與 N-5-8 基本說明 1. 同樣之理由，建議先進行分數教學，再進行小數教學。把教學重點放在如何從小數的情境中計算出答案。另外，在 N-4-6 曾利用等值分數進行分數和小數的互換，本條目將同時給出將分數轉換成小數的系統性作法。
2. 在本條目中，教師應用位值的概念說明如何以直式來進行整數、小數除以整數的計算。整數除以整數時和 N-5-6 相同，相除後不留下餘數，繼續往下計算，被除數是小數時也類似。學生應發現直式計算和原來整數的計算方式本質上完全一樣，只是要注意商變成小數，因此要加上小數點，而且可能算不完。
3. 處理本條目的直式計算時應特別注意除不盡的處理方式。首先，在剛學習「商為小數」的新觀念時，原則上教師布題都應以能除盡為原則；其次，教師應有活動讓學生認識有除不盡的可能性，例如可考慮將 $\frac{1}{3}$ 化成小數標示在數線上，學生可觀察小數表示雖然寫不完，但真的很靠近 $\frac{1}{3}$；最後，和 N-5-11 結合，知道在應用上可以用概數來處理除不盡的情況。
4. 本條目的應用是將分數轉換成小數表示。從 N-5-6，學生已知道分數可以想成分子除以分母的結果，因此利用本條目學得的方法，就可以將分數化成小數。教師應導引學生練習，讓學生熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數的小數表示（如 $\frac{3}{4} = 0.75$）。

條目範圍

1. 同 N-5-6，教師布題要能讓學生不在餘數時停止，知道要繼續往下計算。
2. 教師應注意本條目布題原則上要能除盡，商限三位小數。
3. 在除不盡的活動中，不做「循環小數」的命名。

評量

1. 評量重點：

   (1) 理解整數除以整數（商為小數）的意義與計算。

   (2) 理解小數除以整數（商為小數）的意義與計算。

   (3) 能用概數處理除不盡的情況。

   (4) 熟悉除以 10 相當於乘以 0.1、除以 100 相當於乘以 0.01 的關係。

2. 評量注意事項：

   希望學生用概數處理除不盡的問題時，應於布題中清楚陳述評量之要求。

N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。 **備註：**本條目限結果不大於 1（100%）的應用情境（大於 1 之延伸情境見 N-6-8）。	n-III-5 n-III-9

先備：N-4-6。

連結：N-5-5、N-5-6、N-5-7、N-5-8、N-5-9、N-5-11。

後續：N-6-3、N-6-4、N-6-5、N-6-6、N-6-8。

基本說明

1. 「比率」是日常生活常見的數學應用，也是小學高年級分數學習的重要課題，應以「整數相除」為入口（N-5-6），熟習這個概念。比率的原來應用情境指的是「部分佔全體」的多寡，因此比率的值小於或等於 1。
2. 本年度比率的學習先以「整數相除」為重心，認識「部分量÷全體量=比率」，並發展其相關的應用問題，以及常見的記法（如百分率）或語言（如「折」、「成」）。其應用問題除比率的計算之外，也包括如何由「全體量」和「比率」求得「部分量」的分數或小數乘法問題（N-5-5, N-5-8），以及在應用中常見的概數問題（N-5-11）。以上都熟悉之後，若時間允許也不妨進行「部分量」為分數或小數情況的學習（N-5-7）。
3. 百分率是生活常用的比率表示，希望用整數來呈現兩位小數，讓學生用較熟悉的整數來思考。學生應理解百分率的意義、記法與應用。知道 100%就是 1，也就是全體所佔的比率。學生也應熟悉常用的百分率（相當於二位小數）與分數的轉換，如：100% = 1（全體），50% = $\frac{1}{2}$（一半），25% = $\frac{1}{4}$，75% = $\frac{3}{4}$，20% = $\frac{1}{5}$，10% = $\frac{1}{10}$等等。
4. 教師也應發展比率計算的應用，讓學生知道比率的和、差在比率上的意義。這時將會用到 1（100%）指的是「全體」，如（男生佔 48%，則女生佔 1-48%=52%）；比率 0 雖少見於實際應用，但學生應知道兩比率的差為 0 就是兩比率相等的意思。

條目範圍

1. 有些人認為比率也可大於 1，指的是透過「比的思考」(N-6-6) 所引申出來的「基準量與比較量」(N-6-8)，不在本條目的範圍之內。
2. 本條目只是起點，六年級在除法學習中 (N-6-3, N-6-4) 應將比率推廣到分數、小數的情況。並學習如何從「部分量」和「比率」求得「全體量」。
3. 百分率其實也常見如 12.5%的記法，這雖不是本年教學的重點，但學生可緣引整數和一位小數的經驗來理解。至於學生在小數點轉換上常見的錯誤，則要耐心解釋。
4. 使用「折」的語言必須遵照日常用法，因此教師應說明「七五折」是 75%的意思，不是「七十五折」。
5. 作為常識，教師也可介紹其他比率的常用單位如千分率 (符號「‰」) 或百萬分率 (ppm)，但不能指望初學比率的學生能有深刻的認識，也不宜用於評量。
6. 由於母體並不固定，「打擊率」「命中率」並不是數學意義的比率，尤其「打擊率」或「命中率」的「加法」更不是分數的加法。教師千萬要區分這種錯誤。

釋例

1. 比率教學可以連結一維、二維表格的布題，讓學生更理解部分量、全體量的意義。例如：

(1) 例 1：(一維表格) 班上男女生的人數表和比率計算。

	男生	女生	合計
人數	11	14	25
百分率	44%	56%	100%

男生占全班的比率是 44%，女生占全班的比率是 56%。

(2) 例 2：(二維表格) 各班男女人數表：

性別 班級	男生	女生	合計
五年一班	12	13	25
五年二班	15	13	28
五年三班	13	14	27
合計	40	40	80

- 五年一班男生占全班的比率是多少？女生占全班的比率是多少？
  男生：12÷25=0.48=48%，
  女生：1−48%=52%。　　（即使學生直接計算，也要讓學生理解這個算法。）
- 五年一班男生占全五年級男生的比率是多少？五年二班的男生呢？五年三班呢？
  五年一班：12÷40=0.3=30%，
  五年二班：15÷40=0.375=37.5%，
  五年三班：1−30%−37.5% =32.5%。
- 五年一班男生占全五年級總人數的比率是多少？
  12÷80=0.15=15%。

在這類例子中，教師要提醒如五年一班男生的比率之所以有這麼多種不同的比率，都是因為計算比率的母體不同，因此在理解比率的數字意義時，也同時要追問計算的母體是什麼。

2. 分裝（測量）情境餘數的處理和比率問題（N-5-10）可互相連結。請見 N-5-7 釋例 1.。

錯誤類型

學生誤會「打擊率」、「命中率」的取和方式是分數的取和。老師必須提醒分數的學習中，單位 1（即比率的母體）的重要性。

評量

1. 評量重點：

(1) 理解比率的意義。

(2) 能處理比率的日常應用如「百分率」、「折」、「成」。

2. 評量注意事項：

(1) 小心比率相加的布題合理性（見條目範圍 6.）。

(2) 連結 N-5-11 比率之題材，其總和可能因取概數而產生 99% 或 101% 的處理方式，在初學比率時，教師應避免這類布題。

N-5-11 解題：對小數取概數。具體生活情境。四捨五入法。知道商除不盡的處理。理解近似的意義。 **備註：**教學討論近似問題時，不出現「誤差」、「近似值」之用語。	n-III-8

先備：N-4-4。

連結：N-5-8、N-5-9、N-5-10。

後續：N-6-4、N-6-5。

基本說明

1. 在 N-4-4 中，學生已學習如何對大數在指定位數取概數，並學習使用近似符號「≈」。「近

似」的概念讓我們能掌握數值資料中最核心的部分，並因此大大的減輕計算的負擔。本條目把這種精神應用的小數的估算（概算）問題。

2. 四捨五入是常見的求概數方式，學生應確實學習如何用四捨五入法求一整數的概數到指定位數，學習如何求某小數的概數到「小數點以下第幾位」。
3. 小數相乘的積其小數位數可能很多，自然可以應用概數來記錄結果。即使是看起來簡單的整數除法題材中，也有不少適合運用概數的問題，如「整數相除」(N-5-9)或比率(N-5-10)的題材，這些題材經常出現商位數太多，甚至除不盡的問題，特別需要用到概數的概念。例如「全班有 32 人，女生有 14 人，女生占全班的比率是多少？」，則女生佔全班的 $\frac{14}{32}$，用直式計算得商為 0.4375，若換成整數值的百分率，其概數表示約為 44%，若允許到小數一位，則為 43.8%。

條目範圍

1. 本年概數指定的位數到兩位小數即可。
2. 討論近似問題時，教師只要訴諸日常語言即可如：大約、大概.....，不宜出現「誤差」、「近似值」這些專業用語。

錯誤類型

取概數時，若在小數點下指定位數出現 0，容易造成學生的混淆。可先寫下 0 確定概數的正確性，再依小數約定寫成正確之小數形式。例如 3.99 取到小數點以下第 1 位，可先寫出 4.0，再寫成 4（概念上為 3.99≈4.0=4）。

評量

1. 評量重點：

   (1) 能用四捨五入法對小數取概數，並運用於日常情境。

   (2) 知道商除不盡時能用概數得到近似的解。
2. 評量注意事項：

   注意錯誤類型的處理。

N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。 **備註：**針對量的大單位教學，教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。	n-III-11

先備：N-4-9、N-4-4。

連結：N-5-11。

基本說明

1. 如 N-4-9 所示，大單位不但簡化了大數值的量的記錄方式，也常成為量做估算時指定的目標。教師教學時應盡量結合生活實例來說明，讓學生對這樣的量有最基本的量感。
2. 1 公畝(a)=100 平方公尺；1 公頃(ha)=10000 平方公尺；1 平方公里(km^2)=1000000 平方公尺；。學生應找出自己喜歡的方式記憶各單位間的關係，並能依此做轉換。例如「100 平方公尺=1 公畝；100 公畝=1 公頃；100 公頃=1 平方公里」；或者「1 平方公里=100 公頃=10000 公畝=1000000 平方公尺」等。
3. 學生應能進行最基本的單位換算與計算（包含估算），如可發展「某正方形的廣場，面積是 1 公畝，邊長為多少公尺？」的活動，再換成「公頃」、「平方公里」，學生也可依此用長度的量感，來感受面積的量感。
4. 由於學生不熟悉太小之分數與小數，教師可直接告知學生 1 平方公尺= $\frac{1}{1000000}$ 平方公里或 0.000001 平方公里，作為多位小數的示例，但勿在評量時強調這方面的計算。

條目範圍

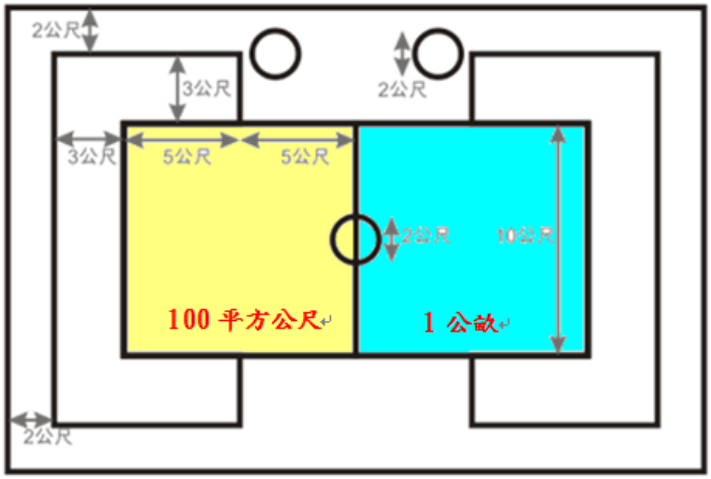
學生已學習人體尺度的平方公尺（N-4-11），透過操作活動建立 1 平方公尺的量感，並與生活環境（如黑板、教室、走廊）結合進行估測與實測活動。本條目超出人體尺度的大面積單位雖愈來愈不易掌握，仍應以平方公尺經驗為基礎，繼續與學生生活周邊常見的例子結合，活化學生的量感，而不是單純依賴計算。評量時也不要過於嚴格。

釋例

1. 「公畝」量感教學。

(1) 實作/實測活動：

- 如果學校有標準躲避球場，其單方內場面積正好是 1 公畝（如下圖），教師可帶學生去實測確認，但老師應先行留意各校實際設計可能略有更動。



- 1 公畝是 100 平方公尺，教師可指導學生用捲尺和繩子在操場或球場圈出邊長 10 公尺的正方形，以及長 20 公尺、寬 5 公尺的長方形。感受 1 公畝的大小。

- 實測 1 個籃球場（或排球場、教室）的邊長，計算其面積是多少公畝？（這裡會用到小數乘法　N-5-8）
- 參考數據：國小常見的球場面積大小：
  排球場地長 18 公尺，寬 9 公尺。
  羽毛球場地長 13.40 公尺，雙打場地寬 6.10 公尺，單打場地寬 5.18 公尺。
  籃球場地長 28 m，寬 15 m。

(2) 估測活動：運用前面的實測經驗，用眼睛或步行估估看，其他適合場地（籃球場、排球場、教室等）的面積大約是多少公畝？

(3) 比較活動：透過以上實測、計算面積或比較長寬。了解其他適合場地和 1 公畝比較，誰大誰小？

(4)「公畝」與「平方公尺」單位間的關係
在 1 公畝實作活動時，若時間及器材（繩子）充裕，也可以將邊長以 1 公尺為單位等分，讓學生體驗 1 公畝是 100 格 1 平方公尺，也就是 100 平方公尺，理解「公畝」與「平方公尺」的關係。

2.「公頃」的量感教學

(1) 建議教師備課時，先利用學校地圖、Google Map（或類似電子地圖）等，標示出校園內外恰當的 1 公頃區域，建議校園內之區域優先（可以直接在上課時體驗），或以鄰近校園的公園或廣場來說明或比較，以建立學生對 1 公頃面積大小的概念。

(2) 實作 / 實測活動：一般國小校園可能很難直接圈畫 1 公頃的地域，教師可帶學生實測（長方形）操場內的某區域面積（若邊長超過 100 公尺則止於 100 公尺；若有 100 公尺直線跑道更好），盡量圍出 1 公頃、半公頃、$\frac{1}{4}$ 公頃的大致範圍。體驗或用倍數想像 1 公頃的大小。

(3) 估測活動：繼續前面實作，估估看，操場比 1 公頃大，還是比 1 公頃小？學校面積大概是少公頃？校旁某公園大概是多少公頃？

- 本活動教師須先準備答案。由於學生尚未學過地圖比例尺（S-6-2），教師若希望順便進行計算面積的活動，必須先準備正確長度標示的示意地圖。

3.「平方公里」的量感教學

(1)「平方公里」很難直接用視覺感受，因為 1 公里直線距離很長，生活中絕少 1 公里的直線道（參考 N-4-9），因此更應該透過生活可見或學生感興趣的大地標來說明：

- 學生校外教學常去的「六福村」面積正好 1 平方公里（100 公頃）；「義大世界」90 公頃；「麗寶樂園」是 2 平方公里；「台北動物園」使用部分約 1 平方公里、「海生館」約

1 平方公里等等。

● 學生生活的行政區域（村、里、鄉、鎮、區）的大小，擇適當者加以說明或舉例。

(2) 同「公頃」教學，建議教師備課時，先利用地圖、Google Map（或類似電子地圖）等，標示出恰當的「1 平方公里」區域，才正式上課。不要直接用地圖教學，因為學生尚未學過地圖比例尺（S-6-2）。

評量

1. 評量重點：

(1) 認識「公畝」、「公頃」、「平方公里」面積單位之意義。

(2) 認識「平方公尺」、「公畝」、「公頃」、「平方公里」之換算關係。

(3) 能應用於日常生活，並體會其量感。

2. 評量注意事項：

量感部分的評量勿過度嚴苛，1 平方公里部分可僅進行討論，不必評量。

N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。 **備註：**教師應運用學生熟悉的生活示例，體會各單位的量感。	n-III-11

先備：N-4-4、N-4-9。

連結：N-5-11、N-5-15。

基本說明

1. 同 N-4-9, N-5-12，公噸是重量的大單位（1 公噸=1000 公斤; 1t=1000kg），在重量大的時候常成為重量做估算指定的目標。雖然重量的量感本來就不容易掌握，大單位的「公噸」尤其更難，但是教師仍應以實例說明，讓學生對「公噸」有多重有基本的概念。

2. 學生應能進行最基本的單位換算與計算（包含概算），教師可告知 1 公斤= $\frac{1}{1000}$ 公噸或 0.001 公噸，是三位小數應用的例子。

3. 可以告知自然領域的常識：「1 公升水大約是 1 公斤」，利用 N-5-15 容積的學習，知道 1 公升=1000 立方公分，因此 1 立方公尺的水重量大概就是 1 公噸。

條目範圍

學生對超出人體尺度的大單位本來就不容易掌握，教師應盡量提供學生生活周邊常見的例子活化學生的量感，而不是單純依賴計算。評量時也不要過於嚴格。

釋例

相較於長度、面積或體積等幾何量，重量的量感建立及估測活動的教學，是比較不容易的，對超出人體尺度的「公噸」單位就更難以掌握了。

(1) 在教學活動上，教師可以先備課，找出學生感興趣的東西的重量，例如大型動物或大交通工具的重量，讓學生理解有些熟悉的東西非常重，必須用大單位如「公噸」來紀錄。

(2) 實作/實測活動：由於公噸是大單位，教學上不妨找出較輕的「單位」，再用倍數來想像「公噸」有多重。

- 學生測量體重，知道個人的體重公斤數後，通過「抱抱看」的活動，體驗幾十公斤大概有多重。
- 找出 2 或 3 個人的組合，讓體重總重量（連加）接近 100 公斤，再想像這組同學重量的 10 倍，就差不多是 1 公噸的重量。
- 估測/計算活動：「你覺得大概幾個自己的重量是 1 公噸？」(建立自己體重和「公噸」的聯繫）由於學生已經進行上述活動，可以大概猜一個可能的數字，數字在 20 到 30 之間都合理。再透過計算，看看差多少。(參考資料：五年級學童體重平均約 38–40 公斤。)

(3) 生活經驗連結 1（水的重量和「公噸」)：教師可以告知學生常用的知識：「1 公升水大約是 1 公斤」。由本年度的容積學習（N-5-15），學生知道 1 公升=1000 立方公分，並推得「1 立方公尺=1000 公升」，所以 1 立方公尺的水重量大概就是 1 公噸。教師可以此和容積課程連結，讓學生想想看要如何找出生活中可以裝水的空間（大水桶、浴缸、水池等），如果裝滿水是幾公噸。

- 學生可能會疑惑 1 立方公尺的空間，裝不了 25 個同學（由前討論），教師可以再提醒學生，重量的常見錯誤：「把重量和體積混淆」，例如以為 1 公斤的棉花比 1 公斤的鐵重。

(4) 生活經驗連結 2：學生對「公噸」有初步概念後，可以讓學生尋找生活上看到有使用「公噸」作單位的物件，例如：公車的重量 16.3 公噸、貨車載重 15 公噸、電梯載重 950 公斤(0.95 公噸)，讓學生理解公噸是生活上常見的重量大單位。

評量

評量重點：

1. 認識「公噸」重量單位之意義。
2. 認識「公斤」與「公噸」之換算關係。
3. 認識「公噸」之生活應用情境。

N-5-14 體積：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。 **備註：**不用複名數進行計算。1 立方公尺與 1 立方公分的換算較龐雜，不須評量。	n-III-11

先備：N-4-12。

連結：N-5-15、S-5-5。

基本說明

1. 「立方公尺」是課綱引入的第二個體積單位。「立方公尺」和「立方公分」是常用單位，因此教學應包含實測、量感、估測，並做簡單計算，本年亦可連結正方體或長方體體積之計算（N-5-15）。
2. 教學時，建議教師可提供立方公尺的體積模型，有助於學生量感的培養，作為估測時的依據。
3. 1 立方公尺 (m^3) = 1000000 立方公分，由於數字很大，單位換算比較困難，教師不必做過多的評量要求。

條目範圍

體積的簡單計算不需使用複名數。

釋例

「立方公尺」的量感不容易建立，教師可在教室或操場組合方便拆開的 1 立方公尺正方體模型（材料建議見下），進行下面活動：

(1) 例 1：（可拆掉一些面或用 1 立方公尺骨架）「1 立方公尺大概和幾個講桌的體積一樣大？和幾個置物箱一樣大？擺擺看。」

(2) 例 2：「多少小朋友的體積才會和 1 立方公尺的體積一樣大？」

小朋友進入 1 立方公尺的骨架算算看。（人數較多班級適用，或邀請其他班級學生或老師完成，人數少的班級可改長方體紙箱）

(3) 例 3：「教室內的空間有多少立方公尺？」

引導學生用 1 立方公尺，1 層有幾立方公尺，再到教室約有幾層，算出大約是多少立方公尺。（參見 S-5-6）

- 註：教師備課時可預先準備材料製作 1 立方公尺體積的模型，建議可用 1 公尺塑膠管（可換竹籤或強度夠不易彎曲的材料）12 支，提供塑膠管三維直角固定的材料（如頂點珠等），以及 6 個 1 平方公尺的正方形紙張（可用報紙製作）。

錯誤類型

學生常常回答問題時錯用單位，體積單位誤用面積單位（如平方公尺）或長度單位（如公尺）。

評量

評量重點：

1. 認識「立方公尺」體積單位之意義。
2. 能做「立方公尺」之簡單實測、量感、估測與計算。
3. 能應用「立方公尺」於日常生活問題。

N-5-15 解題：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。 **備註：**教學中須包含如何以容積的想法求不規則物體的體積。	n-III-12

先備：N-3-15、N-4-12、S-4-4。

連結：N-5-14、S-5-5。

基本說明

1. 體積、容量、容積都是度量空間區域大小的量，體積表示物體佔據空間的大小，容量本來表示容器內部空間的大小，常用液體量來度量與比較，後來也可度量液體佔據空間的大小（詳見 N-2-12 基本說明）。容積的概念是體積和容量的結合，指的是容器內部空間的大小，但運用的是體積量的概念。容積顯示體積和容量本質上是一體的兩面，兩者之間可以轉換。
2. 容積的活動應協助學生認識容積、建立容積和容量的關係，並認識液體的體積概念。接著發展活動，利用液體的體積度量不規則物體的容積或體積。這是本條目的基本目標。建議包含下列四種活動：
   (a) 初步認識容積。可從規則容器（例如長方體容器，S-5-5）開始，探討容器內部空間的形狀和大小，利用和體積相同的度量方式，用 1 立方公分的積木去填滿。教師再說明這個容器內部的容積是如 36 立方公分。
   (b) 認識容量和容積的關係。取 2. (a) 中同樣的容器，以標準容量操作在容器內部注滿水，再倒到量杯中測量得 36 毫升。因此這個容器內部的大小既是 36 立方公分，也是 36 毫升，因此「1 立方公分＝1 毫升=1c.c.」、「1000 立方公分=1 公升」。做此活動時，建議不要用有容量刻度的容器。重點是要讓學生感覺立體積木的堆疊和液體（水）的量是相等的（因此是液體的體積），但是水的形狀卻可以不固定（例如倒到量杯之中）。
   (c) 度量不規則容器的容積。運用標準的容量操作測量某不規則容器的容量，並利用「1 毫升＝1 立方公分」的轉換，得到此容器內部的容積（體積）。
   (d) 度量不規則物體的體積。教師展示如何利用容器中水量的升高，度量不規則物體的體積。這是因為「物體體積等於此物體排開水的體積，再用容量度量後者」。在 (c) 與 (d) 的活動中，教師要讓學生感受這個方法的巧妙，利用液體的體積可以度量本來很難度量的體積概念。

條目範圍

1. 教師應注意物體內外體（容）積的差別，例如一個木箱的（外部）體積，是它的（內部）容積與木箱本身體積之和。
2. 進行 (d) 的活動時，教師務必記得要讓物體完全沈浸在水中，漂浮或局部露出的物體都不合格。
3. 教師不要發展太過繁瑣的容積計算問題，將重點放在運用容積可以協助度量體積的概念。

釋例

1. 容積是指容器內部容量的體積，生活中抽屜、水桶、浴缸等等都有容積，有時「容器」可以約定一個空間範圍來進行活動，例如:「學生作防災演練時，躲在課桌下的空間有多大？」這就是指定桌下範圍為可容納的體積（也就是容積），這個空間通常視為長方體，可以實際量出，並計算出來。
2. 「不規則物體的體積」是容積的關鍵應用，值得好好發展活動說明。
   (1) 老師先拋出最關鍵的問題:「大家知不知道自己的體積是多少？」由於人的身體太不規則，學生一定覺得匪夷所思。大家可先討論，但最多只能給出粗糙的估計。
   - 利用多位學童進入 1 立方公尺體積，將體積盡量填滿（詳見 N-5-14 釋例），可以估計 1 個小朋友的體積。不過這個活動是有趣的體積量感活動，但得到的是平均的結果，並不是「自己」的體積。

   (2) 老師可以簡單說明「阿基米德的故事」(只要大致說明即可，因為這個故事絕大部分牽涉的內容，都和我們的問題關係不大)。重點是好玩順便引出，不規則物體可以靠完全浸泡在水中而得出其體積。老師應隨即舉例，說明怎麼應用這個想法，在教室中用水桶、臉盆測量不規則物品的體積，甚至可以測量腳掌或拳頭的體積。

   (3) 如果學生躍躍欲試，想測量自己的體積，教師可以大概描述其步驟，但要請學生小心安全。
   - 作法：利用標記的方法，可以省水。將身體完整進入浴缸（水桶）的水中（像游泳一樣，閉一下氣，頭入水中，再起來），前後做水位的記號，再算出不同水位間的容積相差多少，就是身體的體積。測量方式可用水杓或水桶取水補到滿水位並計數其容積。

評量

評量重點：

1. 認識容量、容積和體積間的關係。
2. 認識液體體積的意義。
3. 能測量或計算不規則物體的容積或體積。

N-5-16 解題：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。 **備註：**含以分數和小數表示的時間量。如 15 分是 $\frac{1}{4}$ 時（$\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$）；$\frac{1}{5}$ 時是 12 分（$60\times\frac{1}{5}=12$）。可含工程問題。	n-III-11

先備：N-4-13。

連結：N-5-5、N-5-6、N-5-7、N-5-8、N-5-9。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 基本的時間乘除問題是時間量的乘除，例如「一首歌曲的時間是 4 分 20 秒，連續放 3 次需要多少時間？」概念上並不困難，教師可把重點擺在討論如何正確的計算，就本例而言，既可以「分」「秒」各自計算；也可以換成「秒」計算後，再換回「分」「秒」。除法的問題類似，例如「放一首歌 3 次是 13 分，這首歌長幾分幾秒？」當然這時換成「秒」來計算的學生會比較多。除了基本的時間量乘除，也可考慮和時刻結合的兩步驟問題。
2. 可初步介紹工程問題，如「一個工程 3 個人做 8 天可完成，6 個人做幾天可完成」這類問題雖然生活中常見，但這是學生第一次遇到不熟悉的乘法概念（類似「人天」「人時」的單位），教師應以圖示說明為什麼可以用乘法和除法來計算解題，以概念的學習為主，不必強調計算的複雜度。
3. 由於時間的單位和其他量的單位很不同，因此也可使用簡單的分數和小數，和本年的分數和小數學習結合。例如學生應熟悉如底下的計算 8 時是 $\frac{1}{3}$日($\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$)；$\frac{1}{5}$ 時是 12 分 ($60\times\frac{1}{5}=12$)，0.4 分是 24 秒（$60\times0.4=24$）。也可討論如「放一首歌 3 次是 13 分，這首歌長幾分幾秒？」先算 $13\div3=4\frac{1}{3}$，再說 $4\frac{1}{3}$ 分是 4 分 20 秒。當然除了單位換算之外，也可進行其他時間乘除問題的解題。

條目範圍

「工程問題」是一種和時間相關的新類型乘法問題，教師應以認識新概念的態度來教學，必須有鋪陳，數字也力求簡單。「人天」「人時」這類單位不用介紹。

釋例

1. 「工程問題」概念的假定是 1 個人 1 天的工作量是固定且彼此相等的，由於整個工程的工作量是確定的，因此可以轉化為幾人花幾天可完成的問題。

   (1) 例 1：「有一件工程 3 個人做 8 天可完成，6 個人做幾天可完成？」

   ● 先計算「完成這件工程的總工作量」。

   下面的圖形，1 列表示 1 人做 8 天的工作量，1 行表示 1 天 3 人可完成的工作量。如

果用 1 人 1 天的工作量為單位(也就是圖中的 1 格)，則總工作量為 3×8=24 個單位。

- 再算「6 個人要花幾天做完」。

  如下左圖，6 個人女生 1 天可以完成 6 個單位的工作，但全部有 24 個工作量，列式為除法，總共需要 24÷6=4 (天)，如下右圖所示。

所以這件工程 6 個人做 4 天可完成。

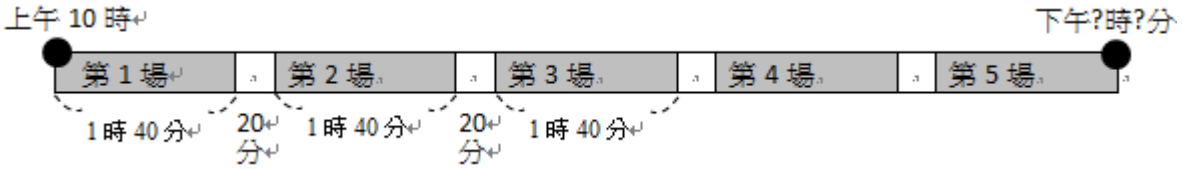
(2) 例 2 :「有一件工作，2 個員工，6 個星期可以完成。如果老闆希望能在 4 週完成，需要再增加幾個員工幫忙？」以 1 個員工 1 星期可以完成的工作量為單位。

- 先算總工作量：2×6=12 (單位)，
- 續算 4 週完成需要員工數：12÷4=3 (人)
- 最後算需再增加員工數：3−2=1 (人)。

  答：還要增加一位員工。

2. 時間的間隔問題計算

例 1.「電影院每天上午 10 時開始放映電影，每一場放映結束後休息 20 分，再繼續放映下一場。今天放映的電影片長 1 時 40 分，問第 5 場電影放映結束是下午幾時幾分？」



- 先算放映 5 場電影的時間：1 時 40 分×5=8 時 20 分，
- 再算休息 4 次的時間：20 分×4=1 時 20 分，
- 後算第 5 場電影放映結束的時間：10 時+(8 時 20 分+1 時 20 分)=19 時 40 分，

  答：第 5 場電影放映結束的時間是 19 時 40 分，也就是下午 7 時 40 分。

  註：若學生注意到一場電影和休息時間合起來是 2 時，則總放映時間是

2 時×4＋1 時 50 分=9 時 50 分。

評量

評量重點：

1. 在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。
2. 能用分數和小數解決時單位的換算問題。(限分數倍)
3. 認識簡單的工程問題。

S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。 **備註：**簡單推理，例如：四邊形四內角和為 360 度，三角形不可能有兩鈍角。	s-III-5

先備：S-3-4、S-4-6、S-4-7、S-4-8。

連結：S-5-2、S-5-5、S-5-4。

後續：S-6-1。

基本說明

1. 小學幾何的所謂性質和推理，都和國中平面幾何不同。「性質」指的是透過多次觀察或某種有啟發性的說明而得到的性質，不是嚴格證明的定理。「推理」通常是根據某個已知的事實，依照計算、思考或討論得到的某種讓自己與同學信服的結果，不是嚴格的邏輯推理，也不是嚴格的證明。這類活動的重要目標一是讓學生察覺幾何形體隱含的普遍性質，二是為了討論這些性質，學生必須有歸納(多重觀察)、思考原因以及說服別人的經驗。這些都是基本「做數學」的經驗。
2. 三角形和四邊形的性質很多，教師之教學活動應考量學生的程度、時間的限制、性質的難度和重要性，選擇能符合(1)基本目標的活動。底下是一些應包含的活動：
   (a) 三角形三內角和為 180 度：可先透過觀察(歸納)，再以拼貼說明(啟發性說明)。簡單推理如正三角內角是 60 度(計算式的推理)，但教師應讓學生體認這和實際去測量正三角形角度非常不同；類似的推理包括兩種常見三角板的內角關係。簡單推理也可推知四邊形之內角和為 360 度，教師要強調不是實測，而是要利用「三角形三內角和為 180 度」。
   (b) 三角形任意兩邊和大於第三邊：可先透過觀察(歸納)，再以距離走直線最短的概念說明(啟發性說明)。這個想法可以簡單推理知道，四邊形的三邊和定大於另一邊。
   (c) 平行四邊形的對邊相等、對角相等：可先透過實測觀察(歸納)。用分割圖形的方式來說明，最簡單的可能是透過沿對角線分割，得到兩個全等的三角形(啟發性說明)。

條目範圍

1. 其他常見的幾何推理例子是複合圖形的面積或體積，其中有重疊或挖除的情況。(S-5-2)
2. 「內角」不需出現在教學中。因為三角形的內角和外角是相對名稱，應一起出現。
3. 也可討論一個三角形不可能有兩個鈍角，學生的說明方式可能很多。教師不用特別以「反證法」來說明，就算要說明，也應用自然的方式讓學生理解，例如「鈍角比直角大，所以兩個鈍角加起來比 180 度還大，這怎麼可能呢？三角形三個角加起來不是剛好 180 度嗎？所以這是絕對不可能的。」
4. 其他推理活動的工具可考慮線對稱 (S-5-4)，端看教師如何安排課程。
5. 在小學不討論凹的四邊形。

釋例

1. 一步的簡單推理，以「等腰三角形兩底角相等」為例。

   (1) 關於「等腰三角形兩底角相等」，底下的作法都不是簡單推理。

   - 讓學生針對許多等腰三角形做實測，測量兩底角是否相等的活動，不是推理。實測很多等腰三角形，檢查兩底角都相等，只表示這些等腰三角形的底角相等，其他還有很多沒有測量過的，學生並不知道。因此實測活動，是一種歸納、找規律的活動。猜想有一個規律是很有意思的數學活動，但是學生必須想辦法說明「為什麼」，光靠實測，只是做苦工累積證據。
   - 從幾何的公設開始，定義等腰三角形，畫補助線，再利用直角三角形的全等定理，說明對應的底角相等，這的確是嚴格的推理，但是這個體系太龐大，對小學生太困難。因此這也不是適合小學生的簡單推理。
   - 換句話說，我們想要找到一種說法，整合學生對等腰三角形的認識，再想辦法說明這個規律，或許不是最嚴格，但是很合理，而且絕對不是靠實測。

   (2) 簡單推理怎麼做：我們可以運用的是學生熟悉的等腰三角形特性──等腰三角形是一個線對稱圖形 (S-5-4)(或者是一個簡單摺紙可得的圖形)，線對稱是一個強大的性質，學生從利用線對稱畫三角形的經驗裡，可以想像所有等腰三角形應該都是線對稱圖形 (當然這個直觀並不嚴格)。

   - 簡單推理：已知的前提是「等腰三角形是線對稱圖形」。畫出等腰三角形的對稱軸，由於底角正好是對稱角，但是「線對稱圖形的對稱角相等」，因此兩個底角就相等。這是一個一步的推理 (如下)，所以是簡單推理。

     線對稱圖形的對稱角相等

     等腰三角形是線對稱圖形 ──────────────────> 兩底角相等。

   注意：上式是寫給老師的說明，學生完全不需要寫這種式子。

2. 第二類簡單推理──計算式推理。

「如果等腰三角形的頂角是40°，底角是幾度？」

在小學時，學生更適合做這種計算式的簡單推理。首先學生需要理解兩個性質：「三角形內角和是180°」和「等腰三角形兩底角相等」，接下來學生以熟悉的數與量計算來協助推理（計算其實是一種精鍊的推理）。

說明：因為「三角形內角和是180°」，所以兩底角的和是$180° - 40° = 140°$，

但是「等腰三角形兩底角相等」，因此底角是$140° \div 2 = 70°$。

評量

評量重點：

1. 知道三角形三內角和為 180 度。
2. 知道三角形任意兩邊和大於第三邊。
3. 知道平行四邊形的對邊相等、對角相等。
4. 能做簡單的推理，如四邊形四內角和為 360 度。

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 **備註：**計算面積的問題，若採用分數或小數之邊長與高，必須在分數和小數的乘法後教學（N-5-5、N-5-8）。	s-III-1

先備：S-3-4、S-4-3、S-4-5、S-4-7、S-4-8。

連結：N-5-5、N-5-8、S-5-4、R-5-3。

後續：S-6-4。

基本說明

1. 運用 S-3-4 圖形分割活動的經驗以及 S-4-3 長(正)方形面積的學習，可以推導出平面圖形面積的求法，進而建立簡單平面圖形的面積公式。
2. 平面圖形的面積公式，應至少包括

三角形面積 = 底×高÷2，

平行四邊形面積 = 底×高，

梯形面積 = (上底 + 下底) ×高÷2。

只要圖形上標記清楚，這些公式也可以用符號來表示（R-5-3）。

3. 教師討論面積的公式時，應主動討論學生很容易忽略的情況，至少在三角形和平行四邊形時，應討論各種「高」的取法，避免學生認為高的端點一定或落在圖形的邊上。

條目範圍

1. 如果面積的布題牽涉到分數與小數邊長(也包括公式中是否用乘以 $\frac{1}{2}$ 來取代除以 2),應注意 N-5-5 與 N-5-8 教學的安排順序。
2. 運用圖形分割方法,也可以討論菱形面積用對角線來計算的求法,但可不必寫成公式。
3. 若已學習線對稱,也可用來討論具線對稱性質的平面圖形如菱形的面積,但不必發展成公式。

評量

評量重點:

1. 理解三角形的面積公式與應用。
2. 理解平行四邊形的面積公式與應用。
3. 理解梯形的面積公式與應用。

S-5-3 扇形:扇形的定義。「圓心角」。扇形可視為圓的一部分。將扇形與分數結合(幾分之幾圓)。能畫出指定扇形。 **備註:**扇形含圓心角大於 180 度的情況。理解如「圓心角 90 度的扇形是 $\frac{1}{4}$ 圓」等的結論。畫出指定扇形包括「給定一圓,能畫出 $\frac{1}{3}$ 圓、$\frac{1}{6}$ 圓等扇形」、「畫出指定半徑與圓心角的扇形」。	s-III-2

先備:S-3-3、N-4-1、S-4-1。

後續:S-6-3。

基本說明

1. 扇形是牽涉到圓(S-3-3)的平面圖形。初步認識扇形,應將將扇形放在圓中表示,讓學生知道扇形的頂點是圓心;扇形的弧必須是圓弧的一部份;圓心角的兩邊因為是半徑,因此必須等長。
2. 建立扇形與「幾分之幾圓」連結,其中幾分之幾和圓心角相關。例如圓心角 90 度的扇形是 $\frac{1}{4}$ 圓,圓心角 180 度的扇形是 $\frac{1}{2}$ 圓等等。也應包括簡單的換算,如 $45\div360=\frac{1}{8}$,所以圓心角 45 度的圓是 $\frac{1}{8}$ 圓。$\frac{1}{3}$ 圓的圓心角是 $360\times\frac{1}{3}=120$ 度(或 $360\div3=120$ 度)。
3. 能用直尺、量角器、圓規畫出指定半徑和圓心角的扇形;也能畫出指定半徑和幾分之幾圓的扇形。

條目範圍

1. 注意學生可能的錯誤認知,圓心角的大小和扇形的大小是不同的概念。
2. 教師也要處理圓心角大於 180 度的扇形。

3. 扇形的作圖應至少包含 $\frac{1}{3}$ 圓、$\frac{1}{6}$ 圓、$\frac{1}{12}$ 圓。若單純畫扇形比較困難，教師可建議先畫一個圓，再從圓開始畫出指定扇形。

釋例

檢查圖形是否扇形的方法。

例 1：「下面的三個圖形都是扇形嗎？」

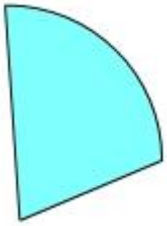


圖 1

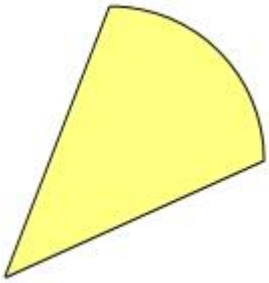


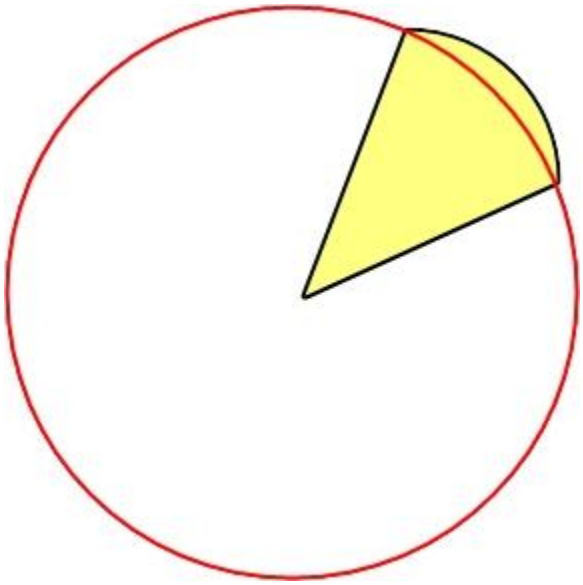
圖 2

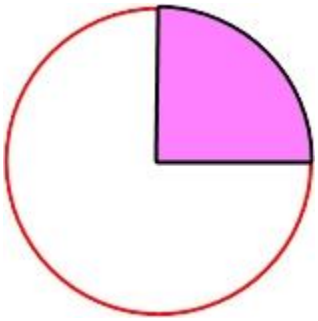
圖 3

有些學生會覺得這些圖形都是扇形，教師先確認學生理解扇形的特徵：「扇形是圓的一部份，其頂點在圓心，且其兩邊就是半徑」，由此可知「扇形的兩直邊必定等長」。

- 圖 1：圖形兩直線邊不一樣長，所以圖 1 不是扇形。
- 圖 2：兩直線邊等長，以頂點為圓心，直邊長為半徑畫圓（如下左圖），發現此圖形之曲線邊部分和圓弧不同，因此不是扇形。

  註：由於只是檢查圓弧和曲線是否重疊，因此也可只用圓規畫部份圓弧比較即可。





- 圖 3：同上，以頂點為圓心，直線邊長為半徑作圓（上右圖），完全重疊，因此圖 3 是扇形。

錯誤類型

1. 學生常以為半圓 ($\frac{1}{2}$ 圓) 以及圓心角大於 180 度的扇形不是扇形。老師帶著學生仔細檢查這些圖形是不是都滿足扇形的特徵，檢查它們的圓心角。
2. 學生有時會弄混圓心角大小和扇形大小 (意指面積大小)。教師可以給學生看實例，有些扇形圓心角小但面積很大，有些扇形圓心角大但面積很小。

評量

評量重點：

1. 知道扇形的構成要素，並知道扇形是某圓的一部分。
2. 理解「圓心角」的意義。
3. 理解「幾分之幾圓」的意義，理解前述「幾分之幾」和圓心角之間的關係。
4. 能畫出指定半徑與圓心角的扇形。

S-5-4 線對稱：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。 **備註：**從操作活動察覺正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形 (箏形指圖形，名詞不出現)、等腰梯形是線對稱圖形 (避免告知)。在教學呈現時，線對稱軸應為垂直或平行 (操作活動不在此限) 。可處理正多邊形。	s-III-6

先備：S-4-5、S-4-6、S-4-7、S-4-8。

連結：S-5-1。

後續：S-7-4、S-7-5。

基本說明

1. 從具體活動 (如剪紙、摺紙) 中學習辨識線對稱圖形的特徵，認識「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」的意義，並理解對稱軸兩側的圖形 (圖案) 全等，對應邊相等、對應角相等。
2. 學生能察覺部分簡單平面圖形是線對稱圖形，並說明為何如此。具線對稱的圖形包括圓、正三角形、等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形、等腰梯形等，其中箏形、等腰梯形並不需要命名，學生在活動中認識即可。
3. 給定對稱軸，學生應能繪製或製作線對稱圖形。知道在給定簡單平面圖形時，可以畫出對一對稱軸的線對稱圖形。初學繪製線對稱圖形，宜有格圖在背景，其中一格線為對稱軸。
4. 學生學習用線對稱來進行推理，例如「等腰三角形的兩底角必相等」。「對稱點的連線必和對稱軸垂直。」

5. 在線對稱教學中可以自然引入正多邊形（例如正六邊形），觀察其對稱軸，並由此知道正多邊形的各邊相等、各角相等。

條目範圍

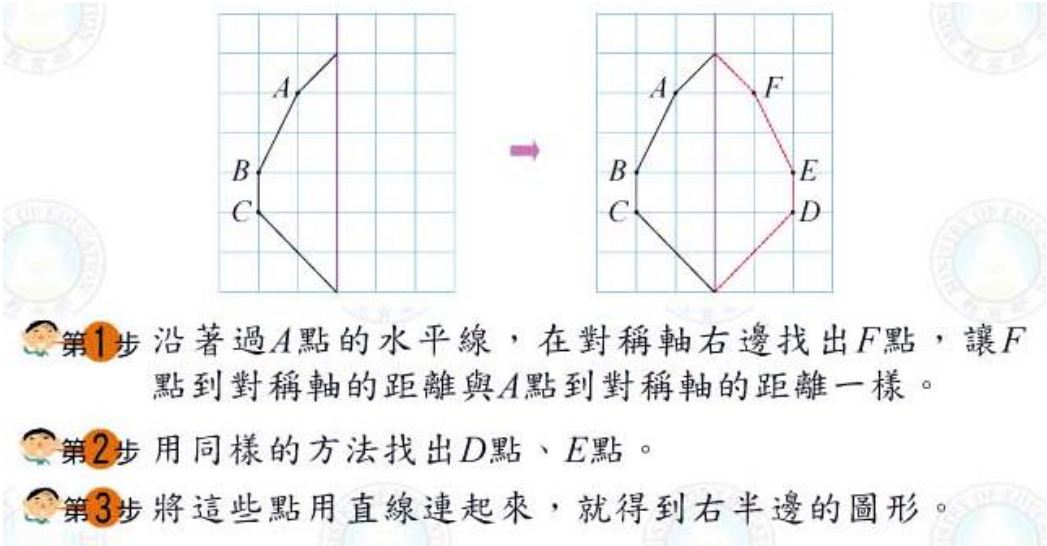
1. 建議教學或教科書呈現線對稱圖形時，線對稱軸至少有一為垂直或平行，操作活動不在此限。
2. 應留心兩圖形互為線對稱，和一圖形是線對稱圖形的區別。兩種活動都進行。檢查是否線對稱圖形，基本上只用摺紙的方法。
3. 教學活動應包括多對稱軸的圖形（如正多邊形），並用此來進行不同角度的觀察與推理。正多邊形不需獨立單元教學，小學的正多邊形活動盡量只限於正五邊形、正六邊形、正八邊形。(S-6-3 圓面積推導不在此限。)

釋例

畫線對稱圖形。

由於學生初學線對稱，建議作圖時，對稱軸應為水平或鉛直，且最好有格圖在背景引導學生正確作圖。

例：「這個圖形是一個以紫線為對稱軸的圖形的左半邊，根據提示的步驟畫出右半邊的圖形」(《部編本》第九冊 p.103)



錯誤類型

有些教師會提出對稱軸為斜線的較難作圖問題，這時學生在指認對稱點，會出現位置不對的各種錯誤。教師可以提醒將對稱軸轉正（水平或垂直），請學生積極檢討發生錯誤的原因。

評量

評量重點：

1. 理解線對稱的意義並能做簡單推理。
2. 知道特殊三角形與特殊四邊形的線對稱性質。
3. 知道圓與正多邊形是線對稱圖形。

S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。 **備註：**能算長方體的表面積，但不記成公式。	s-III-4

先備：N-4-12。

連結：N-5-14、N-5-15、R-5-3。

後續：S-6-4。

基本說明

1. 在 N-4-12 中，學生已理解如何點數積木來計算體積。本條目則開始學習常見立體形體的體積，先從最簡單的正方體與長方體開始，在整數邊長的情況，巧妙利用堆疊的過程，學習如何以乘法快速計算體積，並得到如下公式：

   正方體體積 = 邊長×邊長×邊長，

   長方體體積 = 長×寬×高。

   若有圖形約定，也可用符號表示公式（R-5-3）。
2. 在實際操作過正方體和長方體模型（或檢視展開圖），學生可用正方形和長方形的面積公式，計算出正方體和長方體的表面積。學生應觀察出這些圖形的對稱特性，用以簡化計算。例如正方體表面積是一面面積的 6 倍，長方體的相對兩面面積相等，以及討論長方體有相對兩面為正方形的情形。但表面積的算法不需要記成公式。
3. 教師可提供長方體與正方體組成的簡單複合形體，讓學生能應用所學，學習計算複合形體的體積。本活動以體積計算為主，若要探索表面積問題，其限制見條目範圍 4.。

條目範圍

1. 在教學示範時，只使用整數邊長。但公式可泛用於邊長為分數和小數的狀況（不需解釋），只是因為牽涉三步驟計算，本年度建議仍盡量少用，並結合部分整數邊長為宜。
2. 表面積本身已有複合特性，建議不記成公式。
3. 處理複合形體時，教師務必先充分進行實體活動之後，才能進行教學與紙筆評量，且以體積為限，不做表面積。
4. 因為表面積本身已有複合特性，因此計算一般複合形體的表面積會太過繁複，建議若要做

複合形體表面積，應以兩個形體複合為限，讓學生理解複合形體表面積的意義，並學習如何分析與發展計算策略即可。

5. 進行複合形體的書面習作或紙筆評量前，應確認學生已理解以紙面呈現立體圖形的意義與約定。

評量

1. 評量重點：
   (1) 能計算正方體和長方體的體積。
   (2) 能計算正方體和長方體的表面積。
   (3) 能計算簡單複合形體的體積。
2. 評量注意事項：
   複合形體之布題牽涉到圖形的繪製，教師應避免繪製方式造成誤解。(條目範圍 5.)

S-5-6 空間中面與面的關係：以操作活動為主。生活中面與面平行或垂直的現象。正方體 (長方體) 中面與面的平行或垂直關係。用正方體 (長方體) 檢查面與面的平行與垂直。 **備註：**強調操作與概念的合理性，不做嚴格定義。不用三角板檢查面與面的垂直，因為學生容易誤用。	s-III-3

先備：S-3-4。

連結：S-5-5、S-5-7。

後續：S-6-4。

基本說明

1. 人類生活於三維空間中，因此理應熟悉空間概念。但是空間幾何若嚴格數學化，其題材比平面圖形困難抽象許多，因此小學的空間幾何活動首重實體操作活動與技巧，從活動與常識去認識概念的合理性，建立由操作中得來的經驗，並以容易使用的輔具協助學生掌握概念，不需執著於抽象的定義。
2. 除了生活中的平行和垂直現象之外 (如教室的天花板、地板、牆壁)，小學最重要的立體測量工具是長方體或正方體 (例如 1 立方公分積木)，因為長方體的任何一對對面都互相平行，任何鄰面都互相垂直。學生應學習如何用長方體去檢查兩面是否垂直，並知道若兩面不垂直，檢查時會發生什麼狀況。
3. 面的平行雖然不好檢查，但教師可安排恰當活動，以長方體 (或其堆疊) 來檢查兩面是否平行。學生應延伸長方體的例子 (以直觀) 掌握一些平行的性質，例如若兩面看起來相對斜斜的、延伸會相交，就不是平行；平行兩面看起來「距離」都一樣。另外，釋例也提供

一個檢查平行的方法，可以檢查「柱體」上下面平行的方法。

4. 教師上課務必使用實體模型，光從平面視圖完全無法判斷面與面的垂直或平行，反而混亂學生的理解。

條目範圍

1. 教科書不需執著於「證明」正方體或長方體各面的平行或垂直特性，反而應從正方體或長方體認識何謂空間中面的平行與垂直，並以此為工具，去檢查其他立體形體的平行與垂直特性。
2. 若要使用三角板來檢查面的垂直，應至少檢查三個不同方向，或用掃動的方式檢查。但因為操作較困難，建議還是使用長方體較簡單。

釋例

1. 以正方體或長方體的各面關係，認識空間中兩平面垂直與兩面平行的基本現象，並可用此為工具，協助測量面的垂直與平行性質。

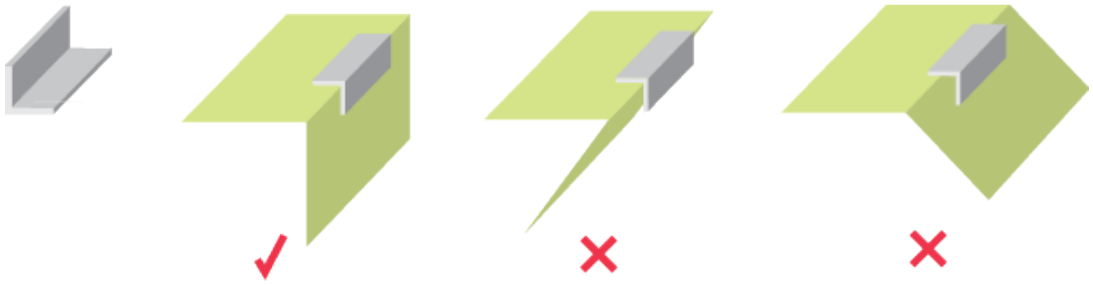
(《部編本》第 9 冊 p.20)

2. 面與面的垂直：

(1) 用長方體檢查兩面是否垂直：

(《部編本》第 9 冊 p.21)

(2) 用「角鋼」(長方體的一部份，下圖最左邊) 來檢查垂直的方法：



最右邊兩圖因為無法貼合角鋼，所以彼此互不垂直。

3. 面與面的平行。

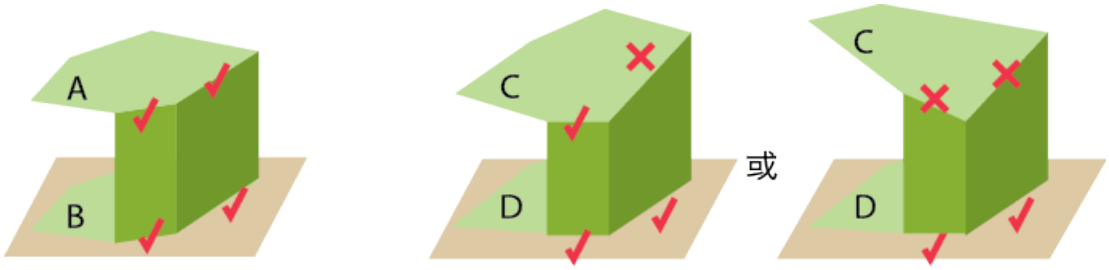
(1) 利用長方體的平行特性，檢查平行。

左邊的綠色立體形體底面貼地面，頂面和三個長方體的疊合的頂面在同一高度 (想像如右圖有一平面正好貼合)，則頂面和底面平行。

(2) 用面的垂直檢查平行。這裡的原理不適合小學生，只要釐清常見誤解，並提供可運用於柱體的方法即可。(參考資料請見下方附錄)

- 常見誤解：以為和直線一樣，若兩面同時垂直一面則此兩面平行，這是錯誤的。一般人的想像是下左圖 (打勾表示垂直)，但下右圖的長方體是簡單的反例，C 面和 D 面同時垂直於頂面，但彼此並不平行 (甚至還垂直)。

- 用垂直檢查兩面平行的方法稍微複雜一點（下左圖）：假設有相鄰兩面，同時垂直於 B 面（或 B 面貼合的地面），如果這兩面也同時垂直於 A 面，則 A 面和 B 面平行。注意：要檢查 4 個垂直。下右圖，雖然相鄰兩面和 D 面垂直，但是 C 面至少和其中一面不垂直，則 C 面和 D 面不平行。



A面和B面平行　　C面和D面不平行

- 先讓學生在長方體的情況運用這個方法，看看是不是和「相對兩面平行」一致。
- 利用這個方法就可以決定柱體的上下兩面是否平行（其中圓柱體檢查垂直時，只要確認度量用的長方體或角鋼能貼合其高即可）。
- 教師上課務必使用實體模型，光從平面視圖完全無法判斷面與面的垂直或平行，反而混亂學生的理解。

評量

評量重點：

1. 知道正方體（長方體）中面與面的平行或垂直關係。
2. 能用正方體（長方體）檢查面與面的平行與垂直。（實作評量）

附錄

兩面平行：

- 在高中使用向量之前，兩面平行最簡單的定義是「若兩面同時垂直於一線，則兩面平行。」
- 但是小學未教「線與面的垂直」，退而求其次，只考慮「面與面的垂直」則可這樣定義：「若有相交兩面，同時皆與 A 面和 B 面垂直，則 A 面和 B 面平行。」
  注意：此時相交兩面的交線就是同時垂直於 A 面和 B 面的直線。
- 但是在小學課堂並不需要談「兩面平行」的定義，在課堂呈現太多相交平面也太複雜不易操作，因此我們把檢查的方法限縮成內文適合柱體使用的情況。這時「相鄰兩面」由於必然相交，取代了「相交兩面」。
  注意：若不加入「相鄰」的條件，這個方法是錯的。

S-5-7 球、柱體與錐體：以操作活動為主。認識球、（直）圓柱、（直）角柱、（直）角錐、（直）圓錐。認識柱體和錐體之構成要素與展開圖。檢查柱體兩底面平行；檢查柱體側面和底面垂直，錐體側面和底面不垂直。 **備註：**應知球的截面截痕是圓、球的球心與半徑(「截面」「截痕」一詞不出現)。「直」或「正」之用語可不出現。角柱只介紹三角柱、四角柱、五角柱、六角柱。角錐只介紹三角錐、四角錐、五角錐、六角錐（S-9-13）。	s-III-3

先備：S-3-3、S-3-4、S-4-7、S-4-8。

連結：S-5-2、S-5-4、S-5-6。

後續：S-6-4。

基本說明

1. 本條目讓學生認識更多立體形體（包括首次認識有彎曲「面」的立體形體），教學應以操作活動為主，認識這些立體形體的各種幾何特徵與名稱，不牽涉量的計算。小學所談的圓柱、角柱、圓錐皆為直圓柱、直角柱、直圓錐。角錐則只處理正（直）角錐（即底為正多邊形且多邊形中心與角錐頂點連線垂直於底面的情況，可含正五邊形、正六邊形）。
2. 球雖然是常見的立體形體，但操作起來並不簡單。建議由教師以恰當的教具操作示範。學生應認識球有球心、半徑（球面一點到球心的距離），且過球心之任何截面的截痕都是以球心為圓心，球的半徑長為圓的半徑長所成的圓。另外學生也應知道，球的任何截面截痕都是圓，但半徑不一定等於球半徑。
3. 除了實際接觸立體形體，認識其特徵之外，也可利用 S-3-4 的展開圖經驗協助理解立體圖形的構成要素，能從立體形體展開成展開圖，也能從展開圖黏貼出立體形體。
4. 認識柱體都有上下兩個全等的底面，側面和底面垂直。(直）角柱的底面是三角形、四邊形甚至多邊形，側面則為長方形。(直）圓柱的底面是圓，若剪開成展開圖，可發現側面是一長方形。至於圓柱的側面和底面的「垂直」雖不嚴格定義，但教師可利用合理的說法讓學生接受。
5. 認識錐體都有一底面，而上方則有一頂點。錐體側面和底面不垂直。(直）圓錐的底面是圓，頂點在圓心的正上方（不必嚴格說明），若剪開成展開圖，可發現側面是一扇形。(正）角錐的底面是正多邊形（S-5-4），頂點在正多邊形中心的正上方，側面則是等腰三角形。

條目範圍

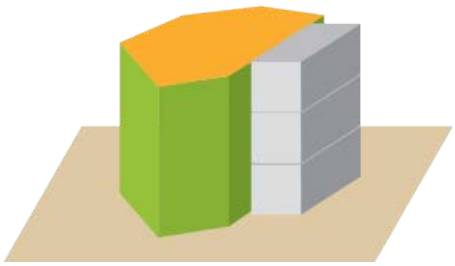
1. 小學的立體形體只處理最「端正」的形體，在活動或課本中都不需加上「直」或「正」的名稱。
2. 角柱的底面原則只處理三角形和四邊形。角錐的底面限正多邊形且邊數小於七。其餘都屬於探索範圍，不列入評量。

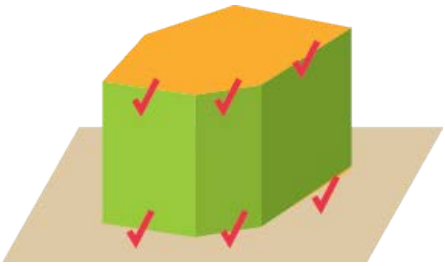
3. 歐拉數和本條目目標較無關係，只適合作為延伸探索之用。

釋例

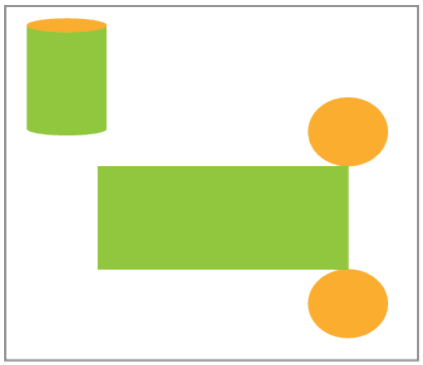
1. 檢查柱體的側面和兩底面垂直以及上下底面平行。運用 S-5-6 的方法，用長方體或「角鋼」可以簡單檢查柱體的側面和上下兩底垂直，其中若用長方體檢查頂面的垂直特性時，可能將柱體上下顛倒比較方便。

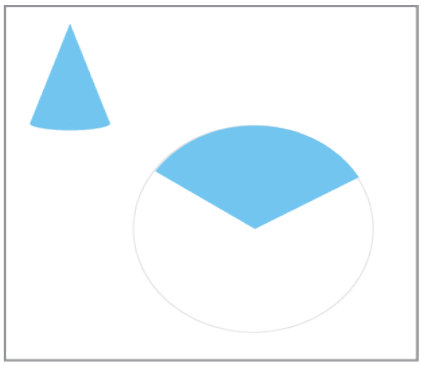
   至於上下底面的平行，已經在 S-5-6 說明，可以用下左圖的堆疊方式檢查，或者如下右圖，利用兩側面和上下底接垂直的檢查，說明上下兩底平行。



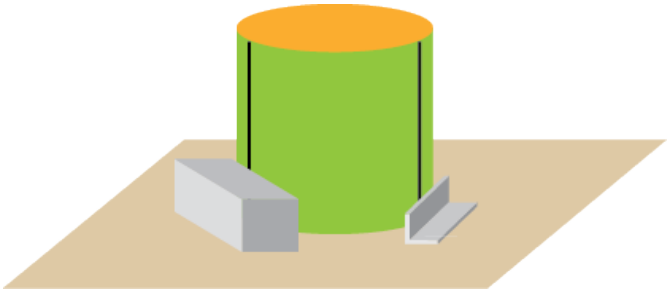


2. 小心剪開圓柱體和圓錐體，其展開圖如下。由此可知，圓柱體的上下底面是圓，側面展開則是一長方形，其長與寬分別是底圓的圓周長和高。而仔細檢查圓錐的展開圖，可知道是一個扇形，扇形弧長是底圓的圓周長，半徑則是側邊長（教師參考：即把圓錐側面想成旋轉面時的母線長）。





3. 圓柱體側面與底面垂直是事實，但不容易檢查。教師可以告知，長方體或角鋼和圓柱體靠在一起時，會緊密貼緊在一條高上，因此側面與底面垂直，而且因為側面與上下底面在多處垂直（不同的高），因此上下底面平行。



評量

評量重點：

1. 知道球的球心、半徑和直徑，球的截面是圓。
2. 知道圓柱和角柱之構成要素與展開圖，以及柱體各面之平行與垂直關係。
3. 知道角錐和圓錐之構成要素與展開圖。知道錐體側面和底面不垂直。

R-5-1 三步驟問題併式：建立將計算步驟併式的習慣，以三步驟為主。介紹「平均」。與分配律連結。 **備註：**學習併式不表示此後所有解題教學都必須併式（N-6-9）。	r-III-1

先備：R-4-1。

連結：R-5-2。

後續：N-6-5。

基本說明

1. 併式的能力是國中學習代數的重要基礎，本年持續 R-4-1 的兩步驟併式學習，學習將各種四則運算三步驟問題的計算步驟併為一式，其中會用到混合計算的約定（R-4-1）。
2. 本條目的重點在於持續學習併式，因此只要處理簡單的三步驟問題即可。但應包含兩類問題：(a)平均問題：平均是處理資料時常見的運算，處理平均問題時也不妨處理超過三筆以上的資料，重點在於熟悉平均的計算與併式。(b)處理和分配律相關的問題。（R-5-2）。

條目範圍

1. 本年度教師可在簡單問題（學生能在心中順暢安排計算順序的簡單問題），鼓勵學生盡量在列式時直接列成一式，並利用整數四則運算的性質來簡化計算，這是學習國中代數的重要前置經驗。當然在解決複雜或困難問題時，分散計算步驟以確定每一步驟的意義與成立是常態，因此學習直接併式的重點在於有能力併式，而非一味要求所有問題的計算步驟一定要併式（N-6-9 的問題就不適合）。
2. 嚴格符合混合計算的約定並非必要，請以 R-4-1 基本說明(1)的精神為原則，鼓勵學生使用。

錯誤類型

多步驟問題在併式或解題時，學生忽略括號（但心中有括號），教師應指出如此將不利於表達與溝通。

評量

評量重點：

1. 能做三步驟問題的併式。

2. 能做「平均」問題的併式。

R-5-2 四則計算規律（Ⅱ）：乘除混合計算。「乘法對加法或減法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。 **備註：**乘除混合：含「連除兩數等於除以兩數之積」；不做$a \div (b \div c)$之去括號。必須呈現以下原則的範例：將應用問題轉化成算式後，再利用計算規律調整算式進行計算解題（其中調整後的算式已無法以原情境來解釋）。	r-III-1

先備：R-4-1、R-4-2。

連結：R-5-1。

後續：N-6-5、R-6-1。

基本說明

1. 關於完整的四則運算教學，請務必參看 R-4-2 基本說明 2.，其中應包含「關於計算規律為何正確的說明與應用」、「純數字的規律練習」、「超越情境的應用」。
2. 本年度的計算規律學習，應包含「連除兩數等於除以兩數之積」、「連除兩數的順序交換結果不變」、「乘法對加法和減法的分配律」。

條目範圍

1. 四則運算規律之教學應以整數進行，除法必須整除。
2. 分數與小數部分要等學生更理解分數與小數之四則運算後再進行，見 N-6-5、R-6-1。
3. 不做 $a \div (b \div c) = a \div b \times c$。

釋例

延續四年級 R-4-2 四則計算規律(Ⅰ)的學習，本年度四則計算規律(Ⅱ)的學習範圍，包含：

- 連除兩數等於除以兩數之積。
- 連除兩數的順序交換結果不變。
- 乘法對加法的分配律。
- 乘法對減法的分配律。

底下各例說明這些規律，提醒先算、後算步驟，但只紀錄併式後的結果。

(1) 例 1：「240 個蘋果包裝成禮盒，每盒裝 8 個蘋果。再將這些禮盒每 6 盒裝成 1 箱，共可裝成幾箱？」

做法 1：先算 240 個蘋果可裝成幾盒，再算可裝成幾箱：

240÷8÷6=30÷6=5。

做法 2：先算 1 箱可裝幾個蘋果，再算 240 個蘋果可裝幾箱。

240÷(8×6)=240÷48=5。

由此可知：「連除兩數等於除以兩數之積」。

● 應用規律的練習：如「300÷4÷25」、「370÷5÷2」、「444÷(4×3)」、「357÷(7×17)」等。

(2) 例 2：「240 個蘋果包裝成禮盒，每盒裝 8 個蘋果，再將這些禮盒平分裝在 5 個箱子裡，1 個箱子裝幾個禮盒？」

做法 1：先算 240 個蘋果可裝成幾盒，再平分裝在 5 箱裡：

240÷8÷5=30÷5=6。

做法 2：先算 240 個蘋果，1 箱可裝幾個蘋果，再算能裝成幾盒。

240÷5÷8=48÷8=6。

由此可知：「連除兩數的順序交換結果不變」。

● 應用規律的練習：如「444÷3÷4」、「357÷17÷7」等。

(3) 例 3：「1 盒綜合麻糬裝有 6 個紅豆口味和 3 個花生口味，1 個麻糬 15 元，媽媽買 1 盒綜合麻糬要多少元？」

做法 1：先算 1 盒有幾個麻糬，再算總共要多少元？

15×(6+3)=15×9=135。

做法 2：先算 6 個紅豆麻糬多少元，再算 3 個花生麻糬多少元，後算總共多少元。

15×6+15×3=90+45=135。

由此可知「乘法對加法的分配律」(專有名詞不用出現)。

15×(6+3)=15×6+15×3。

15×6+15×3=15×(6+3)。

● 應用規律的練習：如「18×6+18×4」，

46×9+46=46×9+46×1=46×10=460。

25×(9+5)=25×(10+4)=250+100=350。

(4) 例 4：「一節火車車廂有 52 個座位，甲列車有 12 節車廂，乙列車有 10 節車廂，甲列車比乙列車多幾個座位？」

做法 1：先算甲車比乙車多幾節車廂，再算相差座位數。

52×(12−10)=52×2=104。

做法 2：先算甲車的座位數，再算乙車的座位數，後算相差座位數。

52×12−52×10=624−520=104。

由此可知「乘法對減法的分配律」(專有名詞不用出現)

52×(12−10)= 52×12−52×10。

52×12−52×10=52×(12−10)。

● 應用規律的練習：如「18×13−18×3」，

46×11−46=46×11−46×1=46×10=460。

25×(11−7)=25×(10−4)=250−100=150。

(5) 從乘法交換律，當然學生也得知另一方向的「乘法對加法的分配律」或「乘法對減法的分配律」也是正確的。《部編本》有下面的參考釋例：

（《部》第九冊課本 P.92）

評量

評量重點：

1. 理解乘除混合計算之計算規律，含「連除兩數等於除以兩數之積」，但不做$a \div (b \div c)$之去括號。
2. 理解乘法對加法或減法的分配律。
3. 能應用計算規律解決應用問題。
4. 於應用計算規律簡化計算。

R-5-3 以符號表示數學公式：國中代數的前置經驗。初步體驗符號之使用，隱含「符號代表數」、「符號與運算符號的結合」的經驗。應併入其他教學活動。 **備註：**藉由幾何圖形的面積與體積公式較易進行。也可在分數乘法中運用。本條目並非取代「文字表示公式」（R-4-3），後者較易理解之優點仍可保持。	r-III-3

先備：R-4-3。

後續：R-6-3。

基本說明

1. 用符號表示數學公式是日後學習國中代數，甚至其他數學課程的前置經驗。在代數學習中所預設的「用符號代表數」、「符號與運算符號的結合」，都可透過具體的公式，在本條目學習到這些前置體驗。例如在解說完平行四邊形面積的求法，並提供圖形，標出一邊長為 a，邊上之高為 h 之後，說明平行四邊形面積公式可以表示成 a×h。
2. 符號公式較抽象，教師需先透過教學活動，讓學生理解公式所欲表達的概念內容，然後再藉應用公式解題，以保證學生確實理解公式。若公式所用符號有參考性的意義（宛如文字公式），也能提高學生的理解。

條目範圍

1. 本條目應合併其他單元教學。
2. 本條目並未規定五年級所有公式皆用符號表示，以「文字表示公式」仍有易於理解的優點，教師應斟酌內容之難易，學生之接受狀況來進行教學。
3. 教師勿直接告知學生公式。而是等學生充分理解所討論的內容後（如面積、體積、分數乘法等），教師再用符號公式來記錄。學生不需進行把公式用符號表示之活動，更不可評量。

評量

評量重點：

能理解與應用以符號所表示之簡單公式。

D-5-1 製作折線圖：製作生活中的折線圖。 **備註：**分辨折線圖之使用時機。	d-III-1

先備：D-4-1。

後續：D-6-1。

基本說明

1. 學生已在四年級學習報讀折線圖，理解折線圖之使用時機（D-4-1），並知道統計圖之基本元件。本年由教師安排活動，讓學生將蒐集之資料製作成折線圖。

2. 同 D-4-1，製作統計圖的重要目的是與他人溝通，在小學雖然不需依從制式的約定，但仍應清楚標示出統計圖之基本元件：統計圖名稱、不同軸的意義與標示、數量軸運用的單位、代表變化之折線，若有需要，也可畫出代表省略的波浪線等。

條目範圍

1. 教師應注意活動之內容必須適合使用折線圖來表示。本活動不妨安排於下學期，讓學生蒐集半年之變化資料。
2. 容許學生將長條圖和折線圖混合表示，這是常見的表示。
3. 學生會製作折線圖後，教師可以結合學生資訊電腦相關課程或能力，學習透過學校常用軟體製作折線圖，其中包括設定折線圖之基本元件如分類組別、數量、圖表名稱、兩軸單位與說明。

錯誤類型

有時學生會忽略數值為 0 的變項。教師告訴學生，數值為 0 的資料仍然是重要的溝通資訊，必須呈現在統計圖上。在折線圖的情況尤然。

評量

評量重點：

能製作簡單折線圖。

6 年級學習內容解析

N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。 **備註：**被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91 之外，只能是 11、13、17 或 19。	n-III-3

先備：N-5-3。

連結：N-6-2。

後續：N-7-1、N-7-2、N-7-6。

基本說明

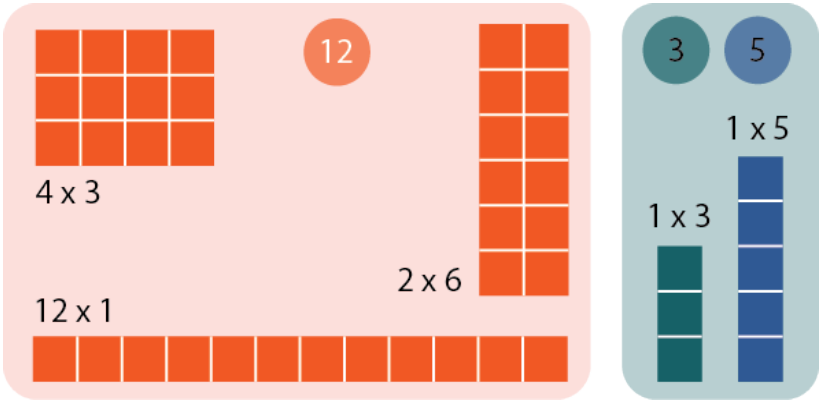
1. 一個大於 1 的整數的因數如果只有 1 與自己，稱為質數。大於 1 且不是質數的整數稱為合數。在 N-5-3 教學中，學生應已發現若 1 不計在內，有些整數只有一個因數（自己），而有些整數有兩個以上的因數。前者就是質數，後者就是合數。在本年的教學中，學生應熟悉 20 以內的質數；熟悉 2、3、5、7、11、13、17、19 在 100 以內的倍數（即與這些質數相關的合數）。
2. 2、3、5 的質因數判別法。其中 2 和 5 應已在 R-4-4 中觀察出基本模式，此處可要求學生說明觀察的規律，並做結論。教師可告知 3 的質因數判別法，並熟練使用。
3. 使用乘法以樹狀圖學習因數分解的記法。在過程發現遇到質數就會停止；察覺分解的模式，發現不管怎麼分解，除了順序之外，形式都一樣。
4. 將上述質因數分解的經驗整合為常用的短除法算則。可在簡單數字情況，說明 3. 和短除法的關係（見釋例）。

條目範圍

1. 為了符合質數小於 20 的限定，本條目被分解數的因數，在扣除 2、3、5 或其次方的部分後、只剩一因數，且此數除了 49、77 或 91（100 以內 7 比較不熟悉的倍數）之外，只能是 11、13、17 或 19。（N-7-1、N-7-2）
2. 被分解數原則上小於 100。（N-7-1、N-7-2）。但在不違反 1. 的約定下，可延伸至 200 以內，但不大於 200。
3. 因數分解（含短除法）在計算過程中，不要求從質因數小的開始做。但在記錄成因數分解的結果時，則鼓勵學生將結果依質因數大小，從小到大排列，以利比較。
4. 小學無指數符號，不要求因數分解以指數表示。（N-7-6）
5. 不討論 1 是質數或合數的問題。

釋例

1. 「12 個方格可以排成幾種長方形？3 個方格呢？5 個方格呢？」

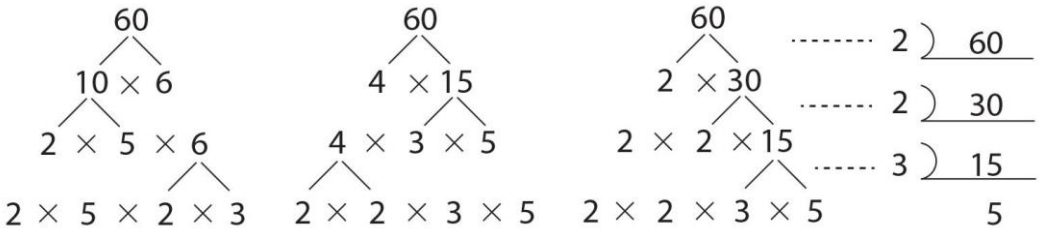


延續 N-5-3 釋例的活動，將一個數有多種排法的數稱為「合數」。只有一種排法的數，稱為「質數」(這裡的排法把長、寬對調視為相同)。在上例中 12 是合數，有因數 1、2、3、4、6、12。而 3 和 5 則是質數，他們的因數只有 1 和自己。

2. 質因數分解和短除法：

例：「60 的質因數分解。」

底下是 60 分解的幾個例子，教師讓學生在這樣的嘗試中，學習將 60 不斷分解成因數相乘，最後停在所有分解數都是質數的狀態。請學生討論大家所發現的分解，是不是除了順序之外，形式都一樣。



上圖最右邊，同時展示了以短除法紀錄第三種分解的方式。雖然並非必要，但教師可鼓勵學生從小到大排列質因數分解中質數的順序，以利於溝通與比較。

這個活動可以讓學生熟悉 2、3、5 的質因數判斷法；學習記錄質因數由小到大的乘積；發現不論分解的途徑如何，質因數分解都是一樣的。本例牽涉到本條目的各種目標，應在被分解數 100 的範圍內，多做各種練習。

錯誤類型

1. 將 1 混在因數分解中。這並不是原理上的錯誤，而是形式上簡化的要求，教師在指出錯誤時應小心說明理由。
2. 有些學生誤以為 28=4×7 就是 28 的質因數分解。教師應引導學生比較 28=4×7 和 28=2×2×7 這兩個分解有什麼差異，並留意哪個分解還有合數存在。

評量

評量重點：

1. 能分辨一數是質數還是合數。

2. 能判斷一數是否有 2、3、5 的質因數。
3. 在約定範圍內，能用樹狀分解（乘法分解）與短除法寫出一數的質因數分解。

N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。 **備註：**不做三數的最大公因數與最小公倍數。應包含練習將分數化成最簡分數的問題。	n-III-3

先備：N-5-3。

連結：N-6-1、N-6-3、N-6-5。

後續：N-7-2。

基本說明

1. 在 N-5-3 學生已學習最大公因數和最小公倍數的概念，本年度則以 N-6-1 短除法做質因數分解為基礎，學習用短除法求兩數的最大公因數和最小公倍數。
2. 短除法操作的過程，結束於無法再往下找到共同（質）因數的情況，這時的兩數稱為互質（除了 1 之外沒有公因數）。雖然同樣是短除法無法再往下做的情況，但應注意區分互質與質數不同。例如：20 與 21 雖然都是合數，但兩者互質。
3. 可以應用到分數的四則計算（N-6-3、N-6-5），例如（最小）公倍數和通分有關，學生也可將短除法的作法借用到約分，也應該知道分數可盡量化簡為最簡分數（分子分母互質的分數）。學生應知道分數如果用分子分母的最大公因數約分，就會得到最簡分數。
4. 雖然分數問題的答案不一定總要化成最簡分數，但是學生仍應體認把分數化簡之後，通常會增加對問題和其解答的理解，例如答案是 $\frac{78}{156}$ 公尺總不如 $\frac{1}{2}$ 公尺來的清楚，進行 $\frac{27}{54}+\frac{21}{63}$ 也不如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 來得明白。教師應有讓學生練習最簡分數的習題。
5. 學生應對質因數分解有一些基本的認識，例如一數質因數分解中的部分乘積也是該數的因數；兩數質因數分解的共同部分就是最大公因數。教師應舉例讓學生理解質因數分解法與短除法互為表裡，並用此讓學生理解最小公倍數取法的合理性。
6. 最大公因數和最小公倍數的概念雖然比較抽象，但教學上還是可以從與生活有關的問題入手：將兩條不同長的繩子，分割成等長的長度，且此長度最大；以固定的長方形為單位，拼貼成面積最小的正方形；找出面積最大的正方形磁磚，拼貼成給定的大長方形；兩不同週期的事件，同時開始後，需經過至少多久才會再度同時發生；將兩不同數量的水果，分裝成盡量多的水果盒，使得盒中水果的裝法都一樣等等。

條目範圍

1. 本條目被分解數大小的限制同 N-6-1。

2. 本條目限定做兩數的公因數和公倍數。(N-7-2)
3. 不要做從質因數分解找出該數所有因數的問題。

釋例

1. 連結「質因數分解法」與「短除法」的說明。(本項旨在協助教師說明)

(1) 例 1：求 30 和 42 的最大公因數

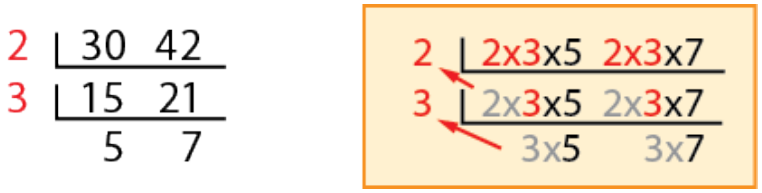
- 質因數分解法：

  30=2×3×5　　(=2×3×5)，

  42=2×3×7　　(=2×3×7)，

  所以，2×3=6 是最大公因數。

- 短除法：教師先教導短除法的直式計算，請學生盡量用心算找出兩數的公因數，除完後，再重複這些步驟 (如下圖左)，直到下面兩數找不出公因數 (互質) 為止，並說明最大公因數就是左邊數字的乘積。



- 兩者的關係：右邊的示意說明圖，旨在協助說明兩者的關係或短除法的原理。右圖並非必要教學內容，教師不必重複展示，更不可評量。

(2) 例 2：求 30 和 42 的最小公倍數。

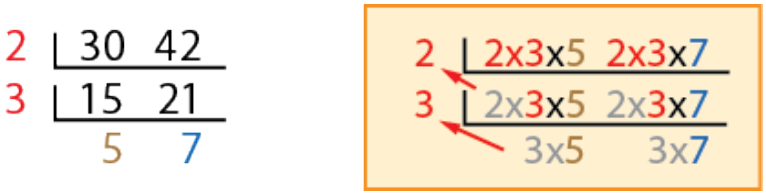
- 質因數分解法：

  30=2×3×5　　(=2×3×5)，

  42=2×3×7　　(=2×3×7)，

  所以，2×3×5×7=210 是最小公倍數公因數。

- 短除法：求最小公倍數的方法同前，最後說明最小公倍數是左邊數字和最下邊數字的乘積。



- 兩者的關係：同上，右邊的示意說明圖旨在協助教師說明兩者的關係。

2. 在應用問題中，有時問題問的不只是最大公因數或最小公倍數這類直接的結果，因此學生必須更理解題意和短除法中各數資訊的關係。

(1) 例 1：「班上有 16 個男生和 12 個女生分組玩遊戲，希望每組男生數一樣多，女生數也要一樣多，請問最多可分幾組？每組各有男生和女生多少人？」

說明：分組的組數因為整除 16 和 12，因此是 16 和 12 的公因數，題意問的是最多分幾組，因此是求最大公因數的問題。用短除法如下：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 16 & 12 \\ \hline 2 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & 3 \end{array}$$

最大公因數是 4，表示最多分成 4 組。此時每一組的男生數和女生數是：

男生數：16÷4=4，

女生數：12÷4=3，

仔細檢查短除法的計算，發現正好是短除法最下方一列的數字。

(2) 例 2：「長方形的長 16 cm，寬 12 cm，若想剪出邊長為整數公分的正方形且不能有剩餘，所剪的最大正方形邊長是多少公分？可剪出多少個正方形？」

說明：本題相當於對長邊和寬邊做等長的分割，而且必須整除，所以也是求最大公因數。其短除法如上，可得最大正方形的邊長為 4 公分，短除法最下方一列的資訊表示，16 公分的邊被分成 4 段、12 公分的邊被分成 3 段，所以此長方形，被分割成 4×3=12 個正方形。

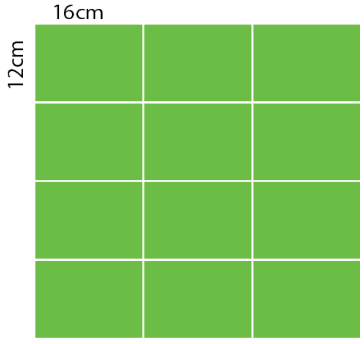
(3) 例 3：「長方形的長 16 cm，寬 12 cm，想用這樣的長方形排列成一個最小的正方形，問這個正方形的邊長是多少，總共用了多少個長方形？」本題需由教師說明排列的方式或做一類似下圖之示意圖。

說明:本題所能排成的正方形的邊長，是 16 和 12 的公倍數，希望正方形最小，表示所求正方形邊長是 16 和 12 的最小公倍數。用短除法如上得：最小公倍數是 48，表示可排最小正方形邊長是 48 公分。

排列列數：48÷12=4，

排列行數：48÷16=3，

所以總共需要 4×3=12 個長方形。



錯誤類型

1. 學生混淆「質數」和「互質」的概念。前者為單一整數的性質，後者為兩整數的關係。教師要強調，即使兩個數都是合數如 14 和 15，還是可能「互質」；而相同的兩個質數如 7

和 7，彼此並不互質。

2. 由於求最大公因數與最小公倍數所用之短除法相同，學生會亂猜該回答最大公因數或最小公倍數。由於因倍數牽涉學生之乘除法解題能力，教師在協助學生理解題意時，需由乘除法情境著手分析題目意思，協助學生釐清兩者的差異。

評量

評量重點：

1. 能用質因數分解法與短除法求最大公因數和最小公倍數。
2. 能辨識兩數是否互質。
3. 能運用於解決分數的約分、通分與最簡分數問題。

N-6-3 分數的除法：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。 **備註：**可不處理餘數問題。若要處理，限於具體合理的生活情境。餘數問題不評量。	n-III-6

先備：N-5-5、N-5-6、N-5-7、N-5-10。

連結：N-6-4、N-6-5、N-6-6、N-6-7。

後續：N-7-3。

基本說明

1. 在五年級 N-5-5 與 N-5-6 中已學過整數相除與分數除以整數的主題，本條目學習時，應記得整合這些除法經驗。分數除法的計算還會用到 N-5-5 分數乘法的各種經驗。由於除法是四則運算中最困難的運算，應用情境又多，納入分數考慮後許多情境必須借助比例的想法才會更清楚。基於小學時比例的思考才剛初學 (N-6-6)，而且以整數為主。因此本條目的教學應只處理比較容易理解的情境，讓學生理解分數除法的日常應用與計算方法即可。
2. 本條目主要處理除數是分數的情況，理解此時除法的意義與計算方式。可先處理整數除以單位分數、一般分數的情況，再處理被除數為一般分數的情形。教師應配合整體教學，選定學生最容易理解，並最容易連結到「倒數相乘」(顛倒相乘)公式的途徑。
3. 處理除數為分數的問題時，本條目並不要求教師處理所有情境，但至少必須處理最容易理解的「分裝」(包含除) 情境，將問題轉換為同分母分數的除法來處理，並建立分數除法的「倒數相乘」算則。
4. 本年度的分數除法學習應暫時排除答案不合理的問題。例如「披薩 3 塊，每人分 $\frac{2}{3}$ 塊，共可分給 $4\frac{1}{2}$ 人」學生可能無法理解這樣的答案。但類似的「1 本書長 $\frac{4}{25}$ 公尺，1 公尺可排

$6\frac{1}{4}$ 本書」，這時因為學生將書長作為測量的單位，就比較能理解，也能解釋答案 $6\frac{1}{4}$ 的意義。本年度教師布題應迴避第一類問題，讓答案連同單位要合理。

5. 除數為分數的「平分」(等分除，有時這種情況稱為當量除)情境，比較不容易理解，應選擇較簡單的情境開始。另外注意，平分問題答案中的非整數部分並無類似測量情境的特別意義。若已學習「比和比值」的概念，除數為分數的「平分」情境，也可用比的概念來幫助學生理解。
6. 教師不要執著於在各種情境推導倒數相乘(顛倒相乘)的公式，只要以最容易理解的方式解釋一次即可。在分數和小數除法的情況，學生學習的困難是需要知道如何判定一個問題是除法問題而且能正確列式(整數裡被除數比除數大的經驗已經不適用)，除法公式則相對簡單。
7. 如 5. 中已提到，本年學習分數除法時，應推廣五年級的「比率」學習(N-5-10)到「全體量」為分數的情況，並應用於從「部分量」和「比率」求「全體量」的問題。
8. 在做分數除法計算時，要善用分數乘法中約分的經驗，並統整學生六年級更成熟的因數分解經驗，進行流暢的分數除法計算。

條目範圍

1. 可不處理餘數問題。若要處理，必須限於具體合理且簡單的生活情境，並只限於帶分數商中，其真分數部分的餘數意義。例如「1 本書長 $\frac{4}{25}$ 公尺，1 公尺可排 6 本書，還空下 $\frac{1}{25}$ 公尺。」建議餘數問題不評量。
2. 不用繁分數來處理分數除法的計算。

釋例

1. 處理除數為分數的問題時，建議先從容易說明的「分裝」情境(測量，包含除)開始：

(1)(被除數是整數，除數是單位分數)「繩長 1 公尺，每 $\frac{1}{5}$ 公尺剪 1 段，可剪成幾段？」

先將問題記成除法算式：$1\div\frac{1}{5}$。1 公尺是 5 個 $\frac{1}{5}$ 公尺，每 $\frac{1}{5}$ 公尺為 1 段，亦即 $\frac{5}{5}\div\frac{1}{5}$，所以可剪成 5 段。也就是 $1\div\frac{1}{5}=5$。

驗算：$\frac{1}{5}\times5=1$　(1 段 $\frac{1}{5}$ 公尺，5 段是 1 公尺)。

● 類例：「繩長 4 公尺，每 $\frac{1}{5}$ 公尺剪 1 段，可剪成幾段？」

先將問題記成除法算式：$4\div\frac{1}{5}$，類似上例 $4\div\frac{1}{5}=\frac{20}{5}\div\frac{1}{5}=20$，並做驗算。

(2)(被除數是整數，除數是分數)「繩長 4 公尺，每 $\frac{2}{5}$ 公尺剪一段，可剪成幾段？」

將問題記成除法算式：$4\div\frac{2}{5}$。4 公尺是 $\frac{20}{5}$ 公尺，每 $\frac{2}{5}$ 公尺剪 1 段，所以

$4\div\frac{2}{5}=\frac{20}{5}\div\frac{2}{5}=20\div2=10$。

驗算：$\frac{2}{5}\times10=4$　(1 段 $\frac{2}{5}$ 公尺，10 段是 4 公尺)。

● **除法算則**：在計算中若仔細引導，可觀察到倒數相乘的算則。

$$4\div\frac{2}{5}=\frac{4\times5}{5}\div\frac{2}{5}=4\times5\div2=4\times\frac{5}{2}。$$

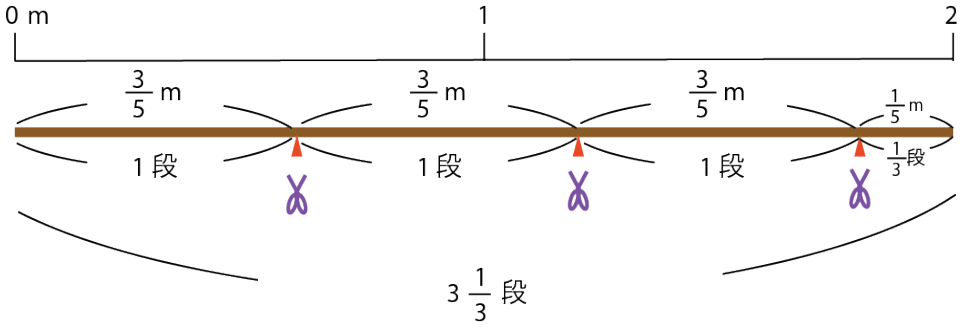
可先檢查之前範例或計算更多例子，歸納為除法算則。

(3)（有「餘數」）:「繩長 2 公尺，每 $\frac{3}{5}$ 公尺剪 1 段，可剪成幾段？」

先將問題記成除法算式：$2\div\frac{3}{5}$。同前，$2\div\frac{3}{5}=\frac{10}{5}\div\frac{3}{5}=10\div3=3\frac{1}{3}$，首先確認乘法算則正確：$2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$。

驗算：$\frac{3}{5}\times3\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\times\frac{10}{3}=2$。

學生應理解答案的意義是 3 整段加 $\frac{1}{3}$ 段，並能以此說明驗算的意義：1 段是 $\frac{3}{5}$ 公尺，因此 3 段是 $\frac{3}{5}\times3=\frac{9}{5}$ 公尺，$\frac{1}{3}$ 段是 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$ 公尺，合起來正好是 $\frac{10}{5}=2$ 公尺。圖示如下：



(4)（一般情況）「繩長 $3\frac{1}{2}$ 公尺，每 $\frac{2}{3}$ 公尺剪 1 段，可剪成幾段？」

先將問題記成除法算式：$3\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}$，直接用除法算則得：$3\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$。

驗算：$\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$。

● 在一般情況，用算則和驗算讓學生能理解是比較快的作法，若仍要用包含除，則需要用到通分，比較複雜：$3\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{21}{6}\div\frac{4}{6}=21\div4=5\frac{1}{4}$。

2. 等分除情境的問題，某些問題的敘述方式，學生不容易用除法來思考，教師需先引導學生。

(1) 例 1：「媽媽買鳳梨，$\frac{1}{2}$公斤要 60 元，鳳梨 1 公斤賣多少元？」

● 說明 1：若學生不熟悉單位價格的計算方式，無法列出除法算式。可將問題改寫成（　　）$\times\frac{1}{2}=60$，引導學生列成算式 $60\div\frac{1}{2}$，再用除法算則計算得 $60\div\frac{1}{2}=60\times2=120$。

驗算：$120\times\frac{1}{2}=60$。

- 說明 2：$\frac{1}{2}$ 公斤要 60 元，1 公斤是 $\frac{1}{2}$ 公斤的 2 倍，所以答案是 60×2＝120 元。和除法算則計算結果相同。
- 說明 3：說明 2 其實已經是接近比例思考（N-6-6）。可以把問題列成：

  60:□＝ $\frac{1}{2}$:1 ＝1:2 來理解。

(2)「六年級的男生有 72 人，占全年級的 48%，六年級有多少學生？」這是比率問題的應用（N-5-10）

- 說明 1：初學的學生不易列出除法算式。可將問題改寫成（　　）×48%＝ 72，引導學生列成算式 72÷ $\frac{48}{100}$，再用除法算則計算得 72÷ $\frac{48}{100}$ ＝ 72× $\frac{100}{48}$ ＝150。
  驗算：150×48%＝ 72。

  說明 2：用比列成 72 : □＝ $\frac{48}{100}$:1，再解出答案。
- 類例：「小華 $\frac{2}{5}$ 分鐘走 27 公尺，則他 1 分鐘走多少公尺？」這是速度問題的應用（N-6-7）

3. 餘數問題：「有 4 公升的柳橙汁，每 $\frac{3}{4}$ 公升裝成一瓶，可以裝成多少瓶？還剩下多少公升？」處理餘數問題的重點是學生要理解除法結果的意義，如果學生能順利說明如 1. 中各例中驗算的意義，就能回答本題「還剩下多少公升？」的提問。
   因為 4÷ $\frac{3}{4}$ ＝4× $\frac{4}{3}$ ＝ $\frac{16}{3}$ ＝5$\frac{1}{3}$，所以可裝成 5 瓶，還剩下 $\frac{1}{3}$ 瓶份量的果汁，但依題意 1 瓶是 $\frac{3}{4}$公升，所以還剩 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$ 公升。

錯誤類型

1. 在分數除法中，學生基於整數除法的經驗，往往認定商一定比被除數小。教師最好在最容易理解的「除數為單位分數」情況下，就先處理。
2. 不理解或混淆分數除法中餘數的意義。

評量

1. **評量重點**

   (1) 能做各種分數除法計算，並能使用約分協助計算。

   (2) 能用分數除法解決生活中的應用問題。

   (3) 知道分數除法，商不見得比被除數小。
2. 評量注意事項

   不評量餘數問題。

N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。 **備註：**可不處理餘數問題，若要處理，限於具體合理的生活情境，商限定為整數，並小心在直式計算中處理餘數問題。餘數問題不評量。	n-Ⅲ-7

先備：N-5-7、N-5-9、N-5-10、N-5-11。

連結：N-6-3、N-6-8。

後續：N-7-4。

基本說明

1. 本條目和 N-6-3 有關，建議先進行分數教學，理解除數為小數（分數）的意義，並可援引分數除法的思考方式，看出小數除法直式計算的方法。
2. 建議先處理可以除盡的情況，且商限三位小數的情形。以 2.7÷1.08 為例，教師可以發展各種方法說明為什麼這相當於用直式計算 270÷108（想成 270 個 0.01 除以 108 個 0.01；想成 $\frac{270}{100}\div\frac{108}{100}=\frac{270}{100}\div\frac{108}{100}$；想成÷ $\frac{108}{100}$，亦即× $\frac{100}{108}$，於是先將 2.7 乘以 100 再除以 108 等），以此老師可引用 N-5-9 的直式計算經驗。
3. 直式計算可能碰到除不盡的情形，但在實際應用中，常可利用概算來估計商（N-5-11）。這時有無餘數並不重要。
4. 本年學習小數除法時，應推廣五年級的「比率」學習（N-5-10）到「全體量」為小數的情況，並應用於從「部分量」和「比率」求「全體量」的問題，其中可能會應用到概數（N-5-11）。
5. 本條目原則上不處理直式計算求餘數的方法，若教師想處理餘數問題，建議只做測量情境且商為整數的情形，並引導學生用整數「被除數 = 商×除數 + 餘數」的方法來驗算其正確性。

條目範圍

1. 建議被除數小數點以下位數不超過 3 位。
2. 由於常採用的直式計算，處理餘數的小數點位數較複雜。教師若要進行教學，應納入具體合理生活情境，並視此為探索活動，不予評量。

釋例

1. 在 N-5-9，學生已能理解「整數除以整數」或「小數除以整數」的直式計算，其說明和一般整數直式無異，只是有餘數時，還會繼續往下算，因此商會出現小數，並且可能出現除不完的情況，得用概數來協助處理。

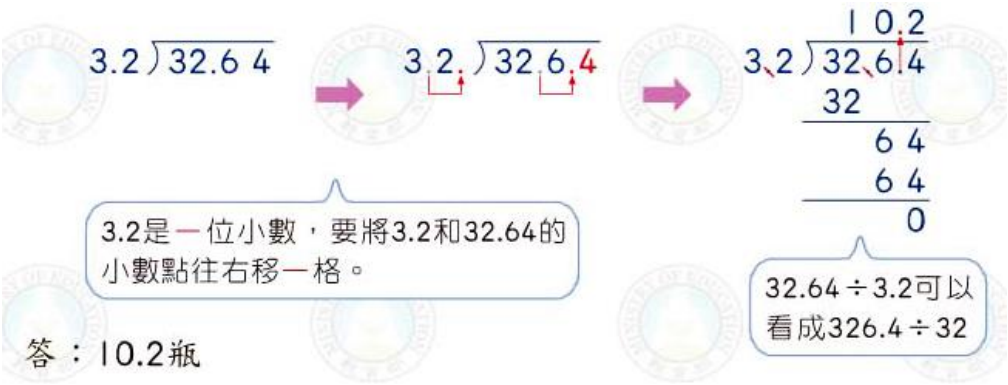
   「小數除以小數」的直式計算，重點是將問題轉化成除數為整數的情況，再做計算，然後再小心處理「商」和「餘數」小數點的問題。

例 1:「將一桶 32.64 公升的沙拉油，每 3.2 公升裝 1 瓶，全部裝完，共可裝幾瓶？答案用小數表示。」(《部》第七章 89 頁)

問題列式為「32.64÷3.2」，底下說明可以轉化為「326.4÷32」來計算。

說明：沙拉油總量是 32.64 公升，也就是 326.4 個 0.1 公升，3.2 公升是 32 個 0.1 公升裝 1 瓶，所以問題相當於 326.4÷32。

在直式計算時，必須把上面的轉化表現在直式中，相當於所有的小數點往右移一格，取商的小數點時，要和新小數點的位置一樣。如下



驗算：3.2×10.2=32.64。

關於 10.2 瓶，學生應同 N-6-3 一樣，理解這表示除了 10 整瓶之外，還剩下 0.2 瓶，或是 3.2×0.2=0.64 公升的沙拉油。

2. 理解直式計算的方法後，教師應提供不同情境，讓學生練習直式計算的方法。應用情境可比照 N-6-3 分數除法的問題情境。由於學生在直式計算時，對於除數是真小數(小於 1 的小數)的情況，有時反而有障礙，可以出類似「繩長 2 公尺，每 0.08 公尺剪一段，可剪成幾段？」之類的問題。

3. 關於「餘數」。

(1) 在(1)例 1，其直式計算如下左圖，商是 10.2 瓶，其中除了 10 整瓶之外，餘下的 0.2 瓶是 3.2×0.2=0.64 公升的沙拉油。

```
      10.2
3.2 ) 32.64
      32
      64
      64
       0
```

```
      10
3.2 ) 32.64
      32
      0.64
```

這個餘數其實也可用右上的直式直接算出來，計算到商為個位時就停止，這時會餘下 0.64 公升，注意到 0.64 的小數點，要跟著原來被除數 32.64 的小數點位置。也就是「餘數的小數點必須要跟原來被除數的小數點位置一樣」。

左式驗算：3.2×10.2=32.64。

右式驗算：3.2×10+0.64=32.64。

注意左式商的 0.2 和右式餘數的 0.64，其關係就是 3.2×0.2=0.64。

(2) 類題：「15.2 公升的油，每 1.6 公升裝一瓶，可裝幾瓶？剩下幾公升？」前述兩種方法皆可採用。

4. （除不盡）「陳伯伯開車 300 公里，共開了 3.5 時，他開車的速度大概是每小時幾公里。（同四捨五入取概數到小數點後第 1 位）」

列式為 300÷3.5，計算如下。

```
        8 5.71…
3.5 ) 300.0.0
      280
      ---------
       20 0
       17 5
      ---------
        2 5 0
        2 4 5
      ---------
            50
            35
```

1<5，捨去，得 300÷3.5≈85.7（公里/時）。

錯誤類型

1. 同分數除法，基於整數除法的經驗，學生認定商一定比被除數小。教師宜在「除數為真小數」時處理此問題。
2. 除數為小數的直式計算容易出錯，尤其是商的小數點和餘數的小數點容易取錯，請將重心放在前者。

評量

1. 評量重點

   (1) 能做各種小數除法之直式計算。

   (2) 能用小數除法解決生活中的應用問題。

   (3) 知道小數除法，商不見得比被除數小。

2. 評量注意事項

   不評量餘數問題。

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。 **備註：**含處理分數和小數混合乘除計算之常用技巧。	n-III-2 r-III-2

先備：R-5-1、R-5-2。

連結：R-6-1。

後續：N-7-4。

基本說明

1. 本條目是一個總結性的檢查條目。為了讓學生理解整數、分數、小數實為一體，並且能順暢的做日常應用，學生應有機會體驗不分哪種數的四則運算應用解題。當然在之前的學習中，並不是沒有機會做混合解題，但本條目是更有意識要檢查這個教學目標。
2. 進行本條目時，通常也可同時完成 R-6-1 的目標。也就是所有數享有共同的計算規律，並且利用分數的乘除運算，不但簡化許多常見的計算，也更理解一般乘除相關的計算規律，最後將乘除視為一體。其中的細節請見 R-6-1 的說明。
3. 本條目的另一重點，是建立也可將問題轉化為小數的思考，並利用概數來協助解題。這是進入國中後使用計算機的前置經驗。
4. 本條目教學的重點不在步驟多寡，因此仍以兩步驟或三步驟問題為主。教師應將重點擺在不同的數如何混合計算，並學習其中常見的思考與計算技巧。

條目範圍

1. 本條目不以熟練為目標，尤其是牽涉到本年度剛教學的分數或小數除法計算或比的計算，都應以學生能確實理解為原則。
2. 基本說明 3. 中提到的小數解題，由於學生尚無法成熟判斷恰當的計算精確度，因此老師布題時仍應明確告知運用概數的精確度要求。
3. 不做超過四個步驟（含）的解題。平均問題例外，但也不要變成非重點的複雜計算問題。

釋例

基本整數、分數、小數混合的應用問題：

(1) 例 1：「超市有甲、乙兩牌沙拉油，油量分別是 1.625 公升和 $\frac{5}{8}$ 公升，一瓶甲牌沙拉油比 2 瓶乙牌沙拉油的油量多幾公升？（答案用小數表示）

- 解一：$1.625-\frac{5}{8}\times2=1.625-\frac{5}{4}=1.625-1.25=0.375$。
- 解二：$1.625-\frac{5}{8}\times2=1\frac{5}{8}-\frac{10}{8}=1\frac{5}{8}-1\frac{2}{8}=\frac{3}{8}=0.375$。
- 解三：$1.625-\frac{5}{8}\times2=1.625-0.625-0.625=1-0.625=0.375$。

答：0.375 公升。

(2) 例 2：「有一塊 36 坪的長方形空地（1 平方公尺=0.3 坪），長 $7\frac{1}{2}$ 公尺，寬是幾公尺？」

想法：先算空地的面積是幾平方公尺，除以長，就得到寬。

$36\div0.3\div7\frac{1}{2}=36\times\frac{10}{3}\times\frac{2}{15}=16$。（約分過程略）

答：寬是 16 公尺。

(3) 例 3：「飲料店將 45.5 公升的茶水、$4\frac{1}{2}$ 公升的純檸檬汁、$7\frac{3}{4}$ 公升的糖水混合成檸檬青

茶，若每杯飲料是 700 毫升，共可裝幾杯飲料？」

因為「700 毫升=0.7 公升」，列式為 $(45.5+4\frac{1}{2}+7\frac{3}{4})\div 0.7$。

● 解一：全部化成小數。

原式=(45.5+4.5+7.75)÷0.7=57.75÷0.7=82.5。

● 解二：全部化成分數，再用分配律。

原式=$(\frac{455}{10}+\frac{9}{2}+\frac{31}{4})\div\frac{7}{10}=\frac{455}{10}\times\frac{10}{7}+\frac{49}{4}\times\frac{10}{7}=65+\frac{35}{2}=82\frac{1}{2}$。(約分過程略)

由於多出來的半杯要捨去，所以可裝 82 杯。

答：82 杯。

(4) 例 4.(比)「小明和妹妹的體重比是 $1:\frac{2}{3}$，妹妹體重 27.6 公斤，小明重幾公斤？」

將問題列成 $1:\frac{2}{3}=□:27.6$，可知小明體重是 $27.6\div\frac{2}{3}$(公斤)，

$27.6\div\frac{2}{3}=27.6\times\frac{3}{2}=13.8\times3=41.4$。(約分過程略)

答：小明重 41.4 公斤。

(5) 例 5.(速度)「有一條山路長 2.14 公里，哥哥上下山分別花了 1.8 時和 1 時，他的平均速度是多少？(答案請用四捨五入法取概數到小數第二位)」

平均速度是總距離除以總時間，亦即 $(2.14\times2)\div(1.8+1)$。

● 解一：用分數算。

$(2.14\times2)\div(1.8+1)=\frac{214}{100}\times2\times\frac{10}{28}=\frac{107}{70}=1.528....$。(約分過程略)

● 解二：用小數算。

$(2.14\times2)\div(1.8+1)=4.28\div2.8=1.528...$。

● 解三：用小數算，混合約分技巧。

$(2.14\times2)\div(1.8+1)=4.28\div2.8=10.7\div7=1.528...$。

將答案請用四捨五入法取概數到小數第二位：$1.528...\approx1.53$

答：約 1.53 公里/時。

(6) 例 6.(比率)「爸爸做饅頭時，酵母占饅頭重量的比率大概是 0.33%，24 公克的酵母可以做出幾公斤的饅頭？(答案請用四捨五入法取概數到小數點後第一位)」

先算出公克數，再換算成公斤。列式為 $24\div0.33\%\div1000$，其中 0.33%可改寫為 0.0033 或$\frac{33}{100}\div100=\frac{33}{10000}$。

● 解一：用分數算。

$24\div0.33\%\div1000=24\times\frac{10000}{33}\times\frac{1}{1000}=\frac{80}{11}=7.27...$。(約分過程略)

● 解二：用小數算。

24 ÷0.33%÷1000=24÷(0.0033×1000)=24÷3.3=7.27…。

將答案請用四捨五入法取概數到小數第一位：7.27…≈7.3。

答：約 7.3 公斤。

(7) 例 7：「大大電信公司的市話撥打行動電話費率為：每秒 0.0073 元(每分鐘 0.438 元)，小明撥一通電話講了 2 分 30 秒，大約要付多少錢？（答案用四捨五入法取概數到小數點後第一位)」

● 解一：0.0073×(60×2+30)=0.073×150=1.09…≈1.1。

● 解二：2 分 30 秒是 2.5 分：

0.438×2.5=1.09…≈1.1。

● 解三：若強調只是估算，也可先估計 0.438≈0.44，

0.438×2.5≈0.44×2.5=1.1。

(8) 例 8：「今天市場的高麗菜進價是每公斤 30 元。陳老闆的定價是將進價每公斤 30 元，改以每台斤 30 元賣出（1 台斤=0.6 公斤）;林老闆則是將進價的 1.6 倍當作售價。如果他們同樣買進 50 公斤高麗菜，並且全部賣出，誰賺的錢比較多？多多少元？

說明：這個問題，比較困難的地方是說明陳老闆的定價策略，牽涉到學生可能不熟的公斤和台斤轉換。由於 1 台斤=0.6 公斤，所以 1 公斤是 $1\div0.6=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$ 台斤，假設陳老闆買入 1 公斤 30 元的高麗菜，依他的定價策略是「每台斤賣 30 元」，因此這一公斤高麗菜賣出的價錢是 $30\times\frac{5}{3}=50$ 元。

解法：兩人的進貨成本一樣是 30×50＝1500 元。

● 解一：

陳老闆的獲利：$(30\times\frac{5}{3})\times50-1500=2500-1500=1000$，

林老闆的獲利：$(30\times1.6)\times50-1500=2400-1500=900$，

$1000-900=100$，

陳老闆獲利較多，多 100 元。

● 解二：運用分配律。

陳老闆的獲利：$(30\times\frac{5}{3})\times50-30\times50=30\times50\times(\frac{5}{3}-1)=1000$，

林老闆的獲利：$(30\times1.6)\times50-30\times50=30\times50\times(1.6-1)=900$，

$1000-900=100$。

● 解三：若學生看出重點是比較量（倍數）的變化，甚至可以列成：

$30\times50\times(\frac{5}{3}-1.6)=30\times50\times\frac{2}{30}=100$。

(9) 例 9 :「牛排店一客牛排定價 850 元，特價日以九折賣出，另外再加收 10%的服務費，請問吃一客腓力牛排實際要付多少錢？（答案用四捨五入法取概數到個位)」

這是一個有名的問題，學生可能會疑惑到底是「先打折再加收服務費」還是「先收服務費再打折」，倒底哪一種方式比較便宜？

雖然可以實際計算來解題，教師應鼓勵學生先把兩種式子列出來：

$850\times0.9\times(1+\frac{10}{100})$，

$850\times(1+\frac{10}{100})\times0.9$，

讓學生發現兩個式子的結果其實是一樣的，所以選那個方式算都可以。

$850\times0.9\times(1+\frac{10}{100})=850\times\frac{9}{10}\times\frac{110}{100}=850\times\frac{99}{100}=841.5\approx842$。(約分過程略)

也可以這樣算：

$850\times0.9\times(1+\frac{10}{100})=850\times\frac{99}{100}=850\times(1-\frac{1}{100})=850-8.5=841.5\approx842$。

答：842 元。

- 另一個常有的疑問是，學生會直覺認為答案會和原價一樣，教師可以請學生觀察倍數的部分：$\frac{9}{10}\times\frac{110}{100}=\frac{99}{100}$，所以其實還是便宜一點點。

(10) 圓周率可以發展成一段故事。

「圓周長除以直徑的比值稱為圓周率，圓周率是一個很有名的數，真正的圓周率寫也寫不完，等於 3.14159265358979323846...，古代的人無論東西方，通常最開始都用 3 當作圓周率，協助計算圓的周長和面積。但是大概 1500 年前，中國數學家祖冲之（西元 429-500 年）發現可以用分數來估計圓周率，其中「粗率＝$\frac{22}{7}$」比較粗糙，「細率＝$\frac{355}{113}$」則更精細。」

- 「計算 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$，用四捨五入法取概數到小數點後第二位，和 3.14 比比看。」

  參考數值：$\frac{22}{7}\approx3.14285714285714...$，$\frac{355}{113}\approx3.141592920353982...$。
- 「用粗率＝$\frac{22}{7}$當作圓周率，計算半徑 7 公尺的圓周長和圓面積。」

  圓周長$=7\times2\times\frac{22}{7}=44$（公尺)。

  圓面積＝$\frac{22}{7}\times7\times7=154$（平方公尺)。
- 注意事項：運用圓周率的素材上課，最忌諱直接告知粗率和細率就做計算，學生反而因此疑惑以後的計算要用 3.14 還是新學的數。若要進行這段故事，一定要告訴學生真正的圓周率另有其數，但一般常用 3.14 來表示它。

評量

評量重點

能解決整數、分數、小數混合兩步驟到三步驟的應用問題。

N-6-6 比與比值：異類量的比與同類量的比之比值的意義。理解相等的比中牽涉到的兩種倍數關係（比例思考的基礎）。解決比的應用問題。 **備註：**比中各數原則上為整數，但也可包含簡單之小數與分數。	n-Ⅲ-9

先備：N-4-3、R-4-2、N-5-10。

連結：N-6-3、N-6-4、N-6-7、N-6-8、S-6-1、S-6-2、S-6-3。

後續：N-7-9。

基本說明

1. 比（比例）可說是最基本又有用的數量關係，是國小和國中交界時的數學重點（N-7-9），其應用散見於日常生活，也是後續數學和科學的學習基礎。比的問題本質上是乘除混合計算問題（N-4-3），若能熟悉乘除混合計算規則會很有幫助（R-4-2），其相關的應用包括比率（N-5-10），還有本年度的速度（N-6-7）、基準量與比較量（N-6-8）、放大縮小與地圖比例尺（S-6-1、s-6-2）、扇形面積或弧長（S-6-3）。比的問題有些已經出現在整數乘除混合問題中，教師應善用學生已有的經驗，再帶入比的學習。
2. 先介紹比的記號與記法，理解比的相等就是比值相等，因此可將「:」理解成「÷」。比（例）的關係可透過表格數據來察覺其規律，例如利用單位數和價錢的列表，可以列成比的算式，並察覺價錢除以單位數的單位價格（比值）是不變的（比的相等），並利用此數量關係來解題。
3. 雖然比的原始「比較」意義比的是同類量（也就是比大小、長短），其比值可見於「比率」或「基準量與比較量」。但是異類量的比在應用上也十分常見，其比值的意義更是許多應用的樞紐，例如單位價格、速度、密度、濃度等。這兩類情境都應讓學生充分體會與練習。
4. 比的相等除了本意的「比值相等」之外，學生也要同時熟悉另一方向的倍數相等。例如「2盒草莓 300 元，6 盒多少元？」之問題可記成 300:2 = (　　):6。若用比值相等，則先算出一盒 150 元（單位價格），再算出 6 盒是 900 元。但學生也應知道，因為 6 是 2 的 3 倍，因此 6 盒的價錢是 2 盒時的 3 倍，就是 300×3 = 900（元）。雖然這也可以另外列成 (　　):300=6:2 來理解，但是這裡強調的是在同一個比的等式，學生就應該知道有兩種思考方式來解決這個問題。
5. 在處理除數是分數或小數的等分除（當量除）問題時（N-6-3、N-6-4），在除法的脈絡中並不容易處理，只有轉化成比的問題時，反而更能理解其意義。例如「$\frac{1}{3}$ 瓶飲料是 500 毫

升，1 瓶是幾毫升？」用除法記成 500÷$\frac{1}{3}$ 比較難理解。但用比時，可以專注於 $\frac{1}{3}$ 的本來意義，記成 1:3=500:(　)。或在比較熟悉整數的類似問題後，直接寫成 500:$\frac{1}{3}$ =（　）:1。學生有很多方式思考這樣的問題。

條目範圍

1. 在國小時，不進行「$a:b=c:d$ 相當於 $ad=bc$」的教學（N-7-9），因為這裡必須用到純代數的等量公理，小學生無法理解這個算式的意義。因此，也不應用這個想法來解決「300:2=（　）:6」這類問題。
2. 比的教學剛開始應以整數教學，並以概念為主，不要處理複雜的計算問題。最後也應該加入簡單的小數和分數問題，尤其應該強調連續量的情境（例如速度），這是日後比例重要的應用方向，另外也可以協助除法的教學（見基本說明 5.）。
3. 雖然「最簡整數比」是傳統教學經常強調的重點，但是「最簡整數比」就和「最簡分數」一樣，可以嘗試化繁為簡，察覺其中可能的簡單關係，但是過分強調所有比都必須化成最簡整數比，實非必要。因此和「最簡分數」相同，教師應讓學生經驗和練習「最簡整數比」，認識其用途即可。（參考 N-6-2 基本說明 4.）
4. 雖然有些國家如德國會寫出算式「a:b =$\frac{a}{b}$」，但這主要是德國的「除號」和「比」的符號相同。在概念上，應將「a:b」和「$\frac{a}{b}$」視為不同，前者是比，後者是該比的比值。若比值相等，則兩比相同，但不將「a:b」和「$\frac{a}{b}$」用等號連接。

釋例

1. 利用單位數和價錢的列表，可以列成比的算式，並察覺價錢除以單位數的單位價格（比值）是不變的（比的相等），並利用此數量關係來解題。

   例如：一杯木瓜牛奶 50 元，把木瓜牛奶的價錢和杯數列成簡單的關係表：

價錢	50	100	150	200	250	300
杯數	1	2	3	4	5	6

   透過表格數據讓學生觀察木瓜牛奶的價錢和杯數有什麼關係，引導學生察覺價錢除以杯數是不變的（也就是定價），因此價錢和杯數的數字之間有特殊的關係，我們用相等的比來記錄：

   50:1=100:2=150:3=200:4=250:5=300:6，

   而相等的比的意思就是它們的比值都一樣。如下

   $\frac{50}{1}=\frac{100}{2}=\frac{150}{3}=\frac{200}{4}=\frac{250}{5}=\frac{300}{6}=50$，

   比值都是 50。

2. 用比值或倍數關係解決相等的比的問題：

例「5 杯木瓜牛奶賣 250 元，500 元可以買幾杯木瓜牛奶？」

引導學生用□表示 500 元買的杯數，由杯數比價錢的方式，可以列出如下相等的比的算式：

500：□＝ 250：5，

□要填入多少，可以利用比值或倍數的概念來解決。

- 利用比值的想法：

500：□＝ 250：5，

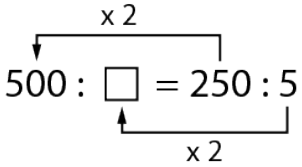
因為比值=250÷5=50，所以

500÷□=50。(□是除數)

要求出 500 元能買的杯數，可以列式為：

500÷50=10（杯）。

- 利用倍數的想法：



500÷250=2，所以□÷5=2，所以要求出 500 元能買的杯數，可以列式為：5×2=10（杯）。

3. 在處理除數是分數或小數的等分除（當量除）問題時（N-6-3、N-6-4），在除法的脈絡中並不容易處理，轉化成比的問題時，反而更能理解其意義。（參考 N-6-3 釋例 2.）

例：「林伯伯今年的體重是去年的 $\frac{5}{6}$，他今年的體重是 70 公斤，去年的體重是多少公斤？」

- 作法 1：引導學生用□表示去年的體重，因此□$\times\frac{5}{6}$=70，於是學生可列成除法算式 70÷$\frac{5}{6}$ 來算。
- 作法 2：另一種做法是引導學生列出比的算式：

因為今年的體重是去年的 $\frac{5}{6}$，也就是今年體重：去年體重＝5：6，可以列出比的算式 70：□ ＝5：6 。

- 作法 3：在學生理解基準量與比較量的學習後（N-6-8），將去年的體重當作 1，今年的體重是 $\frac{5}{6}$，因此今年體重：去年體重是 $\frac{5}{6}$：1，可以列出比的算式 70：□ ＝$\frac{5}{6}$：1。

評量

1. 評量重點：

(1) 認識比、相等的比和比值的意義。

(2) 理解相等的比中的比值相等關係與倍數關係，並能用來解題。

2. 評量注意事項：

教師評量時，若比中牽涉小數或分數，應力求簡單，以觀念為主，而非計算。

N-6-7 解題：速度。比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。 **備註：**除不同時間區段的平均速度問題外，小學速度問題的假設都是等速運動。含速度固定，時間為幾倍，距離即為幾倍的問題。含時間固定，速度為幾倍，距離即為幾倍的問題。所謂「大單位到小單位」，指的是不論是長度或時間，都只做大單位到小單位的換算。	n-Ⅲ-9

先備：N-5-16。

連結：N-6-7、N-6-9。

後續：N-7-9。

基本說明

1. 速度是小學時學到唯一的導出量（長度/時間），在處理比較困難，教師應善用學生熟悉快慢的現象，來進行速度的教學。速度也可看成比和比值的應用，其中速度就是行走距離和行走時間的比值。

2. 速度所牽涉的量感是「快」與「慢」。在正式進入教學前，教師應讓學生熟悉速度所牽涉的單位和快慢經驗的關係。例如固定跑步時間，「速度快的人跑得比較遠」或「跑的距離長的人跑得必較快」；固定跑步距離，則「速度快的人會先跑到終點（用的時間比較短）」或「用得時間越短，跑得越快」。

3. 可用列表，讓學生發現跑步時間和跑步距離之間有比例的數量關係，推測知其比值固定，稱為速度，亦即「速度＝距離÷時間」。並熟悉用「每秒跑 4 公尺」或「跑 1 公尺需要 0.25 秒」的方式來表示速度的大小（快慢）。

4. 速度、距離和時間的關係，可用「速度＝距離÷時間」或「距離＝速度×時間」來表示。學生應從任兩項推知另一項。同時從比（比例）的經驗知道，若固定速度，用的時間變成幾倍，走的距離就是幾倍；若用的時間固定，速度是幾倍，距離就是幾倍。另外，教師應進行活動討論若距離固定，速度越快的所花的時間越少，並運用「距離＝速度×時間」進行更仔細的計算驗證。

5. 速度的量感一般比較困難，但仍應鼓勵和自己身體尺度相關的「測量單位」。例如若知道如自己走路的速度大概是每秒幾公尺，就可以估計兩地距離的長度（如校門口到教室，學校到家裡等）。在這種生活應用中，學生自然需要做速度的單位換算。

6. 速度的常用單位為「公里/時」、「公尺/分」、「公尺/秒」等。速度的單位換算因為牽涉到兩個單位，相對比較困難。剛開始應只學習變動其中一個單位的換算，再處理兩個單位同時變動的作法。(見釋例)
7. 進行速度的加減問題時，由於速度本身已經比較抽象，因此教師進行加減問題時應做詳盡的說明，並先借用運用學生本身的經驗來理解，不要直接套入公式解題。
8. 學生也應理解分段平均速度的計算方式，也就是將總距離除以總時間得到平均速度。學生應知道這樣得到的平均速度並不是各段速度的平均。這個結論經常出乎學生意外，教師應詳細說明。

條目範圍

1. 速度的教學由於牽涉到許多新概念如：兩個量結合的單位、這種單位的換算、平均速度，同時也關連到比的概念，分數和小數的各種運算。整體來說，是六年級較困難而重要的題材，教師應該注意概念的鋪陳，簡化所使用的數字，不要進行不必要的複雜或困難問題。像已知上、下山的速度，要求平均速度的問題，雖然是典型的問題，但應以探索和討論為重點，不該視為形式的計算解題。
2. 不需在固定速度或時間時，強調這是「正比」(N-7-9)。另外，教師應進行活動討論若距離固定，速度越快的所花的時間越少，並運用「距離 = 速度×時間」進行更仔細的計算驗證。但不應強調這是「反比」(N-7-9)。
3. 做時間單位換算或速度解題時，有時會用到分數或小數的運算，教師應先確定學生已熟悉 N-5-16。
4. 速度公式需在一定的理解後再出現，也不要一出現就做過度的應用或再進一步推導。雖然原則上公式越少越好，但因為速度比較抽象且複雜，公式中並無單純的數字，又牽涉諸多應用，我們建議保留三個公式，並在教學時仔細教學沒個公式的意義和應用。
5. 雖然經常有人希望將「速度」正名為「速率」，但這個情況類似「數」(整數) 和「自然數」。在小學時，放棄生活用詞，勉強遷就在小學並不存在的概念區分，並無必要。

釋例

1. 速度換算：

(1) 剛開始只做一個單位的換算，並以速度問題來思考。

如「1 時走 3 公里」，相當於 1 時走 3000 公尺，記成

3 公里/時=3000 公尺/時。

又如「1 時走 60 公里」就是「60 分走 60 公里」，也就是「1 分走 1 公里」，記成

60 公里/時=1 公里/時。

(2) 熟悉 1 個單位的變換之後，再處理兩個單位同時變動的作法：

例如

- 60 公里/時=1 公里/分=1000 公尺/分，
- 90 公里/時= 90000 公尺/時=1500 公尺/分　或

  90 公里/時= 1.5 公里/分=1500 公尺/分

2. 速度的加減問題：速度本身已經比較抽象，沒有明顯的「單位」感受，因此學生在理解速度加減問題上經常有困難。教師首先要清楚說明題幹的意義，利用學生的經驗，協助理解。

(1)「小明走路速度為 70 公尺/分、小齊為 80 公尺/分，兩人同時同地背對背出發，30 分後兩人相差多少公尺？」

教師可先問，1 分鐘之後兩人相差多少公尺，2 分鐘之後呢？學生的計算可能是

80+70=150，

80×2+70×2=300。

教師引導學生使用分配律，知道也可以這樣算：

80+70=150，

(80+70)×2=300。

最後得到問題的答案：

(80+70)×30=4500，

其中速度和 80+70=150，表示他們每走 1 分鐘，相差 150 公尺，因此 30 分鐘，相差 150×30=4500 公尺。

* 若教師有把握引導，也可以進行探索活動：請學生想像其中一個人頭上帶著攝影機，記錄另一個人離開的行動，問學生看起來速度是不是比較快，從中體會速度和的意思。

(2)「小明走路速度為 70 公尺/分、小齊為 80 公尺/分，兩人同時同地同向出發，30 分後兩人相差多少公尺？」

教師可先問，1 分鐘之後兩人相差多少公尺，2 分鐘之後呢？學生的計算可能是

80−70=10，

80×2−70×2=20。

教師引導學生使用分配律，知道也可以這樣算：

80−70=10，

(80−70)×2=20。

最後得到問題的答案：

(80−70)×30=300，

其中速度差 80−70=10，表示他們每走 1 分鐘，相差 10 公尺，因此 30 分鐘，相差

10×30=300 公尺。

＊同前，若教師有把握引導，也可以如下探索活動：請學生想像小明頭上帶著攝影機，記錄小齊的行動，問學生鏡頭中小齊看起來速度是不是很慢，從中體會速度差的意思。

錯誤類型

學生經常以為平均速度是速度的平均。

評量

評量重點：

1. 理解速度的意義，並能計算速度。
2. 理解速度、距離、時間三者之間的關係，並能解決相關應用問題。
3. 能做速度的單位換算。
4. 能做簡單的平均速度問題。
5. 能做簡單的速度加減問題。

N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。 **備註：**所謂交換基準如以哥哥身高為 1，弟弟身高為 $\frac{5}{4}$，則以弟弟身高為 1，哥哥身高為 $\frac{5}{4}$。	n-III-9

先備：N-5-10。

連結：N-6-3、N-6-4、N-6-7。

基本說明

1. 當兩同類量相比時，有時因為數字複雜，對於其相對大小沒有什麼感覺。這時若將一量視為「基準量」定為 1，則另一被比較的「比較量」相對的值（經常稱為「比值」，見後）就令人對其相對大小較能掌握。經常用比寫成

   比較量:基準量=比值:1　（本式不需出現在課堂上）。

   這個簡化相對大小的重要概念，是比和比值的重要應用，也是「比率」概念的推廣（在比率的情況，比較量是基準量的一部份，因此比值小於或等於 1），在日常應用上也可用百分符號來記錄。
2. 例如「菜價 1 斤 32 元，颱風過後漲到到 1 斤 48 元」，若把原價當作基準量，漲價的價錢當作比較量，則

   比較量:基準量=48:32= $\frac{48}{32}$:1= $\frac{3}{2}$:1。

   其中比值就是 $\frac{3}{2}$ 或 1.5，很容易就看出漲價一半，可以說「漲到原來的 150%」、「漲了 50%」、「漲了 5 成」等。但反過來，也可將原價當作比較量，漲價的價錢當作基準量，

則

比較量:基準量=32:48= $\frac{32}{48}$:1= $\frac{2}{3}$:1，

則原來的菜價相當於漲價後價錢的 $\frac{2}{3}$。

3. 學生應知道這裡的「比值」其實是一種倍的概念，滿足「基準量×比值＝比較量」(本式不需出現在課堂上)，例如上面菜價問題裡，原來菜價視為 1，漲後價錢相當於 $\frac{3}{2}$，因此若原來買菜要 60 元，颱風後一樣的菜要賣 $60\times\frac{3}{2}=90$ (元)。反過來，若將漲後菜價視為 1，原來菜價相當於 $\frac{2}{3}$，因此若颱風後買菜要 75 元，則颱風前菜價是 $75\times\frac{2}{3}=50$ (元)。
4. 學生應知道，若將基準互換，則這兩個「比值」彼此會互為倒數 (即分子和分母調換位置的數，此名詞不需出現)，例如上例中的 $\frac{3}{2}$ 與 $\frac{2}{3}$；又例如以哥哥身高為 1，弟弟身高相當於 $\frac{4}{5}$，則若以弟弟身高為 1，哥哥身高相當於 $\frac{5}{4}$。知道這個事實，有助於學生解決和理解除法問題。例如續上例問，「媽媽在颱風之後買菜花了 180 元，這些菜在颱風前是多少元？」本來這問題直接列式是「$180\div\frac{3}{2}=120$」，但若將問題想成颱風前菜價是颱風後菜價的 $\frac{2}{3}$，則原問題可自然列成「$180\times\frac{2}{3}=120$」。(這其實就是除法算則倒數相乘的意思，但不需對學生解釋。)
5. 基準量固定為 1，其實也有當作「單位」的意義，因此可以進行四則運算。例如以小明的存款為基準量 (即視為 1)，哥哥的存款相當於 2.5，姐姐的存款相當於 2，則哥哥和小明存款差相當於 2.5−1=1.5；三人存款的和當於 1+2.5+2=4.5 等等。

條目範圍

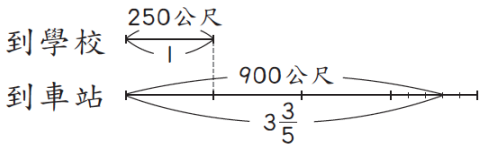
1. 教師應提醒學生注意「漲了 50%」和「漲到原來的 150%」雖然意義相同，但語言使用上有差別。
2. 教師為了解釋基準量與比較量的意義，可能會使用比來說明與引導計算，但是當學生熟悉之後，一旦選定基準量，就可用比較量除以基準量來算出比值。

釋例

1. 當兩同類量相比時，若將一量視為基準量定為 1，則另一被比較量相對之值一般也稱為比值。教學上，常透過線段圖來表示兩量的關係，舉例如下：

   例：「小英家到學校的距離是 250 公尺，到車站的距離是 900 公尺，將 250 公尺當作 1，怎樣繪製線段圖來表示 900 公尺？」

   $900\div250=3\frac{3}{5}$，表示 900 公尺是 250 公尺的 $3\frac{3}{5}$ 倍。將 250 公尺當作 1，那麼 900 公尺就是 $3\frac{3}{5}$，線段圖如下：



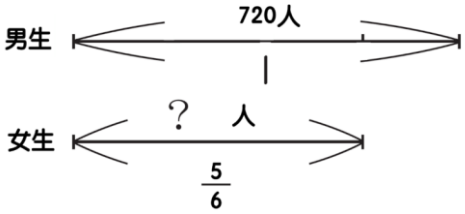
引導學生認識做為基準被當作 1 的量叫做基準量，和基準量比較的量叫做比較量。例如將 250 公尺當作 1（做為基準量），900 公尺（也就是比較量）是 250 公尺的 $3\frac{3}{5}$ 倍，也就是 $3\frac{3}{5}$。其中

$$900\div250=3\frac{3}{5}$$ （比較量÷基準量＝比值）。

2. 學生應知道「相對比較量」其實是一種「倍」的概念，滿足「基準量×比值＝比較量」（本式不需出現在課堂上），例如：

例：「立德國小女生人數是男生的 $\frac{5}{6}$，如果男生有 720 人，女生有多少人？」

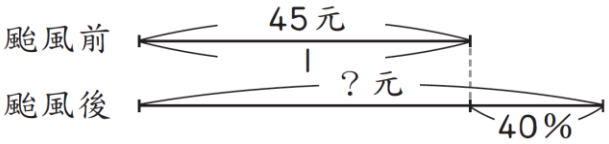
引導學生透過下列線段圖找出男生與女生人數的關係，思考把男生人數當作 1，女生人數是男生的 $\frac{5}{6}$，那麼男生人數是 720 人，女生人數是多少，進而列出 $720\times\frac{5}{6}=600$，求出女生有 600 人。



3. 基準量固定為 1，其實也有當作「單位」的意義，因此可以進行四則運算。

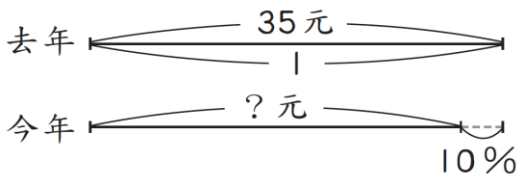
(1) 例 1（母子和問題）：「颱風前青蔥一斤 45 元， 颱風後漲了 40 %， 颱風後青蔥一斤多少元？」

引導學生透過下列線段圖理解颱風前與颱風後青蔥的價錢關係，思考把颱風前青蔥價錢當作 1，颱風後價錢是颱風前價錢的 1＋40%，也就是颱風後青蔥的價錢為 45×(1+40%)=63。



(2) 例 2（母子差問題）：「今年冬天小白菜的價錢比去年冬天便宜 10%，去年冬天小白菜的價錢一斤 35 元，今年冬天小白菜一斤多少元？」

引導學生透過下列線段圖理解今年與去年小白菜的價錢關係，思考把去年小白菜價錢當作 1，今年價錢是去年的的 1 - 10%，也就是今年小白菜的價錢為 35×(1 - 10%)。



評量

評量重點：

1. 給定可比較的兩量，以一量為基準量視為 1，能求出另一量的相對比較量（比值）。
2. 若將基準量和比較量對調，知道前後兩比值的關係。
3. 能用基準量和比較量的概念協助解決應用問題。

N-6-9 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同 R-6-4）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。 **備註：**乘法原理如 3 件上衣與 5 件裙子的搭配方式；加法原理如允許重複，1、2、3 可排出幾種二位奇數；乘法原理與加法原理混合如 1、2、3 可排出幾種三位奇數。乘法原理和加法原理旨在初步學習計數的觀點，而非複雜的計數問題。本條目不要求併式。	n-III-10 r-III-3

先備：N-5-2。

連結：R-6-2、R-6-3、R-6-4（同）。

後續：A-7-2、A-7-4。

基本說明

1. 這是一個總結性的條目，應該連同 R-6-2 與 R-6-3 一起閱讀與進行教學。
2. 這是小學數學解題的總結性條目。針對生活中數與量的應用問題是和小學數學的學習一起進行的，從四則運算的問題、兩步驟問題、三步驟問題一直到各種「解題」條目、幾何問題。解決問題的步驟不外乎先察覺問題中的數量關係（R-6-2），將該關係表示成數學算式或公式（R-6-3），再運用所學進行計算並解決問題。比較基本的解題通常針對單一問題，例如「小明有 23 張遊戲卡，哥哥的遊戲卡比他多 12 張，小明的哥哥有幾張遊戲卡？」學生將問題嘗試轉化成數學算式 23+12，然後再計算得 35 張。但是高一級的解題活動，則是針對問題中的數量模式，將其中牽涉的數量關係轉化成關係式（公式，R-6-3），並運用來解題。例如計算三角形的面積，運用面積公式，可以解決諸多相關的問題。又晝長和夜長的總和是固定的 24 時，因此可得公式「晝長+ 夜長＝24」，這時不管是問夏至、冬至、春分、秋分或其他時間，都能進行多元的教學。

3. 一般來說，學生通常能處理已經清楚表示為算式或公式的問題。因此本條目更強調將問題轉化為算式或公式的部分。這部分的解題活動分成兩種，一種是基礎的，一種是進階的，兩者的教學目的不同。基礎的部分如 R-6-2 基本說明 3. 所建議的基本數量關係，學生應能察覺並建立自己的解題方式，這應作為本條目解題活動的基礎重點。
4. 本年度也應思考過程較複雜但學生仍能理解的進階解題活動 (如和差問題、雞兔問題等)，擴大學生運用數學解決問題的範圍。這部分解題強調的是思考問題中較複雜的數量關係，因此教學重點在學生能理解其中的分析策略，而非計算難度，不要求學生進行併式，也不要求學生建立快速解題的公式。
5. 解題教學應包含常用的計數原理 (這些原理就是問題的分析策略): 乘法原理、加法原理以及其混合型問題。

條目範圍

1. 基本說明 4. 中談及的進階性問題，在國中之後利用代數解題可能都很簡單，因此教師不應該要求學生在小學死背解題公式，應將重點擺在如何運用小學的知識分析問題，這是代數工具解題無法呈現的部分。
2. 計數原理的教學重點是學會分析的方法，而不是解繁雜的問題，建議教師教學需將問題最後呈現之算式限制在三步驟內 (亦即三連加、三連乘、或乘加混合三步驟)。

釋例

1. 以「差不變」的年齡問題為例 (結合 N-6-9, R-6-2, R-6-3)。下面例 1 和例 2 屬於基本數量關係，適合學生學習紀錄數量關係並做簡單應用。3.和 4.屬於較困難的解題，著重問題的分析策略，老師不應再發展公式的教學。

   (1) 例 1 :「小明 6 歲時，爸爸 34 歲，當小明 10 歲時，爸爸幾歲？小明 20 歲時呢？35 歲時呢？」

   如果只問第一個問題，學生把這個問題當作單純的加減混合問題：

   $10+(34-6)=10+28=38$，

   但是如果老師追問更多，學生就可能察覺其中隱含的數量關係。引導學生(譬如列表) 發現小明年齡和爸爸年齡固定差 28 歲的關係，請學生記錄這個關係？講講為什麼？學生可能有很多記法，如「爸爸年齡−小明年齡=28」、「小明+28=爸爸」等

   (2) 例 2 : (反過來)「爸爸 75 歲時，小明幾歲？」

   這個問題很簡單，由於學生已經抓到重點：爸爸和小明年齡固定差 28 歲，很多學生會直接正確的回答

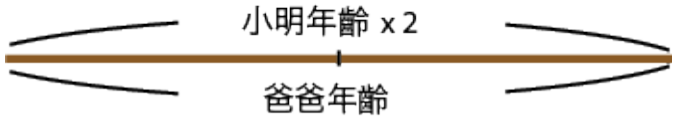
   $75-28=47$，

   鼓勵學生後，請學生在公式如「爸爸年齡−小明年齡=28」，把爸爸 75 歲寫入公式中，

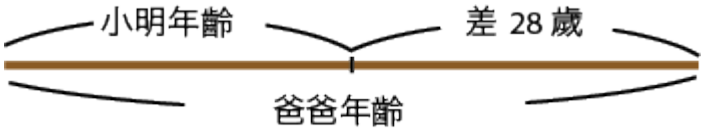
得到「75−小明年齡=28」，從加減互逆，也看出小明年齡等於 75−28=47。

(3) 例 3：(為年齡問題準備)「小明幾歲時，爸爸年齡是小明的 2 倍」

讓學生討論。重點是如何將「爸爸和小明年齡差 28 歲」的事實和年齡的倍數連結。可以用基準量和比較量的想法或直接用線段圖來檢視：



結合兩圖如下，可發現當爸爸年齡是小明 2 倍時，爸爸和小明年齡差正好等於小明的年齡，因此小明當時是 28 歲，爸爸是 56 歲。



● 類題：「小明幾歲時，爸爸年齡是小明的 3 倍?」

(4) 例 4：(年齡問題)「小芳 5 歲時，媽媽 25 歲，當媽媽年齡是小芳的 2 倍時，小芳幾歲？媽媽幾歲？」

有了前面的鋪陳，學生先計算媽媽和小芳的年齡差是 25−5=20 歲，當媽媽年齡是小芳的 2 倍時，如上討論，小芳的年齡是 20 歲，媽媽年齡 40 歲。

2. 底下說明小學教師比較不熟悉的加法原理和乘法原理的例子。

(1) 加法原理：可以把問題分成互不相干的部分再利用加法計數。

例：「如果不允許重複，0、3、6 可排出幾種二位偶數」。

在這個問題的條件下，偶數的個位數一定是 0 或 6 兩種，因此把問題分成「個位數為 0」時的 2 種 (30、60) 與「個位數為 6」時的 1 種 (36)，總共有 2+1=3 種排法。

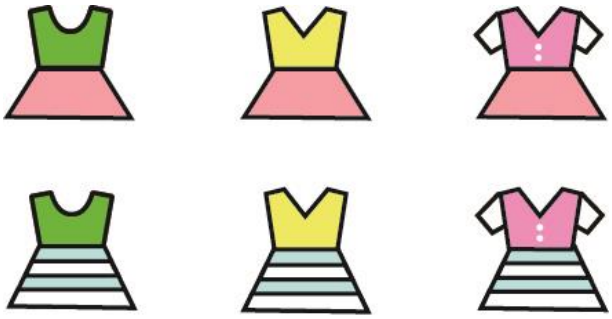
「加法原理」的「加法」指的是將問題分成無關的兩類：如本題的「個位數為 0」和「個位數為 6」，結果則是這兩類數目的和。

可以用「樹狀圖」作分析工具表示如下：

(2) 乘法原理。例：「3 件上衣與 2 件裙子的搭配有幾種方式？」

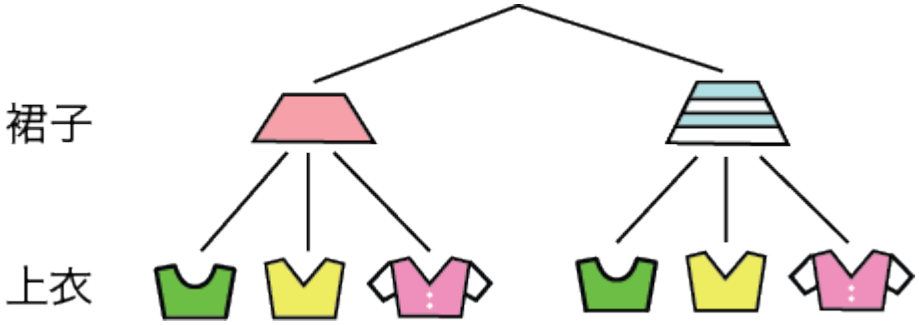
上衣：　　裙子：

這是乘法排列模型的重要應用，可以排成下圖。



所以是 3×2=6 或 2×3=6，有 6 種搭配方式。

就像乘法是加法同數連加的特殊情況，乘法原理其實也是加法原理的重要特例，因此也可用樹狀圖來分析：先分成 2 件裙子的兩種情況，每件裙子可搭配 3 件上衣，所以是 3+3=6，或 3×2=6。



● 類似的例子：

「3 種漢堡和 4 種飲料的搭配方式有幾種

「3 件上衣、2 件裙子、2 頂帽子的搭配方式有幾種？」

(3) 混合型。例：「如果數字可以重複，1、2、3 可排出幾種三位奇數？」

同上先分成「個位數為 1」和「個位數為 3」兩類。

「個位數為 1」時，十位和百位的「搭配」沒有任何限制，可用乘法原理計算得 9 種，即：111, 121, 131, 211, 221, 231, 311, 321, 331。

「個位數為 3」也一樣。即 113, 123, 133, 213, 223, 233, 313, 323, 333。

因此總數是 3×3 + 3×3=18 種。

* 這個問題其實也可以想成乘法原理的三步驟連乘，但只宜作為探索之用。

評量

評量重點：

1. 能解決一維模式之推理問題。

2. 能解決和不變、差不變（如年齡問題）、積不變、商不變的應用問題。
3. 能解決小學程度的加法原理與乘法原理應用問題。
4. 能解決小學程度的較難解題如雞兔問題、和差問題、流水問題等。

S-6-1 放大與縮小：比例思考的應用。「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。 **備註：**知道常見平面圖形的縮放仍然是同一類圖形（含圓），並能說明其原因。	s-III-7

連結：N-6-6、N-6-8、S-6-2。

後續：S-9-1。

基本說明

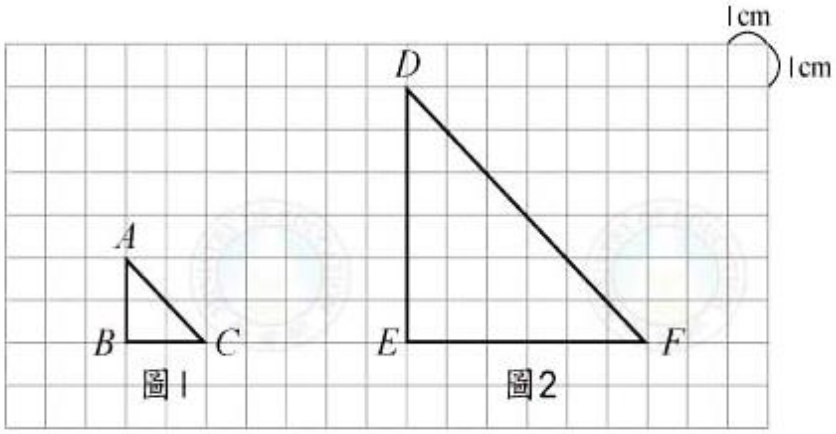
1. 圖形的縮放是除了全等、對稱之外的另一重要幾何概念，縮放後之圖形和原圖形的形狀相同，但大小不同。因此若能將真正圖形，經過恰當的放大（如細胞圖）或縮小（如地圖、照片），以常見的媒體（如紙、書面）來傳遞，在形體或幾何資訊的傳播與溝通上，是很常見而有效的方法。縮放後的圖形若能提供縮放的比，則更能協助讀者還原物體真實大小的資訊（見 S-6-2）。縮放是比和比值在幾何學習上的重要應用（N-6-6），也是日後平面幾何相似形的基礎（S-9-1）。
2. 教師可用手機縮放功能或照片，引導學生意識到這些媒體上的人物大小和實際大小不同。再利用影印機明示的縮放比率，讓學生實測幾何圖形縮放時的重要性質：縮放後的對應角不變，但對應點距離卻以固定的「比率」縮短或放大（「對應邊成比例」）。這個比率稱為縮放的倍率或縮放率，縮小時小於 1，放大時大於 1。學生應能辨識一圖形是原圖的「幾倍放大圖」或「幾倍縮小圖」。
3. 可將縮放的想法應用到平面圖形（包括圓與扇形），研究縮放對於平面圖形造成的影響，製作簡單的縮放圖。知道平面圖形的形狀並沒有改變，除了對應角、對應邊，也可討論對應面積的變化。

條目範圍

1. 由於縮放的倍率是由對應邊長的變化率來決定，因此教師應小心釐清，避免和圖形面積大小的變化率弄混。
2. 教師不應做出面積變化率是縮放率平方的形式結論，這項結果不是本條目的目標。

釋例

1. 教師帶領學生做簡單幾何圖形的影印縮放，把結果整理圖示如下，圖 2 是圖 1 的 3 倍放大圖。



（《部編本》11 冊 p.66）

先確認學生能理解 A 對應到 D 等等「對應點」的意義，再進行下面的活動。

(1) 觀察對應邊的變化：

「AB 邊放大後是那個邊？」(DE 邊)

「量量看，AB 邊多長？DE 邊多長？DE 邊長是 AB 邊的幾倍？」

同樣問題，可針對 BC 邊（甚至 AC 邊）再問一次。

最後確定，放大後對應邊的長度都是原來的 3 倍。(「對應邊成比例」)

(2) 觀察對應角的變化：

「量量看，角 A 是幾度？角 D 呢？一樣嗎？」對角 B、角 C 重複做一次。

最後確定放大前後，對應的兩角都相等。(「對應角相等」)

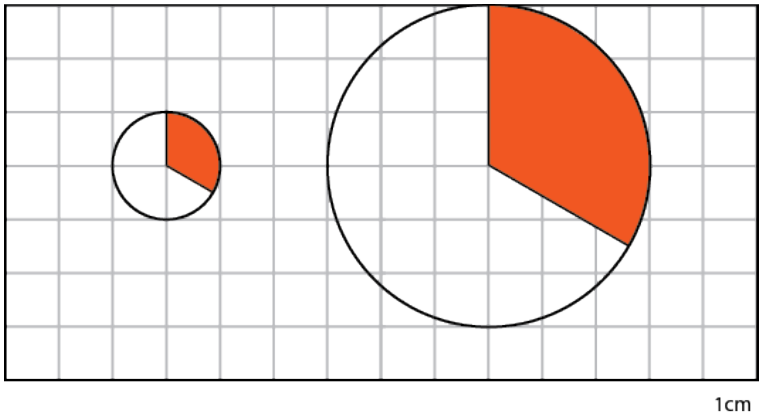
若還有教學時間，可讓學生討論 / 計算面積的變化，但不用作形式結論。

2. 從「對應邊成比例」和「對應角相等」，可以推理知道三角形、四邊形、正多邊形縮放後大小不同但形狀相同。

「正三角形縮放後還是正三角形嗎？」雖然學生可以透過實測，但是也要請學生推理，直接說明理由，例如「因為三邊相等的三角形縮放後的三角形三邊仍然相等，所以正三角形縮放後還是正三角形」

- 重點：因為所有刻畫特殊平面圖形的條件都是邊角關係，所以只要掌握邊角的變化狀況，就能做判斷。

3. 學生也應該知道，圓形和扇形的縮放圖形，仍然是圓形和扇形。



(1) 圓：可以用圓規檢查圓縮放後還是園，並知道半徑成比例的縮放，如本圖是放大成 3 倍。

(2) 扇形：由於扇形是圓的一部份，很容易就知道扇形縮放之後還是扇形，半徑成比例縮放，而且圓心角不變。如圖「$\frac{1}{3}$ 圓」縮放後仍然是「$\frac{1}{3}$ 圓」。

錯誤類型

縮放率指的是邊長變化的倍率，不是面積變化的倍率。

評量

評量重點：

1. 認識縮放與縮放倍率的意義。
2. 平面圖形之縮放圖形，其對應角相等，對應邊成比例。

S-6-2 解題：地圖比例尺。地圖比例尺之意義、記號與應用。地圖上兩邊長的比和實際兩邊長的比相等。 **備註：**含處理兩張地圖之間的長度關係。處理以為「比例分母愈大，相對邊長也愈大」的常見錯誤。	n-III-9 s-III-7

連結：N-6-6、S-6-1。

基本說明

1. 地圖的使用是縮放概念的重要應用。除了一般地圖之外，這裡的應用也包括各種大型地域的縮小圖，如房間設計圖、學校平面圖、樓層平面圖等。地圖和一般縮放圖如照片最大的差別，是圖上要附上縮小比率的資訊，也就是地圖的比例尺，讓使用者可以實際還原實際地域的大小。教師應教導學生認識地圖比例尺的常用表示法，並說明其意義。
2. 本條目之教學，除了充分學習原物長度、圖示長度、比例尺之間的關係之外。應該也要包括解決延伸的幾何問題如實際區域面積的大小；地圖上長度彼此之比例和實物對應長度彼此之比例相同，因此不需透過還原原來長度，便能直接由地圖讀出長度彼此之比例；同一

實物的兩張地圖，其對應長度比例和兩地圖比例尺之間的關係。

條目範圍

1. 兩張不同比例尺的地圖，學生常有「比例尺分母愈大（假設分子為 1），相對邊長也愈大」的常見錯誤。
2. 地圖上區域面積隨比例尺而有之平方變化，處理方式同 S-6-1，可計算，但不做形式結論。

釋例

說明**備註中的**「含處理兩張地圖之間的長度關係。」

例 1：「一個遊樂區有兩張地圖，在比例尺 1:1500 的甲圖上，快樂大道長 20 公分，在另一張比例尺 1:5000 的乙圖上，快樂大道長幾公分？」

這是地圖比例尺學習的應用，遊樂區因為使用目的不同，有時會提供不同比例的地圖。

先算快樂大道的真正長度：

$$20\times1500=30000$$（公分），也就是 300 公尺長，

再算快樂大道在乙圖上的長度：

$$30000\div5000=6$$（公分）。

答：6 公分。

- 教師再問幾次後學生會發現，甲圖長度(用□表示)變成乙圖長度的計算都和上面一樣，是

$$\square\times1500\div5000=\square\times\frac{1500}{5000}=\square\times\frac{3}{10}$$，

因此在重疊區域，乙圖是甲圖的 $\frac{3}{10}$ 倍縮小圖，或甲圖是乙圖 $\frac{10}{3}$ 倍放大圖。

- 教師可以問問看，我們可不可以從甲圖的比例尺「1:1500」和乙圖的比例尺「1:5000」，直接判斷「同樣的區域，在哪張圖看起來會比較小？」「乙圖是甲圖的幾倍縮小圖？」教師提醒學生比例尺分母（或比值的分母，這裡都假設分子為 1）越大，表示整個分數越小或倍數越小，因此是縮得越小的意思。

錯誤類型

兩張不同比例尺的地圖，學生可能有「比例尺分母愈大，相對邊長也愈大」的錯覺。

評量

評量重點：

1. 認識地圖比例尺之意義與記號。
2. 能透過地圖比例尺還原實際物件之尺度大小。
3. 知道地圖上長度彼此之比例和實物對應長度彼此之比例相同。

S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：（1）圓心角：360；（2）扇形弧長：圓周長；（3）扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用（1）求弧長或面積。 **備註：**由於圓周率取成 3.14，在計算時應以概念理解為原則，避免陷入複雜計算。可利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計，但不評量。扇形面積與弧長只處理直接問題(如已知幾分之幾圓或圓心角求面積或弧長)，不處理逆推或過多推理步驟的問題（屬於國中範圍，S-9-5）。	s-III-2

先備：S-5-3。

連結：N-6-3、N-6-4、N-6-6、D-6-1。

後續：S-9-6、S-9-7。

基本說明

1. 圓的周長和面積都牽涉到無理數圓周率，說明圓面積的過程更牽涉到無窮過程，這些都遠超出小學生的理解。因此這一部份的教學重點是合理而直觀的說明，讓學生相信其合理性。
2. 介紹圓周率可以實測圓周長與直徑的比值(S-5-3)，發現這個比值大致上是一個定數，教師可告知這就是圓周率，大概等於 3.14。而且由這個過程，同時得到圓周長公式

   圓周長=圓周率×直徑 或 圓周長=2×圓周率×半徑。
3. 圓面積的說明應由教師主動引導，運用扇形的分割合理說明圓面積應等於半徑×（圓周長÷2），進而得到圓面積公式：

   圓面積=圓周率×半徑×半徑。
4. 善用 S-5-3 建立扇形和幾分之幾圓的連結，在給定幾分之幾圓的前提下，知道弧長和圓周長的比值、扇形面積和圓面積的比值都是這個「幾分之幾」。例如¼圓的扇形弧長是圓周長的¼；扇形面積是圓面積的¼。然後再討論給定圓心角要如何求得扇形的弧長和面積。
5. 學生應知道下面三個比相等

   圓心角：360=扇形弧長：圓周長=扇形面積：圓面積。

條目範圍

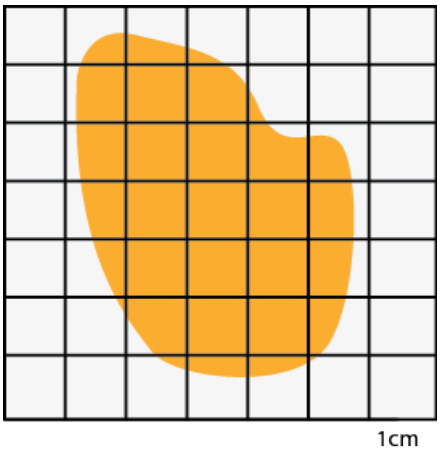
1. 由於本條目所有周長、弧長和面積都牽涉到圓周率 3.14，因此教學應以概念理解為主，計算上力求易算易懂，避免陷入複雜的計算，反而傷害概念的理解。
2. 本細目牽涉到的說明比較抽象，教師應把教學重點在基本概念的理解，不要做太難或太複雜的問題，更不需要窮盡所有題型。例如扇形面積與弧長只需要處理直接的問題，如從已知幾分之幾圓或圓心角求扇形面積或弧長，不需要處理逆推或過多推理步驟的問題(S-9-6、S-9-7)。
3. 扇形周長並非重要概念，教學不用過份強調，更不需要建立公式。

4. 針對一般不規則區域的面積應如何理解和估計，教師可進行教學活動讓學生理解，但不評量。

釋例

當完成本條目的必要教學後，若仍有教學時間，可以探討掌握不規則區域面積的一般策略，這個策略有助於學生不會一味將面積連結到簡單幾何圖形的面積公式，可以更有彈性的掌握面積概念。但是此教學活動需要相當的教學時間，而且成效不如一般公式明快，教師應抓緊最核心的概念引導，不讓教學結果和過程都顯得瑣碎。

活動：拿出一不規則圖形（橘色圖卡，如圖），用格長一公分之透明格圖罩住此圖形。



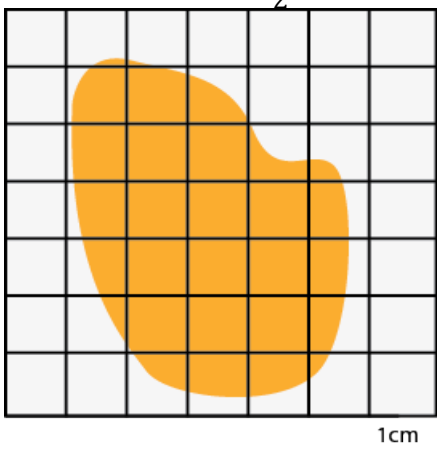
- 請學生點數「在橘色圖卡內的小正方格數目」。某些連接邊界處，有時會有爭執，教師溝通完畢後，確定答案（如本題是 11 個正方格）。
- 問學生「橘色圖卡的面積比 11 平方公分大還是小？」

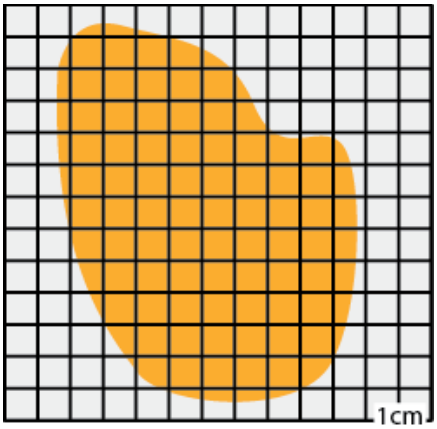
  橘色圖卡面積 ＞ 11 平方公分
- 請學生點數「和橘色圖卡有接觸的小正方格數目」。教師溝通完畢後，確定答案（如本題是 31 個正方格）。
- 問學生「橘色圖卡的面積比 31 平方公分大還是小？」

  橘色圖卡面積 ＜ 31 平方公分
- 告訴學生把「半灰半橘」的格子一律算成半格（$\frac{1}{2}$ 平方公分）。和學生討論得出大致結論：橘色圖卡面積大概是

  $11+\frac{1}{2}\times(31-11)=11+10=21$（平方公分）。

- 將透明格圖稍微移動一下(下左圖)，請同學重複上面步驟，看看得出的結果是否接近。參考答案：$10+\frac{1}{2}\times(29-10)$ =10+9.5=19.5 (平方公分)。





- 教師拿出上右圖，說明格子已經分得更細，每一格邊長是 0.5 公分，問現在每一格的面積是多少？ (0.25 平方公分)。請學生發表，「如果重複上面的作法，算出來的面積是不是會更準。」如果時間夠，可請學生執行一次。
- 教師最後可以做結論，像圓這樣的圖形，也可以用這樣的方式來估計面積，但因為圓的形狀很優美，我們才能藉由圓周率得知圓準確的面積公式。

評量

評量重點：

1. 認識圓周率，並能計算圓周長與圓面積。
2. 知道並能運用「圓心角：360=扇形弧長：圓周長=扇形面積：圓面積」。
3. 能從扇形的圓心角 (或幾分之幾圓) 與半徑，計算扇形弧長與面積。

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積 = 底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。 **備註：**柱體體積不用說明所有情況，即可告知體積公式為底面積×高。柱體限三角柱、四角柱、圓柱。複合形體之體積以兩形體組合為限。柱體表面積只處理底面為圓、長方形、直角三角形、平行四邊形的情況，且應注意底面邊長的正確性。表面積不宜過度評量。表面積不處理複合形體。	s-III-4

先備：S-5-7。

連結：S-6-3。

基本說明

1. 柱體限三角柱、四角柱、圓柱。利用 S-5-2 用切割求三角形或四邊形面積的手法，說明柱體的體積是

   柱體體積=底面積×高，

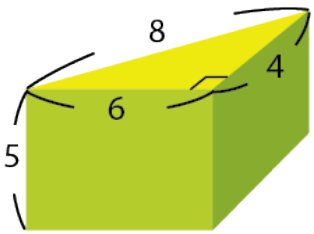
   並反省長方體或立方體視為柱體時，其體積公式也可這樣解釋。圓柱體的體積雖然原則上也可用圓面積的方式解釋（S-6-3），但若教具製作不易或說明困難，也不妨直接告知。
2. 用觀察柱體的方式或用柱體展開圖（尤其是圓柱體）來說明柱體表面積的計算方式。柱體的表面積處理原則和長方體相同，應視為較複雜的複合圖形，不需記為公式，也不要使用太多分數或小數。
3. 處理複合形體時，以兩形體組合為限，而且只處理較簡單的體積問題。學生應學習分析和切割的策略。

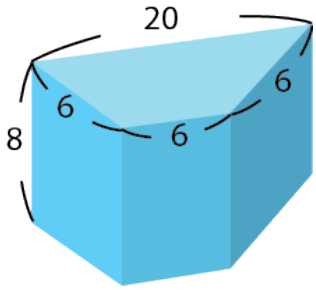
條目範圍

1. 體積的處理不用如 S-5-7 說明所有情況，即可告知體積公式為底面積×高。
2. 表面積建議只處理底面為圓、長方形、直角三角形、平行四邊形的情況。由於計算繁複，表面積題材不宜過度評量。表面積不處裡複合形體的問題。
3. 角柱表面積之評量布題，教師應注意側面面積牽涉到底面之邊長，因此應特別留意底面邊長之正確性，避免出現不可能存在之底面。

釋例

角柱表面積的問題不宜過度評量，主要是計算繁重（如果加上小數尤然），但另一方面表面積問題牽涉到底面邊長是否正確的問題，教師評量必須小心。底下是兩個「錯誤」的例子。





其中左圖違反畢氏定理，右圖違反「兩邊和大於第三邊」的四邊形推廣。

評量

1. 能計算角柱和圓柱的體積。
2. 能計算簡單複合形體的體積。

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。 **備註：**須理解小數和分數乘除混合計算時，常用的約分規則。在生活解題上，乘法和除法意義不同，但在計算上兩者實為一體，學生因此可提高數學認識之抽象層次。乘法和除法視為一體的好處是計算規律大為簡化。本條目不須另立獨立單元教學。	r-III-2

先備：R-4-2、R-5-2、N-5-5、N-5-6、N-5-7。

連結：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

後續：N-7-3、N-7-4。

基本說明

1. 小學結束前，學生應該逐漸對數有一個整體感，知道數分享同樣的運算，也有一樣的運算規則。因此到了小學後期，當學生逐漸理解分數和小數的四則運算之後，就應該同時發展整數、小數、分數混合在一起的問題。(N-6-3)
2. 小學結束前，教師應該以教學讓學生意識到整數很多乘除計算規則(R-4-2、 R-5-2)，一旦用分數來表示，會變得理所當然，而且在計算過程中還可以運用分數約分的技巧來簡化計算。例如 $a \div b \times c = a \times c \div b$ 之類的問題，若用分數表示就是簡單的 $\frac{a}{b} \times c = a \times \frac{c}{b}$，同時也可由此得知 $a \div b \times c = a \times (c \div b)$。又例如計算

   $132 \div 11 \times 22 = 132 \times \frac{22}{11} = 132 \times 2 = 264$。
3. 在學完分數除法之後，學生應慢慢感受到分數的乘除計算其實都可化為乘法來進行，因此乘除實為一體，並可以應用來協助整數計算。這樣做的好處是整個簡化了乘除計算的複雜性，因為乘法對學生而言相對簡單。例如

   $132 \div 11 \times 22 = 132 \times \frac{1}{11} \times 22 = 264$　　或

   $126 \div 7 \div 3 = 126 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} = 42 \times \frac{1}{7} = 6$。
4. 本條目也包括整數、分數和小數乘除混合計算時，常常用到的約分規則。如

   $1.2 \div 8 = 1.2 \times \frac{1}{8} = 0.3 \times \frac{1}{2} = 0.15$，

   $14 \div 0.4 = 14 \times \frac{10}{4} = 7 \times 5 = 35$。

條目範圍

1. 本條目是一個整體的檢查條目，其相關內容應分散在各單元中完成。
2. 教師不需要特別進行抽象的推導，反而應該在相關單元的教學中，利用適當的布題，讓學生意識到這樣的作法簡化了計算過程，因此樂於應用。規則本身不需進行評量。

3. 加法和減法的一體化，必須等國中引入負數後才能實現（N-7-3、N-7-4）。
4. 本條目的要求和 N-6-5 不同，本條目強調的是運算的規律，而 N-6-5 則強調三種數混合的應用解題。

評量

評量重點：

1. 能熟練整數、分數、小數的混合計算。
2. 能用整數相除的分數表示以及分、小數乘除規則協助整數乘除算式的計算。

R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明。 **備註：**可以運用表格或統計圖協助發現規律。可以簡單公式說明其中的數量關係。	r-III-3

先備：R-3-2、R-4-4。

連結：N-6-9(R-6-4)、R-6-3。

後續：A-7-2、A-7-4。

基本說明

1. 這是一個檢查條目，應該連同 N-6-9 與 R-6-3 一起閱讀與進行教學，尤其建議先閱讀 N-6-9 之基本說明 2.、3.。數量關係的察覺與建立其數學算式表示是代數與函數的前置經驗。
2. 面對生活中與數學相關的應用問題，第一步是要察覺其中所牽涉到的數量關係。從二年級起：四則運算的問題、兩步驟問題、三步驟問題、各種「解題」條目、統計圖報讀，都已經讓學生從主題的側面，學習主動察覺問題中的數量關係。下一步驟則是將這些數量關係表示成正確的算式（見 R-6-3）。
3. 生活中常見的數量關係，有時更強調的是一種整體變化的模式（R-3-2、R-4-4 讓學生練習主動察覺這些模式的存在），理解某一類問題的變化模式，讓學生不只解決單一問題，也能解決相關的問題。底下是利用四則運算最簡單的一些模式：
   (1) 和不變：例如晝長與夜長的和是 24 小時；家庭一個月的花費預算固定不變；電影院的座位數總和不變等等。
   (2) 差不變：例如小英和她父親的年齡差是固定的（年齡問題）；如果發車間隔固定，不同班次的時間差是固定的；如果兩車速度相同，則兩車行走距離差固定；若教室每排座位數固定，學生依編號入座，則排頭的編號差是固定的等等。（可引伸到等差的模式）
   (3) 積不變：例如總飲料量固定，每杯飲料的容量和杯數的乘積不變；存錢目標固定，每天存錢數和達標天數的乘積不變；距離固定，則速度和時間的乘積不變；工程總量固定，人數和天數的乘積不變；三角形面積固定，長和高的乘積不變；柱體體積不變，底面積和高的乘積不變等等。（所謂反比關係 N-7-9，小學不出現此名詞）

(4) 商不變：任何比和比值中相等比的問題，都是商（比值）不變的典型問題，例如物品價格、速度、濃度、利率等若固定，都是商不變的問題。(所謂正比關係 N-7-9，小學不出現此名詞)

條目範圍

1. 學生在察覺數量的關係後，應鼓勵學生表達與推理。若學生想用某種公式來說明，教師應予以提示與鼓勵（見 R-6-3）
2. 基本說明（3）只提供常見的模式，教師也可斟酌提供更多的問題，如線性關係（簡化的計程車價、電價等），這時運用表格或統計圖可以更清楚察覺出其中的規律。本條目的重點是察覺數量關係，教師不要轉化成函數與函數圖形的教學。
3. 利率、物價指數這些引伸出等比模式的問題，在小學可不處理。

釋例

本條文釋例請參見 N-6-9 釋例 1.。

評量

1. 評量重點：
   能察覺具體情境或數量模式問題中的數量關係
2. 評量注意事項：
   本條目為檢查條目，應和其他條目一起評量。

R-6-3 數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。 **備註：**數量關係的表示例如：晝長夜長的關係可列成晝長+夜長=24。連結 R-6-2。含部分運用符號的教學，連結國中「符號代表數」或「未知數」教學，其教學重點在「關係的表示」，而非抽象的「代數符號演算」。	r-III-3

先備：R-4-3、R-5-3。

連結：N-6-9(R-6-4)、R-6-2。

後續：A-7-2、A-7-4。

基本說明

1. 這是一個總結性的條目，應該連同 N-6-9 與 R-6-2 一起進行教學，尤其建議先閱讀 N-6-9 之基本說明 2.、3.。數量關係的表示是代數與函數的前置經驗，因為方程式和函數都是因為要描述某種問題中的數量關係而建立的。
2. 在四、五年級，學生已經學習過某些數量關係的公式表示（R-4-3、R-5-3），本年度教師應更加鼓勵學生自己將發現的規律表示出來，因此引導的問題應盡量容易，例如 R-6-2 基

本說明(3)中的四則關係就比較容易。例如晝長和夜長的總和是 24 時。因此可表示成「日+夜=24」、「白天+晚上=24」、「晝長+夜長=24」、「W+B=24」，重點在於學生用自己的語言去描述這樣的規律，並能運用於解題（N-6-9、R-6-4）。

條目範圍

1. 教師可選擇部分課題，進行運用「符號表示公式」的教學，這比用「文字表示公式」抽象，但也更接近國中代數用「符號代表數」或「未知數」的教學。教學或活動時，教師務必與學生清楚約定符號的意義（就像面積教學時，符號可以清楚出現在圖中。）
2. 表示公式時，不必在意符號數目的多寡，一切以「清楚表示數量關係」為原則，這裡不是進行多變數的方程式教學，教師尤其不要進行抽象的「代數符號演算」。
3. 當問題相對複雜時，則不強求學生把問題分層記成許多關係式（不予評量），更不可進行這些抽象關係式的演算。

釋例

本條文釋例請參見 N-6-9 釋例 1.。

評量

1. 評量重點：
   能將觀察到數量關係用文字或符號表示出來，並可與他人溝通。
2. 評量注意事項：
   本條目不用過度評量，尤其不做算式符號的運算。

R-6-4 解題：由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題（同 N-6-9）。可包含（1）較複雜的模式（如座位排列模式）；（2）較複雜的計數：乘法原理、加法原理或其混合；（3）較複雜之情境：如年齡問題、流水問題、和差問題、雞兔問題。連結 R-6-2、R-6-3。 **備註：**複雜解題旨在思考，不要求步驟的併式。其他見 N-6-9 備註。	r-III-3 n-III-10

同 N-6-9。

D-6-1 圓形圖：報讀、說明與製作生活中的圓形圖。包含以百分率分配之圓形圖（製作時應提供學生已分成百格的圓形圖。） **備註：**處理部分/全體性質之資料。分辨不同統計圖之使用時機。	d-III-1

先備：D-4-1、S-5-3、N-5-10、D-5-1。

連結：S-6-3。

後續：D-7-1。

基本說明

1. 圓形圖是常見的統計圖表，只要使用者重視的是資料的相對比率，都可以使用圓形圖。將整個圓視為整體（1、100%），將各資料之比率轉化成幾分之幾圓的扇形來表示。圓形圖可以很容易看出各資料之相對比率，而且無論是用幾分之幾圓、圓心角、面積的觀點去看，相對比率皆相同，不像長條圖（折線圖）有面積取代長度之誤導謬誤，是很理想的工具。
2. 圓形圖的標示和長條圖與折線圖差別較大。但仍應有基本的元件如圖的名稱，分類名稱，以及表示各組資料的數值，可以是用原始資料之數字，也可以用部分佔全體之比率表示，如分數、化成同分母之分數、百分比，或兩者並用。
3. 製作圓形圖，必須先算出各組資料所佔的比率（N-5-10），再轉換成圓心角才能製圖（S-5-3 扇形），因此圓形圖教學最好安排於扇形相關單元之後再進行（S-6-3）。
4. 由於這是小學最後一條與統計圖表有關的條目，我們建議教師或教科書在安排時，能針對迄今所學的不同統計圖──長條圖、折線圖、圓形圖──做一綜合整理，讓學生能正確分辨不同統計圖之使用時機。

條目範圍

1. 繪製圓形圖若採用百分率，應有對應教具如已分成百格的圓形圖方便繪製。
2. 在實際製作圓形圖時，無論運用百分比或圓心角都免不了有四捨五入取概數時總和不是剛好 100% 或 360 度的問題，建議教師或教科書安排資料數值時，應先避免這種情況，讓學生清楚學習其概念與方法。
3. 學生會製作圓形圖後，教師可以結合學生資訊電腦相關課程或能力，學習透過學校常用軟體製作圓形圖，其中包括設定折線圖之基本元件如分類組別、數量（比率）、圖表名稱、兩軸單位與說明。

釋例

六年級課程安排，可將小學學過的各種統計圖彙整，舉例說明各種圖表的使用時機：

(1) 圓形圖：適合看出全體中每一部分所占的份量，常常以比率或百分率來表示。譬如整理生活中的資料時，可以運用圓形圖來表示每日作息時間分配的百分率（圖 1），麵包的銷售率（圖 2）等。

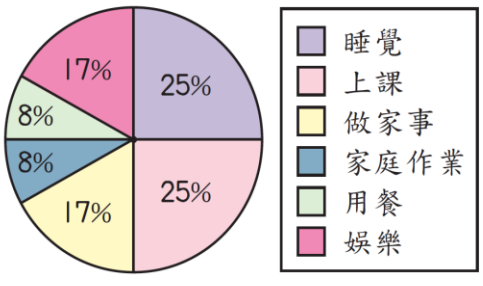


圖1

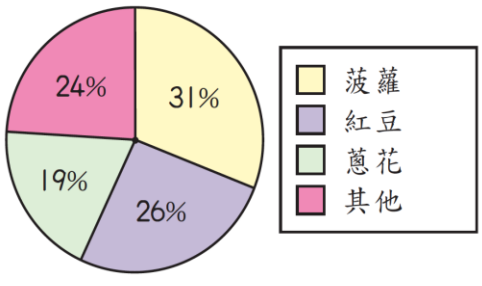


圖2

(2) 折線圖：適合呈現資料的變化趨勢或表現兩組數量的依賴關係。譬如熱量隨時間消耗的變化（圖 3）、鞋子的年度銷售額（圖 4）等。

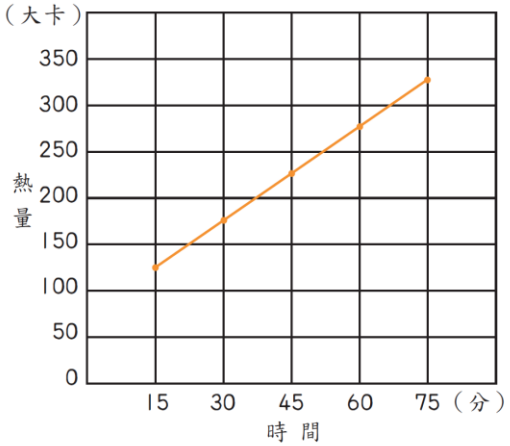


圖3 溜直排輪熱量消耗折線圖

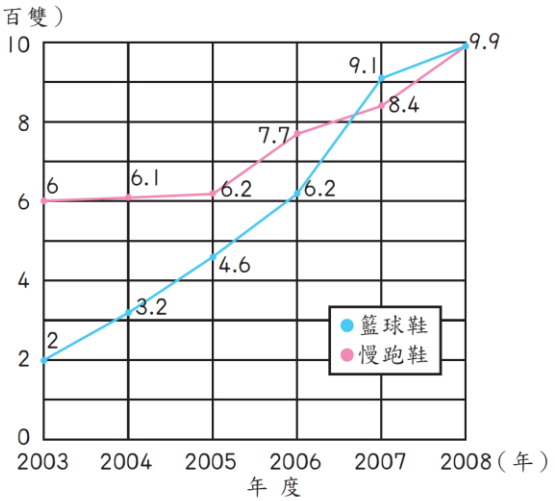


圖4 鞋類年度銷售數量折線圖

(3) 長條圖：長條圖是最簡單的統計圖，呈現不同分類或變項的數量，適合單純表示數量與比較大小時使用。長條圖用等寬長方形的高度或長度來標示不同變項的數字值，長方形可以畫成垂直或水平方向。下面用這兩種不同的長條圖呈現某家車商不同顏色汽車的銷售額（圖 5），小圖 (a) 是垂直長條圖，(b) 是水平長條圖。

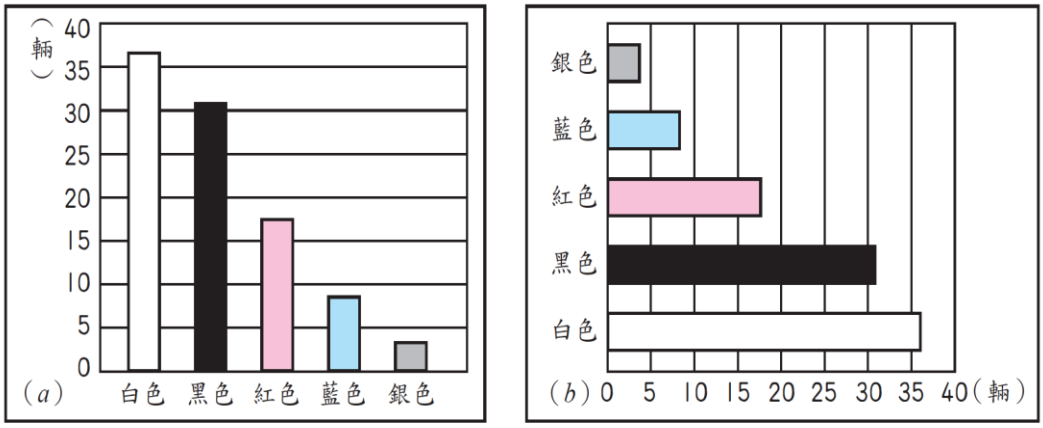


圖5 不同顏色汽車的銷售長條圖

＊長條圖呈現的分類/變項資訊有時不見得是完整的。如果圖 5 中該廠汽車的顏色分類是完整的，就可以將這些數據改用圓形圖來呈現，看出單一顏色車子銷售量占總銷售量的比率，這是圓形圖的長處，也是本條目要學習的重點。

評量

評量重點：

1. 能報讀圓形圖。
2. 能製作圓形圖。

D-6-2 解題：可能性。從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A比B可能」。 **備註：**「A比B可能」限兩者差異大的情況。僅從資料數量的多寡來回答。本條目非古典機率教學（D-9-3）。	d-III-2

先備：D-4-1、N-5-10。

連結：D-6-1。

後續：D-9-2、D-9-3。

基本說明

1. 本單元是小學資料單元的應用，藉由整理資料所得之表格或統計圖（長條圖或圓形圖），判斷某一種分類出現的可能性很高（「非常有可能」）或很低（「非常不可能」），某種分類出現的「可能性比較大」或「可能性比較小」。這是機率學習（隨機性數學或不確定性數學）的前置經驗。
2. 學習機率（可能性）真正困難的地方是體會不確定性，而非表面上數字的比較，這些體會或許來自日常生活常見的重複經驗，不然就得基於多次重複的活動經驗才能感受。問題是教師若要安排可行的活動，既不能重複太多次（妨礙上課），又得盡量不會出錯（隨機性學習的最大困難就是結果和數字衝突）。因此建議必須使用比較極端的數據分布為原則，讓學生能體認到這些結果是理所當然，容易溝通與發表自己的看法。
3. 基於以上的原則，小學生對可能性的察覺與感受，應從比較極端的頻率（比率）分布開始，比率接近1，就是「非常有可能」但「不是一定能」；比率接近0，就是「非常不可能」但「不是一定不可能」（見釋例）。這些經驗可應用到日常生活（學生不需要知道數字的來源），例如明天下雨機率是95%，表示非常可能下雨。
4. 學生也可用頻率（比率）的大小來比較可能性的大小。但基於2.的原則，必須讓學生容易感受「可能性比較大」的意思。因此建議應該在頻率相差比較大的時候才進活動（見釋例）。
5. 雖然學生往往會把可能性和數字相對應，就結果而言，這也無可厚非。但不確定性的教學，重點要擺在讓學生確實察覺：有些事情的確「很有可能」發生，但仍然有可能不發生；有些事情的確「很不可能」發生，但仍然有可能會發生；「A發生的可能性比B大」並不表示A一定發生，B一定不發生。

條目範圍

1. 建議教師或教科書把活動中的「非常有可能」的門檻設在95%以上，「非常不可能」在5%以下，「A比B可能」設在A的比率減去B的比率超過60%。注意：教科書和教師不可把以上教學約定視為數學知識，教導給學生。這些約定只是為了學生易於感受或活動容易進行而已。

2. 不要一開始就把本條目的活動簡化成數字的比較或進行古典機率（D-9-3）教學，這無法達成本條目感受可能性的目標。另外，教師最多只可安排一兩次的驗證活動，因為這些活動很花時間，也有可能出現出乎意料的結果，教師如果沒有把握解釋，不宜進行。
3. 本條目的重點不是機率教學，所以教師不需要進行 100% 就是「一定會發生」的活動，0%就是「一定不會發生」的活動。前者無聊，後者無理頭，而且都和「不確定性」無關。若考慮「百分之百會發生」的日常口語，則告知或簡單解釋即可。

釋例

1. 「六年級 200 人參加期末抽獎，設頭獎 1 名、二獎 2 名、三獎 3 名，其他都是參加獎。」教師可製作表格、長條圖或圓形圖表示得獎的人數分布如下

獎別	頭獎	二獎	三獎	參加獎
人數	1	2	3	194

也可換成百分比率的表格、長條圖或圓形圖，

獎別	頭獎	二獎	三獎	參加獎
比率	0.5%	1%	1.5%	97%

* 長條圖或圓形圖報讀不易，但有強烈的視覺效果

(1) 找學生問以下的問題

「你覺得某某人會抽到參加獎的可能是：□非常有可能　□非常不可能。」

「你覺得某某人會抽到頭獎的可能是：　□非常有可能　□非常不可能。」

*「非常有可能」可以替換成「很有可能」或較抽象的「可能性很大」;「非常不可能」可以替換成「很不可能」或較抽象的「可能性很小」。

(2) 接著可以和學生討論下列問題：

「你一定不會抽到頭獎嗎？」(「很不可能」和「一定不能」是不一樣的)

「你一定會抽到參加獎嗎？」(「很可能」和「一定能」是不一樣的)

讓學生說明為什麼不是「一定不能」或「一定能」。當然學生可能只回答「不一定」，可以再進行 3．的問題，迫使學生釐清。

(3) 請學生確切回答下列問題

「從這個表格，你覺得抽到參加獎的可能性是：

□很有可能　□一定能　□很不可能　□一定不能」

「從這個表格，你覺得抽到頭獎的可能性是：

□很有可能　□一定能　□很不可能　□一定不能」

(4) 然後針對二獎和三獎問類似的問題(暫時不做比較)。讓學生察覺可能性並不是鎖定在固定的數字上。

2. （續上題）進行可能性的比較教學。

(1)「抽到參加獎的可能性：

□比抽到頭獎大　□比抽到頭獎小」。

(或「□更可能抽到參加獎　□更不可能抽到參加獎」)

「抽到二獎獎的可能性：

□比抽到參加獎大　□比抽到參加獎小」。

(2) 接著，再和學生討論，「抽到參加獎的可能性比抽到頭獎大」(或「更可能抽到參加獎」)表示「一定會抽到參加獎」嗎？「抽到二獎獎的可能性比抽到參加獎小」(或「更不可能抽到二獎」)，表示「一定不會抽到二獎」嗎？

(3) 老師不需進行「抽到三獎」和「抽到一獎」的可能性比較活動，因為學生頂多只是看著數字回答，要安排活動驗證也很「危險」。

3. 教師如果對「不確定性現象」不太理解，千萬不要進行檢驗的活動，免得陷入無法回答的窘境。例如底下活動「蠟筆盒中放 2 支白筆、8 支黑筆」，大家抽抽看，看看是不是抽到黑筆的情況較多？」

(1) 不要宣稱或檢查結果是不是 20 和 80%(通常都不會)，只要檢查「少」和「多」即可。

(2) 雖然通常抽到黑筆比白筆的次數多，但萬一出現抽到白筆比抽到黑筆的次數多的情況，要能說明：「白筆比黑筆的次數多」是「很不可能」的，但不表示「一定不可能」發生。

錯誤類型

1. 在比率很接近 1 時，學生可能會堅持「一定會發生」，教師可釐清「一定會發生」表示不可能發生別的情況，再和原問題比較。例如釋例 1 的例子，若學生說「大家一定會抽到參加獎」可請他想像某同學抽到頭獎的可能情境，或請他想想，抽完獎是不是一定有人會抽到頭獎或二獎或參獎。

2. 在比率很接近 0 時，學生可能會堅持「一定不會發生」，處理方式同前。

評量

評量重點：

1. 能從統計圖表回答「很有可能」或「很不可能」的問題。

2. 能從統計圖表回答「A 比 B 可能」的問題。

二、國民中學教育階段

國中階段特別說明

針對國中階段的學習內容條目，敘寫方式均以三大段落分析說明，如下所述。

第一段落：本段落說明該條目的先備知識、該年級相關題目、以及其後續概念發展的條目。其中涵蓋的細項說明如下:「先備」是指該條目之先前的相關學習內容條目，以前一年為主;「連結」則表達同年級相關的學習內容條目;「後續」為往後概念發展的條目，以後一年之學習內容為主。

第二段落：本段落陳述該條目的主題內容與限制、教師的教學策略與方法、學生的錯誤類型與迷思概念。其中涵蓋的細項說明如下:「基本說明」乃描述該條目的教學目標，包含數學概念，定義說明、定理、習慣性用法;「條目範圍」則敘述教學之合理範圍;「釋例」以陳述教師的教學為主，包括教學注意要點、多種解法、教學策略、重要釋例;「錯誤類型」為表達學生的迷思概念，包括出現頻率高的認知與錯誤類型。

第三段落：本段落提供評量注意要點、探索與奠基建議活動。其中涵蓋的細項說明如下:「評量」描寫評量的注意要點及限制;「探索」則會提供該條目課程延伸之學習活動，包括探索活動、奠基活動、以及操作性教學活動建議。

最後，倘若該條目主題的段落細項並無相關內容可供表達，則省略不寫。

7 年級學習內容解析

N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。	n-IV-1

先備：N-6-1。

連結：N-7-2。

基本說明

1. 若一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，沒有其他因數，則稱此數為質數。
2. 若一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，還有其他因數，則稱此數為合數。
3. 正整數 1 既不是質數，也不是合數。
4. 能檢驗 100 以內的任何正整數，哪些是質數，哪些是合數。
5. 正整數 2、3、5、11 的倍數判別法。

釋例

判斷 13 是否為質數？

需要檢查大於 1，小於 13 的整數，是否為 13 的因數。首先，2 不是 13 的因數，所以 4、6、8、10、12 也不是 13 的因數；其次，3 不是 13 的因數，所以 9 也不是 13 的因數；最後 5、7、11 也不是 13 的因數；所以 13 的正因數只有 1 和 13 本身，故 13 是一個質數。

錯誤類型

學生可能會有認為 1，91 都是質數的迷思概念。

N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	n-IV-1

先備：N-6-1、N-6-2。

基本說明

1. 在正整數的範圍中，理解正整數的因數、質因數、倍數、公因數、公倍數以及質因數分解等。
2. 質因數分解：將一正整數完全分解為若干個質因數連乘積的過程。
3. 標準分解式：將一正整數表示成質因數的連乘積，遇相同的質因數則以指數形式表示，且底數通常由小排到大。
4. 常以 (a,b) 和 $[a,b]$ 表示兩正整數 a 和 b 的最大公因數和最小公倍數；
   以(a,b,c) 和 $[a,b,c]$表示三個正整數 a、b 和 c 的最大公因數和最小公倍數。
5. 互質：兩數最大公因數為 1 時，稱這兩數互質，如 $(12,25)=1$，所以 12 與 25 互質，明

顯的 12 與 25 亦沒有共同的質因數。

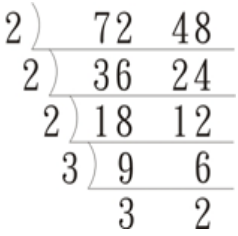
條目範圍

1. 做正整數的質因數分解時，其質因數以不大於 100 為宜。
2. 要能熟練質因數分解的計算，但正整數位數不宜過高。
3. 不介紹「輾轉相除法」求最大公因數。
4. 以短除法求兩個正整數的最大公因數和最小公倍數，主要為複習 N-6-1、N-6-2，來銜接或說明以標準分解式的方法求解此問題。所以在此條目，不以短除法做三個（含）以上的數之最大公因數和最小公倍數問題。

釋例

1. 求 72, 48 的的最大公因數與最小公倍數。

   由短除法：

   則兩數的最大公因數 $(72,48)=2^3\times3$ 或 24，
   而兩數的最小公倍數 $[72,48]=2^4\times3^2$ 或 144。

   或 由標準分解式：$48=2^4\times3$，$72=2^3\times3^2$，可得 $(72,48)=2^3\times3$，$[72,48]=2^4\times3^2$。

2. 求 48, 72, 90 的最大公因數、最小公倍數。

   因為 $(48,72)=24$，所以三數的最大公因數 $(48,72,90)=(24,90)=6$。

   因為 $[48,72]=144$，所以三數的最小公倍數 $[48,72,90]=[144,90]=720$。

3. 試求 720 和 $2^6\times3^4\times7$ 的最大公因數。

   因為 $720=2^4\times3^2\times5$，所以

   $$(720,2^6\times3^4\times7)=(2^4\times3^2\times5,2^6\times3^4\times7)=2^4\times3^2=144$$。

4. 相關應用問題。

   例：一長方體蛋糕，其長 108 公分，寬 72 公分，高 54 公分，今小文欲將此蛋糕全部切成大小相同的正方體，且沒剩餘。試問：最少能切成幾個正方體？

   因為長方體蛋糕需全部切成正方體，所以正方體的邊長為 108, 72, 54 的公因數。又正方體的個數要最少，故正方體的邊長要最大，即邊長為 108, 72, 54 的最大公因數。由於 $(108,72)=36$，可以算出 $(108,72,54)=((108,72),54)=(36,54)=18$，得知正方體的最大邊長為 18。又因為$108\div18=6$，$72\div18=4$，$54\div18=3$，所以總共可切成正方體 $6\times4\times3=72$ 個。

錯誤類型

1. 標準分解式求最大公因數與最小公倍數的問題，學生會誤選質因數與質因數的指數。

2. 學生對於應用問題中，會誤判該求最大公因數或最小公倍數。

評量

1. 能了解短除法與標準分解式在求最大公因數、最小公倍數問題時的關聯性。
2. 能將最大公因數、最小公倍數的觀念應用到生活上的相關問題。

探索

1. 由最大公因數的意義，探索 (a,b,c) 和 $((a,b),c)$ 的關係，並與「以標準分解式求最大公因數」的方法做比較。
2. 由最小公倍數的意義，探索 $[a,b,c]$ 和 $[[a,b],c]$的關係，並與「以標準分解式求最小公倍數」的方法做比較。
3. 利用實際例子，探索兩正整數 a 和 b 會滿足 $ab=(a,b)[a,b]$ 的性質。

N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。	n-IV-1

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-4、N-7-5。

後續： N-8-1。

基本說明

1. 國中數感的培養，除了對實例要有數感外，更需要培養涉及正負符號的數感。
2. 能認識負數是比零小的數。
3. 正、負數在生活中的應用是指能利用正、負數來表徵生活中性質相反的量。
4. 能辨別兩個負數的大小。
5. 能理解無論 a 是正數或是負數，$-a$ 與 a 互為相反數。可知 $-(-a)$ 與 a 皆為 $-a$ 的相反數，所以 $-(-a)=a$ 。
6. 能以最大公因數、最小公倍數熟練分數的約分、擴分，擴及到正負數的四則運算，並有能力將分數化至最簡分數。

條目範圍

不宜出現多於三層以上括號的四則運算。

釋例

1. 求零下 5 度是指零度還低 5 度的溫度，而 -5、$-10\frac{1}{2}$、-12.3 分別是比 0 小 5、$10\frac{1}{2}$、12.3 的數。
2. 若往東 10 步記為 + 10，則往西 4 步記為 - 4；第一週公司盈餘 5000 萬記為 + 5000 萬，第二週若虧損 1000 萬則記為 - 1000 萬。

3. -5 是比 0 小 5 的數，-8 是比 0 小 8 的數。由於 $5<8$，所以 $-5>-8$。
4. 3 的相反數是 -3，$-\frac{7}{12}$ 的相反數是 $\frac{7}{12}$，而 0 的相反數是 0。
5. 能理解 $a+b$ 的相反數就是 $-a-b$，即 $-(a+b)=-a-b$。因為 $a+b+(-a-b)=a+b-a-b=0$，所以 $-a-b$ 是 $a+b$ 的相反數，但是 $a+b$ 的相反數也可以記成 $-(a+b)$，所以 $-(a+b)=-a-b$。同理也可以說明 $a-b$ 的相反數是 $-a+b$。

錯誤類型

1. 學生可能有 $-a$ 為負數的迷思概念。
2. 學生可能會有 $\frac{2}{3}$ 的相反數為 $\frac{3}{2}$ 的迷思概念。

評量

評量宜包含生活中的實例與正負符號的數之間的連結。

N-7-4 數的運算規律：交換律；結合律；分配律；$-(a+b)=-a-b$；$-(a-b)=-a+b$ 。	n-IV-2

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-3。

後續：N-8-1。

基本說明

1. 能理解一個數 a 加上另一個數 b 後，不一定比原來的 a 大。換句話說，要由 b 是正數或是負數才能決定 $a+b$ 是否比 a 大或比 a 小：

   a ＋正數 $>a$，

   a ＋負數 $<a$。

   反之，若 $a+b>a$，則要能認識到這時 b 是正數；而若 $a+b<a$，則 b 是負數。
2. 能理解無論 a、b 是正或負，

   $a-b=a+(-b)$，$a-(-b)=a+b$，$a\times(-b)=-ab$，$(-a)\times(-b)=ab$。
3. 能理解 $a\times a$ 永遠大於或等於 0。
4. 若 a、b 為兩個數，則有加法交換律 $a+b=b+a$、乘法交換律 $a\times b=b\times a$、加法結合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$、乘法結合律 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ 及乘法對加法的分配律 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$、$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$。
5. 除了上述的運算規則，另外去括號的規則也很重要，例如：$-(a+b)=-a-b$；$-(a-b)=-a+b$，並能活用於數的四則運算。

條目範圍

負數與數的四則運算不宜出現分數與小數的複雜混合計算。

釋例

1. $(-8)+(-20)=-(8+20)=-28$。
2. $320+43-143=320+(43-143)=320-100=220$。
3. $25\times13\times4=13\times(25\times4)=13\times100=1300$。
4. $(-150)-2\times(-50)=-150+100=-(150-100)=-50$。
5. $5\times123-5\times23=5\times(123-23)=5\times100=500$。
6. $\left(-12\frac{1}{8}\right)\times4=-\left(12+\frac{1}{8}\right)\times4=-\left(48+\frac{1}{2}\right)=-48\frac{1}{2}$。
7. $\frac{12}{13}-(\frac{6}{7}-\frac{1}{13})-\frac{1}{7}=\frac{12}{13}-\frac{6}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}=\frac{12}{13}+\frac{1}{13}-\frac{6}{7}-\frac{1}{7}$
$=(\frac{12}{13}+\frac{1}{13})-(\frac{6}{7}+\frac{1}{7})=1-1=0$。

上面應用運算規則到簡化的例子，在教學上，要配合訓練學生的觀察能力。

錯誤類型

1. 學生可能會忽略正、負符號的運算，例如：$-a\times(-b+c)=ab+ac$的錯誤產生。
2. 學生對於除法的運算會有迷思概念，例如：$a\div(b+c)=a\div b+a\div c$，
$a\div b\div c=a\div(b\div c)$。

評量

評量時，除非有特別指定要將計算結果化為最簡分數，否則所有相對應之等值分數仍宜視為正確。

探索

以實例讓學生探索下列四則運算的變化型：

$a\times b\div c=a\times b\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}\times b=a\div c\times b$，

$a\div b\div c=a\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{b\times c}=a\div(b\times c)$。

能分辨$a\div(b+c)=a\times\frac{1}{b+c}$與$a\div b+a\div c=a\times\frac{1}{b}+a\times\frac{1}{c}=a\times(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$的不同。

N-7-5 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $\|a-b\|$ 表示數線上兩點 a,b 的距離。 **備註：**絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。	n-IV-2

連結：N-7-8、S-8-6、G-8-1。

基本說明

1. 在數線上，我們稱 0 的位置為原點，且將負數（負整數、負分數、負小數）標記在原點的左邊，正數標記在原點的右邊。標記時，知道數線上愈右邊的數愈大，愈左邊的數愈小，如 $-7<-3<0<10$，而對應到數線時，-7、-3、0、10 的位置是由左排到右。
2. 數線上點所對應的數稱為點的坐標，例如：A 點的坐標為 -3，可記為 $A(-3)$。
3. 加減法與在數線上做平移的對應關係。
4. 在數線上和原點距離相同，但方向相反的兩個點，所代表的數互為相反數，且其和為 0，即 $a+(-a)=0$。
5. 數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離。
6. 以實例表現數線上 a、b 兩點的距離可以 $|a-b|$ 或 $|b-a|$ 表示。
7. 絕對值在國中有兩個比較重要的應用：一個是用來比較負數的大小，另一個是用絕對值來表達數線上的兩點距離。
8. 兩個負數，如果其絕對值愈大，表示其對應的點在原點左方越遠處，則其值就愈小。
9. 數線是學生首次學習代數與幾何結合的題材，教學上應包括這類的題材，例如：求 a、b 兩點中點的坐標。

條目範圍

1. 數線上 a、b 兩點的中點，只需以實例來說明，如：求 -5 和 9 中點的坐標，暫時不需要導出 a、b 兩點中點的坐標公式。
2. 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。例如：不應出現 $|x-3|=4$，求 x 的值；$|x-5|\le 4$，求 x 的範圍...等問題。

釋例

1. $-3+10$ 即是由代表 -3 的點向右移 10 個單位，而 $-3-10$ 是由代表 -3 的點向左移 10 個單位。
2. 點 -2 至原點的距離為 2，即 -2 的絕對值為 $|-2|=2$。
3. 在國一階段學習絕對值應採用較直接且直觀的方式教學較佳，例如：一個正數的絕對值就是它自己，一個負數的絕對值就是把它的負號去掉後的數，而 0 的絕對值還是 0，所以

$\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$（把負號去掉）；$\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$。

絕對值的等價意義：若$a>0$，則$|a|=a$；若$a<0$，則$|a|=-a$，若$a=0$，則$|a|=0$。

4. 試比較-15和-18的大小。

首先$|-15|=15$，$|-18|=18$，因為$|-15|<|-18|$，所以$-15>-18$。

5. 試求數線上兩點$A(-6)$和$B(8)$的中點坐標。

設中點為$C(x)$，因為$\overline{AB}=|8-(-6)|=|8+6|=14$，所以$\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 14=7$，故$x=-6+7=1$或$x=8-7=1$，故中點為$C(1)$。

錯誤類型

1. 教學上若有談到前述「絕對值的等價意義」，宜注意學生可能會有$|a|=\pm a$的迷思概念。
2. 當學生學會負數的加減計算後，應該要理解有絕對值算式的計算，例如：$10-|-6|$和$10-(-6)$的不同。

評量

1. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。
2. 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，所以在評量上不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。
3. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。

探索

利用數線上兩點的距離觀念來探索中點坐標的公式。

N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a\neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。	n-IV-3

先備：N-6-1。

連結：N-7-2、N-7-7、N-7-8。

後續：N-8-6。

基本說明

1. 設a為任一數，n為正整數，則n個a相乘以a^n表示，讀作a的n次方，其中n為指數，a為底數。
2. 能理解$a^0=1$，其中$a\neq 0$。
3. 能理解當$a>1$時，若n愈大，則a^n愈大；當$0<a<1$時，若n愈大，則a^n愈小。
4. 對於算式中出現「指數形式的數」能理解並運算。

5. 當底數為分數時，以$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$來解釋。
6. 知道指數的運算順序優先於四則運算，例如：$-3^4=-(3^4)$。

條目範圍

不處理「指數為負整數」的情形。

釋例

1. $2^5=2\times2\times2\times2\times2$。
2. $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3^4}{2^4}$。
3. $(-3)^5=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=-3^5$。
4. $(-5)^6=(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)=5^6$。
5. 比較$\left(\frac{8}{9}\right)^3$和$\left(\frac{8}{9}\right)^2$的大小。

   因為$\frac{8}{9}<1$，所以$\left(\frac{8}{9}\right)^3=\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{8}{9}<\left(\frac{8}{9}\right)^2$。
6. 可使用計算機讓學生經驗「當$a>1$時，若n愈大，則a^n愈大；當$0<a<1$時，若n愈大，則a^n愈小」的性質。

錯誤類型

1. 學生會誤認為當n愈大，則a^n會愈大。
2. 學生會誤認為$(\frac{b}{a})^n=\frac{b^n}{a}$。
3. 當指數n分別為奇數和偶數時，釐清a^n、$(-a)^n$、$-(-a)^n$及$-a^n$的異同。

評量

評量內容不應出現「指數為負整數」的數。

N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m\times a^n=a^{m+n}$、$(a^m)^n=a^{mn}$、$(a\times b)^n=a^n\times b^n$，其中$m,n$為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m\div a^n=a^{m-n}$，其中$m\geq n$且m,n為非負整數)。	n-IV-3

先備：N-6-1。

連結：N-7-6、N-7-8。

後續：N-8-6。

基本說明

1. 能理解乘法的指數律：$a^m \times a^n = a^{m+n}$；$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$；$\left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n$，其中$m$、$n$為非負的整數，$a$、$b$為任意數。
2. 能理解除法的指數律：$a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中$a \neq 0$，非負整數$m \geq n$。

條目範圍

1. 在指數律$a^m \div a^n = a^{m-n}$中，指數m、n須限制在如下條件：m、n為非負整數，且$m \geq n$。
2. 指數必須為非負整數。

釋例

1. 可用乘法或除法指數律說明$5^0 = 1$。

   $5^3 = 5^{3+0} = 5^3 \times 5^0$ 可得 $5^0 = 1$；

   $5^0 = 5^{1-1} = 5 \div 5 = 1$。
2. $2^2 \times 4^4 = 2^n$，求 $n=?$

   $2^2 \times 4^4 = 2^2 \times \left(2^2\right)^4 = 2^2 \times 2^8 = 2^{10}$，得 $n=10$。
3. $\left(39\right)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = ?$

   $\left(39\right)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = \left(39 \times \frac{1}{13}\right)^5 = 3^5 = 243$。
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = ?$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{2^4} \times \frac{8^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{\left(2^3\right)^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{2^6}{3^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$。
5. $6^9 \div 9^4 = ?$

   $6^9 \div 9^4 = (2 \times 3)^9 \div (3^2)^4 = 2^9 \times 3^9 \div 3^8 = 2^9 \times 3^{9-8} = 1536$。

錯誤類型

學生可能會將$\left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n$誤用為$\left(a + b\right)^n = a^n + b^n$或$\left(a - b\right)^n = a^n - b^n$。

評量

1. 評量時的題目、計算過程中，不應出現「指數為負整數」的情形。
2. 評量時的題目不宜出現代數符號，應以具體的數字例呈現。

N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數(次方為正整數)，也可以是很小的數 (次方為負整數)。 **備註**：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於10^{-9}公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。	n-IV-3

連結：N-7-6、N-7-7。

基本說明

1. 科學記號表示法是將正數表示成$a\times10^n$，其中 $1\le a<10$，n為整數。學生應知道a不能是 10 的原因，是為了表示法的唯一性。
2. 能知道自然科學領域常用的單位名稱。

條目範圍

1. 主要為科學記號的了解與使用，不宜涉及科學記號的四則運算。
2. 不涉及其他底數的負整數次方。

釋例

1. 科學記號表示法可以應用在任何正數，教學上應強調科學記號之所以重要在於我們能用它表示很大的數和很小的數，因此教學時，要與自然科學應用的例子結合在一起。
2. 引入10^n中的指數n為負整數時，可以使用小數與之轉換來解釋。
3. 以科學記號表示32100000和0.00000035。
   $32100000=3.21\times10^7$，$0.00000035=3.5\times10^{-7}$。
4. 1奈米 $(\text{nm})=10^{-9}$公尺 (m)、1微米 $(\mu\text{m})=10^{-6}$公尺 (m)、1毫米 $(\text{mm})=10^{-3}$公尺 (m)、光速3×10^8公尺 / 秒 (m/sec) 等。
5. 試比較5×10^6和6×10^5的大小。
   $5\times10^6=5\times10\times10^5=50\times10^5>6\times10^5$。
   或因為5×10^6為 7 位數，6×10^5為6位數，所以$5\times10^6>6\times10^5$。
6. 試問8.23×10^6是幾位數？
   $8.23\times10^6=8230000$是 7 位數。

錯誤類型

1. 在科學記號與小數的轉換上易有迷思概念，例如：$2.3\times10^{-4}=0.000023$的迷思概念。
2. 單位換算中的迷思概念，例如：1公分$=10^2$公尺的迷思概念。

評量

1. 能比較出科學記號的數彼此的大小關係。
2. 評量不宜涉及科學記號的四則運算。

N-7-9 比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 **備註：**不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。	n-IV-4 n-IV-9

先備：N-6-6。

後續：S-8-8。

基本說明

1. 比、比例式常用來表明數量間的比例關係，和其關係密切的有比值、倍數的概念。
2. a、b（$b\neq 0$）兩數的比記為$a:b$，且該比的前項為a、後項為b。
3. 若$a:b$和$c:d$為相等的比，則記為$a:b=c:d$，該式稱為比例式。
4. 若$a:b=m:n$，且$m\neq 0$，則$a:m=b:n$且$a=mk$，$b=nk$，$k\neq 0$。
5. 若數值x改變時，數值y也隨之改變，且y值恆為x值的$k\,(k\neq 0)$倍。此時x、y的關係為$y=kx$，稱y和x成正比。
6. 若數值x改變時，數值y也隨之改變，且x和y的乘積為一個固定的數（不為0）。此時x、y的關係為$xy=k$，$k\neq 0$，稱y和x成反比。
7. 比例問題在日常生活中或自然科技中有很廣泛的應用，因此國中學習比例，其中最重要的是要能認識哪些問題可用比與比例式來解決。常見的比例問題有：折扣、加成、利率、匯率、密度、濃度、速度、比例尺等。

條目範圍

1. 在比值的計算中，不提及「繁分數」的紀錄方式，以「前項÷後項」解之。
2. 在比例概念的教學與題目設計，以簡單數值為主，遇到複雜的數值或繁瑣的估算時，可使用計算機，例如匯率、密度、濃度等問題。

釋例

1. 500 公克的食鹽水中有 70 公克的食鹽，同樣濃度的 750 公克的食鹽水有多少公克的食鹽？

   因為$750\div 500=\frac{3}{2}$，所以 750 公克的食鹽水有$70\times\frac{3}{2}=105$（公克）的食鹽。或假設 750 公克的食鹽水有x公克的食鹽，得比例式$500:70=750:x$（對應關係）可知$500x=70\times 750$，因此$x=105$。
2. 一輛時速 90 km 的汽車在高速公路上等速直線行駛 45 分鐘的距離為多少？這段距離在比例尺$1:50000$ 的地圖上會是多少公分？
3. 面積相同的矩形，長與寬成反比；體積相同的長方體，高與底面積成反比。
4. 若$3:4=(x-1):x$，得$3x=4x-4$，解得$x=4$。

5. 若$a:b=3:7$且$b-a=24$，則令$a=3k$，$b=7k$解之，或$a=\frac{3}{7}b$代入解之。

錯誤類型

1. 「已知$2a=3b$，則$a:b=3:2$」，學生可能有「$a:b=2:3$」的迷思概念。
2. 在y和x成正比的關係式 $y=kx$中，學生可能有「$k>0$」的迷思概念。
3. 在應用問題的比例式中，學生可能有「等號兩邊前後項的對應關係位置擺錯」的迷思概念
4. 學生可能有「若x增加，y也隨之增加，則y必和x成正比」或「若x增加，y也隨之減少，則y必和x成反比」的迷思概念。

評量

1. 在比例的問題中，除了基本的定義、運算外，在評量內容的設計上宜多與生活經驗、自然科技等作為主要題幹，以培養比例概念的素養。
2. 比例的意義和運算主為概念的建立、計算方法的熟練，在數值設計上宜以簡單的數值為主。

S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。#	s-IV-1

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

基本說明

1. 認識點、線、線段、射線、角的意義。
2. 認識點、線、線段、射線、角的符號與記法。
3. 認識三角形與其符號之介紹。

條目範圍

本單元不需設獨立單元，宜與其他單元合併學習。

釋例

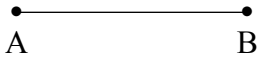
1. 點沒有大小區分，習慣上以英文字母大寫 A、B、C、…表示，如下圖所示，點 A 或 A 點。

• A

2. 直線沒有端點，向兩端無限延伸，習慣上以大寫英文字母 L、M、N、…表示；相異兩點 A、B 可以成一直線，以直線 AB 或 AB 直線表示，以符號$\overleftrightarrow{AB}$表示，如下圖所示。

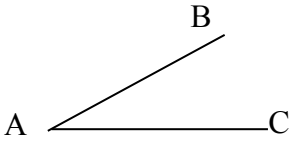
L ——————————

3. 線段的兩邊有端點，可以量長度，以大寫英文字母表示，如下圖所示，線段 AB 或 AB 線段，以符號 $\overline{AB}$ 表示。

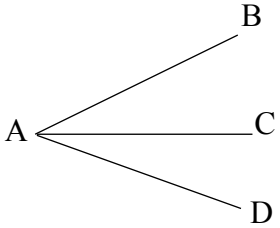


4. 射線是以一邊端點為起點，向另一邊的端點無限延伸，如下圖所示，從 A 點向 B 點發射，稱為射線 AB，以符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

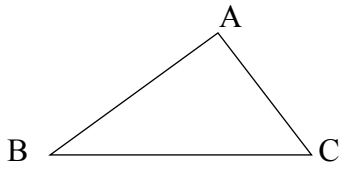
5. 如圖，角的記法稱∠A 或∠BAC 或∠CAB。



6. 如圖所示，此時的角必須使用三個點表示，例如∠BAC 或∠CAD；不宜用∠A。

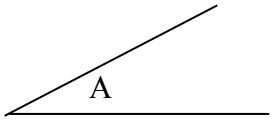


7. 三角形的記法以三個頂點標記符號，例如三角形 ABC 或以符號ΔABC，如下圖所示：



錯誤類型

1. 角的記法稱∠BAC，部分學生不知道誰是頂角
2. ∠A 的 A，可能誤寫在圖形的裡面，如下圖所示：



S-7-2 三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 3×3×3 的正方體且不得中空。	s-IV-16

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

基本說明

1. 瞭解立體圖形的三視圖（包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖）的意義。
2. 繪製立體圖形的三視圖（包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖）。
3. 給定一立體圖形，理解各視圖間的關係，例如前視圖和後視圖、左視圖與右視圖均有全等的關係，因此從立體圖形的前視圖便可得知後視圖圖，從右視圖便可得知左視圖。

條目範圍

1. **不出現**利用提供的視圖要求學生重製立體圖形。
2. 立體圖形的前（後）視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 3×3×3 的正立方體且不得中空。

釋例

1. 給定立體圖形引導學生討論此立體圖形的樣貌，希望學生描述立體圖形時，不能僅單從某一方向觀察。
2. 設計活動，透過從實物立體圖形的上方觀察以及水平方向的觀察，及繪製視圖的練習與同班坐不同位置的同學討論，來理解觀察位置的不同與視圖（上、前、後、左、右視圖）的差異。
3. 整合前面對各方向視圖的學習，來理解視圖間的關係。
4. 由於是在立體圖形的上方俯視該立體圖形，因此我們稱此輪廓為「上視圖」或「俯視圖」。但要注意站在立體圖形的前方、後方、右方、左方俯視繪製的「上視圖」會有將此輪廓（平面圖形）旋轉的情況，因此一般我們強調「上視圖」是從站在立體圖形的正前方俯視繪製而成。
5. 從前視圖、上視圖與左（右）視圖便可大約知道原立體圖形的樣貌。

錯誤類型

1. 學生易混淆左右視圖的方向。
2. 學生繪製上視圖時，可能誤解上視圖的定義，例如從立體圖形的左上方往下看，則會產生偏差 90 度的錯誤上視圖。

評量

利用三視圖的觀察後重製立體圖形並非本課綱的教學目標，更不適宜當成評量目標。

S-7-3 垂直：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	s-IV-3

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-4、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

基本說明

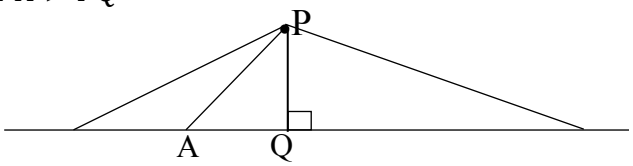
1. 利用直角定義兩直線互相垂直。
2. 認識⊥記號。
3. 能認識一線段之中垂線的意義。
4. 通過直線L外的一點P，可以使用直角三角板，作一直線PQ垂直於直線L，且交L於一點Q。利用測量說明$\overline{PQ}$為點P到直線L的最短距離。我們稱$\overline{PQ}$的長為點P到直線L的距離。

條目範圍

本單元的中垂線暫不引入尺規作圖。

釋例

1. 透過直角三角板畫出兩條垂直的直線，認識垂直的意義與符號。
2. 過線段中點且與該線段垂直的直線稱為該線段的中垂線。
3. 透過將直線外一點到該直線畫許多條線段，以垂直線段為最短距離，稱為這點到該直線的距離。學生可透過測量或觀察方式發現$\overline{PA} > \overline{PQ}$。



4. 直線 L 與直線 M 垂直，記為 L⊥M。

錯誤類型

1. 有些學生誤以為直線有中垂線。
2. 有些學生誤以為直線有中點。
3. 有些學生誤以為與線段互相垂直的直線只有一條。

S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	s-IV-5

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

基本說明

1. 以生活中的平面圖形為例，來理解線對稱的意義。
2. 認識對稱軸、對稱點、對稱線 (段) 及對稱角。理解對稱圖形中，對稱線段等長、對稱角相等。
3. 線對稱圖形中，兩個對稱點之連線段會被對稱軸垂直平分。

條目範圍

1. 以平面圖形為例，僅透過對摺重疊判斷圖形對稱。
2. 透過對摺驗證說明對稱線段與對稱角相等。

釋例

1. 透過對摺重疊找到線對稱圖形的對稱軸，重疊的點稱為對稱點，重疊的角稱為對稱角，重疊的邊稱為對稱邊。
2. 所有線段均為線對稱圖形：將一線段的兩端點對摺重疊，產生的摺痕為對稱軸；對稱軸必經過該線段的中點，並且兩對稱角重疊；透過平角 180 度以及兩角相等，可得其中一角為 90 度，必垂直。
3. 平面圖形中的各種三角形、矩形、正方形、菱形、平行四邊形、梯形、箏形、圓形…等，均可以透過對摺驗證是否為線對稱圖形。

錯誤類型

1. 學生易誤認平行四邊形是線對稱圖形。
2. 學生易誤認矩形的對角線是對稱軸。
3. 學生易誤認對稱圖形的對稱軸只有一條。

探索

可以透過對摺與剪紙活動的展開圖延伸學生掌握鏡射的概念。

S-7-5 線對稱的基本圖形：等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。	s-IV-5

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-4。

後續：S-8-4~ S-8-12。

基本說明

1. 理解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角相等。
2. 理解正三角形有三條對稱軸，分別是三邊的中垂線，並了解三個內角都相等。
3. 理解正方形有四條對稱軸，並了解四邊都等長與四個角都是直角。
4. 理解菱形是線對稱圖形，兩條對角線均為對稱軸，並了解四邊都等長。

5. 理解箏形有一條對稱軸，並了解兩組鄰邊等長。
6. 理解正多邊形為線對稱圖形，並了解所有邊長都相等，每個內角都相等。

條目範圍

不談圖形的包含關係。

釋例

1. 透過對摺可以了解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角相等。同理透過對摺，發現正三角形三個內角都相等。
2. 透過摺紙發現正方形 4 條對稱軸的位置，以及箏形 1 條對稱軸的位置。

錯誤類型

1. 學生容易將邊長都等長的多邊形誤為正多邊形。
2. 學生容易將內角都相等的多邊形誤為正多邊形。

評量

不出現圖形包含關係的試題。

G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	g-IV-1

先備：S-6-2。

連結：N-7-5、A-7-6。

後續：G-8-1。

基本說明

1. 能運用直角坐標來標定位置，並能在直角坐標系上描出已知坐標對應的點。
2. 熟悉縱軸（y 軸）、橫軸（x 軸）和象限之術語、直角坐標系上坐標的定義。
3. 能了解四個象限上的符號規則，例如：第一象限為 $(+,+)$，第二象限為 $(-,+)$ ，第三象限為 $(-,-)$，第四象限為 $(+,-)$。
4. 能運用方位距離來標定位置。

條目範圍

方位只涉及東、西、南、北等四個方位。

釋例

1. 選定班上某一橫排為 x 軸，某一縱排為 y 軸，利用直角坐標系標定教室中的座位坐標。
2. 以原點為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位，其坐標為 $(3,-4)$。
3. 能了解語詞「颱風中心位置位於恆春東方 100 公里處」的意義。

錯誤類型

1. 學生可能會混淆直角坐標系 (x,y) 和 (y,x) 的位置。
2. 點在第一象限，學生可能會誤認為與 x 軸的距離就是其 x 坐標，與 y 軸的距離就是其 y 坐標。當點在其他象限時，可能會有正負號的混淆。
3. 學生可能會混淆東西南北的相對關係。
4. 學生可能誤認為象限含有坐標軸，例如：$(3,0)$ 不屬於第一象限，也不屬於第四象限。

A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。	**a-IV-1**

先備：R-6-1。

連結：A-7-2、N-7-4、G-7-1。

後續：A-8-1、A-8-2。

基本說明

1. 理解利用 $a,b,c,\ldots,x,y,z$ 等符號代表一個數或一個未知數，以及數和符號構成算式的意義。
2. 理解代數算式裡符號的約定。
   (1)「×」可記成「·」，亦可省略，因此 $2\times a$、$2\cdot a$、及 $2a$ 意義皆相同。又如，$3\times a\times b$ 可簡寫成 $3ab$。
   (2) $1\times a$、$(-1)\times a$、及 $(-2)\times a$ 分別簡寫成 a、$-a$、及 $-2a$。
   (3) $2a$ 的含義為「2 個 a」或「a 的 2 倍」。
   (4) 符號及分式的等式：$\frac{4}{7}x=\frac{4x}{7}$，其中 $\frac{4}{7}x$ 含義為 $\frac{4}{7}\cdot x$，而 $\frac{4x}{7}$ 則為 $4\times x\div 7$。又如 $-\frac{4}{7}x=\frac{4x}{-7}=\frac{-4x}{7}$。
3. 對一次算式中的同類項進行化簡及合併：
   (1) 假設組成代數式的每一項皆為一個數或是一個數跟一個未知數的乘積，我們稱此代數式為「一次式」，例如：$x+2y-1$、$z-3$、$x+1+3y-2x+y+3$ 皆為一次式。
   (2) 在一次式裡，假設有兩項其所含未知數為同一個未知數，或是皆不含未知數（亦即其皆為數），我們稱此兩項為「同類項」。例如：在 $x+1+3y-2x+y+3$ 中 x 及 $-2x$ 為同類項、$3y$ 及 y 為同類項、1 跟 3 為同類項。
   (3) 一次式裡的同類項可合併以簡化運算。例如：$x+1+3y-2x+y+3$ 中的 x 及 $-2x$ 合併為 $-x$、$3y$ 及 y 合併為 $4y$、1 跟 3 合併為 4。因此 $x+1+3y-2x+y+3$ 化簡成 $-x+4y+4$。
4. 利用代數符號表徵數學中常見的運算規律。
   (1) 交換律：$a+b=b+a$ 及 $a\times b=b\times a$。

(2) 結合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$ 及 $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$。

(3) 分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 及 $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$。

5. 能用代數算式紀錄生活情境中的數學問題。

條目範圍

1. 對 7 年級學生而言，用符號代表數是相對抽象的過程，需要時間去理解及適應。因此在本條目範圍內，應避免引進過多代數術語及名詞。本條目的重點在於讓學生理解代數符號及其形成的算式的意義。
2. 本條目只做一次式的化簡，不涉及二次式以上（含二次）的運算。

釋例

1. 可先複習小學已學的代數知識。例如：已知小臻的哥哥比小臻大 3 歲，那麼當小臻 x 歲時，小臻的哥哥為 $x+3$ 歲。反之，當小臻的哥哥為 y 歲時，則小臻為 $y-3$ 歲。
2. 學生初學代數式化簡時，數字不宜過於複雜。適當的例子如：$2x+3-x-1$ 化簡為 $x+2$，$2x-y+5x+2y+1$ 化簡為 $7x+y+1$。
3. 假設一個長方形的長為 5 公分、寬為 a 公分，那麼它的面積即為 $5a$ 平方公分。
4. 若有 1000 元鈔票 x 張及 500 元鈔票 y 張，可用 $1000x+500y$ 代表總金額，因此當 $x=3, y=1$ 時，總金額為 3500 元，而當 $x=1, y=2$ 時，則總金額為 2000 元。

錯誤類型

1. 學生在利用分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 化簡代數式時，可能會忘記 a 既要乘 b，也要乘 c。如化簡 $3(x+1)-2x+1$ 時，可能會寫成

$$3(x+1)-2x+1=3x+1-2x+1=x+2$$ 。

2. 部分學生在化簡 $3-2x+7x$ 時，可能會寫成 $3-9x$。
3. 部分學生在化簡分式 $\frac{9x-3}{3}$ 時，可能會寫成 $3x-3$。

A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	a-IV-2

先備：R-5-3。

連結：A-7-1、A-7-3、A-7-4、A-7-5、A-7-6、A-7-7。

後續：F-8-1、F-8-2。

基本說明

1. 理解一元一次方程式及其解的意義：

(1)「方程式」指的是含有未知數的等式，「一元」指的是此方程式恰有一個未知數，而「一次」代表每當此未知數出現在方程式裡時，其次方數皆為一。換句話說，組成方程式

的每一項皆為一個數或是一個數跟此未知數的乘積。

(2) 若有一個實際的數值，使得當我們將一元一次方程式中的未知數替換成此一實際數值時，等式成立，我們便將此一實際數值稱做為此方程式的「解」。

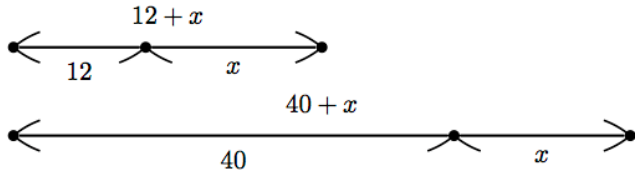
2. 能由具體情境中列出一元一次方程式。

條目範圍

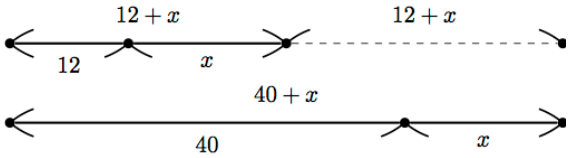
本條目只處理唯一解的情況，不考慮無解或無窮多個解的情況。

釋例

1. $3x+1=4x-2$為一元一次方程式，但$3x+1-4x+2$及$x+y-1=2x+1$則非一元一次方程式，其中$3x+1-4x+2$不含等號，而$x+y-1=2x+1$有兩個未知數，所以非一元一次方程式。
2. 考慮一元一次方程式$3x+1=4x-2$，將式中所有x代入3時等式成立，所以 3 是此方程式的解。而將所有x代入4時等式不成立，因此4不是此方程式之解。
3. 由具體情境中列出一元一次方程式，例如：老師帶兩盒一樣的口香糖，發給全班26個學生。每人發 2 條後，總共剩8條。假設一盒有x條口香糖，試列出此x滿足的一元一次方程式。
   說明：一盒有x條口香糖，所以兩盒共$2x$條。26個學生一人發 2 條，共發出52條，所以剩$2x-52$條。因此一元一次方程式為$2x-52=8$。
4. 可適當的利用線段圖輔助思考。例如：已知小桐今年 12 歲，小桐父親今年40歲。請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？
   說明：在x年後，小桐的年齡為$12+x$，而父親的年齡為$40+x$，用線段圖表示可得



其中第一條線段代表小桐的年齡，第二條線段代表父親的年齡。將代表小桐的線段延長一倍，得到



若父親的年齡為小桐的兩倍，則第一條線段（含虛線部分）總長等於第二條線段的長度，因此$2(12+x)=40+x$。

錯誤類型

將應用問題轉化成數學式子時的迷思概念，例如釋例 4.中「請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？」，學生可能轉化為「$40+x=12\times 2$」。

A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	a-IV-2

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-8。

後續：A-8-7。

基本說明

1. 能理解等量公理「等式左右同時加、減、乘、或除一數 (除數不為 0) 時，等式仍然成立」的概念。亦即，若已知$a=b$成立，則$a+c=b+c$、$a-c=b-c$、$a\times c=b\times c$、$a\div c=b\div c$ $(c\neq 0)$等亦成立。
2. 等量公理為移項法則的基礎。學生需經由熟練等量公理來理解移項法則，並應用於一元一次方程式的解。
3. 應用「一元一次方程式解的意義」於驗算。
4. 能利用等量公理及移項法則解決具體情境中的一元一次方程式問題。

條目範圍

不考慮無解或無窮多解的一元一次方程式。

釋例

1. 考慮一元一次方程式$x+2=3$。根據等量公理，$(x+2)-2=3-2$。化簡左式後得到$x=3-2$。觀察此推導過程，我們可以發現利用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「$+2$」變成「-2」搬到右邊。又如方程式$3x=6$，根據等量公理，$\frac{1}{3}\times 3x=\frac{1}{3}\times 6=\frac{6}{3}$。化簡左式後得到$x=\frac{6}{3}$。觀察此推導過程，我們發現應用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「3倍」變成「$\div 3$」(或是說將「乘3」變成「乘$\frac{1}{3}$」) 搬到右邊而得到$x=\frac{6}{3}=2$。此類規則即為移項法則。
2. 協助學生養成寫答案時將未知數寫在等號左邊的習慣。
3. 一開始碰到未知數的移項時，可適當地將等量公理的細節列出。待學生習慣未知數的移項後，細節即可省略。例：解$-x+8=3x+4$。

$$-x+8=3x+4$$
根據等量公理，左右同加 x，等式依舊成立。
$$(-x+8)+x=(3x+4)+x$$
化簡一次式得到。
$$8=4x+4$$
根據等量公理，左右同減 4，等式依舊成立。
$$4=4x$$
利用等號的對稱性將未知數寫在等式的左邊。
$$4x=4$$
根據等量公理，左右同除以 4，等式依舊成立。
$$x=1$$

4. 問題：老師帶兩盒一樣的口香糖，要發給全班 26 個學生。如果每人發 2 條後，剩下 8 條，問每盒原來裝幾條口香糖？
   假設原來每盒有 x 條，依題意可列出 $2x-2\times26=8$，利用移項法則可解出 $x=30$。(此時可將 $x=30$ 代入情境驗算。)

錯誤類型

1. 當簡化方程式時，參雜有分數混合計算，因為過程中多了一些步驟，學生容易發生疏漏。如將方程式 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1$ 兩邊同乘 6 時，誤寫成 $6(\frac{x}{2}+\frac{x}{3})=1$。
2. 假設方程式為 $3x-6=9$，部分學生可能會將「左右同時乘以 $\frac{1}{3}$」誤寫成 $\frac{1}{3}\cdot3x-6=\frac{1}{3}\cdot9$，而得到 $x-6=3$。又或是在做「左右同時除以 3」時列式列對 $\frac{3x-6}{3}=\frac{9}{3}$，但化簡時，將左式錯誤化簡成 $x-6$。為了避免類似的錯誤，老師可提醒學生在解一元一次方程式時，最好先將所有含未知數的項移至等號的一側，而所有未含未知數的項移至等式的另一側，使得等式兩側各只有一項，最後解出未知數。

A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	a-IV-4

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-6。

基本說明

1. 理解二元一次方程式及其解的意義：
   (1)「二元」指的是此方程式有兩個未知數，「一次」指的是此方程式每一項皆為一個數或是一個數和一個未知數的乘積。
   (2) 假設 a 跟 b 是兩個數，使得當二元一次方程式裡的未知數 x 及未知數 y 用 a 跟 b 分別代

入時，等式成立，我們便稱 $x=a$ 、 $y=b$ 是此二元一次方程式的一組解。

2. 能由具體情境中列出二元一次方程式。
3. 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義：

(1) 二元一次聯立方程式指的是由兩個二元一次方程式組成的一組方程式。如

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \text{ ，} \\ x+2y=3 \text{ 。} \end{cases}$$

(2) 若 $x=a$ 、 $y=b$ 代入一個二元一次聯立方程式後，兩個等號都成立，我們便稱 $x=a$ 、 $y=b$ 為此二元一次聯立方程式的解。

4. 能由具體情境列出二元一次聯立方程式。

條目範圍

介紹二元一次聯立方程式時，不考慮無解或無窮多解的情況。

釋例

1. 考慮 $xy+1=3x$，雖然 xy 項中 x 及 y 次方數皆為一，但這並非一個二元一次方程式。在一個二元一次方程式裡，每一項只能是一個數或是一個數跟一個未知數的乘積。又如 $x+\frac{1}{y}=3$ 亦非一個二元一次方程式，因為不是所有未知數的次方數皆為一。
2. 問題：小桐有 60 元，要全部拿來買郵票，郵票分面額 10 元及 5 元兩種，若設共購買 10 元郵票 x 張及 5 元郵票 y 張，試列出 x 及 y 滿足之二元一次方程式。

   依題意，小桐欲購買價值 60 元的郵票，而購買 10 元郵票 x 張及 5 元郵票 y 張共需 $10x+5y$ 元，所以 $10x+5y=60$ 。
3. 二元一次方程式可以有很多解，例如考慮二元一次方程式 $x+2y=8$，將 $x=2, y=3$ 代入時等式成立，所以 $(2,3)$ 是方程式的一個解。同理， $(4,2)$ 及 $(-2,5)$ 皆為方程式的解。
4. 問題：已知小璿有十元及五元硬幣共 10 枚，總值 80 元。令 x 及 y 分別為小璿十元硬幣數及五元硬幣數，試列出 x 及 y 滿足的二元一次聯立方程式。

   依題意可得

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 10x+5y=80。 \end{cases}$$

5. 將 x=1、y=1 代入二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=5 \text{ ，} \\ x+2y=3 \text{ ，} \end{cases}$ 兩個等號皆成立，因此 x=1、y=1 稱為此二元一次聯立方程式的解。

評量

二元一次聯立方程式的題型不宜過度延伸。例如

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2, \\ x+\frac{2}{y}=3。 \end{cases}$$

雖然我們可令$z=\frac{1}{y}$，使其變成標準的二元一次聯立方程式，但初學二元一次聯立方程式應著重於其本質，不宜過度延伸，造成學習上的失焦。

A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。	a-IV-4

連結：A-7-3、A-7-4。

基本說明

1. 能利用代入消去法解二元一次聯立方程式。
2. 能利用加減消去法解二元一次聯立方程式。
3. 能從具體情境裡列出二元一次聯立方程式，求其解，並驗證答案的合理性。

條目範圍

1. 僅考慮方程式個數及未知數個數皆為二的情況。
2. 不考慮無解或無窮多解的情況。

釋例

1. 在解二元一次聯立方程式時，可利用其中一個方程式將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，再將此表示式代入另一個方程式而得到一個一元一次方程式，進而解出其中一個未知數的值。此作法稱為「代入消去法」。例：

$$\begin{cases} x+y=1, & ① \\ x+2y=3, & ② \end{cases}$$

由①式可得$x=1-y$，代入②式後得到$(1-y)+2y=3$，由此解得$y=2$，進而解出$x=-1$。（此時可代入檢查$x=-1$、$y=2$確為兩個方程式的共同解。）

2. 在解二元一次聯立方程式時，可將兩個方程式各乘一個非零常數，使得其中一個未知數在兩式的係數相同（或互為相反數）。相減（或相加）之後即得一個另一未知數的一元一次方程式，進而求出聯立方程式的解，此作法稱為「加減消去法」。例：

$$\begin{cases} 2x+3y=1, & ① \\ 3x+4y=2, & ② \end{cases}$$

將①式乘以 3 、②式乘以 2 得到

$$\begin{cases} 6x+9y=3\text{，} & ③ \\ 6x+8y=4\text{，} & ④ \end{cases}$$

再將③式及④式相減，即得 $y=-1$。將此值代入①式後得到 $2x+3(-1)=1$。由此解出 $x=2$，因此二元一次聯立方程式的解為 $x=2$ 、 $y=-1$。

3. 問題：七年二班共有學生 28 人，已知男生比女生多 4 人，問男生、女生各多少人？

作法一：

假設男生有 x 人，女生有 y 人，依題意得到 $\begin{cases} x+y=28\text{，} \\ x-y=4\text{，} \end{cases}$ 藉由代入消去法或加減消去法可解出 $x=16$ 、 $y=12$。因此，男生有 16 人，女生有 12 人。

作法二：

假設男生有 x 人。因為女生比男生少 4 人，所以女生有 $x-4$ 人。男女生共 28 人，所以 $x+(x-4)=28$，由此解出 $x=16$。因此，男生有 16 人，女生有 12 人。

注意到作法二本質上即為代入消去法 (即將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，在這邊我們將女生人數用男生人數的代數式來表示)。

A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax+by=c$ 的圖形；$y=c$ 的圖形（水平線）；$x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	g-IV-2 a-IV-4

連結：A-7-4。

後續：F-8-2。

基本說明

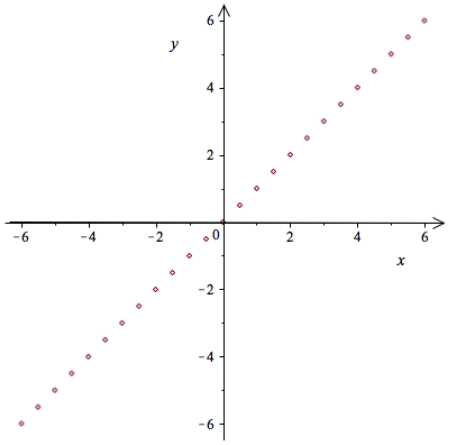
1. 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形：在直角坐標平面上，以描繪多個已知點的方式來描繪二元一次方程式 $ax+by=c$ 的圖形，並觀察其圖形成一直線的現象。更進一步，可發現只要找到 $ax+by=c$ 的兩個解，那麼過這兩點的直線即為 $ax+by=c$ 的圖形。
2. $y=c$ 的圖形為水平線，而 $x=c$ 的圖形為鉛垂線。
3. 能理解二元一次聯立方程式及其解的幾何意義：設 $x=a$ 、 $y=b$ 為二元一次聯立方程式的解，則可知此兩個二元一次方程式的解，對應到直角坐標平面上的兩條直線之交點，即為 (a,b)。

條目範圍

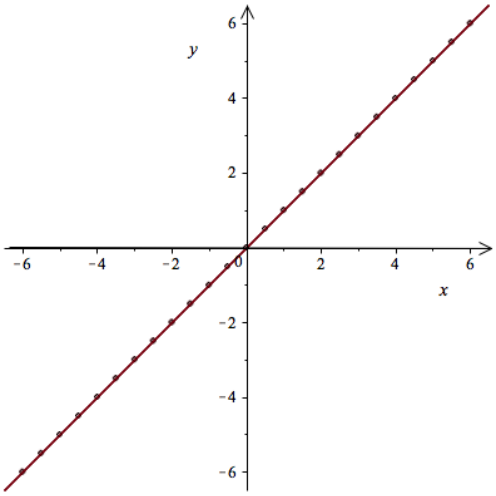
在國中階段僅處理二元一次聯立方程式恰有一個解的情況。

釋例

1. 考慮二元一次方程式 $x-y=0$，顯然對任意數 k，$x=k$、$y=k$ 皆為此二元一次方程式的解。今取若干個 k 的值，則解對應到直角坐標系上的點為 (k,k)，如下圖：

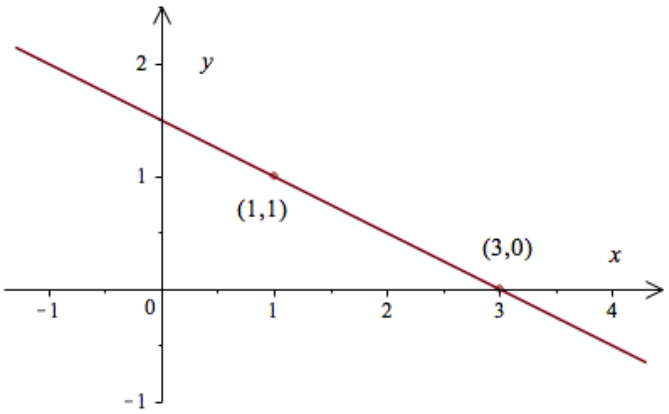


可發現這些點都落在同一直線上。將過這些點的直線畫出來，即稱為此二元一次方程式的圖形，如下圖：



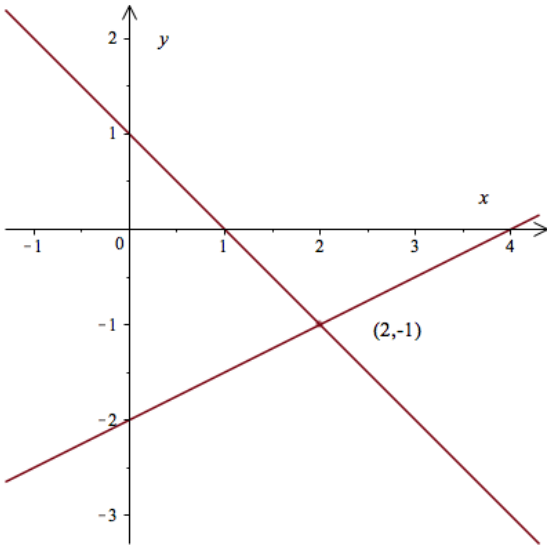
應多舉幾個例子，使學生相信 $ax+by=c$ 的圖形皆為一直線。

2. 在熟知且明瞭二元一次方程式的圖形為一直線之後，我們可以利用「兩點唯一決定一直線」的性質，簡化繪圖過程：因為兩點決定一直線，我們只需找到二元一次方程式的兩個解，在直角坐標系上找出對應的兩點，並過此兩點做一直線，此直線即為此二元一次方程式的圖形。例如：考慮二元一次方程式 $x+2y=3$，我們找到兩個解的坐標為 $(3,0)$ 及 $(1,1)$，過這兩點做一直線，此直線即為二元一次方程式的圖形。



3. 考慮二元一次方程式 $x=c$（視為 $x+0y=c$ 的簡化），如果 $x=a$、$y=b$ 是此方程式的解，則顯然 a 必須等於 c，而 b 可以是任意數。將直角坐標系中所有 (c,b) 的點描出來（b 為任意數），可以發現是一條鉛垂線。同理，$y=c$（視為 $0x+y=c$ 的簡化）的圖形會是一條水平線。

4. 考慮二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-2y=4, \end{cases}$ 在直角坐標系畫出對應的兩條直線，



發現兩直線交於 $(2,-1)$，則 $x=2$、$y=-1$ 恰為此二元一次聯立方程式的解。（直線上的每一點對應到二元一次方程式的一個解，所以兩條直線的交點為二元一次聯立方程式的解。）

A-7-7 一元一次不等式的意義：不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。	a-IV-3

連結：A-7-2、A-7-8。

基本說明

1. 能理解不等式的意義以及口語上的約定，例如「未滿」及「不足」等意指「＜」，而「不超

過」及「至多」等意指「≤」。

2. 符號$a \le b$代表「$a < b$」或「$a = b$」，口語上可以說成「a小於或等於b」或「a不大於b」。同理，符號$a \ge b$代表「$a > b$」或「$a = b$」，口語上可以說成「a大於或等於b」或「a不小於b」。
3. 能理解不等式的遞移律，即若$a < b$且$b < c$，則$a < c$，以及其他類似規則。
4. 「一元一次不等式」指的是不等式中恰有一個未知數，而此未知數的次方數為1。
5. 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。(所謂簡單的一元一次不等式指的是形式為$ax+b \le c$、$ax+b < c$、$dx+e \ge f$、或$dx+e > f$的不等式。)

條目範圍

不涉及有兩個不等號的一元一次不等式，如$3 \le 5x+2 \le 9$。

釋例

1. 「從台北坐高鐵到高雄至少要一小時半。」用不等式的符號來表示，可寫成「令a為從台北坐高鐵到高雄所需小時數，則$a \ge 1.5$」。語意上，這邊「$a \ge 1.5$」表示「a是一個大於或等於1.5的數」。
2. 問題：小穎帶了200元到水果行買蘋果，蘋果一顆25元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花2元購買一個塑膠袋。假設小穎最後購買的蘋果數為x顆，試列出x滿足的一元一次不等式。

   蘋果一顆25元，買x顆需花$25x$元，另外需花2元購買一個塑膠袋，因此共花費$25x+2$元。花費不能超過攜帶的現金，因此$25x+2 \le 200$。

A-7-8 一元一次不等式的解與應用：單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。	a-IV-3

連結：A-7-3、A-7-7。

基本說明

1. 若a是一個數，當一元一次不等式中的未知數代入a時，使得不等式成立，我們便稱a為此一元一次不等式的一個解。
2. 理解不等式的運算性質：

   (1) 在不等式左右同加一數或同減一數，不等式仍然成立。

   (2) 在不等式左右同乘以一正數或同除以一正數，不等號方向不變。

   (3) 在不等式左右同乘以一負數或同除以一負數，則不等號方向改變。
3. 能利用上述不等式的運算性質解單一的一元一次不等式。
4. 能在數線上標出一元一次不等式解的範圍。

5. 能利用一元一次不等式解應用問題。

條目範圍

1. 不處理牽涉到兩個不等號的一元一次不等式，如$3\le 2x-1\le 5$。
2. 不去解類似$2x+1<2x+3$或$2x+1\ge 2x+3$的一元一次不等式(即化簡後沒有未知數的不等式)。

釋例

1. 用多個例子使學生發現「在不等式左右同乘以一正數或同除以一正數，不等號方向不變。在不等式左右同乘以一負數或同除以一負數，則不等號方向改變。」

   教師若要證明，說明如下：

   假設a跟b之間的大小關係為$a>b$，移項可推得$a-b>0$，亦或是說$a-b$為一個正數。

   (1) 假設c為一個正數，則$c(a-b)$亦為正數，或是說$c(a-b)>0$。左式用分配律展開得$ca-cb>0$，再移項得到$ca>cb$。

   (2) 假設c為一個負數，則$c(a-b)$為一負數，或是說$c(a-b)<0$。左式用分配律展開得$ca-cb<0$，再移項得到$ca<cb$。

   (3) 同理可處理其他三種不等式：$a\ge b$、$a<b$、$a\le b$。

   由以上討論我們得到一個結論：在不等式左右同乘以一正數(或同除以一正數)，不等號方向不變；在不等式左右同乘以一負數(或同除以一負數)，則不等號方向改變。

2. 問題：求一元一次不等式$3x-1\le 5$的解。

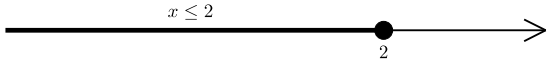
   將不等式兩側同加1，不等式仍然成立，因此$3x-1+1\le 5+1$，化簡得到$3x\le 6$。再將不等式兩側同乘以$\frac{1}{3}$，因為$\frac{1}{3}$是一個正數，不等號方向不變，所以$\frac{1}{3}\cdot 3x\le \frac{1}{3}\cdot 6$，化簡得到$x\le 2$，即為其解。

3. 問題：求一元一次不等式$-3x<6$的解。

   將不等式兩側同乘以$-\frac{1}{3}$，因為$-\frac{1}{3}$是一個負數，不等號方向改變，所以$(-\frac{1}{3})\cdot(-3x)>(-\frac{1}{3})\cdot 6$，化簡得到$x>-2$，即為其解。

4. 問題：在數線上圖示一元一次不等式$3x-1\le 5$的解。

   由釋例 2.可知解為$x\le 2$。在數線上，在2左方的點皆為小於2的數，而在2右方的點皆為大於2的數，因此$3x-1\le 5$的解在數線上的範圍如下，

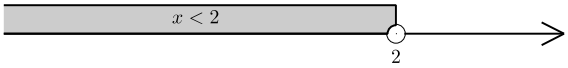
   或以斜線(或陰影)示意。

   (習慣上，若解的範圍包含端點，我們會用實心點標出端點。)

5. 問題：在數線上圖示一元一次不等式 $3x-1<5$ 的解。

   因為 $3x-1<5$ 的解為 $x<2$，故其在數線上的範圍如下，

   或以斜線（或陰影）示意。



   （習慣上，若解的範圍不包含端點，我們會用空心點標出端點。）

6. 問題：小穎帶了 200 元到水果行買蘋果，蘋果一顆 25 元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花 2 元購買一個塑膠袋。試問小穎最多可購買幾顆蘋果？

   假設小穎共購買 x 顆蘋果，則 x 滿足 $25x+2\le 200$。此一元一次方程式的解為 $x\le \frac{198}{25}=7.92$。

   但這裏的 x 必須是整數，因此小穎最多可以買 7 顆蘋果。

錯誤類型

1. 部份學生常會忘記「不等式兩側同乘以一負數，不等號方向改變」。
2. 部份學生在看到一個未知數時，心理上會覺得那代表一個正數（這或許是因為小學階段碰到的數都是正數），而犯下類似「若 $5>3$，則 $5x>3x$」的錯誤。
3. 部份學生會誤認 $x>2$ 的解只包含整數解，例如寫成 $x=3,4,5,\ldots$。

D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	d-IV-1 n-IV-9

先備：D-6-1。

連結：D-7-2。

後續：D-8-1。

基本說明

1. 學生應循序漸進，在非分組的情況，學習各種統計圖表之製作，並計算各種統計指標，等觀念清楚後，再學習分組的處理方式，並知道分組的使用時機。
2. 統計學中，條形圖分為長條圖、直方圖兩大類。長條圖適合用於表現離散的資料，因此各長條以適當的距離間隔來表現資料的離散性；直方圖則適合用於表現連續的資料，因此各長條間並無間隔，且資料應依序排列。
3. 國中階段統計的教學宜以有序且具連續性的資料為主，統計圖形則以直方圖或折線圖為主。
4. 「列聯表」是一種二維數據表格，其「欄」與「列」是同一母群體的兩種分割，並在每一欄的最下方、每一列的最右方，做「小計」，表格的右下角做「總計」。

5. 複雜數據時，學生可使用計算機輔助。當教學設備允許時，可使用電腦應用軟體輔助學習。

條目範圍

以生活中常見的數據資料為主。

釋例

1. 教師可選擇生活中常見的數據資料，要求學生從資料的蒐集、分類與整理、選擇適合的統計圖表與繪圖，統整性的學習整個概念。

2. 處理百分率的統計圖表時，因取近似值緣故，可能產生總和不等於 100%的情況。

錯誤類型

學生可能選擇不適當的統計圖，例如：不具順序或不具連續性的資料，統計圖卻選擇以直方圖、或折線圖呈現。

探索

1. 生活中常見的數據資料，可搭配性別平等、人權、環境、與海洋等議題。

2. 處理百分率的統計圖表時，因取近似值緣故，可能產生總和不等於 100%的情況，若要將各部分所占比率作調整使其總和等於 100%，常用的調整方法有 largest remainder method 和 highest average method，可作為延伸學習活動。

D-7-2 統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。	n-IV-9 d-IV-1

先備：D-6-1。

連結：D-7-1。

後續：D-8-1。

基本說明

1. 平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置。平均數是指所有資料值的總和除以總次數；中位數是將資料排序後，前後各切成一半的中間位置資料值；眾數是次數最高的數據值，可能是一個或多個。平均數、中位數會使落在兩邊的資料呈現出某種「平衡」狀態。平均數是量的平衡，中位數則是個數的平衡，而眾數是落在出現次數最高的位置，與平均數、中位數有差別。

2. 將幾份同類資料合併時，其總和等於各份資料的平均數乘以各份次數的加總。必要時，可使用計算機的「M+」或「Σ」鍵來輔助計算。

條目範圍

本條目旨在學生了解統計圖表的意義與使用，勿作過度延伸。例如：教學與評量不適合出現「給定平均數及次數，反求此組資料中某一未知的數」的問題。

釋例

1. 給定一組資料，教師可先提問「能否使用一個數來描述此一組資料的集中位置」，之後再進行平均數、中位數、眾數的教學。
2. 平均數對於資料中有特別大或特別小的數特別敏感，中位數則不受影響。以{1, 2, 3, 4, 5}和{1, 2, 3, 4, 500}兩組資料為例，第一組的平均數、中位數均相同，但第二組的中位數不變，平均數則為 102。

錯誤類型

誤認為任何資料中平均數和中位數都必定很接近，甚至相等。

探索

加權平均數。

8 年級學習內容解析

N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 **備註：**可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。	n-IV-5

先備：N-7-6、N-7-7。

連結：N-8-2、S-8-6、G-8-1。

後續：S-9-6、N-10-1、N-10-3、G-10-2。

基本說明

1. 設 a 為一個非負的數，若一數 b 滿足 $b^2=a$，則稱 b 為 a 的二次方根或平方根。
2. $a>0$，$\sqrt{a}$（讀為根號 a）稱為 a 的二次方根，或稱為（正）平方根，即 $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$，0 的平方根是 0。在國中階段只討論非負有理數的平方根。
3. 根式的化簡是指每一項中只有分子含有根號，且根號中的正整數不含有大於 1 的完全平方數的因數。
4. 根式的四則運算包含整數、分數及根式間的運算，並且化簡之。

   當 $a>0$，$b>0$ 時，則

   (1) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$，

   (2) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，

   (3) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$。
5. 能比較含有根號的數之大小。

條目範圍

1. 化簡後的最簡根式以不超過兩個根式為主。例如：不宜出現 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 的結果。
2. 不出現 $\sqrt{a^2}=|a|$ 的結論。

釋例

1. $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ ...等這些開根號的數對學生來講是新的數，因此引進學習 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 的動機，對學生能學好這些新的數是非常重要。從數學史來講，發現 $\sqrt{2}$ 不是分數也是一件很重大的事情。因此，教材的編寫應有這方面的適當說明。
2. 能用正方形的面積邊長關係來理解：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ ...等開根號數的意義。
3. $\pm\sqrt{3}$ 皆為3的平方根，其中 $\sqrt{3}$ 為3的正平方根，$-\sqrt{3}$ 為3的負平方根。
4. 能用正方形的面積與邊長關係來理解：當 $a>b>0$ 時，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。
5. 觀察 $1^2=1$、$2^2=4$、$3^2=9$、...，我們稱1、4、9、...為完全平方數。

6. 能熟練正有理數的二次方根計算，例如：

(1) $\sqrt{169}=13$。

(2) $\sqrt{256}=\sqrt{2^8}=\sqrt{(2^4)^2}=2^4$。

(3) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times 3}=5\sqrt{3}$。

(4) $\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{2}$。

(5) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

7. 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$。

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{2}+1$$。

8. 求解 $3\sqrt{8}\cdot x=2\sqrt{3}$，得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$。

9. 計算並化簡：$\sqrt{16}+\sqrt{100}-\sqrt{25}-\sqrt{\frac{1}{9}}=4+10-5-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}$。

錯誤類型

1. 根式和二次方根觀念的混淆，例如：學生可能將 $\sqrt{4}$ 誤解為 $\sqrt{4}=\pm 2$。
2. 在根式的四則運算中，未將根式化至最簡，產生同類項不能完全合併的情形。
   例如：出現 $\sqrt{8}+\sqrt{2}-1$ 的答案。
3. 學生可能出現 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$、$2\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$ 等錯誤概念。
4. 乘法公式的誤用可能產生的迷思概念，例如：

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=5-3=2$，
正確答案應為 $\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=3-5=-2$。

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=2+3=5$，
正確答案應為
$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$。

評量

評量不宜只含綜合型的根式四則運算，其原因為難以鑑別學生學習的困難為何。

探索

在 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$...等數的教學中，利用畢氏定理理解這些數可用尺規作圖方式得到。

N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機「√」鍵。 **備註：**二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。	n-IV-6 n-IV-9

先備：N-7-6、N-7-7。

連結：N-8-1、S-8-6、G-8-1。

後續：N-10-1。

基本說明

1. 能理解二次方根，如$\sqrt{220}$的整數部分。
2. 以十分逼近法求得二次方根，如$\sqrt{2}$的近似值，並可適時使用計算機輔助計算數的平方。
3. 熟悉使用計算機√鍵，建立對$\sqrt{a}$數值的數感，其中$a\geq 0$。
4. 除了a是完全平方數之外，其餘計算機所計算出的$\sqrt{a}$值皆為近似值。
5. 使用計算機√鍵，輔助理解當$a>b>0$時，則$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。

條目範圍

理解以十分逼近法求得二次方根的近似值，可適時使用計算機輔助計算數的平方，並正確估計至小數點後第一位為限。

釋例

1. 求$\sqrt{220}$的整數部分。
   因為$14^2=196<220$，且$15^2=225>220$，所以$14<\sqrt{220}<15$，故$\sqrt{220}=14.\cdots$，即$\sqrt{220}$的整數部分$=14$。
2. 以計算機求得$\sqrt{2}$、$\sqrt{2.1}$、$\sqrt{3.9}$、$\sqrt{4}$的近似值，並歸納當$a>b>0$時，$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。
3. 在計算機的使用中，若輸入一個大於0的數，並連續按√鍵，其結果皆會逼近1。
   若此數大於1，則結果會漸減逼近1；若此數小於1，則結果會漸增逼近1。
4. 利用十分逼近法知道$\sqrt{3}$的值介於1.7與1.8之間。

錯誤類型

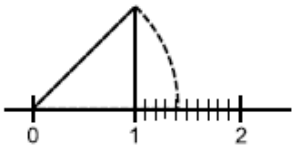
1. 學生會有$\sqrt{220}$的整數部分為220的迷思概念。
2. 學生會誤認為1.414為$\sqrt{2}$的真正的值，也會誤認為以計算機操作$\sqrt{2}$所得的也為真正的值。

評量

十分逼近法為求二次方根近似值的一種方法，目的為此方法的精神，故近似值正確估計至小數點後第一位為限。

探索

能以幾何方式理解1.4<$\sqrt{2}$<1.5，例如：



N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。	n-IV-7

先備：R-6-2、R-6-3。

連結：N-8-4、N-8-6。

後續：N-10-6。

基本說明

1. 將數排成一列並以逗號分開，稱為數列。
2. 一數列的第一項（首項）通常記為a_1，第二項記為a_2，...，第n項記為a_n。若a_n為此數列的最後一項，稱a_n為此數列的末項。
3. 數列常見於高速公路里程標示、門牌號碼、計程車計費碼表等。從某些簡單、具規則的數列如：179，180，181，...和1，3，5，7，9，...等，學習數列的相關名詞，並理解其規則性。
4. 透過圖形的變化，找到圖形變化模式的規律，培養觀察與歸納的能力。

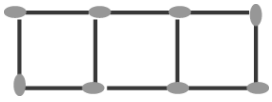
條目範圍

透過圖形的變化，主要為找到圖形變化模式的規律，不應出現以級數和求一般項，例如:不應出現求釋例 5. 中的一般項。

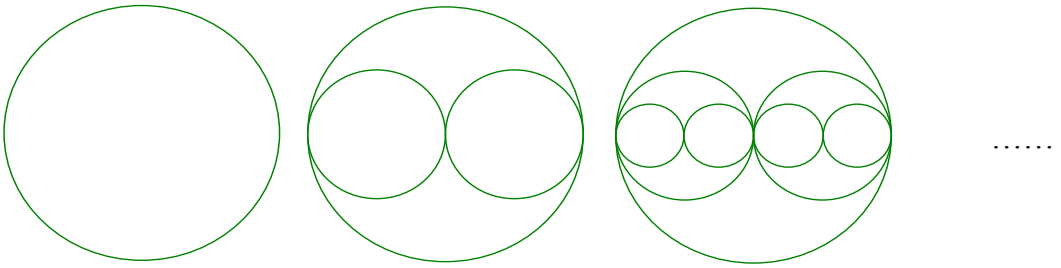
釋例

1. 初期數列的觀察，宜以整數數列為主。
2. 由情境變化模式的規律性寫出其一般項的表示法。

   例如：用火柴棒排正方形（如圖），排1個正方形要用4根火柴棒，排2個要用7根，排3個要用10根，則排n個正方形要用_____根火柴棒。



   設a_n為排出n個正方形的火柴棒個數，則$a_1=4$，$a_2=4+3$，$a_3=4+3+3=4+2\times3$，$a_4=4+3+3+3=4+3\times3$，…，$a_n=4+(n-1)\times3$，可得排n個正方形要用$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$根。

3. 能以 a_n 來代表數列一般項的符號表示法，例如：由奇數所形成的數列1、3、5、7...理解 $a_n=2n-1$。
4. 設 $a_n=1-2n$，可得 $a_5=1-2\times5=-9$。
5. 

圖一　　圖二　　圖三

若圖一、圖二、圖三...中的圓形個數分別為 a_1、a_2、a_3，則依此圖形的規則性，求出 a_4 和 a_5 的值。

$a_1=1$，$a_2=1+2=3$，$a_3=1+2+4=7$，$a_4=1=2+4+8=15$，

$a_5=1+2+2^2+2^3+2^4=31$。

此例中，若能找到 a_4 和 a_5 的值，顯示出學生已找到圖形變化的規則。因此不宜出現求如 a_{10} 計算量龐大的數，更不應出現求一般項 a_n。

6. 學習須累積「由情境的問題轉化為一般項的表示法」的足夠經驗，才能進行以 a_n 表示一般項的學習。

錯誤類型

1. 設 $a_n=2n+3$，則此數列是否有一項的值為 3？

   由 $2n+3=3$ 可得 $n=0$，學生可能會回答「有，此時 $n=0$」的迷思概念。
2. 學生在上述數列中，也可能會混淆「數值為 5」和「第 5 項」的意義。

評量

1. 觀察數列的規則性，求一般項 a_n 時，宜以整數數列為主。
2. 在數列或圖形的規則性觀察中，不宜出現太複雜的計算。

N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。 **備註**：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9的值，求首項和公差。	n-IV-7

先備：R-6-3。

連結：N-8-3、N-8-5、N-8-6。

後續：N-10-6。

基本說明

1. 若一個數列滿足 $a_{n+1}-a_n=d$（定值），$n=1,2,3,\ldots$，則稱此數列為一等差數列，且 d 為其公差。
2. 由等差數列的首項及公差，求得第 n 項。也就是熟悉等差數列求第 n 項的公式：$a_n=a_1+(n-1)d$。

條目範圍

不涉及「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數和公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。

釋例

1. 等差數列的教學重點在於為使學生觀察到數列中「後項－前項＝定值」的關係，例如：

   樣式一：1，2，3，4，5，……，n，

   樣式二：3，6，9，12，15，……，$3n$，

   樣式三：5，8，11，14，17，……，$3n+2$，

   樣式一有一規律：後一項都是前一項加 1。

   樣式二與樣式三都有一規律：後一項都是前一項加 3。

   樣式二與樣式一的關係為：樣式二的各項是樣式一的 3 倍。樣式三與樣式二的關係為：樣式三的各項比樣式二多 2。如此，樣式三與樣式一的關係為：樣式三的各項是樣式一的 3 倍多 2。
2. 等差數列 80，77，74...中，求首項，公差與第 14 項。

   $a_1=80$，公差$=77-80=-3$，$a_{14}=80+(14-1)\times(-3)=41$。
3. 已知一等差數列的首項為 5，公差為 -3，求 -13 是第幾項。
4. 若 a、b、c 三數成等差，則稱 b 為 a 和 c 的等差中項，且 $a+c=2b$。

   例如：若三數成等差數列，等差中項為 7，求三項的和。

錯誤類型

1. 學生可能會誤將公差記為 $d=a_n-a_{n+1}$。例如：將等差數列 1，6，11，16，21 的公差算成 $d=1-6=-5$。

2. 學生可能認為2、6、2、6、2、6為等差數列，也可能認為2、2、2、2不是等差數列。
3. 學生可能記錯等差數列第n項的公式，例如：$a_n = a_1 + nd$。

評量

主要評量要點如下：等差數列的意義、公差的意義、關係式$a_n = a_1 + (n-1)d$。

N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。 **備註：**不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。	n-IV-8

連結：N-8-3、N-8-4。

後續：N-10-6。

基本說明

1. 設a_1、a_2、...、a_n為一等差數列，若將此等差數列的各項以「＋」相加，則稱$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$為等差級數。
2. 一等差數列的前n項和記為S_n，即$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。
3. 等差級數$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$的和$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$或$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$，
   其中d為公差，並比較兩者間應用的異同之處。

條目範圍

不涉及由聯立方程式解「僅由級數和反求首項和公差」等類似問題，例如：已知一等差數列的前10項和與前15項和的值，反求首項和公差。

釋例

1. 求等差級數$-31 + (-29) + (-27) + \cdots$的前十一項之和。
2. 若首項為6的等差級數，已知前十項之和為285，求公差及第十項。
3. 若等差級數$-1+0+1+2+\cdots+m=152$，求m。
   此級數共有$m+2$項，等差級數和為$\frac{(m+2)(-1+m)}{2} = 152$，化簡為$m^2 + m - 306 = 0$，
   因是分解得到$(m+18)(m-17) = 0$，因此解得$m = 17$或-18(不合)。
4. 快樂歌劇院共有22排座位，且自第二排開始，每一排比前一排多3個座位。已知第一排有10個座位，則快樂歌劇院共有幾個座位？
   設第n排的座位有a_n個，則a_1、a_2、...、a_{22}為一首項$a_1 = 10$、公差$d = 3$的等差數列。
   所以$S_{22} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{22} = \frac{22[2\times10+(22-1)\times3]}{2} = 913$，即快樂歌劇院共有$913$個座位。

5. 另一種解法：因為第 22 排的座位 $a_{22}=10+(22-1)\cdot 3=73$，
所以 $S_{22}=a_1+a_2+\cdots+a_{22}=\frac{22[10+73]}{2}=913$。

錯誤類型

求級數和時，對項數有迷思概念。例如：等差級數 $-1+0+1+2+\cdots+m$ 中，學生可能將之誤認為總共有 m 項，事實上共有 $m+2$ 項。

評量

1. 主要評量要點如下：由等差數列的首項、末項或首項、公差求得前 n 項和 S_n。
2. 評量內容不涉及解聯立方程式，例如：給定 S_{10} 和 S_{35} 的值，反求首項和公差。

N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 **備註**：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。	n-IV-7

先備：R-6-3。

連結：N-8-3、N-8-4。

後續：N-10-6。

基本說明

1. 若一個數列滿足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$（定值），$n=1,2,3,\ldots$，則稱此數列為一等比數列，且 r 為其公比。
2. 由等比數列的首項及公比，求得第 n 項。也就是熟悉等比數列求第 n 項的公式：$a_n=a_1r^{n-1}$。

條目範圍

1. 觀察數列的一般項若為等比數列，除了以 10 為底，其指數可為 0 或負整數外，其它形如 a^n 的數，其指數 n 必須為正整數。
2. 不涉及「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數和公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。

釋例

1. 等比數列的教學重點在於為使學生觀察到數列中「後項÷前項＝定值」的關係，例如：
樣式一：1，2，4，8，16，……，2^{n-1}。
樣式二：3，6，12，24，48，……，$3\cdot 2^{n-1}$。
樣式一與樣式二有一規律：後一項都是前一項乘以 2。
樣式二與樣式一的關係為：樣式二的各項是樣式一的 3 倍。

2. 等比數列 1，−2，4 … 中，求公比與第 10 項。

   $a_1=1$，公比$=\frac{-2}{1}=-2$，$a_{10}=1\times(-2)^{10-1}=-51$。

3. 已知一等比數列的首項為 16，公比為 $\frac{3}{2}$，求 81 是第幾項。

4. 若不為 0 的三個數 a、b、c 成等比，則稱 b 為 a 和 c 的等比中項，且 $ac=b^2$。

   例如：若三數成等比數列，等比中項為 -5，求三項之乘積。

錯誤類型

1. 學生可能會誤將公比記為 $r=\frac{a_n}{a_{n+1}}$。例如：將等比數列 81，27，9，3，1 的公比算成 $r=\frac{81}{27}=3$。
2. 學生可能記錯等比數列第 n 項的公式，例如：$a_n=a_1\cdot r^n$。
3. 學生可能認為 2，6，2，6，2，6 為等比數列，也可能認為 2，-2，2，-2，2，-2 不是等比數列。

評量

1. 主要評量要點如下：等比數列的意義、公比的意義、關係式$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$。
2. 評量內容不涉及「同時包含等差和等比」綜合概念的問題。

S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。	s-IV-2

先備：S-7-1、S-7-3。

連結：S-8-2、S-8-3。

後續：S-9-1、S-9-2、S-9-4、S-9-5。

基本說明

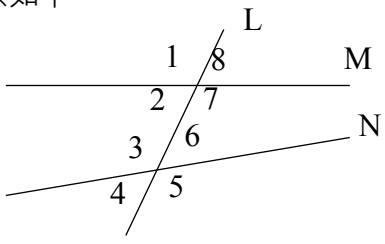
1. 認識角的種類：銳角（小於90度）、直角（等於90度）、鈍角（大於90度且小於180度）、平角（等於180度）、周角（等於360度）。
2. 認識兩個角的關係：若∠A+∠B=90^0，則稱兩角互餘，∠A 也稱為∠B 的餘角；若∠A+∠B=180^0，則稱兩角互補，∠A 也稱為∠B 的補角。
3. 在同一平面上，直線 L 分別與直線 M，N 交於兩個相異點，稱直線 L 為直線 M 與 N 的截線。截線 L 截過直線 M，N 後形成八個角，這些角的關係如下。

   同位角：∠1與∠3，∠2與∠4，∠5與∠7，∠6與∠8。

   同側內角：∠2與∠3，∠7與∠6。

   內錯角：∠2與∠6，∠7與∠3。

   對頂角：∠2與∠8，∠7與∠1，∠3與∠5，∠4與∠6。



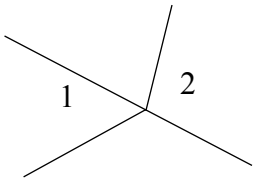
4. 互為對頂角的兩角必相等，如上圖∠2=∠8。
5. 若一直線將已知角平分成相等的兩角，則稱此直線為該角的角平分線。

釋例

1. 兩角相加總合 90 度稱為互餘，給定一已知角求其餘角，除了使用 90 度減去已知角外，也可以使用兩角和等於 90 度的方式處理。例如：已知角為 $60–3a$ 度，則計算它的餘角的度數時，可以使用總合為 90 度的方式處理，則另一角為 $30+3a$ 度。
2. 兩角相加總合 180 度稱為互補，給定一已知角求其補角，除了使用 180 度減去已知角外，也可以使用兩角和等於 180 度的方式處理。例如：已知角為 $60–3a$ 度，則計算它的補角的度數時，可以使用總合為 180 度的方式處理，則另一角為 $120+3a$ 度。
3. 說明對頂角相等的方式，可以採取平角 180 度以及等量公理得出對頂角相等。
4. 透過將一已知角對摺，通過頂點使角的兩邊重疊，則此摺線為角平分線。

錯誤類型

1. 學生容易對同位角與同側內角的定義混淆。
2. 如下圖，學生容易誤解∠1與∠2互為對頂角。



S-8-2 凸多邊形的內角和：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正 n 邊形的每個內角度數。 **備註**：不處理多邊形外角和公式。	s-IV-2

先備：S-7-1。

連結：S-8-1、S-8-8。

後續：S-9-1、S-9-2、S-9-3。

基本說明

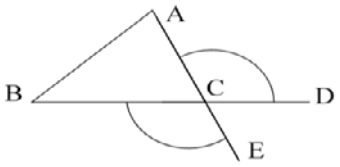
1. 理解凸多邊形的每個內角都小於$180°$。
2. 理解凸多邊形的內角與外角的意義。
3. 理解三角形的內角和為$180°$。
4. 能理解三角形的外角性質，即三角形的任一外角等於其兩內對角之和。
5. 能理解 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180°$，$n\geq3$。進而可得正 n 邊形的每個內角度數為 $\frac{(n-2)\times180^0}{n}$。

條目範圍

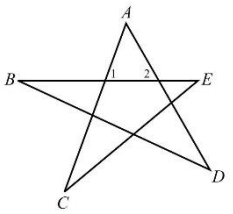
不介紹 n 邊形的外角和，其中 $n \geq 4$ 。

釋例

1. 介紹三角形任一內角均有兩個外角。如右圖所示，∠ACB 的外角可以是∠ACD 或者是∠BCE；而且內角與其外角的和等於 180^0。例如 $\angle ACB+\angle ACD = 180^0$。



2. 計算凸 n 邊形的內角和，有兩種方式：一種是固定一頂點將 n 邊形切割成$n-2$個三角形，所以內角和=$(n\text{-}2)\times 180^0$；第二種方式為固定 n 邊形裡面一定點，從這一點向外可做 n 個三角形，但是扣除周角 360^0 就是多邊形的內角和；$n\times 180^0 - 360^0 = (n-2)\times 180^0$。
3. 計算正 n 邊形每個內角度數，可以先計算內角和為 $(n-2)\times 180^0$，再除以 n 即可。
4. 可利用過三角形一頂點做平行對邊之直線，理解三角形內角和為180°；或沿三角形邊界環繞一周時，計算在各個頂點之旋轉角的總和，理解三角形的外角和為360°，進而推理得到三角形的內角和為180°。
5. 能熟練三角形內角和公式及三角形外角性質的應用。如右圖，∠B = 25°，∠C = 30°，∠D = 35°，∠E = 40°，求∠1、∠2、∠A 的度數。



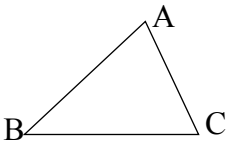
根據 三角形外角性質：∠1=∠C+∠E=30°+40°=70°，

∠2=∠B+∠D=25°+35°=60°；

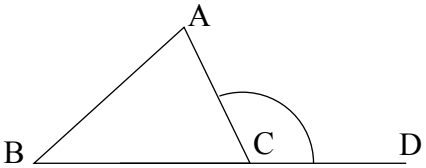
根據 三角形內角和為 180°，∠A=180° - ∠1 - ∠2=180° - 70° - 60°=50°。

錯誤類型

1. 學生對於外角的認知容易產生迷思，以為是三角形外面的角。如下圖所示，學生誤以為∠A外角的度數=360^0–∠A。



2. 三角形 ABC，沿著 $\overline{BC}$ 從 B 到 C，再沿著 $\overline{AC}$ 從 C 到 A，其旋轉的角度為∠DCA，學生容易誤認為∠BCA。



探索

哪些正多邊形可無縫隙鋪設平面？而哪些正多邊形卻不能無縫隙鋪設平面？

S-8-3 平行：平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。	s-IV-3

先備：S-7-1、S-7-3。

連結：S-8-1、S-8-2、S-8-8、S-8-9、S-8-10、S-8-11、S-8-12。

後續：S-9-3。

基本說明

1. 平面上兩條直線永不相交稱為平行，並認識平行的符號「$//$」。
2. 平面上同時垂直一直線的兩直線必平行。
3. 兩直線互相平行時，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。
4. 平面上，直線 L 為直線 M 、 N 的截線，若下列三者中之一成立：

   (1) 同位角相等，(2) 錯角相等，(3) 內角互補，

   則直線 M ， N 互相平行。
5. 平面上，若兩相異直線 $L//M$ ，則 L 上的任一點到直線 M 的距離均相等，這個性質稱為兩平行線間的距離處處相等。

釋例

1. 兩平行線被一直線所截，可以透過平行線的定義解釋同位角相等。說明如下。

   如圖所示，$L_1//L_2$ ，$\angle 1=50^0$ ，則$\angle 2$ 的度數是多少？

   過直線 L 上一點 P，作直線 M，與直線 L_1 垂直，則$\angle 3=90^0$；

   並與直線 L_2 交角為$\angle 4$；因為 $L_1//L_2$ ，所以$\angle 4=90^0$，

   根據三角形內角和為180^0，

   所以 $\angle 5=180^0-\angle 1-\angle 3=180^0-50^0-90^0=40^0$，

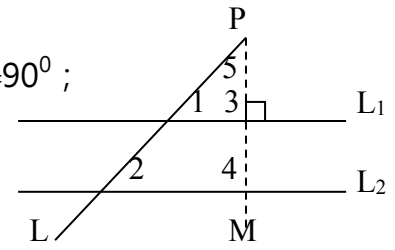
   而且 $\angle 2=180^0-\angle 5-\angle 4=180^0-40^0-90^0=50^0$。

   同樣的，如果 $\angle 1=x^0$ ，則$\angle 2$的度數是多少？

   因為 $\angle 5=180^0-\angle 1-\angle 3=180^0-x^0-90^0=90^0-x^0$，

   而且 $\angle 2=180^0-\angle 5-\angle 4=180^0-(90^0-x^0)-90^0=x^0$，

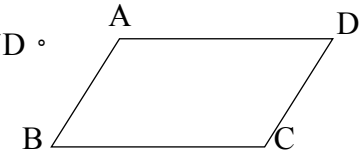
   所以，可得$\angle 1=\angle 2$。



2. 兩直線被一直線所截，若同側內角和小於180度，則此兩直線必在此側相交。
3. 兩直線被一直線所截，若同位角不相等，則此兩直線必相交。
4. 熟練應用平行線截角性質。

   如右圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle A=137^0$，求$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。

   四邊形 ABCD 是平行四邊形，則 $\overline{AD}//\overline{BC}$ ，

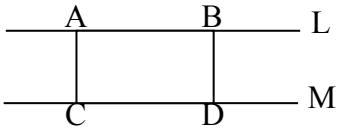


可得 $\angle A+\angle B=180^0$，$\angle B=180^0-\angle A=180^0-137^0=43^0$，

同理 $\angle B+\angle C=180^0$，$\angle C=180^0-\angle B=180^0-43^0=137^0$，

同理 $\angle C+\angle D=180^0$，$\angle D=180^0-\angle C=180^0-137^0=43^0$。

5. 直線 L 與直線 M 平行，在 L 上取 A、B 兩點，過 A、B 兩點作 M 的垂線，分別交直線 M 於 C、D 兩點；則可得四邊形 ABCD 有四個直角，即為矩形，可得 $\overline{AC}=\overline{BD}$。由於 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 分別為點 A、B 到直線 M 的距離，進而理解兩平行線間距離處處相等。

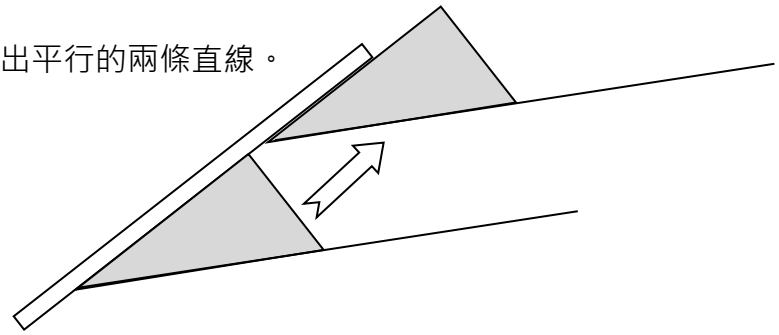


錯誤類型

學生習慣背誦同位角相等，內錯角相等，同側內角互補；事實上，同位角不一定相等，內錯角也不一定相等，同側內角不一定互補；前提必須兩直線平行下才成立。

探索

利用三角板的移動畫出平行的兩條直線。



S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然）。	s-IV-4

先備：S-7-1、S-7-4。

連結：S-8-5、S-8-6。

後續：S-9-1、S-9-2。

基本說明

1. 如果兩個平面圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全重疊在一起，它們就是兩個形狀與大小都相同的圖形，我們稱它們是兩個全等圖形。

2. 如果兩個三角形可以完全重疊在一起， 疊在一起的頂點稱為對應點，疊在一起的邊稱為對應邊，疊在一起的角稱為對應角。

3. 能理解兩多邊形全等，則其對應邊、對應角相等。反過來，若對應邊、對應角相等，則兩多邊形全等。

條目範圍

不涉及非凸多邊形的全等。

釋例

1. 當兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉後重疊，稱為全等圖形。同時重疊的點稱為對應點，重疊的邊稱為對應邊，重疊的角稱為對應角。例如：用電腦複製貼上的圖形與原圖全等。
2. 兩個凸多邊形的每個對應角與每個對應邊都相等，可透過疊合，發現此兩凸多邊形全等。
3. 給定一個四邊形，學生可透過量角器與直尺複製一個全等的四邊形。

錯誤類型

學生誤以為兩多邊形所有對應邊都相等就是全等圖形；或者，誤以為兩多邊形所有對應角都相等就是全等圖形。

探索

透過平移、旋轉或翻轉的操作活動體認全等的圖形。

S-8-5 三角形的全等性質：三角形的全等判定（SAS、SSS、ASA、AAS、RHS）；全等符號（≅）。	s-IV-9

先備：S-7-1、S-7-4。

連結：S-8-6、S-8-8。

後續：S-9-1、S-9-2。

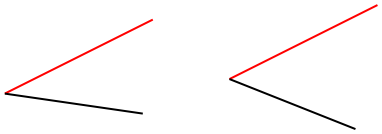
基本說明

1. 如果兩個三角形 ΔABC 與 ΔDEF 可以完全重疊在一起，我們就稱 ΔABC 與 ΔDEF 為兩個全等三角形，記為 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ，讀做「三角形 ABC 全等於三角形 DEF」，其中以符號 ≅ 表示全等。
2. 能理解 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質。
3. 能理解 SSA 不一定全等。

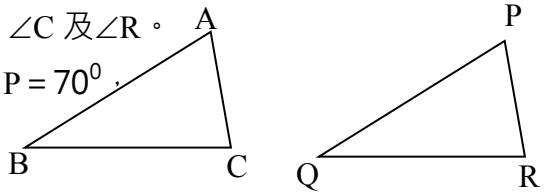
釋例

1. 在說明兩個三角形全等時，可以使用填空格方式讓學生練習書寫的程序與論述的理由。
2. 以重疊驗證全等，發現兩個三角形只要三組對應邊與三組對應角都相等則全等；之後再討論是否可以減少條件。
3. 也可以從最少的條件慢慢增加，從一組對應邊（或角）相等的兩個三角形全等嗎，讓學生學習找反例；若再增加 1 組條件，例如：組對應邊相等，或兩組對應角相等，或一組對應邊與一組對應角相等，讓學生造例或舉反例，討論是否全等。從學生舉出的反例中，再增加某項條件後就全等了。例如：定 2 組對應邊相等，如下圖所示：因為中間的夾角可能會

變動，就不會全等！如果加上中間的夾角相等，三角形固定了，就全等。



4. 如圖，ΔABC 與ΔPQR 中，$\angle A = \angle P = 70^0$，$\angle B = \angle Q = 30^0$，$\overline{BC} = \overline{QR} = 2.4$。



求：(1) ΔABC 與ΔPQR 是否全等？(2) 求 $\angle C$ 及$\angle R$。

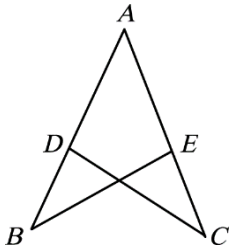
說明：在ΔABC 與ΔPQR 中，因為$\angle A = \angle P = 70^0$，

$\angle B = \angle Q = 30^0$，$\overline{BC} = \overline{QR} = 2.4$，

所以ΔABC≅ΔPQR （AAS），則

則 $\angle C = \angle R = 180^0 - 70^0 - 30^0 = 80^0$。

5. 如圖，D、E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，$\overline{AB} = \overline{AC}$，$\angle B = \angle C$。



請證明△ABE≅△ACD。

說明：在ΔABE 與ΔACD 中，

因為 $\overline{AB} = \overline{AC}$、$\angle B = \angle C$、$\angle BAE = \angle CAD$，

所以△ABE≅△ACD （ASA）。

6. 其它的全等性質（SSS、SAS、RHS）仿上例應用。

7. 能以三角形的全等性質做簡單幾何推理，例如：

(1) 等腰三角形兩底角相等。

(2) 角平分線上的任一點到角的兩邊距離相等。反之，同一平面上，若一點到角的兩邊之距離相等，則此點位在角的平分線上。

(3) 一線段中垂線上任一點到兩端點等距。反之，若一點到線段的兩端點等距，則此點在此線段的中垂線上。

錯誤類型

1. 學生對於判斷 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質仍陌生並充滿迷思，尤其是遇見一組直角三角形時，都會誤認一定是 RHS，事實上可能是 ASA 或 AAS 或其他。

2. 學生容易將 AAS 與 ASA 視為相同，（忽略了順序關係）；同樣的，SSA 與 SAS 都是兩邊一角的條件，也視為相同的全等性質。

評量

學習證明的過程循序漸進，從填空題格式練習書寫做起。

S-8-6 畢氏定理：畢氏定理 (勾股弦定理、商高定理) 的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	s-IV-7

先備：S-5-1、S-5-2、S-7-1。

連結：S-8-7、S-8-8、G-8-1。

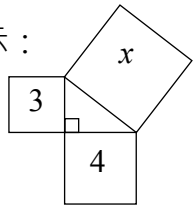
後續：S-9-5、S-9-12。

基本說明

1. 了解只有一個角為直角的三角形，是直角三角形，並認識其斜邊與股的意義。
2. 認識畢氏定理(勾股弦定理、商高定理)，即直角三角形斜邊長的平方等於兩股的平方和；並介紹其相關的數學史。
3. 從給定直角三角形其中兩邊的長，依據畢氏定理求出第三邊的長；並將畢氏定理應用於生活情境中的問題，必要時可使用計算機輔助計算。
4. 了解三角形的三邊長滿足畢氏定理必定是直角三角形。

釋例

1. 透過直角三角板教具，認識兩股長與斜邊長；同時旋轉三角板認識斜邊位置可能的情形。
2. 透過摺紙、剪紙或計算面積 … 等多樣的活動介紹畢氏定理，認識它的證明與推理過程；透過面積方式，讓學生了解 a^2、b^2、c^2 的幾何意義，強化三個正方形面積關係。因此學生對於給定直角三角形的兩個股邊的正方形面積為 3，4 時，則斜邊長的正方形面積比較不會出現迷思概念為 5 的狀況。如下圖所示：



3. 已知直角三角形的兩邊長為3，4；求第三邊的長。因為斜邊是最長邊，如果3，4是兩股邊，則第三邊為斜邊 = $\sqrt{3^2+4^2}=5$；如果4是斜邊，則第三邊是股邊= $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ 。
4. 數學史上關於畢氏定理的說明：

商高定理

在中國最古老的數學書《周髀算經》裏，有一段周公和商高的對話，其中提到「勾廣三，股修四，徑偶五」。因為商高所提到的勾三、股四、弦五是我國最早有關「商高定理」的記載，故有些人認為此定理應稱為「商高定理」。

陳子定理

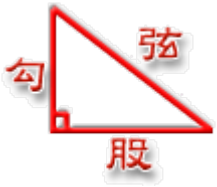
有關一般性「商高定理」的最早記載出現在《周髀算經》中對於陳子的敘述，這段敘述除了指出三角測量的方法外，並提到「商高定理」的一般性原則「句股各自乘，并而開方除之」。因為這段敘述，所以有人認為此定理應稱為「陳子定理」。

畢氏定理

西方國家普遍相信「畢氏定理」是於西元前 560 年到西元前 480 年間由畢達哥拉斯發現的，或者至少是由他證明的。雖然有許多證據顯示畢達哥拉斯並非此定理的創始者，然而因為早期許多哲學家、數學史家等推斷畢達哥拉斯發現了這個定理，故冠以「畢達哥拉斯定理」之名，許多人已經習慣了這個名稱，是以此名稱仍沿用至今。

勾股定理

所謂的勾股弦即表示直角三角形的三個邊長：



1. 三角形的短邊稱之為「勾」，
2. 三角形的長邊稱之為「股」，
3. 長邊和短邊的連線的斜邊稱之為「弦」。

也有一些人認為不知到底是由誰最先發現此定理，故不如避開人名，直接以「勾股弦定理」稱之，而有勾股必有弦，故亦稱為「勾股定理」。

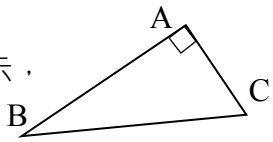
左圖是一張希臘為了紀念畢達哥拉斯於 1955 年 8 月 20 日發行的郵票，中間白色的三角形是直角三角形，而旁邊的三個正方形則是依照直角三角形的三邊長所畫出來的。

兩個小正方形的面積和等於大正方形的面積。

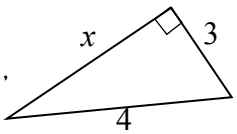
5. 解決生活的應用問題，依題意列出方程式求出的解，常會出現不合理的答案，因此需要代回去檢驗。
6. 三角形的三邊長滿足畢氏定理必定是直角三角形。建議放在三角形的全等後再補充，作為三角形 SSS 全等判定的應用，理解三邊長滿足畢氏定理之三角形一定是直角三角形。

錯誤類型

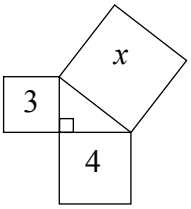
1. 學生對於斜邊的位置有迷思，如右圖所示，$\angle BAC=90^0$，學生誤認為 $\overline{AB}$ 是斜邊。



2. 學生習慣背誦3，4，5；給定直角三角形的兩邊長，如圖所示，學生容易誤認為 x=5。

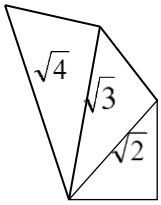


3. 如圖所示，一直角三角形的三邊分別有三個正方形，已知兩個正方形面積為3，4；第三個正方形面積學生容易誤判為5。



評量

本單元**不適合**出現給定邊長為 1 的方格紙，在格子點上畫出邊長為$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$，...等長的線段；但若是從兩股長為 1 的等腰直角三角形延伸，慢慢找出 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$、...，是可以呈現的。例如：



探索

1. 讓學生使用畢氏定理測量兩樓層間兩點的距離，學生可以使用計算機估算近似值。
2. 求長方體圖形的邊長，關係到立體圖形，建議給予立體模型的教具以利學生觀察出直角三角形的關係。

S-8-7 平面圖形的面積：正三角形的高與面積公式，及其相關之複合圖形的面積。	s-IV-8

先備：S-7-1、S-7-4。

連結：S-8-6、S-8-10、S-8-11。

後續：S-9-5、S-9-6。

基本說明

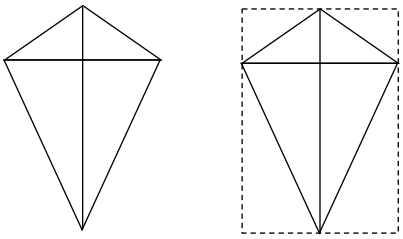
1. 邊長為a之正三角形的高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$。
2. 邊長為a之正三角形的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。
3. 複合圖形可以採取切割方式，或是補足為基本圖形再扣除增加的圖形面積。

條目範圍

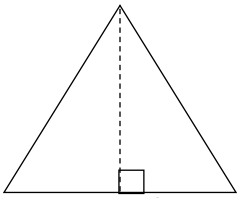
複合圖形以多邊形為限，不適合出現與圓相關的圖形。

釋例

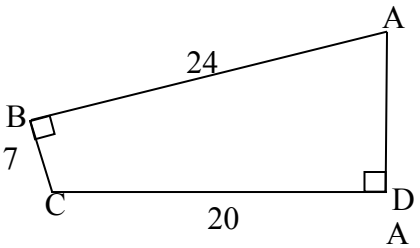
1. 箏形的對角線互相垂直，將箏形補成矩形，如下圖所示；依據矩形面積為長乘以寬，而箏形面積恰好是矩形面積的一半；而矩形的長與寬恰好是兩條對角線的長。所以得出箏形的面積=$\frac{1}{2}\times$(兩條對角線長之乘積)。



2. 邊長為 a 的正三角形，從頂點做高，再利用畢氏定理求出高等於 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，因此可得面積等於 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。



3. 如圖四邊形 ABCD，其中∠ADC = ∠ABC = 90^0，

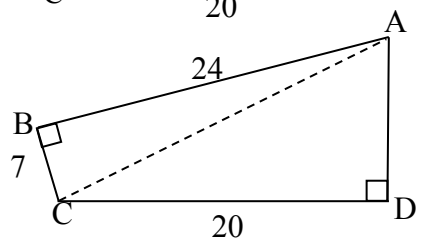


求四邊形 ABCD 的面積。

連接 $\overline{AC}$，則將四邊形分成兩個三角形；

$\overline{AC}=\sqrt{7^2+24^2}=25$，$\overline{AD}=\sqrt{25^2-20^2}=15$，

所以四邊形 ABCD 面積



$=\Delta ABC+\Delta ADC=24\times7\div2+20\times15\div2=84+150=235$。

錯誤類型

學生常常混淆正三角形的高與面積的公式。

S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。	n-IV-4 s-IV-9

先備：S-7-1、S-7-4。

連結：S-8-6、S-8-10。

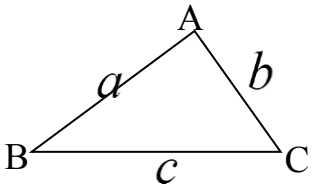
後續：S-9-2、S-9-4、S-9-5。

基本說明

1. 理解有兩邊相等的三角形，稱為等腰三角形。等腰三角形的兩底角相等。若三角形的兩內角相等則此三角形為等腰三角形。
2. 理解有兩邊相等的直角三角形，稱為等腰直角三角形。
3. 由兩點間直線距離最短，來理解三角形任兩邊之和大於第三邊，兩邊長的差小於第三邊。
4. 能理解三個正數滿足任意二數和大於第三邊，則此三個正數必為某一三角形的三邊長。
5. 理解三角形中，大角對大邊，大邊對大角；等邊對等角，等角對等邊。

釋例

1. 等腰三角形透過頂點作角平分線或高或中線，得出兩個全等三角形，並推得兩底角相等的結果。
2. 如圖，若 a、b、c 是ΔABC 的三邊長，我們可以得到：



$a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$。

但是：若 $c\geq a$，$c\geq b$，我們不用每次都檢查三遍，

只要檢查兩短邊長的和>最長邊即可。

3. 已知兩線段長分別是 10 公分、8 公分，再給一條線段長為 a，a 必須具備什麼條件才可以讓這三條線段形成三角形？依據三角形中，兩短邊長的和大於最長邊，如果 10 是最長邊，則 $8+a>10$，a 必須超過 2 即可；如果 a 是最長邊，則 $10+8>a$，因此綜合上述兩者，可得 $a>2$ 且 $a<18$，合併記成 $2<a<18$。
4. 利用等腰三角形的性質，進而理解三角形內的邊角不等關係。
5. ΔABC 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的長度分別是 11、13、15 公分，比較 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小關係。因為 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，依據同一個三角形中，大邊對大角，小邊對小角所以 $\angle B>\angle A>\angle C$。
6. ΔABC 中，$\angle A=60^0$，$\angle B=62^0$，比較 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的大小關係。

   由三角形內角和為 180 度可得 $\angle C=180^0-\angle A-\angle B=180^0-60^0-62^0=58^0$，

   則 $\angle B>\angle A>\angle C$，依據同一個三角形中，大角對大邊，小角對小邊；所以 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$。
7. 依據等邊對等角，進而理解三邊等長的三角形，必定三個內角都相等，故為正三角形。依據等角對等邊，進而理解三個內角都相等的三角形，必定三邊都等長，故為正三角形。

S-8-9 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。	s-IV-8

先備：S-7-1、S-7-4。

連結：S-8-10、S-8-11、S-8-12。

後續：S-9-1、S-9-2、S-9-3、S-9-4、S-9-5。

基本說明

1. 理解兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。
2. 理解下列平行四邊形的基本性質：

   平行四邊形的一條對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形。

   平行四邊形的兩組對邊相等。

   平行四邊形的兩組對角相等。

   平行四邊形的兩條對角線互相平分。
3. 理解下列平行四邊形的判別性質：

   若四邊形的兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。

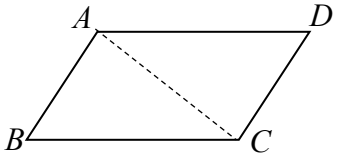
   若四邊形的兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。

   若四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。

   若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。

釋例

1. 一平行四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}\parallel\overline{CD}$，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$。



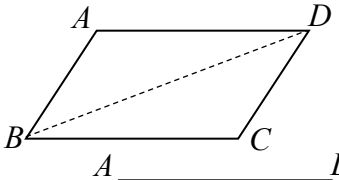
連接任何一條對角線可分成兩個全等三角形。

如連接 $\overline{AC}$，則可得$\Delta ABC\cong\Delta CDA$，

並可得$\angle B=\angle D$，$\overline{AB}=\overline{CD}$。

同理，如連接 $\overline{BD}$，則可得$\Delta ABD\cong\Delta CDB$，

並可得$\angle A=\angle C$，$\overline{AD}=\overline{BC}$。



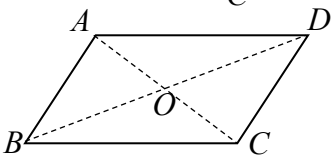
2. 一平行四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$。

$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，可得$\Delta ABO\cong\Delta CDO$，

並可得 $\overline{BO}=\overline{OD}$，$\overline{AO}=\overline{OC}$，

因此可得出 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相平分，

同時，可得ΔABO，ΔCDO，ΔAOD，ΔCOB 面積均相等。

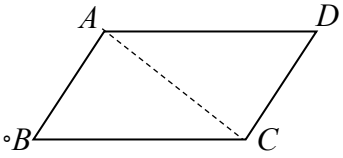


3. 四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，判斷四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

連接 $\overline{AC}$，則可得 $\Delta ABC\cong\Delta CDA$，

並可得 $\angle BAC=\angle DCA$，則 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$。

同理可得 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，因此 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



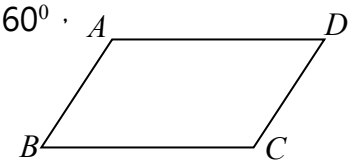
4. 四邊形 $ABCD$，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，判斷四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

因為四邊形四個內角和360^0，$\angle A+\angle C+\angle B+\angle D=360^0$，

因為$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，所以$2\angle A+2\angle B=360^0$，

得出 $\angle A+\angle B=180^0$，則 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$。

同理可得 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



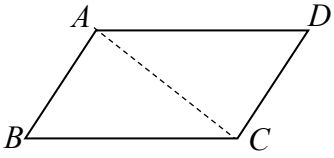
5. 四邊形 $ABCD$，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，判斷四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

連接 $\overline{AC}$，因為 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，所以$\angle DAC=\angle BCA$，

又 $\overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

則可得$\Delta CDA\cong\Delta ABC$ (ASA)。得 $\overline{AB}=\overline{DC}$，

因為兩組對邊等長，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



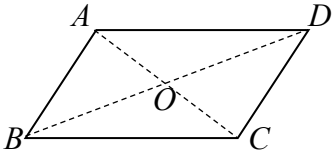
6. 四邊形 $ABCD$，$\overline{BO}=\overline{OD}$，$\overline{AO}=\overline{OC}$，判斷四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

因為 $\overline{BO}=\overline{OD}$，$\overline{AO}=\overline{OC}$，$\angle AOB=\angle COD$，

所以$\Delta ABO\cong\Delta CDO$(SAS)，得 $\overline{AB}=\overline{DC}$，

同理可得，$\overline{AD}=\overline{BC}$，因為兩組對邊等長，

所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



7. 能理解菱形與矩形也是平行四邊形。

錯誤類型

1. 學生誤認為一組對邊平行且另一組對邊相等的四邊形是平行四邊形。
2. 學生誤認為平行四邊形的對角線為內角平分線。

3. 學生誤認為平行四邊形為線對稱圖形。

S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質：長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。	s-IV-8

先備：S-7-4、S-7-5。

連結：S-8-9、S-8-11。

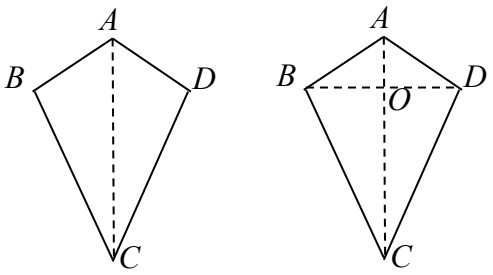
後續：S-9-1、S-9-3。

基本說明

1. 理解四個內角都是直角的四邊形稱為長方形（矩形）。
2. 理解四個內角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。
3. 理解兩組鄰邊等長的四邊形稱為箏形。
4. 理解四邊都等長的四邊形稱為菱形。
5. 理解長方形（矩形）的對角線等長且互相平分。
6. 理解菱形對角線互相垂直平分。
7. 理解箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。
8. 理解四邊形中其中一條對角線垂直平分另一條對角線必是箏形。

釋例

1. 可由畢氏定理推得矩形的對角線等長。
2. 長方形(矩形)就是平行四邊形，因為平行四邊形的對角線互相平分，所以長方形(矩形)的對角線也是互相平分。
3. 菱形也是平行四邊形，所以對角線互相平分；透過三角形的全等可以證明對角線互相垂直，所以菱形對角線互相垂直平分。
4. 如圖箏形 $ABCD$ 中，連接 $\overline{AC}$，



則 $\Delta ABC \cong \Delta ADC\ (SSS)$；

則 $\angle BAC = \angle DAC$，

連接 $\overline{BD}$，與 $\overline{AC}$ 交於 O 點；

則 $\Delta ABO \cong \Delta ADO\ (SAS)$，

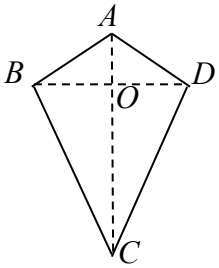
得 $\angle BOA = \angle DOA = 90^0$，

且 $\overline{BO} = \overline{DO}$，所以對角線互相垂直，且一條對角線被另一條對角線平分。

5. 四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{BO} = \overline{DO}$，$\angle BOA = \angle DOA = 90^0$，

又 $\overline{AO} = \overline{AO}$，可得 $\Delta ABO \cong \Delta ADO$（$SAS$），則 $\overline{AB} = \overline{AC}$。

同理可得 $\overline{BC} = \overline{BD}$，四邊形 $ABCD$ 是箏形。



錯誤類型

1. 學生易誤認長方形（矩形）是正方形的一種。
2. 學生易誤認長方形（矩形）的對角線也是對稱軸。

探索

討論從兩條對角線的關係探索四邊形的種類，例如兩條對角線互相平分，這樣的四邊形有哪些？再加上等長條件時，情形如何？若再加上垂直條件？互相垂直的條件？

S-8-11 梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。	s-IV-8

先備：S-7-4、S-7-5。

連結：S-8-9、S-8-10。

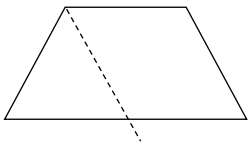
後續：S-9-1、S-9-3。

基本說明

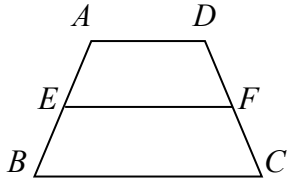
1. 理解只有一組對邊平行的四邊形稱為梯形。
2. 理解梯形兩腰中點的連線段平行上、下底，同時長度=兩底長度和的一半。
3. 理解梯形面積=兩腰中點連線長×高
4. 理解兩腰等長的梯形稱為等腰梯形，等腰梯形的兩底角相等且兩條對角線等長。若一梯形的兩底角相等，則此梯形是等腰梯形。
5. 等腰梯形為線對稱圖形。

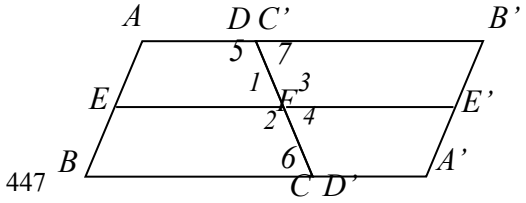
釋例

1. 證明等腰梯形的兩底角相等，可以從一頂點作平行一腰的直線，推理可得。如下圖所示：

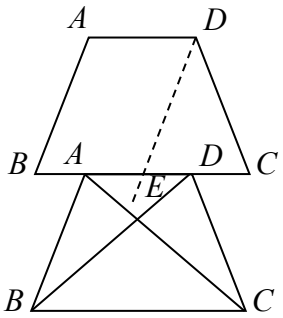


2. 如下左圖，梯形 $ABCD$ 中，E、F 分別是 $\overline{AB}$ 、$\overline{DC}$ 的中點，將梯形 $ABCD$ 複製並與原梯形兩者合併，如下右圖所示。因為梯形 $ABCD$，所以$\angle 5+\angle 6=180^0$。又$\angle 6=\angle 7$，所以$\angle 5+\angle 7=180^0$，得 A、D、C'、B' 四點共線，同理 B、C、D'、A' 四點共線。因為 $\overline{AB}=\overline{B'A'}$ 且 $\overline{AB}\parallel\overline{B'A'}$，所以合成後的四邊形為平行四邊形。同理可得四邊形 $AEE'B'$ 與 $EBA'E'$ 皆為平行四邊形，可得 $\overline{AB'}\parallel\overline{EE'}\parallel\overline{BA'}$ 且 $\overline{AB'}=\overline{EE'}=\overline{BA'}$。因此梯形的中線長平行上底、下底，同時長度=兩底和的一半。



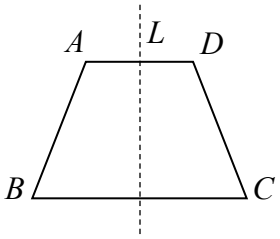


3. 如上圖，梯形 $ABCD$ 的面積=$\frac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times h}{2}=\frac{(\overline{AD}+\overline{BC})}{2}\times h=\overline{EF}\times h$=中點連線長×高，其中 h 為梯形的高。
4. 梯形 $ABCD$ 中，已知∠B = ∠C；可以作 $\overrightarrow{DE}\,//\,\overline{AB}$ 交於 E 點，推理可得梯形 $ABCD$ 為等腰梯形。
5. 等腰梯形兩對角線等長。



等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{DC}$，
$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 為對角線，可由三角形
全等性質或畢氏定理推理可得 $\overline{AC}=\overline{BD}$。

6. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 的對稱軸為直線 L，同時為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線。



錯誤類型

學生誤認為梯形的兩腰中點連線將梯形面積平分。

S-8-12 尺規作圖與幾何推理：複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質。	s-IV-13

先備：S-7-1、S-7-3、S-7-4、S-7-5。

連結：S-8-1、S-8-9、S-8-10、S-8-11。

後續：S-9-3。

基本說明

1. 只利用直尺（沒有刻度）及圓規製作圖形之方法，稱為尺規作圖。
2. 能以尺規作圖複製已知的線段、圓、角、三角形。
3. 能以尺規作圖作一已知線段之中垂線。
4. 能以尺規作圖作一已知角的角平分線。
5. 過一直線外的已知點，能以尺規作圖作此直線之平行線與垂直線。
6. 過一直線上的已知點，能以尺規作圖作此直線之垂直線。
7. 在幾何推理中，能描述有些步驟所依據的幾何性質。

條目範圍

尺規作圖讓學生熟悉工具的使用，不要過度延伸。

釋例

1. 本細目只強調會做基本的尺規作圖即可，基本的尺規作圖明列如上方的基本說明。在每一尺規作圖應能明確的說明此尺規作圖的原理，這種說明在教學上是必須的，但可以不做評量。
2. 複製三角形可採取全等性質中的 SSS 或 SAS 等方式。

   例如：如果已知三個正數滿足任兩數和大於第三數，則可用尺規作圖作出以此三數為邊長之三角形。
3. 複製一個已知角，$\angle BAC$，

   可以視為複製三角形 BAC，

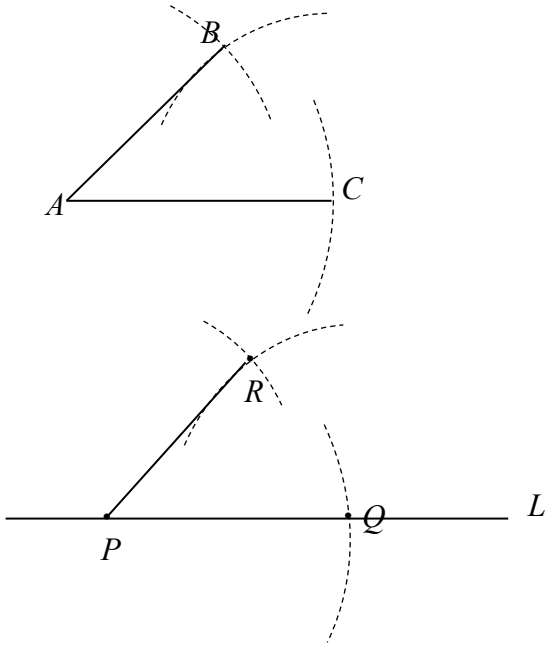
   採取 SSS 三邊長的複製產生。

   (1)作一直線 L。

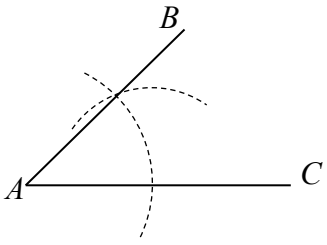
   (2)在直線 L 上取一點 P，以 P 點為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫弧交直線 L 於 Q 點。

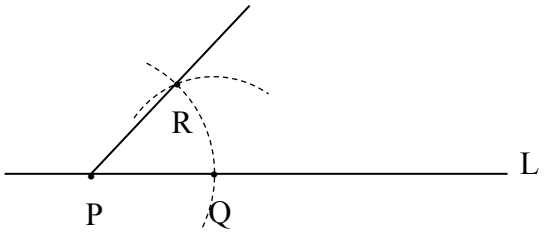
   (3)以 P 點為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，以 Q 點為圓心，$\overline{BC}$ 為半徑畫弧，兩弧交於 R 點。

   (4)連接 $\overline{PR}$ 則 $\angle RPQ$ 即為所求。



當然，也可以下列方式作圖。





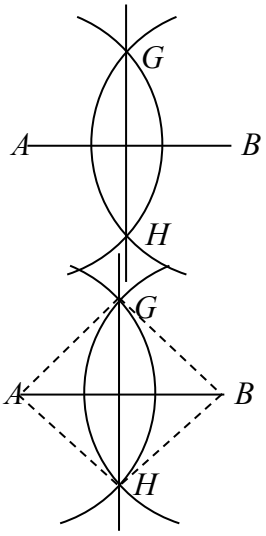
4. 不要求學生能對一幾何問題的證明寫一完全的推理說明。僅要求在幾何推理的教學中，要讓學生能寫出有些步驟所依據的是什麼原理。

   例如：利用尺規作圖做出中垂線，說明如下。

   說明：已知 $\overline{AB}$ ，求作 $\overline{AB}$ 的中垂線。(求作 $\overline{AB}$ 的中點或將 $\overline{AB}$ 兩等分)。

   (1) 分別以 A、B 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的長度為半徑畫弧，設兩弧相交於 G、H 兩點。畫 $\overleftrightarrow{GH}$ ，$\overleftrightarrow{GH}$ 即為所求。

   (2) 連接 $\overline{AG}$ 、$\overline{AH}$ 、$\overline{BG}$ 、$\overline{BH}$ ，因為 $\overline{AG}=\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{BG}$ 。



所以四邊形 $AHBG$ 為菱形，

依據菱形的對角線互相垂直平分，

所以 $\overleftrightarrow{GH}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線。

5. 作直線上一點的垂線可以使用平角180度的角平分線的作法可得出垂直線。

G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點$A(a,b)$和$B(c,d)$的距離為$\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$；生活上相關問題。	g-IV-1

先備：N-7-5、G-7-1。

連結：S-8-6、F-8-2。

後續：F-9-2。

基本說明

直角坐標系上兩點 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$ 的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$。

釋例

1. (a) 給定水平線上的兩點，例如：$A(2,1)$ 和 $B(5,1)$。先畫出 $y=1$ 的水平線，並說明此兩點均落在 $y=1$ 的水平線上，而且 $(0,1)$ 就像數線上的 0；$(2,1)$ 就像數線上的 2；$(5,1)$ 就像數線上的 5，因此 $A(2,1)$ 和 $B(5,1)$ 的距離就等於數線上 2 和 5 的距離，得 $5-2=3$。

   (b) 同理，給定鉛垂線上的兩點，例如：$A(2,1)$ 和 $C(2,5)$。先畫出 $x=2$的鉛垂線，並說明此兩點均落在 $x=2$ 的鉛垂線上，而且 $(2,0)$ 就像數線上的 0；$(2,1)$就像數線上的 1；$(2,5)$ 就像數線上的 5，因此 $A(2,1)$ 和 $C(2,5)$ 的距離就等於數線上 1 和 5 的距離，得 $5-1=4$。

   (c) 由 (a) 和 (b) 可知 ΔABC 為直角三角形，且$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$，由畢氏定理可知

   $$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5。$$

2. 給定任意的兩點 $P(a,b)$ 和 $Q(c,d)$ （為避免取絕對值時造成學生理解困擾，畫圖時可取 $a>c$且$b>d$），取點 (c,b) 並命名為 R。因為 $R(c,b)$ 和 $P(a,b)$都落在 $y=b$ 水平線上，所以

   $$\overline{RP}=|a-c|。$$

   同理，$R(c,b)$ 和 $Q(c,d)$ 都落在 $x=$ c 鉛垂線上，所以

   $$\overline{RQ}=|b-d|。$$

   因為 ΔPQR 為直角三角形，$\angle PRQ$為直角，所以

   $$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{RP}^2+\overline{RQ}^2}=\sqrt{|a-c|^2+|b-d|^2}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}。$$

3. 應用到生活上相關問題。

   例如:某人向東走 40 公尺，再向北走 30 公尺，請問此時距離出發點多少公尺？

解題可透過訂定坐標系方式，將出發點定為坐標原點；向東為 x 軸的正方向；向北為 y 軸的正方向；單位長為 1 公尺，可知終點坐標為 $(40, 30)$，由距離公式可得距離原點（出發點）為 50 公尺。

錯誤類型

學生可能誤認為 $(2,-1)$ 和 $(8, 7)$ 的兩點距離為 $\sqrt{(8-2)^2+(7-1)^2}$ 。

A-8-1 二次式的乘法公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。	a-IV-5

先備：A-7-1。

連結：A-8-5、A-8-7。

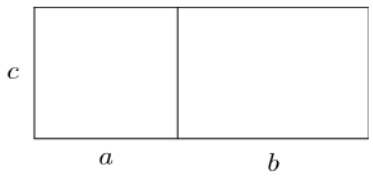
基本說明

1. 能熟練分配律：$(a+b)c=ac+bc$、$a(b+c)=ab+ac$、$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$，並能運用這些公式進行簡單速算。
2. 能熟練二次乘法公式，如：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2。$$

釋例

1. 計算下列長方形的面積時，以兩種不同方式計算，得到$(a+b)c=ac+bc$，可用來解釋分配律。



2. 題目：計算$37\times29+63\times29$=?

   解題：$37\times29+63\times29=(37+63)\times29=100\times29=2900$。

3. 題目：計算103×97=?

   解題：$103\times97=(100+3)\times(100-3)=100^2-3^2=9991$。

4. 題目：計算99^2=?

   解題：$99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2=9801$

5. 題目：計算101^2=?

   解題：$101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100\times1+1^2=10201$。

錯誤類型

1. 學生常誤認 $(a+b)(c+d)=ac+bd$及$(a+b)^2=a^2+b^2$。
2. 學生常誤算 $103^2-97^2=(100+3)(100-3)$。

探索

乘法公式學習前的奠基活動。

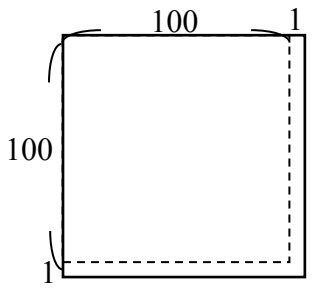
老師發下估算卡，進行估算活動。

第一關

(a) 學生估算下列乘積

1. $101\times101=$
2. $102\times102=$
3. $103\times103=$
4. $104\times104=$
5. $105\times105=$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

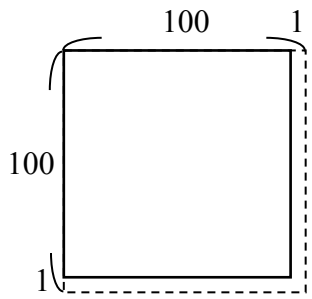
1. $101\times101=$ 	2. $102\times102=$

第二關

(a) 學生估算下列乘積

1. $99\times99=$
2. $98\times98=$
3. $97\times97=$
4. $96\times96=$
5. $95\times95=$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

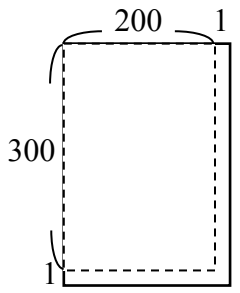
1. 99×99	2. 97×97
	

第三關

(a) 學生估算下列乘積

1. 301×201 =
2. 701×501 =
3. 203×405 =
4. 602×601 =
5. 409×904 =

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

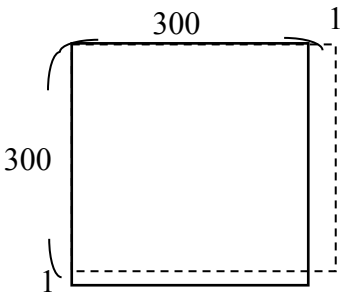
1. 301×201	2. 701×501
	

第四關

(a) 學生估算下列乘積

1. $301\times299=$
2. $499\times501=$
3. $402\times399=$
4. $599\times201=$
5. $702\times699=$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

1. $301\times299=$	2. $499\times501=$
	

A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。	a-IV-5

先備：A-7-1。

連結：A-8-3、A-8-4、A-8-6。

基本說明

1. 若一個代數式是由一些未知數的正整數次方及常數，透過加法及乘法形成的，我們稱此代數式為「多項式」。若此多項式只有一個未知數，則稱為「一元多項式」。
2. 多項式用加號隔開的每一部分稱為多項式的「項」。如一個項裡沒有任何未知數，我們稱此項為「常數項」。如一個項是由一個數跟未知數的正整數次方相乘所形成，我們稱此數為此項的「係數」。
3. 習慣上，係數為 0 的項會省略不記，如 $3x^2+0x+1$ 簡寫成 $3x^2+1$；若一個項的係數為 1 且不是常數項，其係數 1 亦會省略不記，如 $2x^2+1x+2$ 簡寫成 $2x^2+x+2$；又如 $x^2+(-2)x+1$ 會簡寫成 x^2-2x+1。
4. 在一元多項式裡，未知數的次方為 1 的項稱為「一次項」；次方為 2 的項稱為「二次項」；依此類推。

5. 一元多項式裡，未知數次方相同的項稱為「同類項」。將所有同類項透過係數相加合併成一項，此過程稱為多項式的化簡。
6. 一元多項式經化簡後，未知數次方最高且係數非零的項稱為「最高次項」，其次方稱為此多項式的「次數」。
7. 若多項式只有常數項，稱此多項式為「常數多項式」。非零的常數多項式的次數為 0，但不定義或討論零多項式的次數。
8. 將一元多項式各項依次方數由小排到大，稱為「升冪」排列；由大排到小則為「降冪」排列。

釋例

1. 多項式 $3x-2x^3+1-4x^2$ 共有四項，分別為 $3x$、$-2x^3$、1、$-4x^2$，其中常數項為 1，一次項為 $3x$ 其係數為 3，二次項為 $-4x^2$ 其係數為 -4，最高次項為 $-2x^3$ 其係數為 -2。此多項式的升冪排列為 $1+3x-4x^2-2x^3$，降冪排列為 $-2x^3-4x^2+3x+1$。
2. 多項式 $1-2x+x^3-2+x^2-x^3$ 化簡之後為 $(1-2)+(-2)x+x^2+(1-1)x^3=-1-2x+x^2$，其次數為 2（而非 3）。

錯誤類型

1. 在多項式 $3x^2-2x+1$ 裡，一次項為 $-2x$，但會有少數學生憑直覺誤以為一次項為 $2x$。
2. 學生會誤以為 x 多項式 ax^2+bx+c 的次數恆為 2。

A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 **備註：**不涉及使用分離係數法。	a-IV-5

連結：A-8-2、A-8-4、A-8-5。

基本說明

1. 將兩個多項式的同類項相加（或相減），形成新的多項式，此過程稱為多項式的「加法」（或「減法」）。
2. 能以直式及橫式做多項式加法與減法。
3. 給定兩個相同未知數的一元多項式，其乘法定義如下：
   (1) 若此二多項式皆為常數多項式，其乘法定義與一般常數的乘法定義相同。
   (2) 若一個多項式為常數多項式 a，而另一多項式的形式為 bx^n，其中 a 及 b 為常數、x 為未知數、n 為正整數，則其乘積定義為 abx^n。
   (3) 若一個多項式為 ax^m，而另一多項式的形式為 bx^n，其中 a 及 b 為常數、x 為未知數、m 及 n 為正整數，則其乘積定義為 abx^{m+n}。

(4) 利用分配律，將兩個多項式的乘積展開成上述三種形式的總和。

4. 能利用直式乘法來熟練多項式的乘法運算。(乘積之次數不超過三次。)

5. 假設 A、B 為一元多項式，且 B 為非零多項式，則存在兩個多項式 Q 及 R 使得

(1) $A=BQ+R$，

(2) 且多項式 R 的次數小於 B 的次數或為零多項式。

我們稱 A 為「被除式」、B 為「除式」、Q 為「商式」、R 為「餘式」。

6. 能用長除法做被除式為二次多項式的除法運算。

條目範圍

1. 多項式乘法裡，乘積次數最高為三次。
2. 除法中的被除式次數最高為二次。
3. 不涉及使用分離係數法。

釋例

1. 計算 $(3x^2-5+x)+(x^2-3x+7)$。

橫式：

$$\begin{aligned}(3x^2-5+x)+(x^2-3x+7)&=3x^2-5+x+x^2-3x+7\\&=(3x^2+x^2)+(x-3x)+(-5+7)\\&=4x^2-2x+2\ 。\end{aligned}$$

直式：將多項式降冪排列，次數一樣的項對齊，如下

$$\begin{array}{rr} & 3x^2+x-5\\ +) & x^2-3x+7\\ \hline & 4x^2-2x+2\end{array}$$

2. 若有缺項（即係數為零），可補零以避免錯誤，如計算 $(3x^2+1)-(x^2+x+2)$:

$$\begin{array}{rr} & 3x^2+0x+1\\ -) & x^2+x+2\\ \hline & 2x^2-x-1\end{array}$$

3. 利用公式 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 計算 $(x+3)(2x+1)$。

$$\begin{aligned}(x+3)(2x+1)&=x\times(2x)+x\times1+3\times(2x)+3\times1\\&=2x^2+7x+3。\end{aligned}$$

4. 計算 $(2x^2+x-3)(3x-1)$。

直式，從常數項開始算：

$$\begin{array}{rr} & 2x^2+x-3 \\ \times) & 3x-1 \\ \hline & -2x^2-x+3 \\ 6x^3+3x^2-9x & \\ \hline 6x^3+x^2-10x+3 & \end{array}$$

5. 求 x^2+3x-5 除以 $x-3$ 的商式及餘式。

長除法：

$$\begin{array}{r} x+6 \\ x-3\overline{)\,x^2+3x-5} \\ x^2-3x \\ \hline 6x-5 \\ 6x-18 \\ \hline 13 \end{array}$$

商式為 $x+6$，餘式為 13。

在正整數除法中，若 a 為被除數、b 為除數、q 為商、r 為餘數，則 $a=bq+r$，且 r 是小於 b 的正整數或是 0，例如 $13\div5=2\cdots3$ 可寫成 $13=5\times2+3$，其中 13 為被除數、5 為除數、2 為商、3 為餘數。

由此類比多項式的除法，可驗證 $x^2+3x-5=(x-3)\times(x+6)+13$。

6. 在做長除法時，若有缺項，可補零以避免錯誤，如計算 $3x^2-5$ 除以 $x+1$：

$$\begin{array}{r} 3x-3 \\ x+1\overline{)\,3x^2+0x-5} \\ 3x^2+3x \\ \hline -3x-5 \\ -3x-3 \\ \hline -2 \end{array}$$

因此商為 $3x-3$，餘式為 -2。

7. 問題：已知某多項式 A 除以 $2x+1$，得商式為 $x+2$ 及餘式為 -3，求此多項式 A。

解：令 B、Q、R 分別代表題中的除式、商式、及餘式，則 A、B、Q、R 之間的關係為 $A=BQ+R$，因此

$$\begin{aligned} A&=(2x+1)(x+2)+(-3) \\ &=2x^2+5x+2-3 \\ &=2x^2+5x-1。 \end{aligned}$$

錯誤類型

1. 學生在做長除法時，常將加減混淆，以下為錯誤的類型。

$$\begin{array}{r} x \\ x-3\overline{)\,x^2+3x-5} \\ \underline{x^2-3x} \\ -5 \end{array}$$

2. 基於過去整數除法的經驗，部分學生在長除法取商的時候會覺得係數是整數，如$3x^2-4$除以$2x-3$時，得商為x，而非正確的$\frac{3}{2}x$。

3. 在除式為單項式時，部分學生會犯下面形式的錯誤。

$$\begin{array}{r} 3x+2+1/x \\ x\overline{)\,3x^2+2x+1} \\ \underline{3x^2} \\ 2x+1 \\ \underline{2x} \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

A-8-4 因式分解：因式的意義（限制在二次多項式的因式）；二次多項式的因式分解意義。	a-IV-6

連結：A-8-2、A-8-3、A-8-5。

基本說明

1. 能理解二次多項式的因式意義：一般而言，假設二次多項式A為被除式、B為除式時，餘式為0（亦即存在一多項式C使得$A=B\times C$），我們便稱「A能被B整除」、「B整除A」、「B為A的因式」、或「A為B的倍式」（此時C亦為A的因式）。
2. 能理解二次多項式因式分解的意義：一般而言，「因式分解」是將一個多項式寫成數個多項式的乘積，而其中各多項式皆無法再降次分解。

條目範圍

因式分解僅限係數為有理數。

釋例

1. x^2-3x+2除以$x-2$時，得商式$x-1$，餘式為0。因此$x-2$為x^2-3x+2的因式（$x-1$亦為x^2-3x+2的因式），而x^2-3x+2為$x-2$的倍式（x^2-3x+2亦為$x-1$的倍式）。
2. 考慮$2x^2-6x+4$。因為

$$\begin{aligned} 2x^2-6x+4 &= (2x-2)(x-2) \\ &= (x-1)(2x-4) \\ &= 2(x-1)(x-2)， \end{aligned}$$

而且2、$x-1$、$x-2$、$2x-2$、$2x-4$等皆不可再降次分解，上列三式皆為$2x^2-6x+4$的因式分解。（雖然$2x-4=2(x-2)$，但$x-2$的次數與$2x-4$的次數相等，所以

$2x-4=2(x-2)$並非$2x-4$的降次分解。事實上，任意一次多項式皆無法做降次分解。)

3. 非 0 的常數為任何多項式的因式，例如：2是$3x^2-1$的因式。

錯誤類型

部分學生會誤認為2不是$3x^2-1$的因式，或$3x-3$不是$x(x-1)$的因式。

A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 **備註：**只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	a-IV-6

連結：A-8-1、A-8-3、A-8-4、A-8-7。

基本說明

1. 能以提出公因式的方法分解二次多項式。
2. 能利用二次乘法公式操作因式分解。
3. 能觀察係數以十字交乘法做二次多項式因式分解。

條目範圍

只考慮有理係數一元二次多項式的因式分解，或是二次乘法公式的直接應用，不考慮二元齊次或非齊次多項式。例如：$3x^2+5xy+2y^2$、$ax^2+(a+1)x+1$等。

釋例

1. 提公因式法：

考慮$(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$，利用分配律$ac+bc=(a+b)c$可得

$$(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)=[(x+1)+(x-3)](2x-3)$$
$$=(2x-2)(2x-3)。$$

此即為$(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$的一個因式分解。

2. 由乘法公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$可得$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$。又如由$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$可得$x^2+6x+9=(x+3)^2$。

3. 假設$Ax^2+Bx+C=(ax+b)(cx+d)$是二次多項式Ax^2+Bx+C的一個因式分解(A、B、C、a、b、c、d為常數)，比較係數可得$A=ac$、$B=ad+bc$、及$C=bd$。其中一次項的係數關係可用圖表描述。

$$\begin{array}{ccc} ax & & b \\ & \times & \\ cx & & d \\ \hline bcx & + & adx \end{array} = (ad+bc)x$$

一般而言，給定一個整係數的二次多項式Ax^2+Bx+C， 所謂的「十字交乘法」是設法找到Ax^2及C適當的分解$Ax^2=(ax)(cx)$、$C=bd$，使得十字交乘的和等於Bx，此時

$Ax^2+Bx+C=(ax+b)(cx+d)$ 即為 Ax^2+Bx+C 的一個因式分解。注意到如果 $(ax+b)(cx+d)$ 是 Ax^2+Bx+C 的一個因式分解，那麼 $(-ax-b)(-cx-d)$ 也會是一個因式分解，所以如果 A 是正數，我們可以只考慮 a 跟 c 皆為正的情況，並可進一步假設 a 不小於 c（亦可假設 c 不小於 a）。如果 A 為負，可提出一個負號再進行十字交乘法，也可假設 a 為正、c 為負，然後使用十字交乘法。

4. 例：$2x^2+5x+2$。將 $2x^2$ 寫成 $(ax)(cx)$ 使得 a、c 為正整數且 a 不小於 c 的方法只有一種 $2x^2=(2x)(x)$。而將常數 2 寫成整數乘積共有四種可能 1×2、2×1、$(-1)\times(-2)$、及 $(-2)\times(-1)$。這四種可能分別做十字交乘得到

$$\begin{array}{rcl} 2x & & 1 \\ x & & 2 \\ \hline x & + & 4x \end{array} = 5x \qquad \begin{array}{rcl} 2x & & 2 \\ x & & 1 \\ \hline 2x & + & 2x \end{array} = 4x$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & & -1 \\ x & & -2 \\ \hline -x & + & (-4x) \end{array} = -5x \qquad \begin{array}{rcl} 2x & & -2 \\ x & & -1 \\ \hline -2x & + & (-2x) \end{array} = -4x$$

由此可知 $2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$。

5. 有時 A 跟 C 的因數很多，此時應先觀察係數的性質，刪去不可能的情況。例如 $x^2-10x+24$ 中的 24 因數很多，但我們可注意到如果把 24 寫成一奇一偶的乘積，則交叉相乘得到的一次項係數不可能為偶數，所以我們只需考慮 2×12、4×6、$(-2)\times(-12)$、$(-4)\times(-6)$ 四種可能。更進一步，因為一次項係數為負數，可刪去 2×12 及 4×6 兩種可能。

錯誤類型

1. 部份學生會將 $2x^2$ 誤解成 $(2x)^2$，而誤認 $2x^2-9=(2x-3)(2x+3)$。
2. 部份學生會誤記乘法公式，而以為 $x^2+9=(x+3)^2$。

評量

避免評量多項式 Ax^2+Bx+C 中 A 及 C 因數皆很多的因式分解，如 $18x^2-45x-50$。

A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。	a-IV-6

連結：A-8-2、A-8-7。

後續：F-9-1。

基本說明

1. 若方程式經過移項化簡後可整理成形式為 $ax^2+bx+c=0$ 的方程式，其中 a、b、及 c 為常數且 $a\neq0$，此方程式稱為「一元二次方程式」。

2. 一般而言，給定一元二次方程式，若有實際的數，將方程式中的未知數代入此數時，等式恆成立，此數稱為此方程式的「解」（亦稱為「根」）。
3. 能在具體情境中列出一元二次方程式。

條目範圍

國中階段裡的一元二次方程式各係數以有理數為原則。

釋例

1. $x^2-6x+8=0$、$x(x+2)=24$皆為一元二次方程式，但x^2+x-7、$x^2+7=x^2+3x+5$皆非一元二次方程式。（後者化簡後為$3x-2=0$，非二次方程式。）
2. 可以生活中的例子介紹一元二次方程式，如：已知一長方形的長比寬多2公分，而其面積為24平方公分，問寬為多少？假設此長方形寬為x公分，由問題的描述可知長為$x+2$公分，面積為$x(x+2)$平方公分，因此$x(x+2)=24$。
3. 將$x=4$代入$x^2-6x+8=0$時，等式成立。因此，4是方程式$x^2-6x+8=0$的一個解。同理，2 亦為此方程式的解。

錯誤類型

部份學生會以為$x^2+7=x^2+3x+5$是一元二次方程式。

A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	a-IV-6

先備：A-7-3。

連結：A-8-1、A-8-5。

基本說明

1. 能利用因式分解解一元二次方程式。
2. 能利用配方法解一元二次方程式。
3. 能利用公式解解一元二次方程式。
4. 能利用一元二次方程式解應用問題（需驗證根的合理性）。
5. 給定一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$，當$b^2-4ac>0$時，方程式有相異兩解（相異兩根）；當$b^2-4ac=0$，方程式只有一解（重根）；當$b^2-4ac<0$時，方程式無解。我們稱b^2-4ac為$ax^2+bx+c=0$的「判別式」。
6. 能利用計算機（配合公式解）估計一元二次方程式解的近似值。

釋例

1. 用因式分解解一元二次方程式的想法，基本上是下述性質的應用：若兩數A跟B的乘積為0，則A等於0或B等於0。因此，一元二次方程式 $(ax+b)(cx+d)=0$的解有兩個，分別

為一元一次方程式 $ax+b=0$ 的解或 $cx+d=0$ 的解，亦即解為 $x=-\frac{b}{a}$ 或 $x=-\frac{d}{c}$。

2. 利用因式分解求 $2x^2-3x-2=0$ 的解。

解：$2x^2-3x-2$ 的因式分解為 $(2x+1)(x-2)$，因此方程式 $2x^2-3x-2=0$ 有兩個解，分別為 $2x+1=0$ 或 $x-2=0$ 的解，亦即解為 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=2$。

3. 解一元二次方程式 $(x+1)^2=9$。

解：一般而言，若 $A^2=B^2$，則 $A=B$ 或 $A=-B$。因此，若 $(x+1)^2=9$，則 $x+1=3$ 或 $x+1=-3$。化簡後得到 $x=2$ 或 $x=-4$。

4. 配方法的基本想法是利用上例中「若 $A^2=B^2$，則 $A=B$ 或 $A=-B$」此性質，透過代數運算將一元二次方程式轉換成 $(x+a)^2=b^2$ 的形式，進而解出 $x=-a+b$ 或 $x=-a-b$。

5. 利用配方法解 $2x^2-3x-2=0$。

解：

(1) 先將常數移至等號右側，得到 $2x^2-3x=2$。

(2) 等號兩側同除以二次項的係數，以使二次項係數變成 1：

$\frac{2x^2-3x}{2}=\frac{2}{2}$，化簡後得到 $x^2-\frac{3}{2}x=1$。

(3) 下一步的目標是將等號左側配方成 $(x+a)^2$ 的形式。注意到 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$，比較一次項係數可知 $a=-\frac{3}{4}$。因此，我們將等號兩側同加 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$，得到

$x^2+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2$，進而得到 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$。

(4) 由「若 $A^2=B^2$，則 $A=B$ 或 $A=-B$」可得 $x-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ 或 $x-\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$，化簡後可知 $2x^2-3x-2=0$ 的解為 $x=2$ 或 $x=-\frac{1}{2}$。

6. 將上述配方法的過程完全符號化可得所謂的公式解：令 $ax^2+bx+c=0$ 為一元二次方程式。

(1) 先將常數移至等號右側，得到 $ax^2+bx=-c$。

(2) 等號兩側同除以二次項的係數，以使二次項係數變成 1：

$\frac{ax^2+bx}{a}=-\frac{c}{a}$，化簡後得到 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$。

(3) 下一步的目標是將等號左側配方成 $(x+A)^2$ 的形式。注意到 $(x+A)^2=x^2+2Ax+A^2$，比較一次項係數可知 $A=\frac{b}{2a}$。因此，我們將等號兩側同加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，得到

$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，進一步得到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$。

（假設$b^2-4ac\geq 0$。）

(4) 由「若$A^2=B^2$，則$A=B$或$A=-B$」可知$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$或$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，亦即$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$或$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。此即為$ax^2+bx+c=0$的公式解。（習慣上將公式解簡寫成$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。）

7. 用公式解$2x^2-3x-2=0$。

解：將$a=2$、$b=-3$、$c=-2$代入公式解得

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}。$$

化簡後得$x=2$或$x=-\frac{1}{2}$。

8. 在推導$ax^2+bx+c=0$公式解過程中，其中一步驟為$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。當$b^2-4ac<0$，因為沒有任何一數的平方為負數，方程式無解；當$b^2-4ac=0$，則$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$，或是$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$，此時解為$-\frac{b}{2a}$；當$b^2-4ac>0$時，$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$為相異兩數，方程式有相異兩解。

9. 一般所謂的黃金比例身材指的是「下半身跟全身的比等於上半身跟下半身的比」，其中上半身指的是肚臍以上，下半身則為肚臍以下。用計算機估計一位擁有黃金比例身材而身高為 170 公分的人，下半身有多長？

解：設下半身長為x公分，依題意可得$\frac{x}{170}=\frac{170-x}{x}$，化簡後得到一元二次方程式$x^2+170x-28900=0$，其公式解為

$$x=\frac{-170\pm\sqrt{170^2+4\times 28900}}{2}$$

$$=\frac{-170\pm\sqrt{144500}}{2}。$$

用計算機估計解得$x\fallingdotseq 105$或$x\fallingdotseq -275$，其中負數不合題意，因此下半身約為105公分。

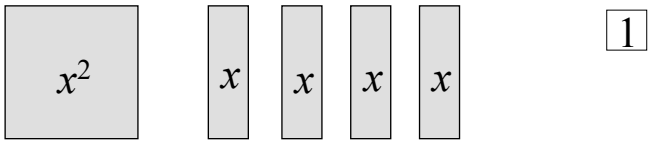
錯誤類型

1. 部份學生因為無法因式分解 x^2-7，而誤以為 $x^2-7=0$ 無解。
2. 部份學生解 $x(x+1)=x(2x-1)$ 時會將 x 消掉，而只得到 $x=2$ 的解。
3. 部份學生在用配方法解一元二次方程式時，忘記左右要同加一數，例如解 $x^2+4x=3$ 時誤寫為 $x^2+4x+4=3$。類似情況也會發生在左右同乘一數。

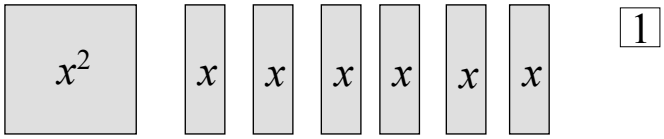
探索

配方法奠基活動 - 從幾何圖形的觀點看配方法：

(1) 如下圖所示 x^2+4x 需再加幾個 1 可以拼成正方形？請你畫畫看！



(2) x^2+6x 需再加幾個 1 可以拼成正方形？請你畫畫看！



F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y=c$ ）、一次函數（ $y=ax+b$ ）。	f-IV-1

先備：A-7-6、G-7-1。

連結：F-8-2。

後續：F-9-1、F-9-2。

基本說明

1. 認識函數可以是一對一、多對一的對應關係，但不可以一對多。
2. y 是 x 的常數函數，即 y = c。
3. y 是 x 的一次函數，即 $y=a\,x+b$，其中 $a\neq 0$。

條目範圍

不出現 $f(x)$，$g(x)$ 等函數符號。

釋例

1. 這是第一次介紹函數，學會函數的概念是國中學習函數的重點，因此應該多從生活的實例來介紹，什麼數量是什麼數量的函數。

例如：下表是將水加熱時，加熱的時間和水溫的表。

時間（分）	0	3	6	9	12	15	18
水溫（℃）	25	45	65	85	100	100	100

由表知，只要給定時間，就能得到水溫，因此溫度是時間的函數。反之，知道溫度是 100 ℃，並不能完全知道加熱的時間，所以時間不是溫度的函數。

2. 本條目只處理一次函數，教學時可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為$y = ax + b$，認識一次函數。

例如: 下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。

攝氏溫度（℃）	0	10	20	30	40	50	60
華氏溫度（°F）	32	50	68	86	104	122	140

觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，因此以x°C代表攝氏溫度、y°F代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係$y = 1.8x + 32$ (或$y = \frac{9}{5}x + 32$)，進而介紹關係如$y = 1.8x + 32$稱為一次函數。

3. 理解正比關係也是函數的一種。

錯誤類型

學生常誤認為 $y = c$ 不是函數。

F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。	f-IV-1

先備：A-7-6、G-7-1。

連結：F-8-1。

後續：F-9-1、F-9-2。

基本說明

1. 理解常數函數 $(y = c)$ 的圖形為水平線。
2. 理解一次函數 $(y = ax + b)$ 的圖形為一條直線，但非水平線和鉛垂線。並且，當$b = 0$時此直線必過原點。
3. 能利用一次函數的圖形特性，畫出一次函數的圖形。

釋例

1. 以描繪已知點的方法來繪製常數函數與一次函數的圖形，如$y = 3$、$y = \frac{9}{5}x$和$y = \frac{9}{5}x + 32$，並觀察其圖形成一直線的現象。
2. 透過描繪 $y = ax$的圖形，理解此類 $y = ax$ 的函數圖形必過原點，進而認識正比關係

$(a \neq 0)$ 的函數圖形是過原點的斜直線。

錯誤類型

學生常誤認為 $y = \frac{1}{x}$ 也是一次函數。

D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。	n-IV-9 d-IV-1

先備：D-7-1、D-7-2。

後續：D-9-1、D-9-2、D-9-3。

基本說明

1. 將資料發生的「次數」或「人數」視需要加以排序或分組整理而成的表格統稱為次數分配表。「相對次數」是將各筆或各組資料的次數除以總次數所得的比值。
2. 「累積次數」為經排序或分組整理後，依序累加至各筆或各組資料的次數；「累積相對次數」則為依序累加至各筆或各組的相對次數。累積次數或累積相對次數可以讓人知道資料在整體中所佔的相對位置。
3. 知道將幾份同類資料合併時，平均數的計算方式，並知道這只和各資料次數占總次數的相對比例有關。

釋例

1. 三年一班的數學科第一次段考成績總表，如下表：

表 1、三年一班的數學科第一次段考成績總表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8
成績	5	64	35	78	36	43	44	82
座號	9	10	11	12	13	14	15	16
成績	83	48	52	55	58	64	65	68
座號	17	18	19	20	21	22	23	24
成績	69	70	74	35	79	80	78	45
座號	25	26	27	28	29	30		
成績	47	33	84	75	85	89		

老師若想瞭解成績分布情形，可以把成績整理成如下的統計表。

表 2、三年一班各組成績次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
次數	1	4	8	11	6

全班人數 = 30。

習慣上，0~20 這一組是指成績大於或等於 0 分且小於 20 分的學生；

20~40 這一組是指成績大於或等於 20 分且小於 40 分的學生；

40~60 這一組是指成績大於或等於 40 分且小於 60 分的學生；

60~80 這一組是指成績大於或等於 60 分且小於 80 分的學生；

80~100 這一組是指成績大於或等於 80 分且小於或等於 100 分的學生。

表 3、三年一班各組成績相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
相對次數	0.03	0.13	0.27	0.37	0.20

表 4、三年一班各組成績累積次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
累計次數	1	5	13	24	30

表 5、三年一班各組成績累積相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
累計相對次數	0.03	0.16	0.43	0.80	1.00

2. 製作次數折線圖或相對次數折線圖時，習慣上會以組中點（各組中點）來代表該組之資料值（圖 1 和圖 2）而在製作累積次數折線圖，或累積相對次數折線圖時，則常以各組的右端點來取折點，這樣才符合累積的意義（圖 3 和圖 4）。

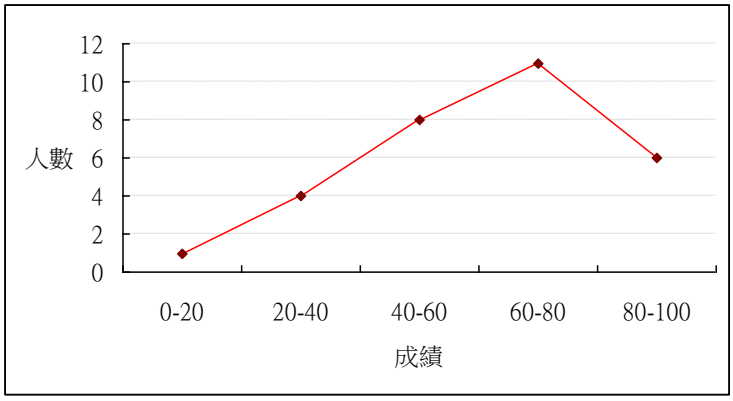


圖 1、三年一班各組成績次數折線圖

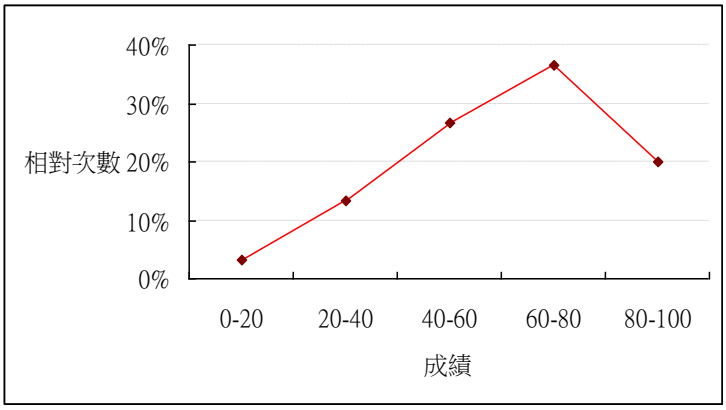


圖 2、三年一班各組成績相對次數折線圖

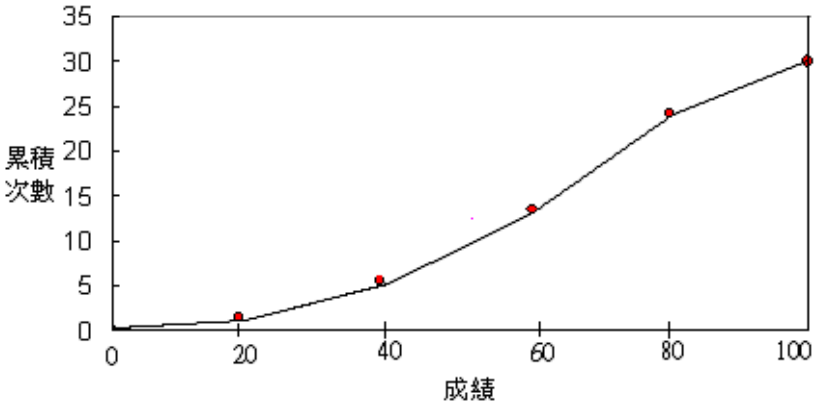


圖 3、三年一班各組成績累積次數折線圖

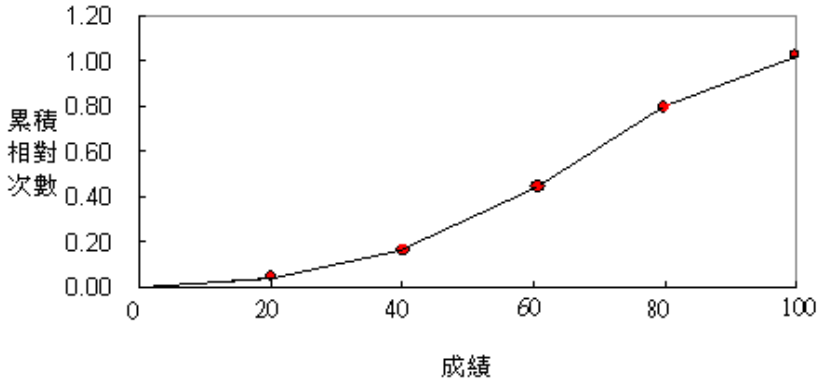


圖 4、三年一班各組成績累積相對次數折線圖

3. 在沒有特定的使用目的限制下，習慣上，組距的大小可以 (最大值 - 最小值)÷(組數) 來參考訂定。重點是，統計圖表要能協助使用者清楚呈現他想表達的資訊。

錯誤類型

當將連續資料整理成各組資料的次數分配表時，學生常誤解組間邊界數據的處理。例如：表一中的座號 22 號的成績為 80 分，學生可能計算分組的累積次數時，誤將他計入 60~80 的分組次數。

探索

可就發生的事件實例，製作累積次數統計圖表、累積相對次數統計圖表，並探索數據中的涵義。例如：某一學校學生每日使用手機的時數與全國的學生做比較，透過累積次數統計圖表和累積相對次數統計圖表可觀察出其差異性。

9 年級學習內容解析

N-9-1 連比：連比的記錄；連比推理；連比例式；及其基本運算與相關應用問題；涉及複雜數值時使用計算機協助計算。	n-IV-4 n-IV-9

先備：N-7-9。

連結：S-8-8、S-9-2、S-9-3。

後續：G-10-7。

基本說明

1. 連比、連比例式常用來表明三個（或以上）數量間的比例關係。
2. 設a、b、c是不為0的數，我們常使用$a:b:c$來記錄此三個數的比例關係，$a:b:c$稱為此三個數的連比。
3. 連比例式$x:y:z=a:b:c$的內容涵蓋$x:y=a:b$、$y:z=b:c$、$x:z=a:c$。
4. 由$x:y=a:b$，$y:z=c:d$的條件，求得$x:y:z$的連比例。

條目範圍

刪除繁分數，計算上若有兩分數的比值問題，則須轉換回分數的除法處理之。

釋例

1. $a:b=1:2$，$b:c=3:4$，則$a:b:c=3:6:8$。
2. 已知$a:b:c=5:3:7$，則下列式子成立。
   (1)$a=5k$、$b=3k$、$c=7k$，$k\neq 0$。
   (2)$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{7}$。
3. 已知a、b、c滿足$2a=3b=4c$，則$a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$。
4. 例題：A、B兩個正方形的面積比為$25:12$，而C、B兩個正方形的面積比為$3:4$，求A、C兩個正方形的邊長比為何？

   說明：因為C、B兩個正方形的面積比為$3:4$，所以B、C兩個正方形的面積比為$4:3=12:9$，因此A、B、C三個正方形的面積連比為$25:12:9$，我們就知道A、C兩個正方形的面積比為$25:9$，邊長比為$5:3$。我們也可利用A、B兩個正方形的面積比為$25:12$，而C、B兩個正方形的面積比為$3:4$，得到

   A的面積 = B的面積 x$\frac{25}{12}$，

   C的面積 = B的面積 x$\frac{3}{4}$，

因此，A 的面積：C 的面積=(B 的面積 x$\frac{25}{12}$)：(B 的面積 x$\frac{3}{4}$)=$\frac{25}{12}:\frac{3}{4}=25:9$，

故 A、C 兩個正方形的面積比為 $25:9$，邊長比為 $5:3$。

5. ΔABC 中，$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 三邊長分別為 10，12，15，則其邊上的高之比為 $\frac{1}{10}:\frac{1}{12}:\frac{1}{15}=6:5:4$。
6. 現有一些100元，500元，1000元的鈔票，合計16500元。已知100元，500元，1000元的鈔票的張數比為 $5:4:3$，請問各有多少張？

錯誤類型

1. 已知 $a:b:c=5:3:7$，學生可能會誤解成 $a=5$、$b=3$、$c=7$，或誤解 a、b、c 皆大於0。
2. 已知 a、b、c 滿足 $2a=3b=4c$，學生可能會誤解成 $a:b:c=2:3:4$。
3. 在連比例式中誤用「內項乘積=外項乘積」的運算方法。

   例如：已知 $a:b:c=5:6:7$，學生可能會誤解成 $7a=6b=5c$。

評量

連比在評量的設計上，若出現繁分數，則需轉換回分數的除法處理之，避免直接套用算則。

探索

由新台幣與美元、新台幣與日圓的匯率換算，求出新台幣、美元、日圓的幣值比，必要時可使用計算機。

S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。	S-IV-6

先備：S-6-1、S-8-4、S-8-5、S-8-8。

連結：S-9-2、S-9-3、S-9-4。

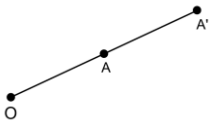
後續：G-10-6。

基本說明

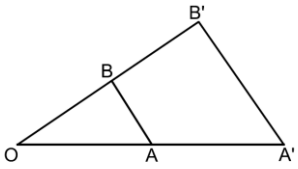
1. 透過圖形的縮放了解縮放後的邊長成比例，對應角仍不變。
2. 將圖形縮放中心點位置的不同，隨之產生對應的縮放圖形的位置也會有不同。若縮放比例固定，則這些縮放後的圖形皆全等。
3. 能理解兩個平面圖形，若其中一個經過縮放動作後，和另一個圖形全等，則稱這兩個平面圖形相似。此時，這兩個平面圖形之對應角相等，且對應邊長成比例。
4. 兩個邊數相同的多邊形，若對應角相等且對應邊長成比例時，則這兩個多邊形會相似。

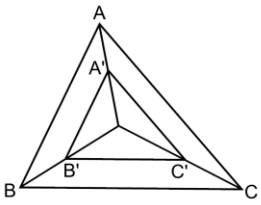
釋例

1. 如下圖，在平面上固定一點O，任意取一點A，在$\overrightarrow{OA}$上取一點A'使得$\overline{OA'}=2\overline{OA}$，稱$A'$是以$O$為中心將$A$縮放2倍的點。



2. 將平面圖形上的任一點，由O縮放2倍的結果，就是由O將此平面圖形縮放2倍後的圖形。例如：下左圖表示由O將$\overline{AB}$縮放2倍的情形，下右圖表示由O將ΔABC縮放$\frac{1}{2}$倍的結果：





3. 在 S-6-1，比例思考的應用，「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。因此，本細目要求能由推理來理解下面的性質：
   (1) 任意的縮放，將直線變成直線。
   (2) 將一直線縮放r倍後，若此直線和原直線是相異的二條直線，則這二條直線平行。
   (3) 任意r倍的縮放，將任一長度為ℓ的線段變成另一長度為$r\ell$的線段。
   (4) 任意的縮放，將一角度變成另一角，同時角度的度數不變。
   (5) 任何圖形，經過一r倍的縮放，雖然縮放的中心點不同，但所得到的圖形會全等，因此通常在談論圖形縮放的性質時，通常不會特別提及中心點。
4. 全等必相似，相似不一定全等！
5. 透過實物的操作，讓學生熟悉兩相似多邊形經對稱或旋轉後，能判斷出對稱點，對於日後較能找出對應邊長比。
6. 任意兩個正n邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，故這兩正n邊形會相似。

錯誤類型

1. 學生誤以為兩個長方形相似。
2. 學生誤以為兩個菱形相似。
3. 學生誤以為兩個等腰三角形相似。
4. 學生誤以為兩個直角三角形相似。

探索

以 A4 的紙張對摺後仍相似，探討邊長比的值。探討紙張 A3 與 A4 的關係。

S-9-2 三角形的相似性質：三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（~）。	s-IV-10

先備：S-6-1、S-8-4、S-8-5、S-8-8。

連結：S-9-3、S-9-4、S-9-5。

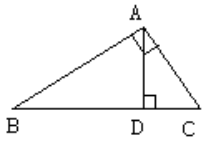
後續：G-10-6。

基本說明

1. 理解三角形的 AA、SAS、SSS 等相似性質。
2. 使用相似符號「~」記錄兩相似三角形。
3. 理解兩相似三角形中，對應邊長之比＝對應邊高之比，及對應面積之比＝對應邊長平方比。

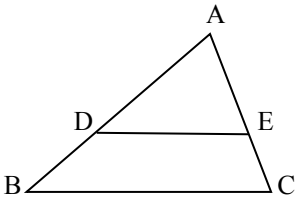
釋例

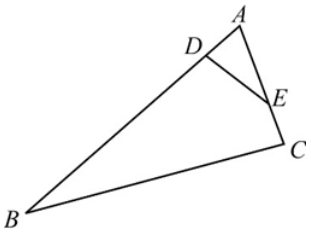
1. 透過製作兩相似三角形的教具讓學生觀察發現，透過平移、旋轉與翻轉後的位置關係。
2. 相似三角形性質的證明，透過將原三角形縮放後與另一個三角形全等，則兩圖形相似。例如：SAS 相似性質說明如下：兩個三角形有兩組對應邊長成比例，兩對應邊的夾角相等，若兩組對應邊長的比例的比值為 r，將其中之一的三角形縮放 r 倍，則縮放後的三角形與另一個三角形成 SAS 全等；因此得到相似。其他如 AA，SSS 等相似的性質亦可如上述方式證明。
3. 三角形中只要有兩組對應角相等，則第三組對應角也相等；因此不需要三組對應角相等。
4. 對直角三角形，能利用斜邊上的高來做出或找出相似三角形，也就是說若直角三角形 ΔABC 中，$\angle A=90^0$ 且 $\overline{AD}$ 為斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，則 $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$，此時 $\overline{AB}^2=\overline{BC}\times\overline{BD}$，$\overline{AC}^2=\overline{BC}\times\overline{DC}$，$\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{CD}$。
直角三角形母子相似視為相似三角形的應用，不視為公式，讓學生學習掌握相似後對應邊長比的關係遠勝於公式背誦。



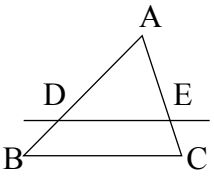
錯誤類型

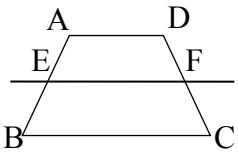
1. 學生對於在三角形內做平行線截出相似三角形容易接受，$\overline{DE}//\overline{BC}$，則ΔADE～ΔABC，如下左圖所示。但是對於做截線但不平行底邊時（$\overline{DE}$ 不平行 $\overline{BC}$），其中一截角（∠ADE）等於底邊另一底角（∠C）時，因為∠A 是公共角，依據 AA 相似，ΔADE～ΔACB，容易出現迷思概念，對應點與對應邊容易對錯；如下右圖所示。





2. 在三角形內做一平行底邊的直線可截出一組小三角形與原三角形相似(ΔADE 與 ΔABC)；但是對梯形做一平行線平行下底時，小梯形與原梯形不會相似（ AEFD 不相似 ABCD ）。





評量

直角三角形母子相似視為相似三角形的應用，不適合將母子相似的關係式做為後續再推論。例如利用直角三角形母子相似關係式證明畢氏定理。

S-9-3 平行線截比例線段：連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。	s-IV-6 s-IV-10

先備：S-6-1、N-7-9、S-8-4、S-8-5、S-8-8。

連結：S-9-4，S-9-5。

後續：G-10-6。

基本說明

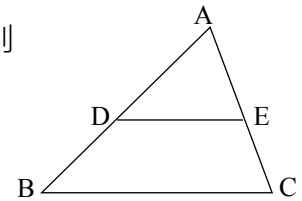
1. 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且長度等於第三邊的一半。
2. 平行線截比例線段性質：設一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例的線段。

   在 ΔABC 中 D 在 $\overline{AB}$ 上，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$，則

   $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，

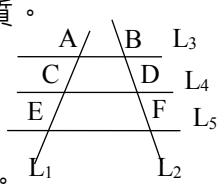
   $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$，

   $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$，

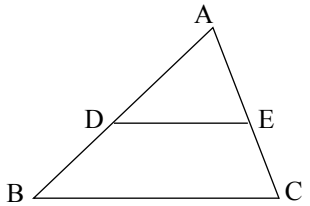


   而且，更進一步可得到 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$，稱為平行線截比例線段性質。

3. 已知直線 L_3、L_4、L_5 互相平行，而且直線 L_1 與 L_3、L_4、L_5 分別交於 A、C、E，直線 L_2 與 L_3、L_4、L_5 分別交於 B、D、F，則 $\overline{AC}:\overline{CE}=\overline{BD}:\overline{DF}$，本項次與前一項次皆稱為平行線截比例線段性質。

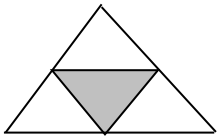


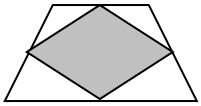
4. 能利用截線段成比例線段來判別兩直線是否平行：若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。在 ΔABC 中 D 在 $\overline{AB}$ 上，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$（或 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$ 或 $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$）成立時，則 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$，並且 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$。



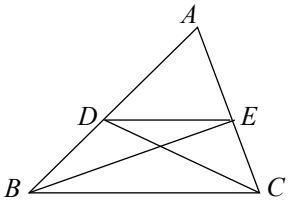
釋例

1. 教師可讓學生讀題與讀圖，**透過提問**釐清關係。
2. 經過三角形一邊的中點且平行於另一邊的直線，一定通過第三邊中點。
3. 三角形中做一平行線平行底邊可截出比例線段，可以使用等高的三角形面積比等於底邊長的比，或者利用相似三角形對應邊成比例來說明。
4. 三角形或四邊形各邊中點連線所成的多邊形的面積和原多邊形面積的關係，如下圖：左圖中灰色三角形面積是原三角形的$\frac{1}{4}$，右圖中灰色四邊形面積為原四邊形的$\frac{1}{2}$。



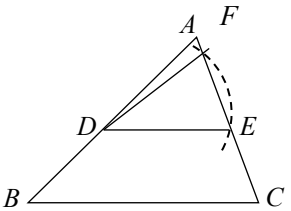


5. 進行比的運算時讓學生再複習比例式的計算，以利學生後續學習。
6. 平行線截比例線段的逆敘述，當成比例線段時，證明平行的結果；可以採取窮舉法證明兩點重合。亦可使用當線段成比例時，則兩三角形面積相等，由於同底，所以高一定相等，則兩線一定平行。如下圖所示：



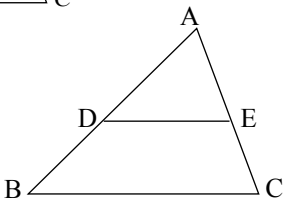
ΔABC 中，若 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，則 $\Delta ADE:\Delta BDE=\Delta ADE:\Delta CDE$，可得 $\Delta BDE=\Delta CDE$（面積相等）。由於 ΔBDE 與 ΔCDE 有相同的底 $\overline{DE}$，因為面積相等，所以高相等；則 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$。

7. 若 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$，則 $\overline{DE}$ 不一定平行 $\overline{BC}$。例如，若 $\overline{AB}>\overline{AC}$，以 D 點為圓心，$\overline{DE}$ 為半徑，交 $\overline{AC}$ 於 F，則 $\overline{DE}=\overline{DF}$，$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DF}:\overline{BC}$，此時 $\overline{DF}$ 不平行 $\overline{BC}$。



錯誤類型

如右圖，學生誤以為若 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$，則 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{BC}$。



S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30°,60°,90° 其邊長比記錄為「$1:\sqrt{3}:2$」；三內角為 45°,45°,90° 其邊長比記錄為「$1:1:\sqrt{2}$」。 **備註：**學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。	s-IV-10 s-IV-12

先備：S-8-6、S-8-8。

連結：N-9-1、S-9-1、S-9-2、S-9-3、S-9-5。

後續：G-10-6。

基本說明

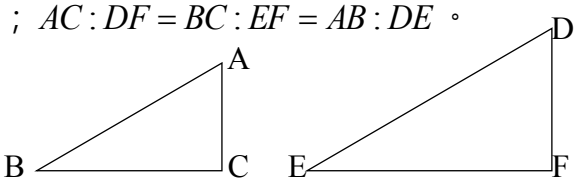
1. 任何一個有固定銳角角度的直角三角形，其任兩邊長的比值皆為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。
2. 能理解直角三角形三內角為「$30°,60°,90°$」，其邊長比為「$1:\sqrt{3}:2$」。
3. 能理解直角三角形三內角為「$45°,45°,90°$」，其邊長比為「$1:1:\sqrt{2}$」。
4. 學生計算直角三角形二邊長的比值，無使用計算機時，角度限於30度、45度、60度。

條目範圍

不處理直角三角形中，不同角度時兩對應邊對應的比值，隨之變大或小。

釋例

1. 兩個直角三角形只要其中之一銳角相等，則這兩個直角三角形相似（AA 相似）。
2. 如下圖所示，直角ΔABC與直角ΔDEF中，已知 $\angle C=\angle F=90^0$，且$\angle B=\angle E$，則$\Delta ABC\sim\Delta DEF$（AA 相似）；可得對應邊成比例，$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$；$\overline{AC}:\overline{DF}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{DE}$。
3. 也可表示成：$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$，$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}$，$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$。



此三項比值不因相似直角三角形的大小而改變。

4. 承上，當$\angle B=40°$時，介紹計算機上 $\sin 40°$、$\cos 40°$、$\tan 40°$ 的意義。
5. 給於直角三角形，三內角為「$30°,60°,90°$」，其對應邊長比為「$1:\sqrt{3}:2$」。例如：直角三角形中，三內角為「$30°,60°,90°$」，且斜邊長為4，能利用邊長比為「$1:\sqrt{3}:2$」求出另兩邊的長。
6. 給於直角三角形，三內角為「$45°,45°,90°$」，其邊長比為「$1:1:\sqrt{2}$」。例如：直角三角形中，三內角為「$45°,45°,90°$」，且斜邊長為2，能利用邊長比為「$1:1:\sqrt{2}$」求出另兩邊的長。

錯誤類型

學生容易誤記「$30°,60°,90°$」的對應邊連比例式為$1:2:\sqrt{3}$或$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

S-9-5 圓弧長與扇形面積：以π表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。	s-IV-14

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-7、S-9-12、S-9-14。

後續：G-10-3、N-11A-1。

基本說明

1. 認識弦、圓弧、弓形、扇形的意義。
2. 圓弧長度 $=2\times$半徑$\times\pi\times\frac{q}{360}$，圓弧所對的圓心角為$q°$。
3. 扇形面積 = 半徑×半徑$\times\pi\times\frac{q}{360}$，扇形的圓心角為$q°$。

釋例

1. 處理扇形面積可以從切割圓形的概念發展。將圓對切、切四等份、切八等份；讓學生觀察發現切割後的扇形面積與圓形面積的關係；進而發現扇形面積等於圓形面的一部分，這一部分的比率與扇形的圓心角佔360度的比率相同。
2. 圓心角120度的扇型，圓半徑為12單位，求此扇形面積。

   因為120度的扇形，佔圓形面積比例為$\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$，而圓形面積=半徑×半徑×$\pi$=12×12×$\pi$=144$\pi$，

   所以，扇形面積=$144\pi\times\frac{1}{3}=48\pi$。
3. 圓心角120度的扇形，圓半徑為12單位，求此扇形周長。

   因為120度的扇形佔圓形面積比例為$\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$，而圓形周長=2×半徑×$\pi$=2×12×$\pi$=24$\pi$，

   扇形是弧長加上2邊的半徑所圍成的圖形。所以，扇形周長=$24\pi\times\frac{1}{3}+12+12=24+8\pi$。
4. 一樣的圓心角因半徑長不同，弧長隨之不同。
5. 扇形面積 = 半徑×半徑×$\pi\times\frac{q}{360}$，其中扇形的圓心角為$q°$。

錯誤類型

1. 半徑不是弦，但是存在有半徑長度的弦。
2. 扇形是兩條半徑與一圓弧所圍成的圖形，對於扇形的周長，學生經常忽略兩條半徑。對於看起來像扇子，但不是由兩條半徑所圍出來的圖形就不能稱為扇形。

S-9-6 圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。	s-IV-14

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-6、S-9-12、S-9-14。

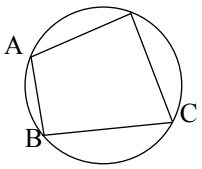
後續：G-10-3、N-11A-1。

基本說明

1. 認識圓心角、圓周角與所對的弧的度數等名詞的意義。
2. 能理解圓心角的度數等於所對弧的度數。
3. 能理解同一弧所對的圓周角度數都是所對圓心角度數的一半。
4. 能理解圓內接四邊形（可以稱這四點共圓）的對角互補，如下圖所示，

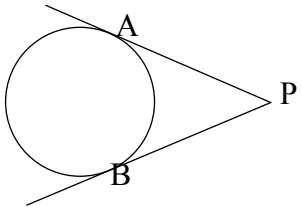
   四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，

   則∠A+∠C=180^0，∠B+∠D=180^0



5. 過圓外一點的兩切線段等長。

   P 是圓外一點，自 P 點對圓做二條切線；分別交圓於 A、B 兩點；則 $\overline{PA}=\overline{PB}$。



條目範圍

1. 本單元不介紹弦切角，圓內角，圓外角。
2. 不介紹圓冪性質。

釋例

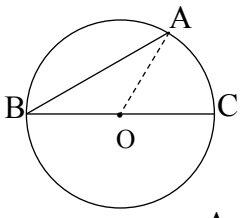
1. 在一圓中，以角的頂點位置判斷角的名稱，頂點在圓心的角謂之圓心角，頂點在圓周上的角謂之圓周角。
2. 以量角器為例，將半圓周分成 180 等份，認識 1 度的弧與 1 度的圓心角。
3. 圓周角度數的求法可以分成三種模式：圓心在弦上，圓心在圓周角內，圓心在圓周角外。

   第一種情況是圓心在∠ABC 的邊上，連接 $\overline{OA}$，

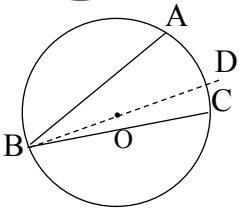
   則ΔOAB 是等腰三角形（因為 $\overline{OA}=\overline{OB}$），所以，

   ∠B=∠BAO，且∠AOC=∠B+∠BAO=∠B+∠B=2∠B

   由於 ∠AOC=AC 弧的度數，因此 2∠B= AC 弧的度數，所以 $\angle B=\frac{AC\text{弧的度數}}{2}$。



   第二種情況是圓心在∠ABC 內，連接 $\overrightarrow{BO}$ 交圓 O 於 D 點。



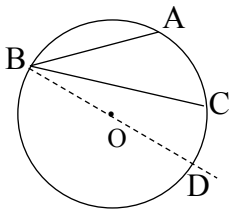
依據第一種情況可知，

$\angle ABD = \frac{AD\text{弧的度數}}{2}$ ，$\angle DBC = \frac{DC\text{弧的度數}}{2}$ ，

$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \frac{AD\text{弧的度數}}{2} + \frac{CD\text{弧的度數}}{2}$

$= \frac{AD\text{弧的度數} + DC\text{弧的度數}}{2} = \frac{ADC\text{弧的度數}}{2}$ 。所以 $\angle ABC = \frac{ADC\text{弧的度數}}{2}$ 。

第三種情況是圓心在∠ABC 外，$\overrightarrow{BO}$ 交圓 O 於 D 點。



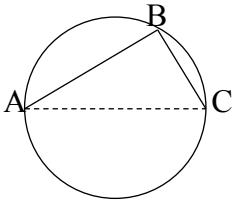
據第一種情況可知，

$\angle ABD = \frac{ACD\text{弧的度數}}{2}$ ，$\angle CBD = \frac{CD\text{弧的度數}}{2}$ ，

$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{ACD\text{弧的度數}}{2} - \frac{CD\text{弧的度數}}{2}$

$= \frac{ACD\text{弧的度數} - CD\text{弧的度數}}{2} = \frac{AC\text{弧的度數}}{2}$ ，所以綜合這三種情況可知　圓周角的度數等於所對弧度數的一半。

4. 半圓所對的圓周角是直角。如下圖所示，$\overline{AC}$ 是圓的直徑，B 點在圓周上，則∠ABC=AC 半圓度數的一半=90度。



錯誤類型

學生容易記錯圓心角與圓周角的公式。

評量

1. 不評量圓內角、圓外角。
2. 不評量圓冪性質。

探索

四邊形 ABCD 中，若∠A+∠C< 180°，探索 C 點在三角形 ABD 外接圓的外部或內部？

S-9-7 點、直線與圓的關係：點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。	s-IV-14

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-12、S-9-14。

後續：G-10-3、N-11A-1。

基本說明

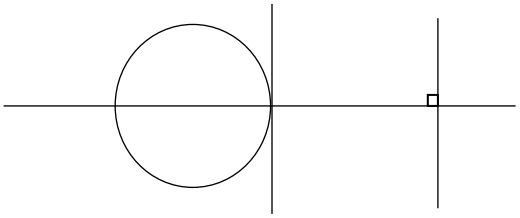
1. 理解點與圓的位置關係。依據點到圓心之距離大於、等於或小於半徑，判斷此點位於圓的外部、圓上或圓的內部。
2. 理解直線與圓的位置關係：依據圓心到直線之距離大於、等於或小於半徑，判斷此直線與圓不相交、交於一點或交於兩點。與圓交於一點的直線稱為切線，兩者關係稱為相切。
3. 理解切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。反之，若一直線過圓上一點且垂直於過此點之半徑，則此直線為該圓之切線。
4. 圓心到弦的垂直線段（長）稱為弦心距，且該線段垂直平分此弦。
5. 利用畢氏定理可知：同一圓中，弦心距愈長，則弦愈短，反之亦然；兩弦心距等長，則兩弦也等長，反之亦然。

條目範圍

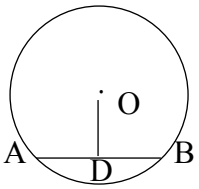
1. 本單元教材只處理點與圓以及線與圓的關係；不處理兩圓的位置關係。
2. **不處理**兩圓的公切線。

釋例

1. 直線與圓的關係中，以垂直經過圓心的直線，由外而內慢慢靠近，觀察了解直線與圓的位置關係。



2. 過圓上一點對圓做切線，可由過此點作一垂直此點與圓心的連線，就是切線。
3. 點與圓的關係可以依據點與圓心的距離判斷；直線與圓的關係可以使用圓心與直線的距離來判斷。
4. 自圓心對弦所做的垂直線段稱為該弦的弦心距，如右圖所示：



$\overline{OD} \perp \overline{AB}$，$\overline{OD}$ 為 $\overline{AB}$ 弦的弦心距，依據畢氏定理，

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2}$，其中 $\overline{OA}$ 為半徑。若 $\overline{OD}$ 愈短，則 $\overline{AD}$ 愈長；反之亦然。

評量

1. 不評量兩圓的位置關係。
2. 不評量兩圓的公切線長。

S-9-8 三角形的外心：外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。	s-IV-11

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-12、S-9-10、S-9-11。

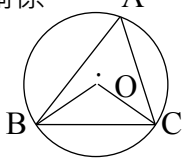
後續：G-10-3。

基本說明

1. 過三角形三個頂點的圓，稱為三角形的外接圓，此外接圓的圓心稱為三角形的外心。
2. 能理解三角形的外心為三邊的中垂線的交點。
3. 能理解任一個三角形必有外心。
4. 理解三角形的外心至各頂點等距離，而且此距離為其外接圓半徑。
5. 理解直角三角形斜邊中點是此三角形的外心，因此其斜邊中點到三頂點等距離。斜邊就是外接圓的直徑。

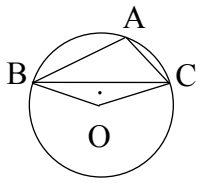
釋例

1. 推論證明前，給學生學習單上有三種三角形：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形；透過摺紙或作圖活動驗證三條中垂線均相交於同一點。
2. 解釋三角形三邊的中垂線交於同一點，先以兩邊的中垂線交於一點，再利用中垂線逆性質說明第三邊的中垂線必通過同一點；理解外心到三角形的三頂點的距離相等，此距離是外接圓半徑。
3. O 是三角形 ABC 的外心，依據∠A 的不同種類，可以得出∠BOC 與∠A 的關係。



(1) 若∠A 是銳角，如右圖所示，O 是三角形的外心，則∠BOC=2∠A。
三角形 ABC 中，O 是外心，連接 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OC}$，因為圓心角是圓周角的兩倍，所以，∠BOC=2∠A。

(2) 若∠A 是鈍角，如下圖所示， O 是三角形的外心，則∠BOC=360度–2∠A。
三角形 ABC 中，O 是內心，連接 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OC}$，BC 優弧的弧度=2∠A，所以∠BOC=BAC 弧度=360^0 - BC 優弧的弧度=360^0 - 2∠A。



(3) 若∠A 是直角，則 O 點在 $\overline{BC}$ 上，所以∠BOC=180^0=2×90^0=2∠A。

4. 不共線三點必共圓。
5. 理解銳角三角形的外心必在內部，直角三角形的外心必在斜邊中點，鈍角三角形的外心在三角形的外部。

錯誤類型

直角三角形中，斜邊上的中線、斜邊上的高、斜邊的中垂線，這三條線容易被誤解。

評量

評量三角形的外接圓半徑只限於等腰或直角三角形。

S-9-9 三角形的內心：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積＝周長×內切圓半徑÷2；直角三角形的內切圓半徑＝（兩股和－斜邊）÷2。	s-IV-11

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-8、S-9-12、S-9-14。

後續：G-10-3。

基本說明

1. 與三角形三邊相切的圓，稱為三角形的內切圓，此內切圓的圓心稱為三角形的內心。
2. 能理解三角形的內心在三內角的角平分線上。
3. 任一個三角形必有內心；三角形的內心必在三角形的內部。
4. 理解三角形的內心至各邊等距離，而且這個距離就是內切圓的半徑。
5. 設 ΔABC 周長 s，內切圓半徑 r，則 ΔABC 的面積＝$\frac{sr}{2}$。直角三角形中，內切圓半徑為 r＝(兩股和－斜邊)÷2。

釋例

1. 推論證明前，給學生學習單上有三種三角形：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形；透過摺紙或作圖活動驗證三內角平分線均相交於同一點。且這一點到三邊的距離相等。
2. 以位置分辨，畫在三角形外面並通過三頂點的圓，稱為外接圓，外接圓的圓心稱為外心；畫在三角形裡面並與三邊相切的圓，稱為內切圓，內切圓的圓心稱為內心。
3. 解釋三角形三內角的平分線交於同一點，先以兩內角的角平分線交於一點，再利用角平分線逆性質說明第三角的角平分線必通過同一點。
4. 理解內心到三角形的三邊的距離相等，此距離是內切圓半徑。
5. 理解三角形面積的切割組合，得到 ΔABC 的面積＝$\frac{sr}{2}$，s為 ΔABC 周長。
6. 利用切線長性質理解直角三角形中，內切圓半徑 r＝(兩股和－斜邊)÷2。
7. 若 I 是三角形的內心，則$\angle BIC=90^0+\frac{1}{2}\angle A$。

錯誤類型

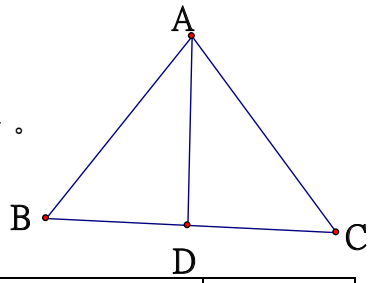
學生容易混淆內心與外心的性質，例如 O 是三角形 ABC 的內心，學生誤認$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$。

評量

1. 評量三角形內切圓半徑，只限於直角三角形，等腰三角形與正三角形，**不適合**評量任意三角形。
2. 評量試題宜注意數據是否合理，避免為了湊數據，讓答案不合理；例如：三角形三邊長為5，6，7；已知三角形面積為18，求內切圓半徑？事實上此三角形面積不可能等於18，本試題有誤。

探索

如下圖，ΔABC 中，$\overline{AD}$ 為∠BAC 的角平分線，$\overline{AD}$ 交對邊於 D 點。試證 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$。



S-9-10 三角形的重心：重心的意義與中線；三角形的三條中線將三角形面積六等份；重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍；重心的物理意義。	s-IV-11

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7。

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-8、S-9-9、S-9-10、S-9-12。

後續：S-11A-1。

基本說明

1. 三角形的頂點與對邊中點的連線稱為此邊的中線。
2. 能理解通過三角形頂點且能將三角形分割成面積相等的兩個三角形之直線一定是此三角形中線。
3. 三角形三條中線必相交於同一點，這個點稱為三角形的重心。
4. 理解三角形的重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍。
5. 理解三角形三條中線將三角形面積六等份。
6. 知道三角形重心的物理意義。

釋例

1. 透過實際體驗說明三角形的中線必經過質量的中心；以珍珠板做成的三角板，讓學生試著以手指頭找出質量的中心（以手指頭頂住某個點可以讓三角板保持平衡）。其次，再抓住三角板的頂點讓它自然下垂，發現鉛垂線必經過對邊的中點。再換個頂點，驗證結果仍相同。
2. 三角形中先畫出兩條中線的交點，再驗證第三條中線也通過這一點，便得出三條中線相交於同一點。
3. 透過三角形的中線將原三角形分成兩塊面積相等的三角形，經推理說明可得三條中線將原三角形分成六塊面積相等的三角形。

4. 重心到三頂點的連接線段將三角形分成三塊面積相等的三角形。可透過平行線截比例線段或面積相等方法推理，可得重心將中線長分成兩段長度比為2:1。

錯誤類型

直角三角形斜邊上的中線易被誤解為斜邊上的高。

S-9-11 證明的意義：幾何推理（須說明所依據的幾何性質）；代數推理（須說明所依據的代數性質）。 **備註：**證明的題材以學習內容直接推理可得為限，勿涉及引用延伸學習內容。	s-IV-3、s-IV-4 s-IV-5、s-IV-6 s-IV-9、s-IV-10 a-IV-1

先備：S-8-1、S-8-12。

連結：S-9-2、S-9-11。

後續：N-10-6。

基本說明

1. 數學證明是由已知條件或已經確定是正確的性質來推導出某些結論。因此學生在學習時，應將每一步驟所根據的理由適切地表達出來。
2. 在幾何推理，8-s-12 已要求學生能將幾何推理步驟所依據的性質用填空格方式做答，本條目要求能完整將證明過程表達出來。
3. 本細目的證明並不侷限於幾何推理，也可以包括代數或數與量的推理。

條目範圍

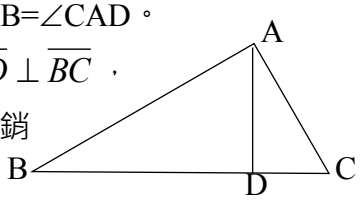
1. 先以填充題的格式練習表達。
2. 證明的範例最多以融合二個概念為限。

釋例

本細目的教學僅要讓學生初步認識證明的意義，因此推理的過程以二個概念為限，如下面的例子所示：

例 1.直角三角形 ABC 中，∠BAC=90 度，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，試證明∠B=∠CAD。

說明：因為∠BAC=90 度，所以∠BAD+∠CAD=90 度。因為 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，所以∠B+∠BAD=90 度，故∠B+∠BAD=∠BAD+∠CAD，同時抵銷∠BAD，可得∠B=∠CAD。



例 2. 若 a、b、c 為三個正整數，且滿足 $a^2+b^2=c^2$，試證明 $c+b$ 可以整除 a^2。

說明：由 $a^2+b^2=c^2$，得 $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$，因此 $a^2\div(c+b)=c-b$，所以 $c+b$ 可以整除 a^2。

例 3.　3 的倍數與 6 的倍數的和一定是 3 的倍數。

說明：3 的倍數以 $3a$ 表示，a 是整數；6 的倍數以 $6b$ 表示，b 是整數；所以

3 的倍數+6 的倍數=$3a+6b=3(a+2b)$，故和一定是 3 的倍數。

評量

證明過程中所使用數學概念，應以本課綱條目範圍內為限，勿使用課綱條目延伸之概念。

S-9-12 空間中的線與平面：長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。 **備註：**S-5-6 僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增「空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主。	s-IV-15

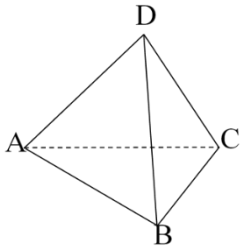
先備：S-8-1~S-8-6、S-8-12。

連結：S-9-14。

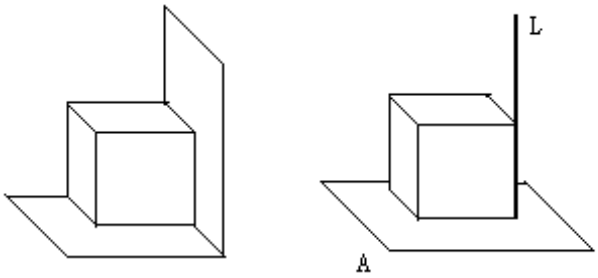
後續：G-10-2、G-10-3、G-10-4、G-10-7。

基本說明

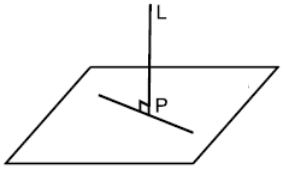
1. 長方體的每個面都是矩形、長方體中相鄰兩稜邊互相垂直，任意不相鄰的兩邊(延長之後) 都不會相交。
2. 長方體中不相交的兩邊，且落在同一平面上時，稱這兩直線平行；長方體中不相交的兩邊，且無法落在同一平面上，稱這兩直線歪斜。
3. 認識長方體之相鄰兩面都垂直，不相鄰的兩面都平行；以及稜邊與哪些面垂直、稜邊與哪些面平行。
4. 如下圖所示，正四面體中，4個面與6條直線既不平行也不垂直；AD 直線與 BC 直線不相交，也不落在同一平面上，因此，稱這兩直線為歪斜。



5. 能藉由長方體的高與上下兩平行底面均垂直的已知現象，理解一直線同時垂直於兩已知平面，則這兩個平面平行。



6. 能認識一已知直線L垂直於平面，且交於點P，則此平面上通過點P的任一直線都與直線L垂直。



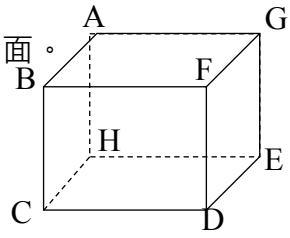
條目範圍

1. 不處理空間中兩平面不垂直時計算兩者的夾角度數。
2. 只判斷空間中直線、平面間是否平行以及兩直線是否歪斜。
3. 僅限於評量長方體與正四面體內，線與線、線與平面、平面與平面之間的關係。

釋例

1. 初次學習線與平面、平面與平面的垂直與平行關係時，我們以直觀且可操作為教學之重點。
2. 透過長方體的實物觀察發現，了解空間中的平面與直線的關係。正如同直角三角板是檢查平面上兩線垂直或平行的方便工具，我們將用長方體來檢查兩平面垂直或平行，一直線與一平面垂直，一直線與一平面平行。

   如右圖所示：

   相鄰兩平面垂直，例如：矩形 ABFG 垂直於矩形 BCDF 所在的平面。

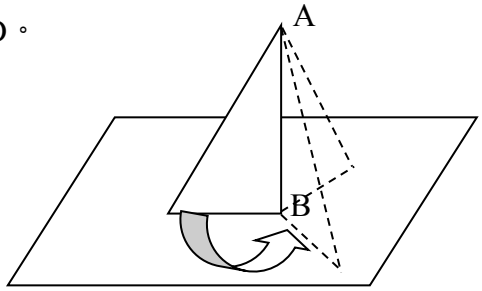
   相對的兩面平行，例如：矩形 ABFG 平行於矩形 CDEH。

   線與面的關係，例如：直線 FD 垂直於矩形 CDEH 所在的平面。

   相鄰兩鄰邊垂直，例如：線段 FD 垂直於線段 CD。

   線與線的歪斜關係，例如：直線 FG 歪斜於直線 CD。

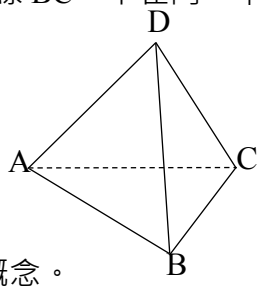
3. 平面上有一點 B，如右圖所示，已知$\overline{AB}$垂直此平面，取一直角三角板置於平面上，以$\overline{AB}$為旋轉軸，固定 B 點，旋轉直角三角板，可以發現，$\overline{AB}$垂直 B 點所在的平面，並且與平面上通過 B 點的直線均垂直。

4. 透過正四面體的實物觀察發現，了解空間中的平面與直線間的關係。

線與線的歪斜關係，例如：直線 AD 與直線 BC，不在同一平面上，所以歪斜。

相鄰兩平面既不垂直也不平行。



錯誤類型

學生對於平面中直線與平面的垂直存在迷思概念。

評量

僅限於評量長方體與正四面體內，線與線、線與平面、平面與平面之間的關係。

S-9-13 表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。 **備註：**S-6-4 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。	s-IV-16

先備：S-6-4、S-8-6、S-8-7、S-8-10、S-8-11。

連結：S-9-6、S-9-12、S-9-13。

基本說明

1. 認識直角柱、直圓錐與正角錐之展開圖；並運用展開圖，求立體圖形的表面積。
2. 上下底為兩個全等多邊形，且側面均為矩形的柱體叫做直角柱。
3. 直角柱的每一個側面均與底面垂直。
4. 下底為正多邊形且側面均為等腰三角形的錐體叫做正角錐。
5. 下底為圓形，且錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面的錐體叫做直圓錐。
6. 直角柱的體積為底面積乘以高。

條目範圍

1. 不出現斜角柱與斜角錐。
2. 評量從展開圖反推原有的立體圖形的概念時，題目避免出現每個面再添加其他標誌。

釋例

1. 簡單立體圖形包括直角柱、直角錐、直圓錐等，可舉生活的實例來說明。
2. 透過生活實物了解各種立體圖形。
3. 能理解柱體與錐體的頂點、面、邊等構成要素。
4. 計算圓錐的表面積時，底面為圓形，側面的展開圖為扇形。學生可從實作中發現「圓形的周長與扇形的弧長相等」。
5. 透過各種平面圖形面積的公式，計算直角錐的表面積。

錯誤類型

學生容易誤認直圓柱的展開圖中，側面的展開圖只能長方形，其實也可以平行四邊形。

評量

不求直圓錐與角錐的體積。

探索

利用展開圖來計算長方體表面上兩點之最短距離。

F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。	f-IV-2

先備：F-8-1、F-8-2。

連結：F-9-2。

後續：F-10-1。

基本說明

1. 理解二次函數 $y=ax^2+bx+c$，（$a\neq 0$）的意義。
2. 能在具體情境中列出兩量的二次函數關係。

條目範圍

不涉及二次函數的配方法。

釋例

1. 透過正方形面積 y 與邊長 x 的關係，理解二次函數 $y=x^2$。
2. 由給定之實際觀測數據來理解自由落體或拋擲物體時，因為受到地心引力的影響，物體與地面的距離 y 是時間 x 的二次函數。

F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$ 、$y=a(x-h)^2+k$的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$的圖形與$y=a(x-h)^2+k$的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。 **備註**：「二次函數的配方法」及「二次函數的應用問題」為 10 年級課程（F-10-1），本條目的教學聚焦在其圖形的特性。	f-IV-2 f-IV-3

先備：F-8-1、F-8-2。

連結：F-9-1。

後續：F-10-1。

基本說明

1. 理解二次函數的相關名詞 (對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值)。
2. 能描繪$y=a(x-h)^2+k$的圖形。
3. 理解$y=ax^2$的圖形與$y=a(x-h)^2+k$的圖形的平移關係。
4. 理解二次函數$y=a(x-h)^2+k$的圖形。當 $a>0$ 時，圖形的開口向上，(h,k) 為圖形的最低點；當 $a<0$ 時，圖形的開口向下，(h,k) 為圖形的最高點；二次函數的圖形恰有一個頂點 (圖形的最高點、最低點都稱為頂點)，其坐標為(h,k)；二次函數的圖形恰有一條對稱軸，就是通過頂點的鉛垂線，其方程式為 $x=h$。
5. 理解二次函數$y=a(x-h)^2+k$，當 $a>0$ 時在 $x=h$ 發生最小值k；當 $a<0$ 時在 $x=h$ 發生最大值 k。

條目範圍

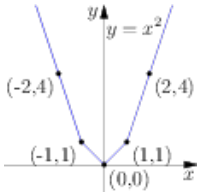
1. 不涉及二次函數的配方。
2. 不涉及「未配方的二次函數」之圖形繪製，以及頂點坐標、最大值、與最小值的求解。
3. 不涉及「二次函數圖形與x軸的兩個交點，為其對應一元二次方程式的根」的概念。

釋例

1. 以描點的方式繪製二次函數 $y=ax^2$ 之圖形，$a\neq 0$，並能察覺圖形的對稱軸及最高點或最低點。必要時，可透過應用軟體繪圖展示。
2. 以描點的方式繪製二次函數 $y=ax^2+k$ 之圖形，$a\neq 0$，$k\neq 0$。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數 $y=ax^2$ 圖形之平移關係。
3. 以描點的方式繪製二次函數 $y=a(x-h)^2$ 之圖形 ，$a\neq 0$，$h\neq 0$。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數 $y=ax^2$ 圖形的平移關係。
4. 能察覺二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形之對稱軸是直線 $x=h$。當 $a>0$ 時，圖形開口向上，其最低點是(h,k)；當 $a<0$ 時，圖形開口向下，其最高點是(h,k)。
5. 能利用二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，理解二次函數的對稱軸是通過其最高點或最低點的鉛垂線，其方程式為 $x=h$。
6. 能利用對稱軸與最高點或最低點之概念，快速描繪二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的大致圖形。
7. 能由函數圖形中理解二次函數的最大值或最小值。

錯誤類型

有些學生會誤認為$y=a(x-h)^2+k$的圖形為折線圖，例如：$y=x^2$的圖形誤認為下圖。



D-9-1 統計數據的分布：全距；四分位距；盒狀圖。 **備註**：D-7-2 處理單一統計量（平均數、中位數、眾數）表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。	n-IV-9 d-IV-1

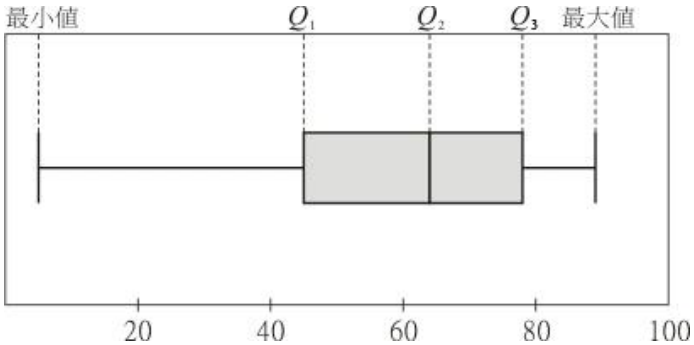
先備：D-8-1。

連結：D-9-2、D-9-3。

後續：D-10-2。

基本說明

1. 全距是最大數與最小數的差，全距大通常表示資料較疏散，全距小則是指資料較集中。
2. 認識第 1、第 2、第 3 四分位數（可記為 Q_1、Q_2、Q_3）的意義，知道如何運用資料的累積相對次數分配表來找出 Q_1、Q_2、Q_3。知道第 2 四分位數即為中位數；四分位距則為第 3 四分位數與第 1 四分位數的差，即 Q_3-Q_1。
3. 盒狀圖可以表徵數據的集中程度，它是由最大值、最小值與四分位數構成，如下圖。可以很容易觀察到四分位距和全距間的差異性，以及數據集中在 Q_1 到 Q_3 附近。



4. 關於四分位數的定義，一般並沒有統一的取法，很多處理資料的統計軟體所用的四分位數定義也不一樣。因此學生應先確切學習取四分位數的原理，再學習的其計算法則。

釋例

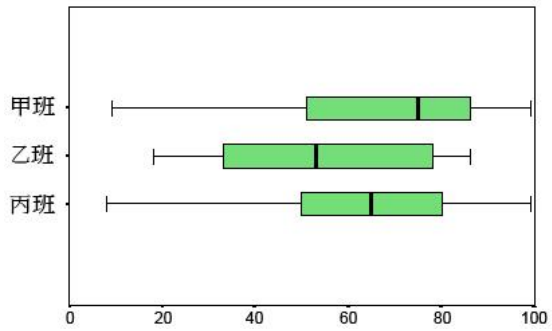
1. 三年一班的數學科第一次段考成績總表，如下表：

表 1、三年一班的數學科第一次段考成績總表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8
成績	5	64	35	78	36	43	44	82
座號	9	10	11	12	13	14	15	16
成績	83	48	52	55	58	64	65	68
座號	17	18	19	20	21	22	23	24
成績	69	70	74	35	79	80	78	45
座號	25	26	27	28	29	30		
成績	47	33	84	75	85	89		

以三年一班數學成績為例，最大數與最小數分別為 89 與 5，所以全距為 84。以及Q_1、Q_2、Q_3分別為 45、64.5、78，則四分位距為$Q_3 - Q_1 = 33$。

2. 教師可使用類似下圖合併表徵各組資料的分散程度，分析各組資料間的關係。



D-9-2 認識機率：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。 **備註**：以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性（節點相同）的樹狀圖為主。	n-IV-9 d-IV-1

先備：D-8-1。

連結：D-9-3。

後續：D-10-3、D-10-4。

基本說明

1. 能知悉不確定性的事物可能發生的結果，並以樹狀圖表徵。

2. 從重複試驗中，認識機率的意義。

條目範圍

樹狀圖以兩層為限。

釋例

1. 例如：擲銅板可能出現正面和反面、擲骰子時 1 點到 6 點都可能出現。如下圖：

2. 教師除了使用對稱性的情境（例如：銅板、骰子、撲克牌、抽球等），分析可能發生的結果外，也應探討非對稱性的情境（如圖釘、圓錐、爻杯）。
3. 擲銅板可能出現正面和反面，但不表示投擲一銅板，若第一次出現正面，第二次就要出現反面。

D-9-3 古典機率：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。	n-IV-9 d-IV-2

先備：D-8-1。

連結：D-9-2。

後續：D-10-3、D-10-4。

基本說明

1. 在對稱性的情境（例如：銅板、骰子、撲克牌、抽球等），使學生相信每一基本事件出現的機會相同，並能由直觀來輔助學生學習機率的基本意義。
2. 丟擲有兩態（如圖釘、圓錐、爻杯）的不對稱物體時，其出現的機率通常並不是 $\frac{1}{2}$。
3. 了解不可能發生的事件機率為 0。
4. 了解所有基本事件出現的機率總和為 1。

條目範圍

複合的機率事件以兩層為限，例如：連擲骰子兩次。

釋例

1. 教師應教授「試驗有兩態時，出現的機率不相等的情境」，例如：箱子裡放入 2 顆黑球、1 顆白球，則抽出黑球、白球的機率並不相等，並說明統計資料的相對次數與機率之關係。
2. 當遇到很難執行試驗的情境時（例如：在全班學生中任意抽一名學生，則其成績在 80 分以上的機率是多少？），可以將原來的統計資料轉換成「抽球」模型來處理。
3. 處理「丟擲有兩態（如圖釘、圓錐、爻杯）的不對稱物體，其出現的機率不是 $\frac{1}{2}$」。教師可利用重複試驗的方式，估計機率大概是多少，並讓學生能初步體認「如果試驗越多次，所獲得的機率資訊越可靠」。
4. 以例子說明「不可能發生的事件機率為 0」，例如：丟兩顆骰子，出現點數和為 1 的機率

為 0。

5. 以例子說明「所有基本事件出現的機率總和為 1」，例如：丟銅板，出現正面與反面的機率和為 1。

錯誤類型

1. 隨機選取一位班上同學，此同學為女生的機率為何？學生常誤認為 $\frac{1}{2}$，而忽視班上男生、女生的人數是否相等。
2. 有些學童會誤認為「若第一次出現正面，第二次就要出現反面」。學生最後需能體認，即使投擲一銅板已出現 10 次正面，下次投擲仍然有一半的機會是正面。

探索

學生可探索統一發票中獎的機率。

三、普通型高級中等學校教育階段

高中階段特別說明

(1) 《數學領綱》裡的 10 至 12 年級「學習內容備註」，並沒有獨立列在以下說明文件內，而是融入在「教學斟酌」、「條目範圍」、「釋例」、「評量」等項目內。

(2) 為強調國中與高中階段的銜接，高中階段的「先備」包含國中階段之學習內容。但是，高中階段的「後續」卻不涉及大學課程。

(3) 因為 11 年級的 B 類課程是新課程，並不適合說明「與 99 課綱的差異」。為提供更有效的訊息，該欄位改為「與 A 類課程的差異」。

(4) 重申《數學領綱》所訂的符號意義如下：

※ 為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。

★ 建議不列為評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。

＃ 不必設置獨立的教學單元，宜融入適當課題，在合理的脈絡中教授。

10 年級學習內容解析

N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，($\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。 **備註：**定義科學記號數字的有效位數，在運算之後應維持原本的有效位數。★	n-V-1

先備：有理數的四則運算，平方根式的化簡 (N-8-1)。

連結：指對數 (N-10-3、N-10-4)。

後續：無窮等比級數，複數 (選修數學甲、乙)。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

使用計算機，讓學生能實際透過計算操作而認識十分逼近法的過程，以及十進制小數的意義。

2. 相關約定

(1) 可以用「黑板粗體字型」的大寫字母 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$，依序表示正整數、整數、有理數、實數。

(2) 對一給定的實數，「準至四位小數」或「算到小數點下第四位」的意思是將小數點下第四位以後的數值「無條件捨去」(chopping)，而「約至四位小數」或「取四位最近小數」或「約至小數點下第四位」的意思是在小數點下第四位做「四捨五入」(rounding)。例如準至四位小數的 π 是 3.1415，而約至四位小數的 π 是 3.1416。小數點下的位數也可以改用十分位、百分位等位名來稱呼。不影響數值的 0 可以寫出來也可以省略，其判斷準則是以溝通的效率來衡量。

(3) 非零的實數可轉換成唯一的科學記號數字，形式如 $\pm m\times 10^n$ ，其中 $\pm$ 稱為科學記號的「正負號」，當它為正時可以省略不寫；m 稱為科學記號的「係數」部分，須滿足 $1\le m<10$ ；n 稱為「指數」部分，$n\in\mathbb{Z}$。

(4) 對非零的數，取其「n 位有效數字的估計值」或者「以 n 位有效數字表示」的意思是：先將它寫成科學記號數字，再將它的係數約至 $n-1$ 位小數，然後以普通記號 (整數、小數) 或科學記號呈現其數值。數學的「有效位數」僅用來約定概數的精確度，並不像自然科學領域還需用來溝通測量的精確度。

(5) 建議使用 $\approx$ 或 $\fallingdotseq$ 作為近似值，凡是近似值都應使用，例如 $\frac{1}{3}\fallingdotseq 0.3333$ 、$\sqrt{2}\approx 1.4142$ 。學生應該明白，例如「$\sqrt{2}\approx 1.4142$ 」是「以五位有效數字表示 $\sqrt{2}$ 」的意思。

3. 學習目標

(1) 知道有理數與無理數的定義，知道它們十進制小數的區別特徵。

(2) 延續國中對數線的認識與理解，能作圖找到整數、有理數、平方根式之無理數在數線上的位置。

(3) 理解十進位制小數的意義，能做有限小數與其等值分數的互化。

(4) 能進行有理數之分數與小數形式的互化，知道循環小數的特徵。

(5) 使用計算機做四則、平方根、或任何有限小數次方的運算，並明白其值僅為估計。

(6) 能判讀計算機顯示的科學記號數字，能將科學記號數字輸入計算機。(請看釋例 1.)

(7) 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。

(8) 理解數線上的點坐標即為實數，而實數可以分成無理數與有理數，後者又可以分出整數與正整數。

(9) 理解整數與有理數在離散性與稠密性的差異，因為實數不全是有理數，所以有理數雖然稠密卻不能佈滿數線。

4. 教學斟酌

(1) 本條目通常實現在教科書的第一冊第一章，特別指出使用計算機，具有宣示的目的。

(2) 在數線上作圖時，不必拘泥於「尺規」限制，可使用直角板做垂線或平行線、可複製長度、可做一線段的均勻分割。

(3) 所有關於準至、約至、有效數字和有效位數的說法，都是為了溝通而約定的語言，它們本身並非數學領域的教學目標。本手冊對有效數字 (Significant Figures) 的約定，符合其他領域的習慣用法，應該不至於產生歧義。但是，數學領域所說的「有效位數」只是「有效數字的位數」的簡約說法而已，與自然科學和工程裡的專業術語有些差異，後者還須關切真值、估計值、與測量值的考量；例如，當 1000 表示 10^3 的數值，則 1000 的有效位數是 4，但是當 1000 表示 2^{10} 的數值，則 1000 的有效位數是 2。所以，數學教材應避免正式定義「有效位數」，更不要將它列為評量目標，將它作為教學與評量過程中的溝通語言即可。

(4) 在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效位數之觀念。若輸入之值含有概數，結論之有效位數當與之匹配。例如若取 π 之三位有效數字做計算(亦即把3.14當作 π，或者說「取 $\pi \approx 3.14$ 」) ，則答案仍以三位有效數字為宜。

(5) 使用計算機做出結果很大或很小的數，就自然會看到計算機顯示科學記號數字。各款計算機的顯示方式大同小異，應該都要看懂。在情境問題中，讓學生能夠將科學記號數字輸入計算機。

(6) 引導學生認識科學記號估計值與日常語言之間的關聯。例如以兩位有效數字表示台灣的人口，記作 2.3×10^7 或者 23,000,000 都可以，而讀作「兩千三百萬」。例如以兩位

有效數字表示 2^{32}，記作 4.3×10^{9} 或者 4,300,000,000 都可以，而讀作「四十三億」。

(7) 在應用情境中，若由手算，以使用二位或三位有效位數的數值為宜，若由計算機取概數，也不宜要求超過五位；除非有確切需求，不宜刻意提高有效位數。

(8) 數學教學與評量中，不必拘泥於有效位數的書寫規定。例如若要以四位有效數字表示 $\frac{1}{4}$，寫 0.25 和 0.2500 都可以；而若要以四位有效數字表示 $\frac{10000}{39999}$，雖然應該要寫 0.2500 才對，但是仍可以接受 0.25。

(9) 運用計算機，結合十分逼近法，讓學生能具體操作以小數逼近無理數（例如平方根）的過程，並在過程中建立誤差估算的觀念。

(10) 透過數線上點的前後關係，建立數的大小關係之對應，以認識三一律，並做為未來複數與平面向量不具備大小關係的基礎。

(11) 在缺乏參照時，諸如「結合律」、「交換律」等抽象性質，不容易產生意義。教師可等到不滿足交換律的運算出現時（例如空間向量的外積），再正式介紹這些性質。

條目範圍

1. 透過 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，讓學生認識反證法，但不列入大考的評量範圍。
2. 根式的化簡以雙重根式及分式的有理化為原則，詳見 A-10-1之說明。
3. 此處不用完備觀念探討無理數之「無窮小數」的存在性，所以也不用極限觀念處理無窮循環小數。
4. 本條目不含整數論，特別聲明不討論關於負整數的因數、倍數問題。
5. 不刻意探討給定的數字的有效位數問題。

釋例

1. 學習目標 6. 是指使用計算機的功能按鍵，直接輸入科學記號的係數與指數，就好像輸入一個整數或小數似的。某些機型的 EXP 按鍵提供此功能，例如輸入 6.4×10^{-23} 的按鍵次序可能是 [6] [•] [4] [EXP] [2] [3] [±]。科學記號數字是一個「數」，不是一個「算式」，不應該以輸入算式「6.4 乘以 10 的負 23 次方」的程序輸入一個科學記號數字。
2. 三一律的應用機會之一，是討論 $0.\overline{9}$ 與 1 的關係。若先承認 $0.\overline{9}$ 是一個實數（從它的小數形式來看），則若 $0.\overline{9}$ 不等於 1 就必定較大或較小。從這裡切入，或許可以帶領學生在概念上理解 $0.\overline{9}$ 與 1 的相等關係。
3. 雖然還沒講極限觀念，教師不必迴避無窮循環小數就是一個實數的事實。若先接受這個事實，則 $10\times0.\overline{9}=9+0.\overline{9}$ 之計算就是合法的。
4. 利用無窮循環小數的特徵，可輕易比較 $\frac{71}{100}$ 和 $\frac{70}{99}$（分子和分母各減一）的大小。

錯誤類型

因為沒有「完備性」的觀念，學生可能以為「稠密性」是實數的特徵，又或許認為稠密即「連續」。教師可引導學生認識有理數即具備稠密性，但它卻還有「縫隙」；這些縫隙可以被無理數填滿。

評量

1. 所有關於有效數字、有效位數、準至與約至的說法，都是為了溝通而約定的教學語言，在評量時可用於說明題意，不宜作為直接評量的對象。例如在一道應用題裡，敘述題幹之後，補一句類似「以公尺為單位，用兩位有效數字作答」這樣的規定就好了。
2. 未介紹極限概念，不宜以無窮等比級數討論 $0.\overline{9}=1$ 之類的問題。
3. 避免須刻意禁止使用計算機的評量題目，例如不宜禁止使用計算機而問「$\sqrt{3+\sqrt{17}}$ 在哪兩個連續整數之間」。
4. 以下兩種計算策略，所得的數值結果可能有異：(a) 計算過程中，全部以計算機之精度進行，最後依指令寫出概數；(b) 每一步皆取概數，以概數做下一步計算。評量之時，應該接受這類差異，或者以命題方法避免這類差異。務實的情況是，若以器算，則應採策略 (a)，而若筆算，則應採策略 (b)。

N-10-2 絕對值：絕對值方程式與不等式。 **備註：**絕對值不等式以 $\|x-a\|>b$ 和 $\|x-a\|<b$ 為原則，且連結 b 為誤差範圍之意涵，連結相關的商品或工程標示。搭配不等式的解，引進實數的區間符號，可包括區間的聯集以及 $\pm\infty$ 符號，僅限表達不等式的解區間，不做區間的集合運算。	n-V-4

先備：絕對值的意義；以 $|a-b|$ 表示數線上兩點 a, b 的距離（N-7-5），不等式的意義（A-7-7），在數線上標示一元一次不等式解的範圍（A-7-8）。

連結：誤差觀念（N-10-5）。

後續：向量的長度，三角不等式（G-11A-4），二次曲線的標準式（G-12甲-1），複數的絕對值及其幾何意涵（N-12甲-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

國中階段雖已介紹絕對值的意義及其符號，但僅作紀錄之用，並未涉及絕對值的運算，如以下觀念並不屬於國中課程範圍：

$$|a-b|=\begin{cases}a-b, \text{若 } a>b \\ b-a, \text{若 } a<b\end{cases}。$$

上述概念在 99 課綱為前置經驗，在本課綱則須視為新概念進行引導與概念建立，以便

進行絕對值方程式或不等式的教學。

2. 相關約定

(1) 以$[a,b]$、(a,b)、$[a,b)$、$(a,b]$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$、$[a,\infty)$、(a,∞)等區間符號以及聯集符號 $\cup$ 表示解區間；不一定在本條目全部用到。

(2) 所謂兩(實)數之差，就是大數減小數。用符號來寫，就把「a 與 b 之差」記作$|a-b|$。

3. 學習目標

(1) 能知道絕對值的具體概念為距離，在數線上或坐標平面上兩數相減的絕對值代表此兩數間的距離。

(2) 能透過判斷數字的大小關係，進行絕對值方程式與不等式成立與否的討論。

(3) 透過絕對值不等式求得的解，搭配在數線上所呈現的區域，介紹區間符號，並能以區間符號表示絕對值不等式的解。可包括區間的聯集以及 $\pm\infty$ 符號。

(4) 能理解絕對值方程式與絕對值不等式在數線上所代表的距離關係，並透過此距離關係求出所有的解，同時也能將所有可能的解表現在數線上。

(5) 能將不等式$|x-a|<b$與誤差範圍的意義相連結，並能用此形式的不等式表達誤差範圍。

4. 教學斟酌

(1) 本條目通常出現在教科書的第一冊第一章，學生尚未學習到絕對值函數圖形，不應出現以函數圖形方式求解的問題與學習內容。

(2) 講解絕對值不等式時，應同時採用代數討論及幾何概念兩種方式。使用代數解法時，若使用兩邊平方去絕對值方式，應提醒學生$0<a<b$時，$0<a^2<b^2$，反之則不成立的概念，在設計問題時，不應出現平方後為 x 的二次不等式。

(3) 進行討論範圍去絕對值的過程中，應強化以下兩種觀念：

- 對於前提條件及原不等式解需取交集。
- 對於分段討論取不同範圍所求得的解，彼此間則需取聯集。

(4) 可設計聯立的絕對值不等式，但僅以兩個不等式為限。

條目範圍

1. 不含兩層或更多層的絕對值方程式或不等式，例如不含$\big||x-2|-2\big|\le 3$之解。
2. 不含絕對值函數圖形及其相關解個數的問題。
3. 不含三角不等式，此課題推遲到 11 年級的 A 類課程。
4. 區間符號僅作記錄之用，不含任何集合運算。同理，$\pm\infty$ 也僅用作「無界」區間之記號，不討論其運算性質。

釋例

1. 某果汁飲料中，含糖比例為$30\%\pm 5\%$，代表 $|\text{實際糖份比}-30\%|\le 5\%$。

2. 可利用$|x-2|=3$，在數線上的解為$x=-1$或$x=5$，建立學生以2為中心，找出距離為3的兩個位置，即為$x=-1$或$x=5$。接著再利用此題，請學生思考，當絕對值方程式之解為$x=-1$或$x=5$時，其絕對值方程式應為$|x-2|=3$，以強化學生對於絕對值以數線上距離概念思考的連結。

錯誤類型

1. $2|x+2|+|x-3|<5$，需分三段進行討論，忽略拆絕對值時的前提條件，而求得錯誤答案。
2. $|x-2|>x$，僅能分段討論，不能使用兩邊同時平方的解法。

評量

1. 分式型絕對值不等式如：解不等式$\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\le 2$，不宜作為本條目之評量問題。
2. 絕對值方程式或不等式之討論以一次為原則，例如：解不等式$|x^2-3x|+4x-6\ge 0$，不宜作為本條目之評量問題。
3. 不宜出現需使用三角不等式解絕對值方程式概念的問題。如：解$|x-5|+|2x+3|=|3x-2|$。
4. 不宜出現由多個絕對值所組成之函數求極值問題。如：求$|x+3|+|x+2|+|x-1|+|x-7|$的最小值。

N-10-3 指數：非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的x^y鍵。	n-V-1

先備：正整數指數律（N-7-7）。

連結：科學記號數字（N-10-1），對數（N-10-4)。

後續：指數函數（F-11A-4, F-11B-2）。

基本說明

1. 與99課綱的差異
   (1) 99課綱實施的時候，國中階段之課綱內容雖然不包含負整數的次方，卻常因為教學時操作科學記號的四則運算時，誤會而加入負整數的次方，造成學生負擔。本課綱則明確規範國中階段僅含一般底數的非負整數次方，只在科學記號出現10的負整數次方，但不作科學記號的四則運算。因此，本條目須包含負整數次方的教學。
   (2) 99課綱用單項函數$x^n=a$之正根定義$a^{1/n}$，其中$a>0$，本條目意欲由計算的意義而直接定義正數的n次方根$a^{1/n}$，不經過單項函數的圖形與求根的過程（參閱教學斟酌）。99課綱無計算機相關內容。
2. 相關約定
   (1) 不討論負數的n次方根，不討論負數的非整數次方。

(2) 分數指數可以寫成橫列的形式，例如 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{1/2}$ 。

(3) 在求 $f(x)=b$ 之近似解的情境中，「取最近整數」或「約至整數」: x 是使得 $f(x)$ 與 b 誤差最小的整數；當此數不唯一時，依情境做個案處理。例如求 $(1.01)^x=2$ 之最近整數解，$1.01^{69}=1.9868\ldots$，誤差超過 0.01，而 $1.01^{70}=2.0067\ldots$，誤差不到 0.01，用計算機實驗觀察其他整數 x 造成的誤差更大，所以 $(1.01)^x=2$ 的最近整數解是 $x\approx 70$ 。

3. 學習目標

(1) 複習指數為非負整數的指數律，並由此推導出負整數指數、有理數指數的合理定義，推廣整數的指數律到分數與有限小數。

(2) 用計算機求得 x^y 的數值，並理解它「通常」應為無理數，而計算機的結果是近似值。

(3) 能解讀計算機顯示很大或很小的 x^y 計算結果，例如 3^{200} ，並報讀或記錄為指定有效位數的科學記號數字。也要能夠從計算機顯示的結果，判斷 x^y 超出了它的處理能力，例如 2^{1025} 和 2^{-1075} 。

(4) 知道無理數指數也符合指數律，亦即指數律對所有實數皆成立（但非整數指數僅作用在正數上）。

(5) 能用計算機的 x^y 功能，探索形如 $(1.01)^x=2$ 之方程式的近似解。

(6) 介紹算術平均數與幾何平均數的概念及定義，透過代數及幾何方式進行算幾不等式證明，並應強調等號成立的條件。

4. 教學斟酌

(1) 有理數次方有兩種定義的方法。其一是，先定義「非負實數 a 的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 是指滿足 $b^n=a$ 的非負實數 b」，然後定義「非負實數 a 的 m/n 次方 $a^{m/n}$ 定義為 $\sqrt[n]{a^m}$ 」。也可以定義「非負實數 a 的 m/n 次方 $a^{m/n}$ 是指滿足 $b^n=a^m$ 的非負實數 b」，然後定義「非負實數 a 的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 定義為 $a^{1/n}$ 」。但還是要正式定義，手算例子，必要時作十分逼近法，最後才用計算機。計算機不要拿來代替定義。

(2) 不必透過函數，直接用數的概念定義「非負實數 a 的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 是指滿足 $b^n=a$ 的非負實數 b」。舉例說明其存在唯一性之後，若有必要可操作十分逼近法。瞭解定義之後才適合用計算機、快速得到答案。計算機是用來協助計算，這包括快速計算可以協助數學實驗，但不可取代定義。

(3) 無理數指數（例如 $2^{\sqrt{3}}$ ）也是有意義的，但是因為牽涉極限觀念，在高中階段無法真正講清楚，所以宣稱它「存在」即可。實際計算時，計算機可以協助算出 $2^{\sqrt{3}}$ 的近似值，所以 $2^{\sqrt{3}}$ 的存在性是一個概念性的問題，沒有計算上的困難。因此，建議不必主動教導這個理論的細節。當學生有疑問或者有能力理解時，教師可以用逼近無理數之有效位數越來越多的有限小數來闡述其意義（例如 2, $2^{1.7}$, $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, ... 越來越靠近某個固

定的數，那個數就定義為 $2^{\sqrt{3}}$ ）。

無理數指數之所以難以解釋的根本原因，是它不再能使用「連乘」的意義來說明。前段建議之解釋方法，涉及極限概念或者連續概念，皆不宜以嚴格的理論形式教學。建議善用計算機，以具體的數值展現「逼近」的現象。事實上，如果教師並不在此條目範圍內針對無理數指數設計評量問題，則學生暫時沒有理解無理數指數的迫切性，只要接受其存在，能依指數律操作其運算，並且能用計算機操作其近似值即可。

(4) 不討論 0^0。只要避免評量 0^0 即可，不必刻意說它不存在或無定義。因為計算機的普及，學生可能會發現科技工具顯示 0^0 是 1（也可能出現錯誤訊息），數學教師如果遇到這種疑問，可以說這是一個具有某種方便性的規定，將來若是學習到不定形式的極限，才能全面地了解它。

條目範圍

本條目僅止於指數符號的認識與了解，再搭配計算機的 x^y 鍵，讓學生了解 $2^{2/3}$ 、$2^{3.14}$ 類型之實數指數的意義與近似值，讓學生更確切地感受指數的大小。有關指數函數或指數代數型式的操作，皆不屬於此條目。

釋例

1. 透過生活中、故事裡或寓言式的例子，讓學生感受指數的成長或衰退。例如：將一張厚度 0.01 公分且足夠大的紙，對摺 10 次的厚度為幾公分？如果能夠一直對摺，幾次以後會比 101 大樓還高？
2. 一個著名的「勵志」故事是說：每天進步 1%，將來就會進步一倍（成為現在的兩倍）。多久之後會達標呢？這就是「學習目標」(5) 的問題動機：$(1.01)^x = 2$。這種問題不需要使用對數律來解決，更不需要使用「以 1.01 為底的對數」。在學習等比級數之相關應用時（N-10-6），也可能會發生 $a^x = b$ 形式的方程，可用同樣的方法求近似解。

錯誤類型

1. 因為 $(-2)^3 = -8$，學生容易認定 $\sqrt[3]{-8} = -2$，然而在高中數學範疇內，不討論負數的非整數次方。教師倒不必說它們無意義或未定義，只要不刻意討論它，也不要考它，就行了。
2. 非整數指數僅在底數為正數時才有意義，例如，雖然 -2 是 $x^3 = -8$ 的一個解，但是 $\sqrt[3]{-8}$ 並不是 -2，而且 $\left((-2)^{1/2}\right)^2 = -2$ 並不正確。
3. 透過計算機的操作是一種估算且會有誤差。例如理論上 $\left(10^{0.1}\right)^{10} = 10^1$，在某些計算機上，輸入 $10^{0.1}$ 在螢幕上看到 1.2589254118，如果接著做它的 10 次方，會還原到 10，但是若自行輸入 $(1.2589254118)^{10}$ 卻會得到 10.0000000005。產生這種令人困惑現象的原因，是計算機顯示出來的數值，只是實際計算結果的一部份，而連續的指令採用了機器內部較精確的值，又因為螢幕呈現的是經過四捨五入的結果，所以有時候會恰好獲得數學上真確的

值。但是，原則上，計算機的誤差是難以避免的，參閱條目 N-10-5。此處應該強調有效位數的選取，進而決定只需要選擇估算的位數。並讓學生了解任一數的小數或分數次方「通常」不是一個有限小數。

4. 算幾不等式的誤用。例如：已知 a,b 是正實數，若 $3a+2b=15$，求 ab 的最大值。學生誤解：因為 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 等號成立的條件為 $a=b$，又 $3a+2b=15$ 代入 $a=b$ 解出來 $a=3$，所以 ab 的最大值為 $3\times3=9$。

評量

1. 無理數的證明不宜列入大考範圍，例如不宜「證明 $\sqrt[3]{4}$ 是無理數」及「已知 $\sqrt{2}$ 為無理數，證明 $3+\sqrt{2}$ 為無理數」。
2. 未證明 $\sqrt[3]{2}$ 無法尺規作圖，不宜出現對一般的正數 a 與 $n\geq2$，判斷 $\sqrt[n]{a}$ 是否可以尺規作圖之問題。
3. 不應出現涉及負數之方根，或負數之非整數次方的問題。
4. 不使用對數律來幫助計算，若涉及指數方程式，僅限依情境而導出 $a^x=b$ 且 $0<a\neq1$ 的情況。此種方程式，若不是有明顯的整數解，就應該使用計算機來估計其解。
5. 此節以認識實數指數符號為原則，過多的代數操作不適宜作為此節的命題內容，例如：若 $a>0$，且 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$，求 $a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}$_____為不宜的題目。
6. 不過度針對無理數指數做評量。避免評量 0^0。
7. 有關指數函數性質的試題，皆不為此節的評量範圍，應避免。

   例：$x,y,z\in\mathbb{R}$，$xyz\neq0$，已知 $3^x=5^y=15^z$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$ 之值。
8. 算幾不等式的相關應用例題僅限於兩個變數。例如：若 $a+b=15$ 求 a^2b 之最大值的題型不適宜作為考題。
9. 不宜在這裡出現根式的代數運算問題，應強調計算機處理小數或分數次方所得結果與目標數值的誤差。

   例：$\frac{1}{a^5}\times(a^{\frac{1}{2}})^4\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}\times(a^3)^2}$。

N-10-4 常用對數：log 的意義，常用對數與科學記號連結，使用計算機的 10^x 鍵和 log 鍵。 **備註：**透過操作而加強認識任意正數 a 皆可以改寫成 $10^{\log a}$。不談其他底的對數。	n-V-1

先備：概數（N-4-4），指數律（N-7-7），科學記號（N-7-8 與 N-10-1）。

連結：指數（N-10-2），有效位數（N-10-1），數值計算的誤差（N-10-5），等比級數與求和

公式（N-10-6）。

後續：對數律（A-11A-4），指數函數與對數函數（F-11A-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

(1) 在 99 課綱的脈絡裡，教材習慣從一般底指數函數 $y=a^x$ 的圖形導入一般底的對數(其中 $0<a\neq 1$)，本條目將常用對數放在認識實數的概念層次上，不需要指數函數與函數圖形之較高概念層次，也不會擴展到一般底的對數。

(2) 承上，99 課綱的教材安排，需先知道一般實數的次方運算 a^x ，其中 a 為非負實數，才能討論指數函數的圖形。本課綱在這一點上與 99 課綱相同，但不同之處在於：一、在「指數」學習內容（N-10-3）理解實數次方的意義之後，運用計算機獲得觀察計算結果的學習經驗；二、不必立即發展到指數函數的概念層次。本條目在理解實數次方的前提下，考慮特殊的 10 的次方，並在任一正數 a 總是 10 的某次方的概念穩固之後，習得數學將該次方記作 $\log a$ 。

(3) 本條目將常用對數 log 當作一種紀錄和表達數值的記號：$\log a$ 的意思是使得 10 的某次方等於 a 的那個指數，並不進行 log 的代數操作。可以說本課綱將對數的學習分成兩階段，本條目讓 log 先以記號與計算的意義出現，讓學生有機會在具體情境中使用它，然後在十一年級才進入代數性質（對數律）和變化與關係（對數函數）的層次，並引入一般底之對數。

2. 相關約定

(1) 對任意正數 x， $\log x$ 稱為 x 的對數。

(2) 在求 $f(x)=b$ 之近似解的情境中，「取四位最近小數」或「約至四位小數」或「約至小數點下第四位」的意思是：x 是使得 $f(x)$ 與 b 誤差最小的四位小數；當此數不唯一時，依情境做個案處理。例如求解 $10^x=3$ 時， $10^{0.4771}=2.99985\ldots$，誤差不到 0.0003，而 $10^{0.4772}=3.00054\ldots$，誤差超過 0.0004，用計算機實驗觀察其他四位小數造成的誤差更大，所以 $10^x=3$ 約至四位小數的解是 $x\approx 0.4771$ 。

3. 學習目標

(1) 理解計算機的 10^x 功能是 x^y 的特殊化，明白此特殊化的緣由是我們使用「十進制」計數系統，並能用計算機，以十分逼近法估計形如 $10^x=5$ 的近似解（譬如取二位最近小數的近似解）。

(2) 知道正實數 a 的常用對數 $\log a$ 是指滿足 $10^b=a$ 的實數 b，因此而理解 $\log a$ 的意義就是任意正數 a 都可以改寫成 $10^{\log a}$ 。能用 log 符號紀錄或表達數值。

(3) 當一大於 1 的正數 a 之科學記號為 $c\times 10^n$ 時，理解 n 就是 $\log a$ 的整數部分，而 c 表示 10^d 或其近似值，其中 d 是 $\log a$ 的小數部分；呼應 $1\le c<10$ 的規定。

4. 教學斟酌

(1) 建議一種啟發式（heuristic）的思維，作為「為什麼要探究 10 的次方」的動機，供老師們參考。已經學會 x^y 的運算之後，因為我們使用「十進制」而特別常用 10 的次方，例如科學記號數字就有 10 的次方，也可以從計算機上有 10^x 按鍵獲得證實。我們已經從指數律知道 $10^0=1$、$10^1=10$，而且知道 $10^{0.5}=\sqrt{10}\approx 3.14$（其實 $\sqrt{10}=3.16\ldots$，但古埃及人使用 10 的平方根當作圓周率的估計值，這個故事讓人比較容易記得 $\sqrt{10}\approx 3.14$），顯然 $10^{0.5}$ 不是「10 的一半」也不是「從 1 到 10 的一半」。那麼，有沒有一個實數 b 能使得 10^b 是「10 的一半」或者「從 1 到 10 的一半」呢？（這是「學習目標」(1) 以求 $10^x=5$ 之近似解為例的原因。）

(2) 經過類似前述的啟發之後，可透過計算 10 的 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8、0.9 次方實驗，發現遞增的規律，再多做一些探究之後，獲得 10 的次方「的確」可以等於 1 到 10 之間的每一個數（例如整數 2、3、4、5、6、7、8、9），然後才適合「告知」確實每個正數都是 10 的某次方；因此，定義正實數 a 的常用對數 $\log a$ 是指滿足 $10^b=a$ 的實數 b，才是有意義的。

(3) 承上，定義了常用對數 log 之後，建議先以十分逼近法的實際操作經驗，讓學生熟悉 $2=10^{0.3010\ldots}$，亦即 $\log 2=0.3010\ldots$ 之類的近似值表達方式，然後說明正確的記號為 $\log 2\approx 0.3010$。最後，才說計算機提供 log 按鍵，使我們不必每次都麻煩地使用十分逼近法來找 $\log a$ 的近似值。

(4) 建議一種類比式（analogous）的思維，幫助學生穩固常用對數觀念，供老師們參考。我們在國中時，已經明白：每一個正數都是某數的平方，現在進入高中，我們也明白了：每一個正數都是 10 的某次方。

(5) 在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效位數之觀念。若輸入之值含有概數，結論之有效位數當與之匹配。例如若取 $\log 3$ 之四位有效數字做計算（亦即把 0.4771 當作 $\log 3$，或者說「取 $\log 3\approx 0.4771$」），則答案仍以四位有效數字為宜。

(6) 若 $10^a=10^b$ 則可以推論 $a=b$；此事實隱含一個前提，即 10^x 是一對一函數，但是只要學生依照計算的經驗接受上述事實，教師可以不多做闡述。在學生能夠理解的條件下，可提醒學生這類關係未必成立，例如 $a^2=b^2$ 不能推論 $a=b$。

條目範圍

1. 僅介紹以 10 為底的常用對數符號，不講其他底數也沒有換底公式。

2. 不介紹對數函數，所以不宜介紹遞增遞減性質及內插法。

3. 本條目不含「log 2 為無理數」的證明。

4. 含指數或對數的方程式或不等式，應在高二學習對數函數後再學習。

釋例

1. 不使用計算機，判斷 $10^{1.01}$、$10^{0.4771}$ 分別最接近哪一個整數，並說明理由。（$10^{1.01}$ 接近 $10^1=10$，$10^{0.4771}$ 接近 $10^{0.5}=\sqrt{10}$ 接近 3。）
2. 不使用計算機，判斷 $\log 34567$ 介於哪兩個整數之間，並說明理由。（$10^{\log 34567}=3.4567\times 10^4=10^{4.\cdots}$，所以介於 4 和 5 之間。）
3. 待學生對 10 的冪次表示法熟練後，可以與化學科連結，計算 pH 值；例如將 pH 值 3 與 pH 值 4 的溶液等體積混合之後，pH 值會是 3.5 嗎？

錯誤類型

以 log 定義的度量，關心的是 10 的冪次，例如地震的級數、酸鹼度、聲音的響度等。在這些度量裡，級數 1 並不是級數 2 的一半，兩種級數的「平均」也不是算術平均數。

評量

1. 不使用首數與尾數的名詞，應以科學記號的表達法來理解一個數為幾位數。
2. 關於計算數值解的「取至」和「約至」的說法，都是為了溝通而約定的共同語言，在評量時可用於說明題意，但不宜作為直接評量的對象。
3. 不介紹對數函數，因此應避免使用遞增遞減性質來比較數值的大小，如「比較 $\log\sqrt{2}$、$\log 3$ 與 $\log\pi$ 的大小」為此階段學習不宜出現的評量試題。

N-10-5 數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。★#	n-V-2

連結：所有使用計算機求值或求解的情形。

基本說明

1. 與99課綱的差異

   以前不在課綱裡放置計算機相關內容，所以沒有討論誤差的必要性，這是新的課題。此外，以前的高中課綱都類似教材章節的大綱，所以也沒有這類「不設置獨立教學單元，融入適當課題，在合理的脈絡中教授」的綱要條目。
2. 相關約定

   (1) 所謂「誤差」就是指「絕對誤差」，亦即估計值與理論值之差。

   (2) 在課綱文件裡「計算機」有時也稱為「計算器」，意指英文的 calculator，並非 computer；後者稱為「電腦」。
3. 學習目標

   (1) 能理解計算機的「有限性」可以做以下類比：一律採用係數部分限定為三位數，且指數部分限定在 ±9 之間的科學記號數字做計算（除了 0 以外），但是在宣告答案時必須

將係數的最後一位四捨五入，給出兩位有效數字的結果。如此限制所產生的誤差，本質上就是計算機的有限性誤差。計算機硬體的擴充可以提高係數的有效位數與指數的範圍，使得計算結果顯示較多的數字，但是永遠無法克服其有限性。所以，計算機產生的結果（幾乎）必有誤差。

(2) 能察覺計算結果可能是一個循環小數，例如1.66666667可能是$1.\overline{6}$，但是不論它是或不是$\frac{10}{6}$，都只能由數學來論證而不能從數值判斷。不論如何，在適當的誤差範圍內，可以用分數$\frac{10}{6}$來代替計算機產生的數值1.66666667。

(3) 能理解當有理數的小數循環節太長，就無法從計算結果讀出循環小數。

(4) 能測試一部計算機的表現是「取到」還是「準到」最後一位有效數字，亦即是否在其下一位做過四捨五入；例如可以用$\frac{1}{6}$的小數做此測試。

(5) 能理解科學記號指數部分的有限性造成「溢位」(overflow) 和「歸零」(underflow) 的現象。

(6) 能根據科學記號數字相加（減）的算則，理解係數部分的有限性會導致小數消失的現象。

4. 教學斟酌

(1) 本條目為處理操作計算器時可能面臨的實際狀況，可趁機協助學生建立數位素養，但是並不是數學本身的學習目標。所以，本條目不宜列入數學本身的評量。

(2) 本條目的內容不宜集中在一堂課或一個單元裡教授，宜伴隨著學生操作計算機的經驗以及課程對計算機的需求，在適當的時機逐步教授。

(3) 把計算機當作數學實驗的工具，在數學理論未及說明計算機的功能時，可以把它的結果當作客觀存在的事實，並進行類似自然領域的「探究與實作」之學習活動。例如，使用計算機做實驗發現10^x會還原 log 的計算結果，反之亦然，的確是一種探索活動。但是數學知識的特徵與價值，畢竟是定義、定理 (公式)、應用的演繹思維方法，並不是從觀察而歸納成為知識。探究活動在數學教育中的價值，可能包括引起動機、獲得具體經驗（有感）等，但是它不宜用來歸納為知識，也不宜用來取代定義。例如學生從以上活動獲得啟發之後，教學方法之一是說明計算機的 log 按鍵實現了數學的「常用對數」，而轉入常用對數的數學教學。

(4) 如果學生發現溢位和歸零的指數並「不對稱」: 即使10^N發生溢位，10^{-N}未必歸零，那是因為計算機採取了一種例外措施。當計算機裡的科學記號指數部分已經達到最小值的時候，係數部分就採取例外措施，容許它小於 0。教師可指出方向，讓學生自行探索。使用計算機之後，讓部分的數學變成像自然科學一樣，有了觀察的對象。不妨讓學生去觀察。但計算機是人造的，並非自然現象，所以應有此信念：計算機表現的現

象，必然有確定性的數學原因。

(5) 前面（N-10-3）提過：計算機顯示出來的數值，只是實際計算結果的一部份。可以做類似以下的實驗：輸入 $10^{0.1}$ 在螢幕上看到 1.25892541179，接著輸入 –1.25892541179 就會看到 4.1673331e-12，表示實際計算的結果，在顯示出來的 11 位小數之後，還有 8 位數值。（此實驗是作者在 2018 年 10 月使用 64 bit 版本的 Chrome version 69 之虛擬計算機所得的結果，在其他計算機上重複此實驗，數值可能略有差異。）

(6) 如果學生發現溢位產生的 Inf 還可以繼續做計算，將會發現它具備一些特殊的計算性質。這些性質跟 ∞ 的運算性質吻合，學生並不會因此被誤導。如前述，不妨讓學生去觀察並歸納。當有人發現 $0\times\infty$ 或者 $\infty-\infty$ 的結果不再是數值或 Inf 的時候，教師可以引導學生認識這方面的數學，有可能啟發學生的好奇心（這並非本條目的教學目標）。如果計算機顯示 NaN，那是 Not a Number 的縮寫。請注意，這些現象並非有限性所造成的誤差。

(7) 類似於前款，如果計算機對於算式 $1\div0$ 、$0\div0$ 、0^0 產生了某種結果，而不是錯誤訊息（例如 $1\div0$ 顯示 Inf，$0\div0$ 顯示 NaN，0^0 顯示1），學生可能難以理解，教師不妨告知「這是計算機工業制訂的標準」。這是補充，有必要時才說，並非本條目的教學目標。

條目範圍

1. 本條目僅涉及計算機的有限性所造成不吻合數學理論的狀況，不討論演算法造成的穩定性或收斂性課題。
2. 本條目不含誤差的傳播或擴散現象，也不要延伸到任何誤差分析的課題。

錯誤類型

1. 當計算結果顯示 9.999999999×10^{-7}，學生照實抄錄下來，或者直接認定它就是 10^{-6}，都不正確。如果指定以三位有效位數作答，則可以回答 10^{-6}，否則應該懷疑它是 10^{-6}，並設法以數學方法論述之。
2. 雖然 $\frac{1}{19}$ 應該是循環小數，但是它的循環節有18位數（052631578947368421），$\frac{1}{29}$ 更長達28位，超出大多數計算機的顯示位數，所以因為計算機的有限性而無法顯示循環節，學生可能誤以為它不是循環小數。並非所有單位分數的循環節長度都接近分母，例如 $\frac{1}{27}$ 的循環節只有3位。
3. 如果一個數的絕對值太大，超過了計算機所能處理的上限，可能會產生錯誤訊息，也可能顯示 Inf 或 – Inf，它是 infinite（無窮）的縮寫，但那並不是數學符號 ∞ 的同義符號。相對的，如果一個數的絕對值太小，就會歸零，可能會顯示 0 或 –0。
4. 因為計算機內有效位數的限制，1 加很小的正數（但不至於小到歸零）結果卻仍可能等於 1。使得 $1+\grave{o}>1$ 成立的最小正數 $\grave{o}$，稱為此計算機的「機器精度」(machine epsilon)。

評量

1. 本條目不宜作為直接評量的對象。
2. 在數學課裡使用計算機是為了輔助數學的學習，不應刻意評量計算機產生誤差的原因，也不應利用計算機的誤差而設計評量的誘答方向。
3. 不應要求學生僅根據小數數值而猜測其整數或分數的值。

N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。 **備註：**遞迴關係以一階為主，連結國中的等差數列和等比數列。數學歸納法應先透過觀察發現規律，然後用以證明；將數學歸納法的範例與應用，融入後續的課程，不必在此過度練習。可連結常用對數而求解 $a^x = b$ 之近似值。	n-V-5

先備：已認識常見的數列（等差、等比）及其規律性（包括圖形的規律性），並能由給定條件求其一般項（N-8-3、N-8-4、N-8-6）、能利用等差級數求和公式解決生活中相關的問題（N-8-5）。

連結：利用求和公式處理一維數據及二維數據的相關統計量（D-10-2）。

後續：做為學習無窮數列與級數的基礎（N-12甲-1、N-12甲-2、N-12乙-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
   (1) 國中階段已介紹從等比數列的首項、公比求一般項，但並未涉及其逆向命題。不同於 99 課綱是在高中階段才正式介紹等比數列，此處可將國中的學習經驗作為出發點，並引導學生做逆向問題之思考。
   (2) 99 課綱在此條目有介紹∑符號及其相關性質，本條目則是不介紹∑符號及其相關性質，僅透過條列方式，讓學生具體熟悉與練習有限項級數和的運算及處理方法。
2. 學習目標
   (1) 能觀察並具體操作具有規律的數列或圖形，並寫出其遞迴關係式及一般項。
   (2) 能由所給定的條件求出等比數列或等比級數的一般項及項數。
   (3) 能利用遞迴關係式推導出常用求和公式。
   (4) 能了解數學歸納法中所蘊含的遞迴關係，並加以運用作為證明的方法。
3. 教學斟酌
   (1) 數列或圖形規律應強調其遞迴關係的建立與連結，若能同時具有與項數或圖形特徵的相關性，會更能協助學生學習此觀念。
   (2) 應介紹等比級數求和公式之推導過程，但不宜將此處理方法延伸至循環小數轉換為分

數的問題，因為此處涉及無窮級數與極限的概念，所以在教學設計上勿做過度的延伸。

(3) 可透過學生熟悉的等差數列及等比數列一般項，帶出以累加法及累乘法處理具有遞迴關係的數列一般項，再進一步引入其他的遞迴關係式求一般項的問題。此處的遞迴關係式若能搭配圖形或數列規律，引導學生先進行歸納、臆測，最後再以代數運算進行推論的驗證，可以讓學生完整體驗數學思考的歷程。同時也要引導學生思考，觀察有限項所做的臆測，不見得正確，需經過驗證的過程才能確認其正確性，此處可選擇適當的例子做為說明。

(4) 由遞迴關係式推演出一般式的問題以一階為限，但若僅止於遞迴關係式的觀察，則不受此限。(如：費氏數列)

(5) 可透過代數運算或圖形規律的設計，引導學生進行常用求和公式的推導，僅限於 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 、$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 及 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ，不宜過度延伸其他的級數求和問題。

(6) 數學歸納法的引入是以做為遞迴關係的應用為出發點，因此有關數學歸納法的學習素材選擇，應同時兼顧遞迴關係式及一般式，並應引導學生進行歸納、臆測、驗證，讓學生完整體驗數學思考的歷程。

條目範圍

1. 學生尚未有無窮級數及極限的概念，不宜出現循環小數化為分數的問題。
2. 數學歸納法強調為遞迴關係的應用，此處不宜出現不等式型的數學歸納法問題。
3. 數學歸納法以第一型為限，不宜出現第二型數學歸納法的問題。
4. 本條目不使用 $\sum_{k=n}^{m}$ 表示足標 k 從 n 迭代到 m 的連加，請盡量在具體情境下使用「...」或者輔以文字註解，代替以上符號。因此，涉及 $\sum$ 相關運算性質的問題，不宜在此處出現。

N-10-7 邏輯：認識命題及其否定，兩命題的或、且、推論關係，充分、必要、充要條件。★#	n-V-6

先備：畢氏定理以及平面幾何的推理。

連結：$\sqrt{2}$ 是無理數的證明，各單元中的性質、定理敘述與證明。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱在附錄中介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法等邏輯課題。本課綱雖移入課文中，但不另立章節，搭配課程正常進度中的數學命題說明這些概念，並隨時予

以連結和印證。

2. 相關約定

(1) 原則上，在數學課程中只討論數學命題，亦即可以用數學知識判斷真偽的直述句。

(2) 若 P 表示一個命題，符號「$\neg$P」代表 P 的否定，又稱為非 P。

(3) 「且」和「或」用文字描述，不用符號。

(4) 符號「$P \Rightarrow Q$」代表若 P 則 Q。當「$P \Rightarrow Q$」成立時，稱 P 為 Q 的充分條件，Q 為 P 的必要條件。

(5) 以符號「$P \Leftrightarrow Q$」表示「$P \Rightarrow Q$」且「$Q \Rightarrow P$」，此時稱 P、Q 互為充要條件。

(6) 當 P 和 Q 兩個命題同時為真且同時為偽時，稱它們等價；若要使用符號，建議 $P \equiv Q$。

3. 學習目標

(1) 認識、理解並能操作數學命題的否定命題。例如 $x > 0$ 的否定為 $x \le 0$，正整數 n 為質數的否定為 $n = 1$ 或是合數，$\sqrt{2}$ 為無理數的否定是 $\sqrt{2}$ 為有理數。

(2) 理解「或」和「且」的意義，並能有效溝通。例如 $|x-1| \le 1$ 的解區間和 $|x-1| > 1$ 的解區間分別該用「且」還是「或」來描述？（此處可以順便再講解一次：符號 $-1 \le x \le 1$ 的意義是 $x \ge -1$ 且 $x \le 1$，應該讀作「x 大於或等於負 1 且小於或等於 1」。）

(3) 理解並能操作用「或」或「且」連接的複合命題之否命題。例如前項之兩個解區間互為否命題。

(4) 理解「充分」、「必要」、「充要」條件的意義，並能有效溝通。例如「ΔABC 是直角三角形」是「ΔABC 之三邊長滿足 $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$」的哪一種條件？「$\angle$A 為銳角」是「$\sin A > 0$」的哪一種條件？

(5) 理解「反例」的意義，並能用以判斷命題之偽。例如「$x^2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$」之偽。

(6) 理解「等價」的意義，並理解數學定義皆為等價的意涵。例如正整數 n 為偶數等價於存在整數 k 使得 $n = 2k$，$\sqrt{2}$ 為有理數的假設等價於存在正整數 n、m 使得 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$。

(7) 理解 $P \Rightarrow Q$ 與其對偶命題 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 等價，並能應用此等價關係。例如若平面上的曲線沒有對稱軸，則它不是二次函數的圖形。

(8) 理解 $P \Rightarrow Q$ 與其逆命題 $Q \Rightarrow P$ 不等價，例如「若實數 $x > 0$ 且 $y > 0$ 則 $xy > 0$」正確但是其逆命題錯誤。認識充分但不必要的條件，如前例。

(9) 理解 $P \Rightarrow Q$ 與其否逆命題 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ 不等價，如前項的例子。

(10) 從 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，認識反證法：若一命題 $\neg P$ 導致矛盾，則 $\neg P$ 為偽而 P 為真；所謂矛盾的意思是，可推論某命題 Q 與 $\neg Q$ 同時為真。

4. 教學斟酌

(1) 避免使用自然語言的敘述作為邏輯的例證。因為自然語言（特別是中文）有很多模稜

兩可或者「歧義」的可能，而且自然語言的陳述跟環境有關，其前提隱諱不明，所以，拿它們當作邏輯的例子，經常造成麻煩，反而讓師生進退維谷無所適從。適當的作法，就是在數學課裡，數學老師專注於「數學命題」的邏輯就好了。至於學生是否將邏輯應用到「生活」和「言談」中，可由其他領域的教育來補充。

(2) 邏輯概念搭配數學課程之學習內容中需要的數學定義、定理、性質、條件來學習，第一次出現的概念為介紹，爾後遇到的同樣概念則為增強其理解。不要另立主題，也不針對邏輯而評量。

(3) 複合命題「P 且 Q」、「P 或 Q」的否定命題，可與集合中的笛摩根定律一併教學。

條目範圍

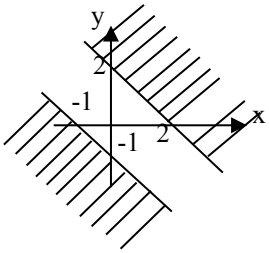
不衍生形式性邏輯運算，不含真值表。

釋例

1. 學生較難理解複合命題「P 且 Q」、「P 或 Q」的否定命題，搭配易懂的數學概念陳述。例如「$a=0$ 或 $b=0$」的否定敘述為 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，學生對於「或」、「且」的概念模糊，可試著讓學生理解題目等同於「$ab=0$」的否定敘述「$ab\neq 0$」，再轉為 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$。
2. 以實例說明「$P\Rightarrow Q$」成立時，「$Q\Rightarrow P$」不一定會成立；以及「$\neg P\Rightarrow \neg Q$」、「$\neg Q\Rightarrow \neg P$」這兩者的區別。例如：「若 $x>0$，則 $y>0$」成立時，則可以推出下列哪一個敘述亦成立？
   (A) 若 $x\leq 0$，則 $y\leq 0$
   (B) 若 $y\leq 0$，則 $x\leq 0$
   (C) 若 $y>0$，則 $x>0$
   (D) 若 $x>1$，則 $y>0$
   (E) 若 $y<0$，則 $x\leq 0$」。
3. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。一、國文成績或英文成績 70 分 (含) 以上；二、數學成績及格。已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論正確？
   (A) 小文的英文成績未達 70 分
   (B) 小文的數學成績不及格
   (C) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
   (D) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
   (E) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

錯誤類型

1. 學生不能了解「$\mathrm{P}\Rightarrow\mathrm{Q}$ 」成立時，「$\mathrm{Q}\Rightarrow\mathrm{P}$ 」不一定會成立的觀念；以及「$\neg\mathrm{P}\Rightarrow\neg\mathrm{Q}$ 」「$\neg\mathrm{Q}\Rightarrow\neg\mathrm{P}$ 」這兩者的區別。
2. 「或」、「且」概念搭配圖形，難度增加。例如：
   右方不等式圖形，小安說其對應式子為 $(x+y-2)(x+y+1)\geq 0$，小花說是「$x+y\geq 2$ 且 $x+y\leq -1$」，判斷兩人的對錯。



評量

1. 此條目不單獨評量。每一數學學習單元都會有邏輯概念，搭配學習內容做邏輯的培訓即可，不刻意單獨評量邏輯。
2. 可搭配集合單元，結合「或」、「且」與「聯集」、「交集」概念，做整合評量。

G-10-1 坐標圖形的對稱性：坐標平面上，對 x 軸，對 y 軸，對直線 $x=y$ 的對稱，對原點的對稱。 # **備註：**不必涉及一般的線對稱與點對稱。	g-V-2

先備：線對稱（S-7-4,5），三角形的全等（S-8-5）。

連結：直線方程式（G-10-2），圓方程式（G-10-3），一次與二次函數圖形（F-10-1），廣義三角比（G-10-6)。

後續：指數函數與對數函數（F-11A-4），三角函數圖形（F-11-A-1，F-11-B-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
   99 課綱並未明訂這些學習目標。
2. 相關約定
   所謂兩點 P 和 P' 對稱於點 Q 的定義是 Q 位於線段 PP' 的中點。
3. 學習目標
   不必訂定獨立的單元，將這些對稱性一次講完。搭配適當的學習單元中，介紹坐標平面上（而非一般平面上）點與點的特殊對稱關係，包括：
   (1) 點 $P(a,b)$ 對稱於 x 軸的點是 $P_1(a,-b)$；
   (2) 點 $P(a,b)$ 對稱於 y 軸的點是 $P_2(-a,b)$；
   (3) 點 $P(a,b)$ 對稱於原點的點是 $P_3(-a,-b)$；
   (4) 點 $P(a,b)$ 對稱 $y=x$ 直線的點是 $P_4(b,a)$
   以上關係的推論，可連結國中的直角三角形之全等性質。點對稱的觀念穩固之後，再介紹圖形與圖形的（前述）特殊對稱關係。

4. 教學斟酌

(1) 應提供學生循序漸進的學習機會；建議讓學生先由描點的方式，理解點與點對稱的情形與特性，再擴及圖形與圖形的對稱關係。

(2) 學生應可理解圖形自身的對稱性，如二次函數的圖形有對稱軸。但圖形自身對稱於 y 軸、對稱於原點分別稱為偶函數、奇函數的名稱，可在 F-12 甲-1 時再介紹。

(3) 可使用數學軟體輔助教學。

(4) 在高一時，學生函數觀念尚未鞏固，所以不必使用抽象符號如：圖形 $y=f(x)$ 與 $y=-f(-x)$ 對稱於原點。

條目範圍

本條目是在坐標平面上的特殊對稱關係，不涉及一般的線對稱與點對稱。

釋例

1. 判斷直線 $y=2x$ 分別對稱於 (1) x 軸 (2) y 軸 (3) $x=y$ 直線的圖形，並探討其斜率。
2. 討論如何將 $f(x)=x^2$ 的函數圖形，經由對稱與平移，得到 $y=1-(x-3)^2$ 的圖形。
3. 在說明三角比之補角、負角或餘角性質時，可運用或連結廣義角終邊的對稱性。

評量

宜評量課內提及的圖形即可，$y=|x-1|$ 的圖形宜在 F-12甲-1 再提及。

G-10-2 直線方程式：斜率，其絕對值的意義，點斜式，點與直線之平移，平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離，平行線的距離、二元一次不等式。 **備註：**平行線方程式與平面幾何的綜合應用，可導出由 P、Q 兩點坐標計算三角形 OPQ 面積的算法，其應用範例可包含計算點到直線的距離、平行線的距離。呼應平行線、垂直線在國中階段平面幾何主題範圍內的知識。	g-V-4

先備：二元一次聯立方程的幾何意義（A-7-6），平行（S-8-3），直角三角形的三角比(S-9-4)。

連結：絕對值，廣義角和極坐標，廣義角的三角比（G-10-5,6），一次函數（F-10-1）。

後續：平面向量及其運算（G-11A-1,6、G-11B-1,2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

直線方程式從十一年級挪到了十年級，看似恢復了 95 暫綱的安排，但是本條目的設計內涵還是比較接近 99 課綱的想法，亦即以直線方程式導引出各種基本的坐標方法，作為向量方法的前置經驗與動機。其次，因為九年級學了直角三角比，正的斜率可連結仰角的正切比。

2. 相關約定

(1) 直線方程式和（平面上的）二元一次方程式可視為同義詞。

(2) 鉛直線沒有斜率。斜率的絕對值較大時，說直線較「陡」。

(3) 當直線方程式 $ax+by+c=0$ 可以寫成 $y=mx+k$ 形式時，可以說 y 是 x 的函數，其中 x 是自變數而 y 是應變數；若可以寫成 $x=py+q$ 形式，可以說 x 是 y 的函數，此時 y 是自變數而 x 是應變數。國中階段已經有函數觀念，可以與之連結，但是國中階段不寫 $f(x)$ 這種函數符號。

(4) $L: y=2x$ 表示直線 L 的方程式是 $y=2x$

(5) $d(P,L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離，$d(L_1,L_2)$ 表示兩平行線 L_1 和 L_2 的距離。

(6) 可善用 $\perp$ 符號，稱之為「垂直符號」，唸「垂直」，英文唸 perp（是 perpendicular 的簡寫）。例如 $L\perp M$ 表示直線 L 與 M 互相垂直，$L^{\perp}$ 表示直線 L 的垂直線，$m^{\perp}$ 表示垂直於斜率為 m 之直線的斜率。

(7) 原則上以語文描述「將變數 x 置換成 $x-h$」，教師在適合的班級中，可約定使用 $x\mapsto x-h$ 之置換符號。

3. 學習目標

(1) 理解坐標數值的加減，造成點在坐標平面上的平移效果。

(2) 知道斜率的定義，能從二元一次方程式計算斜率，理解滿足方程式 $ax+by=0$ 的所有點 (x,y) 聚集成通過原點且斜率為 $-\frac{a}{b}$ 的直線（當 $b\neq 0$）。

(3) 當斜率為正數時，稱直線與 x 軸正向所夾的角為直線的仰角，連結九年級的三角比，理解斜率就是仰角之正切比。所以斜率也是九年級說的「坡度」的意思。

(4) 理解斜率相等的（不同）直線皆彼此平行，因此認識到任何直線都是通過原點之同斜率直線的（水平或鉛直）平移；而若限定其通過原點，則斜率與直線是一一對應的。在技術上，能操作直線的水平與鉛直平移，並能用以化簡問題。

(5) 將直線 $L:\ ax+by+c=0$ 的 x 置換成 $x-h$ 時，直線向右平移 h 單位，將 y 置換成 $y-k$ 時，直線向上平移 k 單位。通過原點且與 L 平行的直線是 $L_0: ax+by=0$；L 是 L_0 的水平「或」鉛直平移，平移的量就是 L 的 x 截距或 y 截距。

(6) 給定原點以外的一點 $P(a,b)$，理解 $P^{\perp}(-b,a)$ 使得線段 $OP^{\perp}$ 是 OP 往逆時鐘方向旋轉直角的結果（盡量使用基本的全等三角形技術來推論）；而利用點對稱，得知 $P'(b,-a)$ 使得線段 OP' 是 OP 往順時鐘方向旋轉直角的結果。斜率互為「相反倒數」的直線彼此垂直。

(7) 理解並能運用點到直線的距離公式，擴及兩平行線的距離公式。

(8) 能根據情境設立二元一次不等式，理解其「解」的意義，並能在坐標平面上畫出「解

區域」的圖示。能以線型不等式表示坐標平面上（含或不含直線）的半平面區域。

4. 教學斟酌

(1) 國中階段已經知道二元一次方程式的圖形是直線，且在平面幾何的層次上理解關於平行線與垂直線的基本性質，本條目的學習要確實建立在這些基礎上，進一步以斜率連結所有相關的既有知識，並發展新的坐標幾何方法，展現坐標的功能。

(2) 以下性質可以當作已知而不再闡述：平面上兩平行線存在公垂線，且這些公垂線互相平行；兩平行線之間的任意公垂線段皆等長，且其長度為平行線的距離。可以定義平面上的平行線為同時垂直於某直線的兩條直線。

(3) 關於直線的任何性質或公式，都盡量從通過原點的直線開始學習，再以平移手段獲得一般化的知識，具體展現以簡馭繁的精神。(這其實也是線性代數僅討論通過原點之線性映射的原因。)

(4) 應提供學生循序漸進的學習機會。建議先在坐標平面上練習點的平移，例如將三角形 APQ 平移至 $OP'Q'$，其中 A 點平移至原點，討論 P' 和 Q' 的坐標。鞏固了點的平移之後，再討論直線的平移。爾後，有圓的平移、二次函數的平移、三次函數的平移，皆屬同一脈絡的學習。

(5) 直線的「陡」度、三角形面積公式、點到直線的距離公式，都是運用絕對值符號作為溝通工具的絕佳範例。十年級範圍內的絕對值，應該以類似這種脈絡中的絕對值紀錄與操作為主，不要延伸到複雜的不等式與絕對值函數圖形。

(6) 可藉此條目以集合的描述形式表示半平面區域，例如用 $R=\{(x,y)\mid y\le 2x\}$ 描述坐標平面上的區域 R。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。

(7) 順時鐘和逆時鐘方向的直角旋轉(前項之第 (6) 點)，是認識角有方向性之必要的初步經驗，應該要帶領學生認識。

(8) 教學與評量過程中，應讓學生有機會察覺：妥善設計的坐標系統，或者妥善利用平移，能簡化問題並且凸顯問題的核心要素。

條目範圍

1. 本條目意欲彰顯坐標的功能：它不只提供繪製方程式圖形的一張畫布而已，它有自己的功能。這些功能可以當作向量的前置經驗，但是本條目絕不包含向量觀念，也沒有任何向量操作。向量在數學史上發生得比較晚，顯示它雖然威力強大，卻很可能需要比較高的數學成熟度之後，才適合學習。本條目為學生準備這種成熟度，但過早引進向量方法很可能是揠苗助長。

2. 本說明雖指出三角形面積的坐標算法，以彰顯直角坐標的功能，並為師生提供好用的工具，但它不是必需的，本條目不含「行列式」，絕不系統性地表述行列式的代數性質。

釋例

1. 點到直線的距離公式，有許多僅使用坐標的推導方法。其中一種運用平移，先推導原點到直線的距離公式，再用平移方法處理一般點的距離公式。此外，如果先得知三角形面積的坐標算法，可以用來推論點到直線的距離公式。
2. 三角形 OPQ 面積的坐標算法，有許多僅使用坐標的推導方法。其中一種運用平行線原理：（假設點 $Q(c,d)$ 不在坐標軸上）令 L 為通過點 $P(a,b)$ 且平行於 OQ 的直線，L 交 x 軸於 $P'(a',0)$，則 $\square OPQ$ 與 $\square OP'Q$ 的面積相等，而後者的面積是 $\frac{1}{2}|a'd|=\frac{1}{2}|ad-bc|$。此外，如果先得知點到直線的距離公式，可以用來推論三角形 OPQ 面積的坐標算法。一般三角形的面積，則可以將其中一個頂點平移到原點來討論。

錯誤類型

若 $h>0$，將點的 x 坐標置換成 $x-h$ 時，點的位置向左平移。但是將方程式的 x 變數置換成 $x-h$ 時，滿足方程式的圖形卻向右平移。這裡不能強記，強記則容易混亂，務必要求了解。而平移的想法與技術是最核心的數學方法之一，教師務必讓學生有充分學習的機會。

評量

1. 請勿過度練習二元一次聯立方程式的求解，不要設計太多等價於求解二元一次聯立方程式的評量題目。
2. 不要將使用向量方法的題目，移植到本條目的評量。

G-10-3 圓方程式：圓的標準式。	g-V-4

先備：熟練兩點之間的距離公式與配方法（G-8-1、A-8-7）。

連結：圓與直線的關係（G-10-4），廣義角和極坐標（G-10-5）。

後續：橢圓的標準式與參數式（G-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本條目與 99 課綱沒有差異，主要希望學生能將圓的定義透過坐標及距離公式找出其方程式，以連結國中的幾何定義，並作為距離公式的具體應用。但是 99 課綱將此學習內容安排在 11 年級，而本課綱改在 10 年級，在技術上沒有向量可用，學生的成熟度也稍低，期望教師採用較為基礎的工具來發展本條目的內容。
2. 相關約定

   通常使用 C 或 Γ 表示一個圓，用 $C:x^2+y^2=1$ 表示圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=1$。

3. 學習目標

(1) 能將圓的幾何定義透過坐標及距離公式，表示成 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，並能理解滿足此方程式的點 (x,y) 也會在以 (h,k) 為圓心，半徑為 r 的圓上。

(2) 能利用圓的標準式判定平面上一點與圓的相對位置關係：圓內、圓上、圓外。並以圓的不等式表示坐標平面上圓內、圓外（含或不含圓）的區域。

(3) 能從圓的標準式找出圓心與半徑，並能將其轉換成二元二次方程式。

(4) 能從所給定的二元二次方程式 $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$ 判斷所代表的圖形種類(圓、點、無圖形)。

4. 教學斟酌

(1) 可先由圓心在 $(0,0)$，半徑為 1 的情形開始引入標準式，透過 $x\mapsto x-h$，$y\mapsto y-k$，讓學生連結方程式平移的概念，最後將圓以原點為中心點進行縮放 r 倍，得到標準式：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

(2) 此處應強調標準式可表示成二元二次方程式(一般式)，但任意的二元二次方程式(不討論有 xy 項的情況，而是 x^2 與 y^2 係數不同的情況)卻不一定代表圓的圖形，可透過實際的例子操作讓學生理解其差異點。

(3) 可連結國中階段的一些幾何性質，如任意三角形必有唯一的外接圓，透過圓的幾何性質或是距離公式進行求解。

(4) 可以用集合的描述形式表示圓內或圓外的區域，例如用 $R=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2y\le 0\}$ 描述坐標平面上的一個圓形區域 R。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。

條目範圍

本條目著重在圓的標準式型態的建立，並連結其代數型態，不宜出現給定條件利用坐標求其軌跡方程式的問題。

評量

若本條目在不等式之前，則解二次不等式的相關問題不宜出現，例：設 $k\in\mathbb{R}$，Γ：$x^2+y^2+2kx+2(k+2)y+3k^2+k=0$ 表一圓，求 k 範圍。

G-10-4 直線與圓：圓的切線，圓與直線關係的代數與幾何判定。 **備註**：不含兩圓關係。搭配不等式，可連結描述式的集合符號。僅限表達不等式的解區域，不做區間的集合運算。	g-V-4

先備：圓的幾何性質（S-9-6），點、直線與圓的關係（S-9-7）。

連結：直線方程式（G-10-2）。

後續：二次曲線（G-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱將圓方程式置於十一年級，但是本課綱則在十年級，並且並無規定教學順序。因此，若本條目置於三角比之後，則近似於 99 課綱；但若本條目置於三角比之前，則僅可應用國中學習的銳角三角比，並應注意某些適合使用三角的課題，延到三角之後再一併處理。另外，若本條目置於不等式之前，則與二次（以上）不等式相關的問題，在此也不宜出現。

2. 相關約定

   以集合方式：$R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}\cap\{(x,y)\,|\,x+y\ge 1\}$ 表示弓形區域 R。

3. 學習目標

   (1) 透過圖形位置可觀察出，直線與圓的相交情形可分為：相交兩點、相切、不相交。

   (2) 了解兩方程式之聯立解，代表兩方程式圖形的交點。

   (3) 在已知圓與直線之方程式的條件下，可透過圓心到直線的距離，或兩方程式聯立的解，判定兩圖形的位置關係：直線為圓的割線（交兩點）、切線、或兩者不相交。

4. 教學斟酌

   (1) 講解圓與直線位置關係的性質時，先以圓心在原點的實例討論，其他圓心不在原點的圖形，皆可透過平移後而得到圓心在原點的相對位置圖形，如此即可簡化複雜的代數運算。

   (2) 圓的參數式，依課程安排，講解極坐標概念後，再適當處融入。

   (3) 圓與直線的位置關係，分別以圓心到直線距離的幾何判定，以及代數上從聯立方程式解的個數，兩種方法判斷之。

   (4) 透過解聯立了解根的個數與圖形交點數的對應關係，例題選取的數字應盡量簡化，應避免複雜的數字運算。應讓學生了解到將點、圓、直線一起平移，並不會影響交點個數，因此例題的選擇可盡量以圓心在原點的圖形為例子說明。

條目範圍

1. 類似 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}\cap\{(x,y)\,|\,x+y\ge 1\}$ 的集合表達，僅用於溝通，不涉及其解的範圍問題。
2. 不含兩圓關係，諸如兩圓相交、相切或相離所產生的相關應用問題，皆不講述。

釋例

1. 切線與圓的交點為重根的概念，除透過解聯立方程式得到外，也可透過直線的移動，讓學生感覺到兩交點越來越靠近，最後合而為一點。另外，再搭配解聯立的概念，讓學生感受到重根，數形合一。

2. 透過直線移動，讓學生觀察到直線與圓的各種相交情形。

錯誤類型

過圓外一點求圓的切線方程式，設直線斜率為 m 的情形下，當其中有一條為鉛直線時，所求的解會只剩另一條的斜率值，學生會誤以為只有一條切線。

評量

1. 有關 $y=\sqrt{5-x^2}$ 與直線位置關係的相關應用問題，不宜在此作為評量考題，函數概念的問題宜在高三後再做處理。
2. 有關求切點的問題，此單元題目的選取，應注意數值的計算不可太繁複，主要是讓學生了解聯立方程式的解即為交點，不應讓學生操作繁雜的計算工作。

G-10-5 廣義角和極坐標：廣義角的終邊，極坐標的定義，透過方格紙操作極坐標與直角坐標的轉換。 **備註：**須讓學生有操作經驗。廣義角之範圍，初以$-180°$至$360°$為限，將來在脈絡中推廣之。理解斜角方向性的理由。應帶領學生認識，在平面上，斜率和斜角觀念彼此等價。	g-V-3

先備：平面直角坐標系（G-7-1）。

連結：直線方程式（G-10-2），廣義三角比（G-10-6）。

後續：複數（N-12甲-3），橢圓的參數式（G-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   增加學生使用量角器、直尺、圓規動手操作的歷程，最後配合計算機的使用，從具體的測量來認識極坐標與直角坐標的關係。此外，99 課綱的安排，通常將極坐標作為廣義角三角比的應用。然而本課綱並未規範極坐標放在三角比之後，反而建議由極坐標和直角坐標的關係，來定義廣義角的三角比。

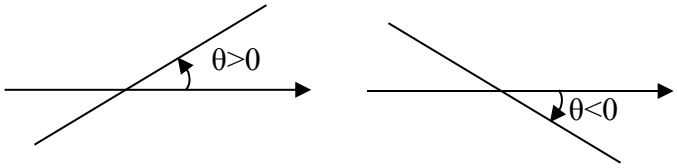
2. 相關約定

   (1) 在平面上選定一個點 O（稱為原點或極點），以 O 為端點，向右作一條水平射線（稱為極軸），則平面上一點 P 的極坐標的表示法為 $P[r,\theta]$，其中 r 為 $\overline{OP}$ 長，θ 表示由極軸為始邊，$\overrightarrow{OP}$ 射線為終邊的廣義角。

   (2) 在學習廣義角之前，所謂的「夾角」都是在視覺上可判斷的銳角、直角或鈍角。學習極坐標與廣義角之後，若 P、Q 之極坐標為 $P[r,\alpha]$、$Q[s,\beta]$，定義 $\overline{OP}$ 與 $\overline{OQ}$ 與之「夾角」為 $\alpha-\beta$ 或 $\beta-\alpha$ 在 $0°$ 到 $180°$ 範圍內的同界角。

   (3) 直線 L 與 x 軸正向所夾之 $\pm 90°$ 範圍內的廣義角，稱為 L 的斜角。正斜角稱為仰角，負

斜角的絕對值稱為俯角。



3. 學習目標

(1) 認識廣義角。

(2) 明白以 x 軸正向為坐標平面上角之始邊，是數學慣例；此慣例與其他學科的慣例不盡相同。

(3) 明白以逆時鐘方向為廣義角之方向，是數學慣例；此慣例基本上獲得其他自然科學的採納。

(4) 能使用直角坐標與極坐標兩種方式，正確描述任一廣義角的終邊上的某一定點。

(5) 透過方格紙，能操作極坐標與直角坐標的轉換。

4. 教學斟酌

(1) 在教材的處理上，可以有下列兩種方式：

- 本課綱：按照極坐標原本的定義，在直角作標平面上做極坐標的點（用量角器、直尺圓規）。學生已經知道 0° 到 360° 的角，此時只要引進始邊、終邊、負角等觀念即可，並說明超過 $\pm 360^\circ$ 的同界角意義。讓學生在實際操作中明白：任一個點都同時可以有直角坐標和極坐標表示法，而且可以互換。坐標互換的關係，不限於第一、第二象限，在第三、第四象限也可以；由此導出定義廣義角三角比的動機。讓學生在操作極坐標與直角坐標時，感受到同一個廣義角，取到終邊上不同點，所得到的直角坐標之間有何關係，便可適時引入廣義角的三角比。
- 習慣教法：在介紹完廣義三角比之後，作為應用的例子，介紹極坐標，再進行操作的活動，這時可以使用計算機幫助印證，並感覺到誤差的存在。

不論採用哪一種教材編法，都要能夠有效銜接舊經驗：九年級的銳角三角比，以及十年級可能放在本條目前面的直線斜率與仰角的關係。

(2) 本條目之廣義角以 $\pm 180^\circ$ 之範圍為原則，以精熟練習為目的時，可以擴及 $\pm 360^\circ$。請教師唯有在合理的情境之下，才討論超出 $\pm 360^\circ$ 範圍的角。廣義角作為溝通的語言，合理的使用範圍是 -180° 至 360° 之間；當角的終邊落在第一、第二象限時，除非特殊的情境需求，都應以正角表示，當終邊落在第三、第四象限時，依情境脈絡選擇以負角或正角表示。

(3) 廣義角的學習，方向性比同界角重要。所以，雖然廣義角的範圍，初以 -180° 至 360° 為限，將來可在脈絡中推廣之，但是不宜在無情境的環境中過度練習同界角。

(4) 理解斜角方向性的理由，應帶領學生認識，在平面上，斜率與斜角觀念彼此等價（若

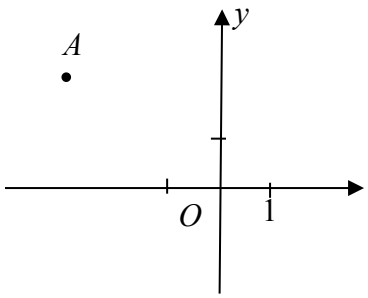
確定斜率，則確定斜角，反之亦然）。

(5) 要求學生在坐標平面上根據直角坐標或極坐標畫點的時候，盡量採用自然的整數，應避免無動機地使用無理數。可使用計算機搭配畢氏定理從 (x,y) 計算 r。

條目範圍

僅介紹極坐標的表達、與直角坐標之間的轉換，不含極坐標方程式。

釋例



1. 如右圖，利用直尺、圓規、量角器，並可運用畢氏定理與計算器，分別以直角坐標與極坐標表示 A 點的位置。
2. 給定 $P(-3,4)$，在方格紙上畫出點的位置，經過測量而取得其極坐標的近似值。
3. 給定 $P[1,-20^\circ]$，在方格紙上畫出點的位置，經過測量而取得其直角坐標的近似值。
4. 教師解釋為何數學以 x 軸正向為角之始邊的方法之一，是為了配合 x 軸為水平線（horizontal line）而 y 軸為鉛直線（vertical line）的慣例，以及水平為 0 度而鉛直為 90 度的語言上的習慣。
5. 教師解釋為何數學以逆時鐘方向為正向的方法之一，是延續前項，既然 x 軸正向已經是 0 度而 y 軸正向是 90 度，這就是逆時鐘的旋轉方向。另一個線索是三角形面積的坐標算法（G-10-2）。
6. 某潛艇的雷達偵測到某一時刻有一不明物體出現在其東北方 10 公里處，若以該潛艇為原點，1 公里為單位，正東方與正北方分別為 x、y 軸正向，則此不明物體的直角坐標為何？

G-10-6 三角比：定義銳角的正弦、餘弦、正切，推廣至廣義角的正弦、餘弦、正切，特殊角的值，使用計算機的 sin, cos, tan 鍵。 **備註：**須讓學生有自行根據圖形之測量而估算三角比的實際操作經驗。	n-V-2 s-V-1 g-V-2

先備：直角三角形的三角比（S-9-4）。

連結：圓的標準式，廣義角和極坐標，直線斜率與其斜角的正切（G-10-5、G-10-7）。

後續：三角函數（F-11A-1、F-11B-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

(1) 以前的高中數學課程都沒有正式使用計算機，新課綱要求學生以計算機的三角比（乃至於反三角比）按鍵，搭配在方格紙上實際作圖與測量的結果，具體地從操作中認識三角比。因為計算機的引入，不再查表，也不再以特殊角為主要操作對象。

(2) 99 課綱依章節設計，明訂極坐標為學習了三角比之後的應用。本課綱依條目設計，並未強制在同一學年內的學習順序。然而，本條目的設計理念，意欲從極坐標定義廣義角的三角比。以極坐標表示的點，可以根據極坐標的定義，直接在坐標平面上作圖，而實際的測量也可以估計該點的直角坐標，從而導引出廣義角三角比的概念。如此設計的理由，是因為國中安排了初步的三角比學習內容，而且期望以計算機作為學習的工具，此設計提供了與國中連結並且實際操作三角比的學習機會。

(3) 過去一段時期的國中課程刪除了三角比，所以高中學生沒有其前置經驗。本課綱為了緩和學習的坡度，更為了支援自然科學領域與技術型高中之工程學群的學習，在 9 年級安排了適量的 sin、cos、tan 銳角三角比，國中畢業生具備其比值意義的基本概念(詳見「教學斟酌」)，也知道它們對應的計算機按鍵。高中的教學，可在此基礎上繼續發展。

2. 相關約定

(1) 以度度量測量角時，可以用十進制小數表示其單位「度」的量，也可以轉換成「六十進制」（Sexagesimal），又稱為「度分秒制」（DMS 或 Degree-Minute-Second），記作「° ′ ″」，60 秒為 1 分，60 分為 1 度。使用六十進制時，唯有「秒」的量才可以用小數，小數之意義為十進制。

(2) 正弦、餘弦與正切之符號為 sin、cos、tan，排版時應使用正體字。令坐標平面原點以外的一點 P 之直角坐標與極坐標分別為 (x,y) 和 $[r,\theta]$，定義

$$\sin\theta=\frac{x}{r}\text{，}\cos\theta=\frac{y}{r}\text{。}$$

當 $x\neq 0$ 時，定義 $\tan\theta=\frac{y}{x}$，亦即 $\tan\theta$ 等於直線 OP 的斜率。

(3) 補角（supplementary angles）和餘角（complementary angles）都沒有國際認可的慣用符號，原則上應以文字說明。臨時需要大量使用時，可以局部定義 θ^s 為角 θ 之補角：$\theta^s=180^\circ-\theta$，而 θ^c 為角 θ 之餘角：$\theta^c=90^\circ-\theta$。

3. 學習目標

(1) 明白廣義角的 sin、cos 之定義，與直角三角形上銳角的 sin 與 cos 定義相容，所以廣義角三角比「推廣」了銳角三角比的範圍。

(2) 能嫻熟地轉換直角三角形上的三角比概念與坐標平面上的三角比概念；後者之概念直接在坐標平面上理解 sin、cos、tan，而不必藉助於直角三角形。

(3) 能熟練地使用特殊角的三角比，所謂特殊角是 0°、30°、45°、60° 以及它們在第二、三、四象限的對應角。能熟練地使用計算機求任意角的三角比（近似）值。

4. 教學斟酌

(1) 在國中階段，學生理應經歷如下的學習經驗：兩個直角三角形，若有一個相等的銳角，

則必然彼此相似，所以其對應邊成比例；從比的觀念推得任兩邊長的比值為常數（所謂「銳角」不含零角與直角，所以比值皆存在），而在六種兩兩相比的比值當中，其中三種有名字：sin、cos、tan。只要精確地作圖，就能估算那三個三角比的近似值（學生應該要有作圖、測量、估算的學習經驗），但是計算機提供三個對應的按鍵，使我們不必每次都麻煩地經過作圖與測量來獲得銳角三角比的估計值。

(2) 利用方格紙和計算機，以及早先學過的通過原點的直線，配合直角坐標（向兩軸做垂線）和極坐標的意義，先在第一象限連結國中所學的銳角三角比，然後推廣其形式到第三象限、第二和第四象限。

(3) 建議讓學生經過實際作圖、測量、估算的學習經驗，確知廣義角的三角比就是坐標平面上任一點的極坐標與直角坐標之間的關係，從而理解廣義角三角比的定義。在此理解之後，才說計算機提供 sin、cos、tan 按鍵，使我們不必每次都麻煩地使用作圖、測量、估算的程序來找 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 的近似值，也不必自我侷限於少數的特殊角。

(4) 在符號的溝通上，建議先將例如 $\sin 50°$ 寫成 $\sin 50° = 0.7660\ldots$，然後說明正確的記號為 $\sin 50° \approx 0.7660$。

(5) 到了高中階段，學習的重點是坐標幾何，不必過度練習平面幾何問題。

(6) 可連結圓的參數式，如以下釋例，但是不討論動點與軌跡問題。

條目範圍

1. 本條目不涉及餘切 cot、正割 sec 和餘割 csc。
2. 本條目不涉及三角比的「函數」意義。
3. 本說明雖然建議連結圓的參數式，但不宜在 10 年級引入動點觀念，延伸至軌跡相關的問題。

釋例

連結圓的標準式，透過正弦與餘弦的平方關係，讓學生發現點 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ 滿足圓方程式，故在圓上；進一步理解圓上任一點皆可表示為 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，不但再度連結極坐標，並且可以藉此建立圓的參數式概念。

錯誤類型

1. 忽略了廣義角的方向性，誤以為鈍角 θ 的三角比等於其補角的三角比。
2. 因為鈍角的終邊在第二象限，而將「角」視為從 $180°$ 量起的銳角。

評量

盡量引導學生連結「通過原點的直線」與三角比。

G-10-7 三角比的性質：正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的反正弦、反餘弦、反正切鍵計算斜角或兩相交直線的夾角，(三角測量＃)。 **備註：**盡量一致以「斜角」作為角的概念心像。銜接國中的長方體經驗，在長方體的截面上示範三角測量，在三角比的脈絡中，延展國中的空間概念，並可延伸至正角錐體。三角測量不設獨立單元，以示範三角之基本性質為主，融入教學脈絡之中，多舉出歷史上的重要應用範例。	n-V-2 s-V-1 g-V-3

先備：直角三角形的三角比（S-9-4），空間中的線與平面（S-9-12）。

連結：直線方程式、斜率、點與直線之平移（G-10-2），廣義角的三角比、使用計算機的 sin, cos, tan 鍵（G-10-6）。

後續：正射影與內積、面積與行列式、兩向量的夾角（G-11A-6、G-11B-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本條目在 99 課綱是十一年級的內容，此處配合 G-10-2 及 G-10-6 一併於十年級進行學習。主要希望能將斜角的想法與直線的斜率做結合，連結學生在直線方程式的學習經驗，並加以應用。此外，99 課綱將三角測量設為獨立單元，本條目將三角測量融入正弦與餘弦定理在長方體上的應用，不設獨立單元。

2. 相關約定

   當度度量使用六十進制時，度與分的數值必為整數，秒的數值則可能為十進制小數。取角度之估計值時，若以「分」為最小單位，習慣上必定約至整數，僅有「秒」單位的數值，可約至小數。所以，在溝通時，只要說將角的度量「約至分單位」，就表示採用六十進制，但將分單位的數值約至整數，不寫秒單位；而說「約至秒單位」則表示將秒單位的數值約至整數；說「約至兩位小數秒」或「約至百分之一秒」則表示將秒單位的數值約至兩位小數。

3. 學習目標

   (1) 能理解正弦定理，並用來解決三角形的邊角關係問題。

   (2) 能理解餘弦定理，並用來解決三角形的邊角關係問題。

   (3) 能能透過三角比理解正射影。

   (4) 能理解直線斜率等於直線斜角的正切值，並能運用計算機求得直線之斜角的近似值。

   (5) 能利用計算機搭配正弦定理、餘弦定理或直線的斜率求出兩直線的夾角。

4. 教學斟酌

   (1) 本條目不含和角與差角公式，因此在坐標平面上處理直線夾角時，可利用直線斜率等

於直線斜角的正切值，透過計算機求出兩直線斜角的近似值，再由其差得到夾角，讓學生能實際利用計算機處理非特殊角的相關問題。

(2) 正弦與餘弦定理並不需要坐標，建議以基本的幾何方法導出。但是，可以搭配坐標而應用之。

(3) 在沒有坐標的條件下，運用正弦與餘弦定理求得兩直線夾角之正弦或餘弦，再透過計算機求夾角的近似值。使用計算機做反正弦、反正切運算時，可能出現負角（$-90°$ 以內），這是正確的數學定義，但是不必以「函數值域」的方式對十年級學生講解，只需要說明這是依照「慣例」做的規定即可。要教導學生能夠用計算機從三角比「反查」廣義角的結果，正確回答問題：可能需要取其補角，或絕對值。

(4) 運用計算機的反三角按鍵取得夾角的近似值時，宜順便介紹六十進制，並以計算機做十進制與六十進制的角度轉換。

(5) 國中階段已經知道空間中直線與平面的垂直和平行關係，教師可以藉空間中的測量問題，適度地複習並應用這些觀念，以便鞏固學生的空間概念。儘管如此，本條目的三角測量仍然希望能將問題佈置在長方體上，不但可以銜接學生在國中已經學習過的立體圖形概念，又可以為將來學習空間概念時，作為建立空間坐標系的前置經驗。

(6) 為因應電腦 3D 技術所衍生的空間概念學習需求，在長方體、柱體、錐體上進行測量練習時，可同時帶領學生認識截面。

條目範圍

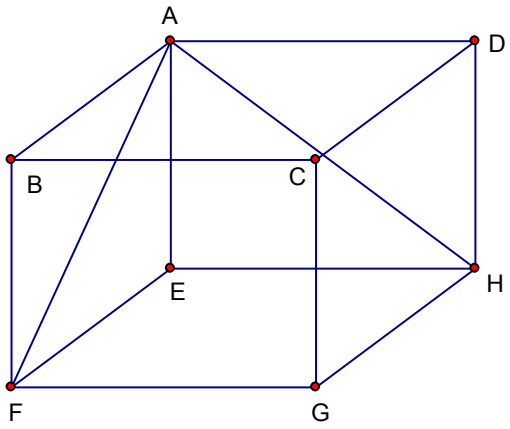
1. 不透過向量方式或是差角公式來求兩直線夾角。
2. 反正弦、反餘弦、反正切僅用於三角比到廣義角的「反查」，並非反函數概念，此條目不涉及函數觀念。

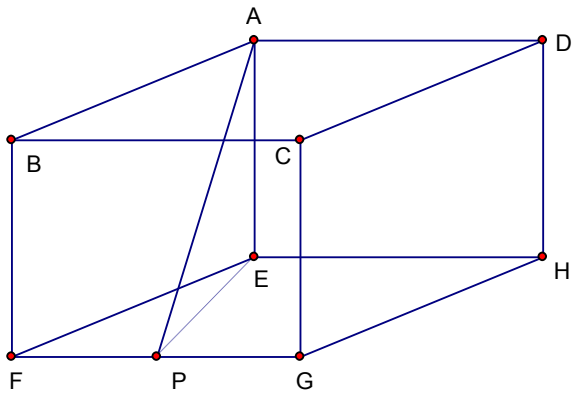
釋例

1. 已知 $L_1 : y = x$ ， $L_2 : y = 2x$ ，試求 L_1, L_2 的夾角。此時，由 L_1 的斜率為 1，可知 L_1 與 x 軸正向夾 45° ， L_2 的斜率為 2，可知 L_2 與 x 軸正向夾 63.4°（利用計算機），所以 L_1, L_2 的夾角為 18.4° 。
2. 在本課綱的脈絡中，有一條獲得餘弦定理的新進路：將三角形坐標化為 ΔOPQ，其中 P 在 x 軸上且 $\overline{OP} = a$ 、 $\overline{OQ} = b$ 、 $\angle POQ = \theta$ ，故其極坐標為 $P[a, 0^\circ]$ 、 $Q[b, \theta]$。然後轉換成直角坐標而得 $P(a, 0)$ 、 $Q(b\cos\theta, b\sin\theta)$ ，根據距離公式計算 $\overline{PQ}^2$ ，化簡即得餘弦定理。
3. 已知 ΔABC 三邊長為 5、6、7，則最大角約幾度？

   利用餘弦定理可知，若最大角為 θ ，則 $\cos\theta = \dfrac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = \dfrac{1}{5}$ ，則 $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right) = 78.46^\circ$ 。
4. 本條目不強調配置情境的三角測量，希望回歸基本，以長方體上的測量為主要學習目標。

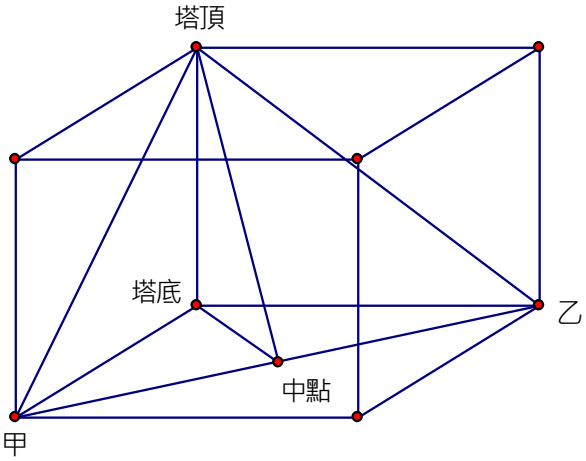
例如長方體 $ABCD-EFGH$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=3$，如下圖左，求 $\angle FAH$ 至整數度。（$\angle FAH=\cos^{-1}\sqrt{0.18}\approx 65°$）此類型的題目順便讓學生認識「截面」，也有機會認識四面體（$AEFH$），教師還可以引導學生避免一個迷思概念：$\angle FAH$ 不是直角，ΔAFH 不是直角三角形！





5. 本條目銜接並熟悉國中階段(９年級)的一個基本概念：長方體的任一稜邊垂直於「兩端」的面，所以就垂直於那兩個面上通過垂足的任意直線。這是「法線性質」的前置經驗，可以利用本條目在長方體上的測量問題來複習，並鞏固其概念。例如在上圖右的長方體 $ABCD-EFGH$ 上，BC 邊垂直於長方形 $DCGH$ 上任意通過 C 點的直線（或線段）。若給定 $\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=3$，且 P 是 FG 的中點，可以求平面 $FGHE$ 上之點 P 對 A 點的仰角，亦即求 $\angle APE$（$=\tan^{-1}\sqrt{\frac{9}{13}}\approx 40°$）。

6. 參照右圖，甲、乙兩人觀察同一座塔，甲在塔的正南方 10 公里處，觀察塔頂的仰角為 60 度，乙在塔的正東方，觀察塔頂的仰角為 30 度，



(1) 甲、乙兩地相距多少公里？（商高定理）

(2) 甲、乙兩地的中點觀察塔頂的仰角為多少度？（利用計算器求角度）

(3) 丙在甲、乙兩地連線上，且觀察塔頂仰角為 45 度，則乙、丙的距離為多少？（搭配餘弦定理）

評量

1. 角的六十進制雖然不是數學領域的重要學習內容，但為連結其他學科（地理科的經緯度）以及生活經驗，宜在適當情境中布置適合以六十進制作答的問題，例如以「秒」表達微小

的角差。

2. 釋例中「長方體上的法線性質」僅為九年級概念的複習與應用，並期望銜接至十一年級的空間概念。不要延伸至一般的法線性質，那是 11 年級 A 類課程的學習內容。在本條目中利用上述概念時，必須限定在長方體上，且明顯有一稜邊垂直於一個面的情況。

A-10-1 式的運算：三次乘法公式，根式與分式的運算。	a-V-1

先備：二次式的乘法公式（A-8-1），一元二次方程式的解法與應用（A-8-6）。

連結：三次函數的圖形特徵（F-10-2），有系統的計數（D-10-3），
數列級數與遞迴關係（N-10-6）。

後續：函數的極限（F-12甲/乙-1），微分（F-12甲/乙-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
本課綱有特別提到分式運算。

2. 相關約定
(1) x^3+y^3 的分解稱為立方和公式，x^3-y^3 的分解稱為立方差公式。$(x\pm y)^3$ 的展開稱為和或差的立方公式。
(2) 所謂最簡根式是指平方根內僅為不含重複質因數的正整數，且係數均為有理數的根式。
(3) 所謂雙重根號是 $\sqrt{p+q\sqrt{r}}$ 的形式。

3. 學習目標
(1) 能展開和或差的立方：$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$。
(2) 能了解立方和與立方差公式的由來。
(3) 能將分母含有平方根式（$\sqrt{a}$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$）的分式，化簡到最簡根式。
(4) 能化簡完全平方式的根式，例如 $\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}=|x+\frac{1}{x}|$。
(5) 能化簡形如 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ 的雙重根號為 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（其中 $a>b$）。
(6) 能以符號操作基本的分式運算，含基本的繁分式化簡，例如 $\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}=\frac{2ab}{a+b}$，
$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$。

4. 教學斟酌
(1) 可透過立方展開讓學生了解和的立方公式的由來，或可搭配體積概念說明。亦即

$(x+y)^3=(x+y)^2(x+y)=(x^2+2xy+y^2)(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ ，

接著透過移項得

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(x+y)(\mathrm{x}^2-xy+y^2)$ ，

並說明這兩個公式的相關性。

(2) 將差的立方轉化成和的立方 $(x-y)^3=[x+(-y)]^3$ ，讓學生了解公式 $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 中哪些地方地方會出現負號。

(3) 以 $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(a+b)\pm2\sqrt{ab}$ 說明化簡雙重根號的觀念，勿直接以公式的形式讓學生記憶。

(4) 雙重根號的化簡，請以 $\sqrt{p\pm2\sqrt{q}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 的形式為主，其中 $p=a+b$ ， $q=ab$ ，且 $a>b$ 。

(5) 符號的分式運算與繁分式化簡，都應以國中階段在解方程式的過程中以具體的數值所做的計算為基礎，做形如 $\frac{x^3-1}{x-1}$ 或 $\frac{x+1}{\frac{1}{x-1}}$ 或 $\frac{1}{2x}\div\frac{1}{x}$ 的運算或化簡， 在未來的學習歷程中適時練習其操作，不要在此條目的教學中做複雜的練習。

條目範圍

本條目，以及全部的高中數學必修課程，都限定在實數範圍內。

釋例

1. 觀察出 $\alpha^3+\beta^3$ 或 $\alpha^3-\beta^3$ 皆可表為 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 的關係式。

2. 立方差公式也可以連結多項式的除法原理。例如： $x^3-a^3=0$ 有一根 a，所以 x^3-a^3 有因式 $x-a$ ，做多項式除法 (長除法即可) 得到立方差公式。而立方和公式則僅為變數的置換 ($a\mapsto-a$)。

錯誤類型

1. $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$ ，學生會忘了判別 a, b 的大小，而直接寫成 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 。

2. 差的立方 $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$，以及立方差 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$，這兩個公式中的負號出現的位置，學生易搞錯。

3. 根式的運算，學生會忘記判斷根式運算出來為正，例如誤寫為 $\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}=x-\frac{1}{x}$ 。

評量

根式的化簡，應配合題目實際上的需要，勿過度要求代數計算的技巧。例如不宜處理將 $\sqrt{9-2\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}}$ 化為 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 這類繁複的根式運算。

A-10-2 多項式之除法原理：因式與餘式定理，多項式除以$(x-a)$之運算，並將其表為$(x-a)$之形式的多項式。 **備註：**綜合除法之除式僅作 $x-a$ 即可，不必推廣到 $ax-b$。不涉及使用分離係數法。	a-V-2

先備：多項式的意義（A-8-2），多項式的四則運算（A-8-3）。

連結：式的運算（A-10-1）。

後續：複數與方程式（N-12 甲-3），方程式的虛根（A-12 乙-2），微分（F-12 甲-3），積分（F-12 甲-6）。

基本說明

1. 與99課綱的差異
   (1) 刪除整係數一次因式檢驗法，不強調方程式的有理根。
   (2) 關於虛根、根與係數關係、代數基本定理等（統稱「方程式論」）之內容，移至選修數甲。
   (3) 本課綱之國中階段已刪除多項式除法之「分離係數法」，本條目並未補回。
   (4) 將 x 的多項式轉換為 $(x-a)$ 的多項式，其實就是泰勒多項式，除了延續 99 課綱用來求函數近似值如 $f(0.99)$，也可以為多項式函數圖形在局部近似直線的性質做準備。
2. 學習目標
   (1) 認識多項式的除法原理。
   (2) 利用除法原理，理解因式定理與餘式定理。
   (3) 使用綜合除法處理多項式除以$(x-a)$之運算。
   (4) 能將 x 的多項式轉換為 $(x-a)$ 的多項式。
3. 教學斟酌
   (1) 除法原理應配合國中學過的長除法來說明，並特別解釋餘式的次數與被除式次數的關係。
   (2) 國中因為多項式除法僅限於二次除以一次，因此刪去分離係數法。高中不特地將分離係數法列為學習目標，只要掌握其「排列整齊、不要缺項」的原則即可。有了綜合除法後，會使用到分離係數除法的機會不多，教師可斟酌上課時數，自行決定是否要教授。關於綜合除法的介紹參見釋例 4.。
   (3) 本條目的主要目的是為準備多項式函數的學習，請勿擴及過多的方程式論與多項式的代數性質。
   (4) 雖然可以在本條目的教學中引伸插值多項式（特別是牛頓的插值法），但是十年級的多項式教學目標，以多項式函數為主要方向，故課綱的設計本意，是將一般的插值多

項式觀念，跟三元一次聯立方程式放在一起（A-11A-2），而特殊的線性插值，則放在一次函數（F-10-1）的教學脈絡裡。

條目範圍

1. 不將綜合除法的演算程序推廣至 $ax-b$ 形式之除式（ $a\neq 1$ ）。
2. 不含關於多項式的根與係數關係，不含勘根定理。

釋例

1. 設 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+x+19=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$ ，則以 $(x-2)^2$ 除 $f(x)$ 所得的餘式為何？
2. 多項式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 除以 x^2-5x-6 之餘式可能為下列哪些選項？

   (1) x^2-3x+1　(2) $3x-1$　(3) $-2x$　(4) 0　(5) 5
3. 可以用立方差公式當作動機，推廣到 x^n-y^n 的分解公式。亦即因為 $x^n-a^n=0$ 有一根 a，所以 x^n-a^n 有因式 $x-a$ ，做多項式除法（綜合除法）得到一般的次方差公式。而一般的次方和公式則僅為符號代換。
4. 綜合除法教學釋例。

   方法一：由長除法入手，將 x 與重複寫出的係數全省略。

   以 $f(x)=2x^3-3x^2-5x-10$ 除以 $x-4$ 為例。

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & \boxed{2}x^2 & +5x & +15 & \\
\hline
x-4 & \boxed{2}x^3 & -3x^2 & -5x & -10 \\
 & \boxed{2}x^3 & -8x^2 & & \\
\hline
 & & 5x^2 & -5x & \\
 & & 5x^2 & -20x & \\
\hline
 & & & 15x & -10 \\
 & & & 15x & -60 \\
\hline
 & & & & 50
\end{array}
$$

省略重複部分得

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +5x & +15 & \\
\hline
x-4 & 2x^3 & -3x^2 & -5x & -10 \\
 & & -8x^2 & & \\
\hline
 & & 5x^2 & & \\
 & & & -20x & \\
\hline
 & & & 15x & \\
 & & & & -60 \\
\hline
 & & & & 50
\end{array}
$$

再縮排如下，並將首項抄至下方：

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +5x & +15 & \\
\hline
x-4 & 2x^3 & -3x^2 & -5x & -10 \\
 & & -8x^2 & -20x & -60 \\
\hline
 & 2x^3 & 5x^2 & 15x & 50
\end{array}
$$

將(–4)改為+4
則減法變加法

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +5x & +15 & \\
\hline
4 & 2x^3 & -3x^2 & -5x & -10 \\
+ & & +8x^2 & +20x & +60 \\
\hline
) & 2x^3 & +5x^2 & 15x & 50
\end{array}
$$

可發現上下排係數順序相同。最後精簡如下：

	2	-3	-5	-10	4
		8	20	60	
	2	5	15	50	
	商式			餘式	

方法二：除法原理配合比較係數。

設 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，除式為 $(x-b)$，則由除法原理可知，存在商式 $Q(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$，餘式 r，使得

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-b)(c_2x^2+c_1x+c_0)+r\text{。}$$

由比較係數法可得：

$$\begin{cases} a_3=c_2 \\ a_2=-c_2b+c_1 \\ a_1=-c_1b+c_0 \\ a_0=-c_0b+d \end{cases} \quad \text{整理後得} \quad \begin{cases} c_2=a_3 \\ c_1=a_2+c_2b \\ c_0=a_1+c_1b \\ r=a_0+c_0b \end{cases}$$

將上述關係改寫成下列形式：

對齊	x^3	x^2	x	1	
$f(x)=$	a_3	a_2	a_1	a_0	b
(+) ↓		c_2b	c_1b	c_0b	
	a_3	a_2+c_2b	a_1+c_1b	a_0+c_0b	
	⇩	⇩	⇩	⇩	
商式 $q(x)=$	c_2	c_1	c_0	r = 餘式	

評量

1. 不評量複雜的餘式定理應用，如：已知多項式 $f(x)$ 次數高於三次，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$、$(x-2)^2$ 除，餘式分別為 $5x-3$、$2x+7$，則 $f(x)$ 被 $(x-1)^2(x-2)$ 除所得之餘式為何？
2. 超過三次以上的多項式因式分解，因整係數一次因式檢驗法已刪除，不適宜做為評量。除非有明顯的一次因式，例如 x、$x+1$、$x-1$。

F-10-1 一次與二次函數：從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形與 $y=mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y=ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。 **備註**：在課程脈絡中，認識 $f(x)$ 之函數符號的必要性與合理性，例如 $f(x)$ 與 $f(x-h)$、$f(-x)$ 的圖形關係。閉區間內的二次函數情境應用。理解內插法的原理是分點公式。	f-V-1 a-V-1 g-V-5

先備：藉由方程式的形式而獲得的初等函數觀念（F-8,9-1,2）。

連結：直線方程式、圓方程式（G-10-2、G-10-3）。

後續：函數、導函數（F-12甲/乙-1,4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   在內容上，本條目與 99 課綱的一次與二次函數主題並無太大差異，但本課綱更強調國中經驗的連結，特別要求在課程脈絡中，認識 $f(x)$ 之函數符號的必要性與合理性，並且在技術上補綴二次函數的配方程序（國中階段刪除了）。

2. 相關約定

   (1) 當 $f(x)$ 是一個函數，f 就是函數的名稱，不須每逢函數就必定連著 x 一起說。例如，可以說「x 是 f 的自變數」，「f 是線型函數」，「f 是單項函數」，「f 是多項式函數」，「f 的圖形」等詞。

   (2) 令 a、b 為實數，n 為非負整數，稱 $f(x)=ax^n$ 為單項函數，稱 $f(x)=ax+b$ 為線型函數，稱 $f(x)=a$ 為常數函數。若限定 $a\neq 0$，則前述三種函數又分別稱為 n 次函數或一次函數或零次函數。當 $f(x)$ 的「數學表達」是一個以 x 為元的 n 次多項式，稱 f 為多項式函數或 n 次多項式函數或 n 次函數。

   (3) 當 $f(x)=0$ 稱 f 為零函數。零函數可以被考慮為特殊的多項式函數，但是它未必是多項式函數。不要將零函數歸類為多項式函數，所以零函數也就沒有「次數」的問題。

   (4) 在 xy 坐標平面上，滿足 $y=f(x)$ 之所有點 (x,y) 聚集而成的圖形，稱為 f 的函數圖形或 f 的圖形。

   (5) 以語言的直覺意義描述函數圖形的遞增、遞減和凹向，不訴諸於數學定義。

3. 學習目標

   (1) 能以函數名稱（例如 f 和 g）而非應變數（例如 y 和 z）名稱來溝通關於函數的敘述。藉由已經具備基礎的直線方程式與 $y=ax^2$ 和 $y=a(x-h)^2+k$，學習函數符號 $f(x)$ 的溝通與操作。

   (2) 理解有些方程式，例如直線方程式 $ax+by+c=0$，可以將一個變數「孤立」在等號的左邊（例如 $y=mx+k$），當右邊的變數（例如 x）代入一個數就算出一個對應數時，那兩個變數之間就有函數關係；此時等號右邊的數學式可以用函數符號來表達（例如以 $f(x)$ 代表等號右邊的數學式，$f(x)=mx+k$）。但是有些方程式，例如圓方程式 $x^2+y^2=1$，將任一變數「孤立」在等號左邊之後（例如 $y^2=1-x^2$），在右邊代入一個 x 並不能確定一個對應的數 y，則兩變數之間沒有函數關係。

   (3) 知道函數圖形的定義，連結 $f(x)$ 的函數圖形就是 $y=f(x)$ 的方程式圖形，並能描繪一次與二次函數的圖形。

(4) 能將給定的二次函數之「數學表達」(一個二次多項式)在一般式 ax^2+bx+c 與標準式 $a(x-h)^2+k$ 之間轉換。

(5) 知道數線上的分點公式，理解其原因，並能應用於一次函數求值：令 $f(x)$ 為一次函數，已知三數 a、b、c 之比例關係，且已知 $f(a)$ 與 $f(b)$ 時，利用分點公式求 $f(c)$ 之值。

(6) 認知函數符號 $f(x)$ 與方程式符號的差異之一，是前者較容易表達變換。能執行 $f(x)$ 改為 $f(t)$、$f(2x)$、$f(x-1)$ 之類的操作，並連結方程式圖形平移的舊經驗，理解 $f(x-h)$ 之圖形乃是 $f(x)$ 之圖形的水平平移，而 $f(x)-k$ 是鉛直平移。

(7) 認知所有一次函數的圖形，都是其一次單項函數圖形(也就是斜率相同且通過原點的直線)的水平「或」鉛直平移。而所有二次函數的圖形，都是其二次單項函數圖形的水平「和」鉛直平移。換句話說，所有一次、二次函數圖形，都與其最高次項函數之圖形「全等」。

(8) 認識並理解二次函數 $f(ax)$ 之圖形與 $f(x)$ 圖形的關聯。理解二次函數有最大或最小值，並能用以解決問題。

4. 教學斟酌

(1) 描述函數的時候，應該在情境脈絡中，以語言的直覺意義描述函數的遞增(漸增，圖形上升)或遞減(漸減，圖形下降)，一個數被函數對應或不被對應，但不要正式定義遞增、遞減、值域等觀念。注意上述增或減的說法，約定在朝著 x 軸正向而言；如果不約定方向，則增減的觀念是混淆的。

(2) 用計算機和方格紙，讓學生親自計算描點，確實感受函數圖形是「所有」滿足 $y=f(x)$ 的點 (x,y) 聚集而成的圖形；換句話說，函數圖形上的點坐標之 y 值就是函數值。

(3) 在合理的情境中，可以討論限定在閉區間內的二次函數極值問題，而且該極值可能發生在區間的端點。

(4) 函數圖形的平移，可以用數學繪圖軟體或 App 輔助學生理解，避免流於背誦規則。

條目範圍

本條目不含函數的正式定義及值域、對應域、定義域等概念，也不正式定義函數的遞增、遞減、凹向。因此，也不必分辨「遞增」和「嚴格遞增」。

釋例

1. 國中階段只學習了一元二次方程式的配方程序，亦即先將常數全部移到等號右側，以等量公理進行配方程序，然後求未知數的解。本條目需以類似程序直接對二次多項式配方。初步的程序可以連結國中經驗，將函數先改寫成方程式再處理配方。例如欲將 $f(x)=2x^2+x+3$ 改寫成完全平方的形式，先改寫成方程式符號 $2x^2+x+3=y$，將常數項全部移去右側並將 x^2 係數化為 1，得到

$$x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\ ,$$

以等量公理配方

$$x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}+\frac{1}{16}\ ,$$

整理為 $(x+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{2}y-\frac{23}{16}$，再將 y 孤立為 $2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{23}{8}=y$，所以 $f(x)=2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{23}{8}$。這裡其實是一個練習轉換方程式符號與函數符號的好機會。然而，學生應該最終能夠不經過方程式符號而直接對二次多項式執行配方程序。

2. 二次函數 $f(ax)$ 當 $|a|$ 越小圖形的「開口」越大，有另一個將來有用的描述，是說圖形越「扁平」。熟悉這個觀念的方式之一，是想像 $|a|$ 小到極致就是0，而此時的函數圖形是水平線（ $y=0\cdot x^2+k$ ），極度地「扁平」。

錯誤類型

1. 誤以為當 $a>1$ 使得 $f(ax)$ 的圖形「變大」。
2. 誤以為「若干點」可以「連成」函數圖形。例如學生誤認為五點可以畫出二次函數圖形，甚至誤以為拋物線上「僅有五個點」。雖然三點確實可以決定一個不超過二次的多項式函數，但是學生對函數圖形的認知是有待商榷的。
3. 當 $k>0$，將方程式的變數 y 置換成 $y-k$ 之後，方程式圖形向上移動 k 單位。但是，函數 $f(x)-k$ 的圖形卻向下移動 k 單位。這兩個觀念的連結，在於 $y=f(x)$ 是個方程式，而 $y-k=f(x)$ 的圖形向上移動，故 $y=f(x)+k$ 的圖形向上移動，也就是 $f(x)+k$ 的函數圖形向上移動。所以，函數圖形與方程式圖形的平移規則，其實是一樣的。

評量

不宜出現與絕對值合成的函數，例如 $f(x)=|x^2-3x|+4x-6$。

F-10-2 三次函數的圖形特徵：二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。 **備註**：認識一般三次函數皆為 $y=ax^3+px$ 之平移；用 $(x-h)$ 的多項式，探討函數圖形在 $x=h$ 附近所近似的一條直線。	f-V-2 a-V-1 g-V-5

先備：了解二次函數圖形具有對稱軸的特徵，並能應用於繪製圖形（F-9-2）。

連結：能將二次函數透過配方法表示成標準式（F-10-1），能將三次函數表為 $(x-a)$ 之形式的多項式（A-10-2），能連結大域特徵與多項式函數圖形（F-10-3）。

後續：連結函數的奇偶性與圖形的對稱關係（F-12甲/乙-1），多項式函數的導函數（F-12甲/乙-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本條目主要希望學生能透過描點與圖形繪製，觀察二次及三次函數圖形的對稱特性，在此並不會介紹奇函數與偶函數的定義，也沒有介紹四次或更高次函數，與 99 課綱有所不同。另外配合條目 A-10-2，可將三次函數表為 $(x-a)$ 之形式，藉以讓學生能從此形式了解三次函數在局部區域的圖形會近似於一條直線，此部分內容則是 99 課綱所沒有呈現的。

2. 學習目標

   (1) 能理解大域的特徵是由最高次項所決定。

   (2) 透過在方格紙上描點，與電腦軟體的輔助，能觀察並歸納出二次函數的線對稱特徵及三次函數的點對稱特徵。

   (3) 能理解將 $x \mapsto x-h$ ， $y \mapsto y-k$ 代表函數圖形有水平及鉛直的平移現象。

   (4) 能理解三次函數圖形可經平移對稱於原點。

   (5) 能透過將函數表為 $(x-a)$ 之形式理解圖形在局部會近似於一直線的特性。

3. 教學斟酌

   (1) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出二次函數單項式 $y=ax^2$ 具有 $x \mapsto -x$ ，不影響函數值的特性，發現其對稱 y 軸的特性，並藉由將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 表為 $y=a(x-h)^2+k$ 的過程，讓學生理解 $y=a(x-h)^2+k$ 為 $y=ax^2$ 平移後得到。

   (2) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出三次函數 $f(x)=ax^3$ 具有 $x \to -x$ 時，$y \to -y$ 的特徵，觀察出三次函數 $f(x)=ax^3$ 具有對稱原點的結果。

   (3) 透過實例，讓學生了解任意三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 皆可選取適當的 h 值，透過配三次方的過程，變成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ ，此圖形可由 $g(x)=ax^3+px$ 平移得到， 因此了解到任意三次多項式的圖形都會有對稱中心。此處可讓學生比較二次函數與三次函數的不同點，二次函數可透過配方法平移回通過原點的單項式，代表二次函數具有極大值或極小值，而三次函數則可平移回對稱於原點的圖形。

   (4) 透過將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 表為 $y=a(x-h)^2+b(x-h)+k$ 的過程，讓學生理解在 $x=h$ 附近 (局部)，圖形會有近似於一直線的特徵，此處可順便說明直線斜率恰為 $(x-h)$ 項的係數。

   (5) 透過實例讓學生理解當 $|x|$ 很大時， $y=ax^3+bx^2+cx+d \approx ax^3$ ，藉以說明三次函數的大域性質由最高次項決定。

   (6) 老師在教學上，可利用電腦軟體輔助繪圖，讓學生能透過圖形觀察理解對稱的特徵。

條目範圍

1. 本條目著重描點觀察函數圖形的對稱特徵，並未涉及奇函數與偶函數之定義：$f(-x)=-f(x)$，$f(-x)=f(x)$，僅討論圖形的對稱特性（連結 G-10-1）。
2. 本條目是藉由泰勒形式的表現方式讓學生能體會在 $x=h$ 附近（局部），圖形會有近似於一直線的特徵，以作為後續學習微分及切線概念的基礎，但此處不宜出現與微分相關的數學問題。

釋例

1. 已知下列各函數，觀察它們的圖形，並回答下列問題。

   $y=x^3$、$y=x^3+3x^2$、$y=x^3+x$、$y=x^3+x+1$、
   $y=-x^3$、$y=-x^3+6x^2$、$y=-x^3+6x$、$y=-x^3+x-3$、
   $y=2x^3$、$y=x^3+3x^2+1$、$y=-x^3+6x+2$、$y=x^3-3x^2+4x-2$。

   (1) 哪些圖形本身對稱於原點？為什麼？它們的各項次數有何特徵？

   (2) 已知 $y=x^3-3x^2+4x-2=(x-1)^3+(x-1)$，則這個函數圖形可以從上述哪一個函數圖形平移得到？

   (3) 已知 $h(x)=y=-x^3+6x^2=-(x-2)^3+12(x-2)+16$，若把 $h(x)$ 下移 16 單位，再向左平移 2 單位，新圖形會對稱於原點嗎？

   (4) 若 $y=x^3+3x^2+1=(x-a)^3+k(x-a)+l$，請找出 $a=$_____，$k=$_____，$l=$_____。並說明如何平移此圖形，使其對稱於原點。

   (5) 你認為任意三次多項式的圖形都可以經由平移，使其圖形對稱於原點嗎？為什麼？

   (6) 已知 $f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)+1$，透過 Excel 的計算，讓學生能透過觀察體會在 $x=2$ 附近，圖形會有近似於一直線的特徵。

$x=2$ 附近	原函數	直線	誤差
$x-2$	$f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)+1$	$g(x)=3(x-2)+1$	$\lvert f(x)-g(x)\rvert$
-0.005	0.985149875	0.985	0.000149875
-0.004	0.988095936	0.988	0.000095936
-0.003	0.991053973	0.991	0.000053973
-0.002	0.994023992	0.994	0.000023992
-0.001	0.997005999	0.997	0.000005999
0.000	1	1	0.000000000
0.001	1.003006001	1.003	0.000006001
0.002	1.006024008	1.006	0.000024008

$x=2$ 附近	原函數	直線	誤差
0.003	1.009054027	1.009	0.000054027
0.004	1.012096064	1.012	0.000096064
0.005	1.015150125	1.015	0.000150125

F-10-3 多項式不等式：解一次、二次、或已分解之多項式不等式的解區間，連結多項式函數的圖形。 **備註：**搭配不等式的解，引進實數的區間符號，可包括區間的聯集以及 $\pm\infty$ 符號，可連結描述式的集合符號。僅限表達不等式的解區間，不做區間的集合運算。	f-V-2 a-V-4

先備：一元一次不等式的意義（A-7-7）、一元一次不等式的解與應用（A-7-8）。

連結：區間符號（N-10-2）、一次與二次函數（F-10-1）、三次函數的圖形特徵（F-10-2）。

後續：微分（F-12甲-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   已刪除牛頓整係數一次因式檢驗法，因此三次以上的多項不等式，需是已分解的多項式才能求其不等式的解。

2. 相關約定

   以 $[a,b]$、(a,b)、$[a,b)$、$(a,b]$、$(-\infty,b]$、$(-\infty,b)$、$[a,\infty)$、(a,∞) 等區間符號以及聯集符號 $\cup$ 表示解區間；不一定在本條目全部用到。

3. 學習目標

   (1) 透過圖形繪製，說明圖形與 x 軸的交點，即為方程式的根，並能進一步了解一次與二次不等式解的關鍵，在於求得與 x 軸的交點後，即能求出一次、二次不等式的解區間。

   (2) 透過圖形觀察 $f(x)\geq 0$、$f(x)\leq 0$、$f(x)>0$、$f(x)<0$，其對應的解區間。

   (3) 對於已分解的多項式，理解若為偶數重根，則重根處圖形兩側的值同號；若為奇數重根處，則圖形左右兩側的值異號，即圖形穿越 x 軸。

   (4) 了解已分解的三次以上不等式圖形與 x 軸的交點處特徵，並能判別圖形在哪些區間位於 x 軸上方，哪些區間位於 x 軸下方後，即能求得三次以上的已分解不等式的解區間。

4. 教學斟酌

   (1) 二次函數 $f(x)$ 的圖形若與 x 軸不相交，由圖形觀察出其為恆正或恆負特徵，並透過配方法，驗證恆正或恆負的性質。在此，因為尚未有虛根概念，所以僅說明 $f(x)=0$「無解」即可，不必說它「無實根」。

   (2) 教師可搭配電腦軟體，繪製各種不同的函數圖形，幫助學生觀察不等式解的情形，體

會圖形變化的規律與代數解的關係。

條目範圍

1. 三次以上未分解的多項式不等式，若告知其因式或一個根，可透過因式定理分解此多項式，即可畫出多項式的簡圖，並求得不等式的解。
2. 三次以上的多項式不等式，若未分解並且未告知其因式，在此不宜出現。
3. 不含分式不等式。

釋例

1. 奇數重根與偶數重根在圖形上的差異，宜在根的左右兩側代入靠近的點，觀察函數值的正負號，以了解其圖形特徵上的不同。
2. 可與因式定理結合，求出不等式的解。例如已知 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 有 $x-1$ 的因式，求 $f(x)\geq 0$ 的解。

錯誤類型

1. 學生不能理解為何不等式 $(x+1)(2-x)>0$ 應先化為係數為正的 $(x-1)(x-2)<0$，教師應在這裡提出清楚的說明。
2. 學生過去的經驗，似乎顯示不同的不等式應該有不同的解。但是在此卻可能發現，不同的多項式不等式卻有相同的解，例如 $(x+2)(x^2+x+1)>0$ 與 $(x+2)(x^2+2x+5)>0$ 是不同的不等式，其解卻相同。教師不必刻意教導這個現象，但如果學生產生了疑問，可以先說不同的方程式本來就可能有同樣的根，例如 $2x=0$ 和 $x^3+x=0$ 的解是一樣的；而前面那兩個三次不等式的情況，可以從那它們的圖形來理解，建議教師使用繪圖軟體來輔助講解。

評量

1. 絕對值分式不等式不宜出現，例如不宜解不等式 $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 2$。
2. 下列試題在此不宜出現。設 $f(x)=x^5+x^4-10x^3-10x^2+x+5-a$，其中 $a\in\square$，若 $f(x)=0$ 之一根為 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $f(x)\geq 0$ 的解。
3. 不要考哪些多項式不等式有相同的解。

D-10-1 集合：集合的表示法，宇集、空集、子集、交集、聯集、餘集，屬於和包含關係，文氏圖。★# **備註：**連結在區間與不等式解區域的經驗，適度銜接國中經驗，例如：以四邊形作為集合運算的範例。	d-V-1

先備：一元一次不等式的解與應用(A-7-8)，四邊形的基本性質(S-8-9、S-8-10、S-8-11)。

連結：實數，絕對值不等式 (N-10-2)，多項式不等式 (F-10-3)，複合事件的古典機率 (D-

10-4)。

後續：函數的定義域與值域，複數 (N-12甲-3、N-12乙-1)。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   就學習目標而言，沒有差異。但是，在教材安排上，本課綱不鼓勵按照數學知識內容劃分學習內容，關於集合的概念和溝通方式，分散在 10 年級的課程中，在適當的情境與脈絡中，搭配其他學習內容而一併學習。

2. 相關約定

   (1) 大多數關於集合的符號，已有明確的慣例，故從略。惟描述式的集合定義，在一對大刮號之內，建議以 ｜ 作為分界符號。例如 $\{n \in \mathbb{N} \mid n \div 2 \text{ 餘 } 0\}$。差集 (集合的減運算) 符號為反斜線 \，集合 A 的餘集記作 A' 或 A^c 。

   (2) 非負整數 (全數) 並無慣例符號，建議寫成 $\mathbb{N} \cup \{0\}$。(應避免 $\mathbb{N}_0$ 符號，它看起來像是 $\mathbb{N}$ 的某個子集，而且它容易與 Aleph Null 符號 $\aleph_0$ 混淆)。

3. 學習目標

   (1) 知道集合的定義，能使用表列法與描述法表達集合。

   (2) 理解並能用文氏圖表達宇集、空集、子集、交集、聯集、餘集的意義。

   (3) 以實際的例子與文氏圖解釋笛摩根定律。

   (4) 以區間連結多項式不等式的解。

   (5) 認識「集合中的元素」，理解屬於和包含關係，前者為元素與集合，後者為集合與集合的關係。

4. 教學斟酌

   (1) 適度銜接國中經驗，例如以各種四邊形作為集合運算的範例。

   (2) 可視學生程度介紹「解集合」的意義。

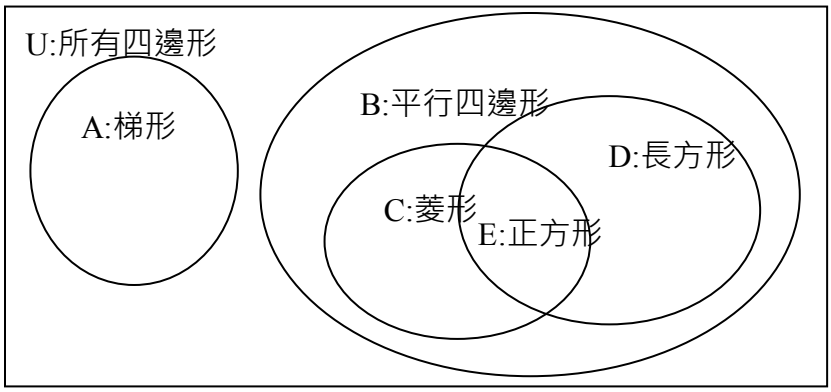
   (3) 非負整數 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 是認識聯集與「或」之連結的好例子。

條目範圍

本條目不設置獨立的教學單元，應融入適當課題，如數系、不等式的解區間或解區域、排列組合與機率問題，在適當的脈絡中引介，並逐步擴充其內涵。

釋例

1. 利用文氏圖表達四邊形類型之間的關係如下：



則以集合符號可以表達為：

$E \subset C \subset B \subset U$ 、 $(C \cup D) \subset B$ 、$A \cap B = \varnothing$ 、$C \cap D = E$ ...。

2. 利用介紹樹狀圖時，介紹集合的運算，樹狀圖的分支之間即為沒有交集的子集，各分支相當於對宇集的一個分割。
3. 有甲乙丙丁4人排成一列，若規定甲不在首位且乙不在末位，則有幾種排列方法？除了列舉法，亦可使用文氏圖說明，A 為甲在首位方法，B 為乙在末位方法，則欲求的方法數為 $(A \cup B)'$。

錯誤類型

1. 學生較常在「且」為「交集」,「或」為「聯集」產生混淆。同時對於符號∩與∪，需要一些時間才能熟悉。老師可利用形狀的特性，如「且」的前兩筆畫近似交集符號∩，而「或」的韻母ㄛ狀似聯集符號∪，來幫助學生記憶。(此外「且」的韻母ㄝ與英文 AND 的母音相同，「或」的韻母ㄛ與英文 OR 的母音相同。)。
2. 學生對{1,1,2}={1,2}的理解需要說明。一種類比的方法是，同一個電腦資料夾(有如集合) 之內，不容同樣名字的兩個檔案。

評量

1. 建議不列入評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。
2. 避免純粹符號操弄的題型，例如： $A=\{\varnothing,\{2\}\}$，下列敘述何者正確？

   (1) $\varnothing \in A$　　(2) $\{2\} \subset A$　　(3) $\{2\} \in A$

   這種題目即為「以集合為直接評量對象」，不宜。
3. 沒有情境的集合考題通常就是「以集合為直接評量對象」，不宜。

D-10-2 數據分析：一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。 **備註**：適度與國中所習的數據分布圖重疊，但加深加廣其情境，並將四分位數延伸至百分位數。學生應知道統計數據可能有略為不同的定義，也應理解可能產生數值略為不同但意義相同的數據;學生也應習得根據數據的特徵選擇適當統計量的基本能力。最適直線的教學重點是先辨識可能有直線關係，然後討論其「最適」的評量標準；建議以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，推論最適直線即可。教師應以方便取得的資訊工具，做數據分析的操作示範。	d-V-2 n-V-2 g-V-5

先備：統計數據的分布（D-9-1）。

連結：客觀機率（D-11A,B-1），直線方程式（G-10-2）。

後續：離散型隨機變數（D-12甲/乙-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   就內容而言，與 99 課綱相近。但新課綱將過去 9 年級的百分位數移到此，且本條目強調最適直線的教學重點是「先辨識可能有線型關係」，然後才討論其「最適」性。而在教法上，也建議以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，作為最適直線的教學進路。此外，本課綱在 10 年級不使用 $\sum$ 符號。

2. 相關約定

   (1) 數據資料的第 m 百分位數記作 P_m ，其中 m 為正整數 1, 2, ..., 99。其詳細約定，寫在釋例中。

   (2) 此條目不含隨機變數的觀念，但是可以設計其前置經驗，例如以數列呈現數據，並以 X 作為數列名稱。然後，可以用 $\bar{X}$ 表示數據的平均值，也可以用 μ_X 和 σ_X 表示 X 的平均值和標準差：在不虞混淆的前提下，可以直接用 μ 和 σ 表示 X 的平均值和標準差。

   (3) 約定一組有限數據的標準差是「變異數」的（正）平方根，而變異數是數據與平均值之差平方的平均值。

   (4) 以 r_{XY} 代表兩組數據 X 和 Y 的相關係數，或在前後文清楚的條件下，以 r 代表相關係數。

3. 學習目標

   (1) 能綜合運用國中階段所學的各種以圖形呈現數據資料的方法；能在嘗試與比對之後，根據數據的特徵而選擇適當表現數據分布狀況的圖示。

   (2) 對適當的數據資料，能將國中的四分位數相關概念延伸至百分位數。

   (3) 知道統計數據可能有略為不同的定義（例如第一四分位數），理解它們可能產生數值略

為不同但意義相同的數據。

(4) 能根據數據的特徵或欲調查之目的，選擇適當的統計量。

(5) 能理解並計算未分組資料的百分位數，並能用於溝通和解釋。

(6) 能理解並計算數據的平均值與標準差，並能用於溝通、解釋和預測。

(7) 能將數據標準化，並能用於溝通、解釋和比較。

(8) 能做並理解二維數據散布圖，觀察兩數據可能的關係，若有線型關係則能做最適直線並且理解相關係數的意義，能用於溝通、解釋和預測。

4. 教學斟酌

(1) 適度與國中所習的數據圖重疊，但加深加廣其情境：包括長條圖、圓形圖、直方圖、（相對與累積次數）折線圖、盒狀圖等。所有國中階段學習的數據處理工具，都應該持續在高中課程中使用，不但不該刻意避開，反而要在適當情境中經常運用，以達到素養培育的目的。

(2) 統計量是用來協助我們從資料中洞察趨勢、關聯或特徵的工具，使用刻意設計的特殊數據，可能使得統計量失去其效用。教師可以呈現這些「失效」的可能性，學生也最好能夠辨識這些情況，以便根據資料與目的，選擇適當的統計量。但是，這些例外的情況，不宜喧賓奪主而成為教學的重點，更不宜成為評量的題目。

(3) 承上，舉例而言，當資料量很少的時候，不適合使用百分位數；當數據之變異性不足的時候 (例如雖然有 100 筆數據，卻只有兩種不同的值)，並不適合用它們的四分位距表現數據的分散情況，也不宜討論它們的百分位數。

(4) 最適直線的教學重點是先辨識可能有線型關係，然後討論其「最適」的評量標準；建議先以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，推論最適直線，然後再擴及一般性的數據。教師應以方便取得的資訊工具，做數據分析的操作示範。

(5) 本條目不使用 $\sum_{k=n}^{m}$ 表示足標 k 從 n 迭代到 m 的連加，請盡量在具體情境下使用刪節號 ...替代，或者輔以文字註解，代替以上符號；甚至 (對於某些學生) 只要推論三筆或四筆資料的特例就足夠了。

(6) 本條目應盡量給學生學習操作電腦軟體以解決實際問題的機會。

條目範圍

1. 本條目不含隨機變數。

2. 僅處理未分組之數據資料。

釋例

未分組數據資料的第 m 百分位數 P_m 指的是同時滿足以下兩條件的數：

- 小於或等於 P_m 的資料數量至少占全部資料量的 $m\%$ 。

● 大於或等於 P_m 的資料數量至少占全部資料量的 $(100-m)\%$。

當資料中恰有一個滿足上述條件的（原始）數據時，採用它作為 P_m；當超過一個（原始）數據滿足上述條件時，取它們的平均值作為 P_m。

錯誤類型

1. 兩組數據的相關性，不能被解釋為因果性。
2. 如果不觀察散佈圖而直接計算相關係數，可能忽視了非線性關係的關聯性。

評量

不要刻意創造一組特殊數據，使得統計量失去意義或產生無效的結果。

D-10-3 有系統的計數：有系統的窮舉，樹狀圖，加法原理，乘法原理，取捨原理。直線排列與組合。 **備註：**此處的排列與組合，以供應古典機率之所需為教學目標；應包含二項式展開作為組合的應用範例。	d-V-6 d-V-7

先備：熟悉兩層以內的樹狀圖操作（D-9-2）。

連結：熟悉集合間的包含關係與文氏圖（D-10-1），使用有系統的計數方法處理古典機率問題（D-10-4）。

後續：使用有系統的計數方法處理條件機率問題（D-11A-2、D-11B-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   重複組合在 99 課綱是以介紹內容，不介紹符號為原則；本課綱不含重複組合相關內容。另外有關二項式定理在 99 課綱為獨立條目，在本條目中則是以介紹二項式展開做為組合概念的說明例題，本課綱不單獨另立條目。

2. 相關約定

   (1) $n!$ 讀作「n 階乘」，n 為非負整數；規定 $0!=1$，當 n 為正數則 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times1$。

   (2) 定義 $P_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，表示從 n 個相異物中，選出 m 個排成一列的方法數，其中 n、m 為非負整數且 $m\le n$。P_m^n 稱為排列數，建議讀作「P n 取 m」，P 是 Permutation 的縮寫。

   (3) 定義 $C_m^n=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，表示從 n 個相異物中，選出 m 個的方法數，其中 n、m 為非負整數且 $m\le n$。C_m^n 稱為組合數，建議讀作「C n 取 m」，C 是 Combination 的縮寫。

   (4) 條目中的取捨原理也可稱為排容原理。

3. 學習目標

(1) 能藉由生活實例具體操作窮舉法，並有系統地進行列舉。

(2) 能透過繪製樹狀圖解決計數問題。

(3) 能理解一一對應原理，並用以解決計數問題。

(4) 能理解加法原理，並用以解決計數問題。

(5) 能理解乘法原理，並用以解決計數問題。

(6) 能理解取捨原理，並用以解決計數問題。

(7) 能理解直線排列的方法與原理，並建立 P_m^n 的符號與數學概念的連結。

(8) 能理解組合的方法與原理，並建立 C_m^n 的符號與數學概念的連結。

4. 教學斟酌

(1) 透過具體的操作（如骰子點數、倍數選取、取球...），讓學生能了解並體驗窮舉法的過程，此處應同時呈現可連結與不可連結加法原理或乘法原理的例子。

(2) 國中階段已經處理過兩層以內的樹狀圖，本階段教學過程著重在兩層以上，以各節點之分支數不同的樹狀圖問題，以連結加法原理、乘法原理，以及將來的機率問題。

(3) 選取適當的例題說明一一對應關係，協助學生體會從初始問題轉化為可具體操作的數學模型的歷程，並能連結常用的計數方法（如直線排列、組合...）。

(4) 介紹加法原理及乘法原理時，應斟酌選用數據不宜過大，避免因計算量過大造成學習重點失焦。題目設計與選取應著重引導學生能利用窮舉法或樹狀圖分析問題，並綜合使用加法原理及乘法原理。

(5) 取捨原理應連結文氏圖的概念，限制條件建議在三個以內，主要希望學生能透過文氏圖理解取捨原理並用以解決較為複雜的計數問題。

(6) 直線排列的介紹以相異物排列、不盡相異物排列、重複排列為原則，以連結乘法原理，做為應用。此處可適當結合窮舉法、樹狀圖、加法原理、取捨原理，但不宜出現條件太過複雜的問題。

(7) 組合觀念的介紹以延續直線排列的學習結果為出發點，藉以連結 P_m^n 與 C_m^n 的關係，並能從中了解此兩種計數模型的使用方法。

(8) 與 C_m^n 有關的組合公式甚多，選用時應著重題目情境的合理性進行搭配，不應出現單獨組合公式的推演證明或是由特定組合公式所形塑之情境問題。

(9) 二項式定理可做為組合觀念的延伸應用，僅討論基本類型及與組合的關聯性，不宜做過多的延伸及變化。

條目範圍

取捨原理的問題設計應以三個限制條件以內為原則，不宜出現四個限制條件以上的問題。

釋例

將 0! 規定為 1，它可以從 Gamma 函數推論而得，只是不方便跟高中生說明。將上述規定寫成等式「$1=0!$」有很戲劇的效果，可善加利用。

錯誤類型

1. 加法原理與乘法原理的錯誤選用。
2. 處理分堆問題時，不需要排列，會有重複計算。
3. 先選，後選所造成的重複計算問題，例如：要設置 11 人的委員會，至少需有男性委員 4 人及女性委員 4 人，若要從 7 個男生及 7 個女生中組成委員會，則共有多少種組合方式？

評量

1. 不建議出現二項式定理的延伸問題如：
   - $\frac{1}{3}C_1^n+\frac{1}{9}C_2^n+\cdots+\frac{1}{3^n}C_n^n>100$，則 n 小值為多少？
   - $\left[(a+b)^2+c\right]^7$ 中，$a^8b^2c^2$ 的係數為多少？
   - $(x+y+z)^{10}$ 有多少不同類項？
2. 可介紹單獨的 P_m^n 與 C_m^n 的運算問題，如 $P_{n-2}^n=6$，$C_n^{10}=C_6^{10}$，藉以熟練其運算規則，但不宜出現由 P_m^n 或 C_m^n 所組成的解方程式問題。
3. 二項式定理做為組合觀念的應用，可設計求單項係數之問題，或應用於近似值問題。若要進一步結合組合公式，則需考慮此組合公式的情境合理性。此處不宜出現此類問題：在 $(1+x^2)+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{15}$ 展開式中，求 x^6 項的係數。
4. 排列與組合的所有概念學習皆以 P_m^n 與 C_m^n 為基本計數模型，主要希望學生能透過樹狀圖、窮舉法對問題進行分析、分類，並透過加法原理、乘法原理、取捨原理解決問題，教學設計與題目選取不需做過多或過度複雜的安排。

D-10-4 複合事件的古典機率：樣本空間與事件，複合事件的古典機率性質，期望值。	d-V-3

先備：認識機率（D-9-2），古典機率（D-9-3）。

連結：集合（D-10-1），百分位數（D-10-2），有系統的計數（D-10-3）。

後續：主觀機率與客觀機率（D-11A,B-1），條件機率（D-11A,B-2），貝氏定理（D-11A-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   (1) 期望值在 99 課綱中放在 12 年級的選修上冊，而條件機率與貝氏定理、獨立事件則全

部在 10 年級。本課綱則先在 10 年級隨同古典機率定義了期望值，但將條件機率與貝氏定理移到 11 年級。

(2) 排列組合的教學目標只含基本的排列與組合，因此在古典機率的問題中，不應藉由太繁複的排列組合技術，求樣本空間或事件的數量。

2. 相關約定

(1) 試驗是指可在相同條件下重複執行但不確定其結果的程序。試驗的所有可能結果所成的集合，稱為樣本空間。樣本空間的每個元素，亦即試驗的每一種可能的結果，稱為一個樣本或樣本點。樣本空間的子集合，稱為事件。

(2) 樣本空間通常以 S 表示，事件 A、B 的和事件以 $A\cup B$ 表示、積事件以 $A\cap B$ 表示、餘事件以 A' 表示，當 $A\cap B=\varnothing$ 時，稱事件 A、B 為互斥事件。

(3) 事件 A 的機率以 $P(A)$ 表示。

(4) 因不涉及隨機變數，故直接以 $m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_kp_k$ 定義期望值，其中 p_i 是發生事件之值為 m_i 的機率，$i=1$、2、…、k。

3. 學習目標

(1) 理解以古典機率計算機率的前提是：能窮舉樣本空間的元素，且每個樣本點發生的機會均等。

(2) 透過樣本空間個數與事件個數的比值，定義事件 A 的古典機率為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$。

(3) 由實例說明和事件($A\cup B$)、積事件($A\cap B$)、餘事件（A'）的意義，並進而利用機率的性質求其對應的機率。

(4) 了解期望值，並能與平均值做對比。

4. 教學斟酌

(1) 強調古典機率的基本假設：每一個樣本點的機率相等，而所有樣本點的機率總和為 1。

(2) 雖然隨機變數不在本條目的範圍內，但在數學上，樣本空間將是隨機變數的定義域，而隨機變數的機率密度(或分布)當然不見得均等。將來在十一年級學到貝氏定理時，樣本點的機率通常都是不同的。所以，樣本空間的初期教學，須特別留意教材內部的一致性與學生認知的發展脈絡。樣本空間的元素個數，與試驗關注的結果有關，試舉以下兩例。

試驗 A：擲兩枚公正硬幣，試驗的結果僅關注正面、反面出現的次數。

試驗 B：擲公正 10 元硬幣和 50 元硬幣各一枚，試驗的結果關注各枚硬幣正面或反面的狀況。

則試驗 A 的樣本空間 S_1 有 3 個元素，但是試驗 B 的樣本空間 S_2 有 4 個元素。若要用古典機率來計算 S_1 或 S_2 之樣本點機率時，教師應先引導學生考慮 S_1 和 S_2 是否符合古典機

率的前提？然後根據古典機率的定義算出機率。此處的教學須避免自相矛盾。

(3) 本條目不希望引入太多數學的抽象性，所以不正式引進隨機變數與機率密度函數。因此，教材不宜以數學的形式來定義期望值。在脈絡中讓學生了解，可以將試驗的期望值和數據的平均值做一番對比性的連結。

(4) 排列組合只講授基本的排列數與組合數，不含重複組合，因此相對應的求機率問題，也不應有繁複的排列組合問題。

條目範圍

不涉及條件機率、獨立事件等相關問題。

釋例

1. 投擲兩枚公正的硬幣一次，觀察其正反面，則其樣本空間為 { (正、正)，(反、反) ，(正、反) ，(反、正) } 的一種教學方法，教師可用兩枚「不同」的硬幣做實驗，例如一枚 10 元硬幣和一枚 50 元硬幣，分別定義其「正」「反」面。
2. 承上，投擲兩顆公正的骰子一次，觀察其點數，若要說明其樣本空間有 36 個樣本的一種教學法，是教師可用兩顆外形與材質相同但顏色相異的骰子呈現此實驗，以便協助分辨兩顆骰子各自的點數。

錯誤類型

1. 因與排列組合相連接，學生易受到物體相同或相異所對應的取法數目不同而影響，忽略古典機率是建立在樣本點出現機會均等的條件下。
   ●例：P_1 表一次投擲一個均勻的骰子，連續投三次，出現三次 5 點的機率。
   P_2 表一次投擲三個均勻的骰子，同時出現三個 5 點的機率。
   問 P_1 與 P_2 何者較大？
2. 比率相等的迷思，以為同比例放大，機率就會相等。
   ●例：甲、乙兩人玩遊戲，以丟硬幣決定勝負。約定出現正面是甲贏，出現反面是乙贏，每次輸的人要給贏的人 1 元。令 p_1 表示：丟完兩次後，甲、乙無輸贏的機率； p_2 表示：丟完四次後，甲、乙無輸贏的機率，
   請問： p_1 與 p_2 的關係為何？ (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 > p_2$ (C) $p_1 < p_2$

評量

1. 機率的評量應以機率（或稱不確定性）的思維為主要目標，應避免表面上是機率佈題，但實際上是代數（解方程式）、排列組合、或集合運算的評量題目。
2. 機率問題若使用取捨原理，以不超過三個事件為限。
3. 下列類型問題不屬於此條目的評量目標：
   ● 狡兔有三窟 A 窟、B 窟、C 窟，其習性為：每日夜晚，此兔會決定隔天要繼續留在原

窟，或移動至另兩窟之一，而隔日留在原窟的機率為$\frac{1}{2}$，移動之另兩窟之機率分別為$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$。例如若當日在 A 窟，則隔日在 A 窟之機率為$\frac{1}{2}$，移動之 B 窟、*C* 窟之機率分別為$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$。已知第一次此狡兔在 A 窟，試求：第六日仍在 A 窟之機率為 _ _ _ _。此題應以轉移矩陣概念解之較為合適，不宜作為本條目的評量。

11 年級數學 A 學習內容解析

N-11A-1 弧度量：弧度量的定義，弧形與扇形面積，計算機的 rad 鍵。 **備註**：弧度量與度度量的互換，宜在後續學習的脈絡中，經常練習。	n-V-7

先備：圓弧長與扇形面積（S-9-5），度度量的六十進制（G-10-6）。

連結：三角函數的圖形（F-11A-1）。

後續：複數與方程式（N-12甲-3），方程式的虛根（A-12乙-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱原本將本條目安排在高三選修課程，但是微調之後，已將弧度量融入廣義角的三角比。本課綱因為將三角函數圖形移至高二，故本條目的所有內容會在此一併授完，不會分散到高三。此外，新課綱在課程中納入計算機的使用，所以有關角度、弧長、面積等計算，可以使用計算機輔助。

2. 相關約定

   弧度量的單位名稱為弳(radian)，又稱「弧度」。相對地，以度(degree)為單位測量角，稱為度度量。弧度量又稱為弧度制，度度量又稱為角度制。

3. 學習目標

   (1) 認識度和弳是兩種測量角的單位，並能互相轉換。

   (2) 使用弧度量計算（圓）弧長與扇形面積。

   (3) 能使用計算機的 rad 鍵與 deg 鍵做角的測量值之換算，並能理解換算過程會有誤差。

4. 教學斟酌

   (1) 弧度制的採用有下列原因：用來繪製三角函數圖形、物理圓周運動之所需，以及當$|\theta|$很小時，可以有$\sin\theta\approx\theta$之估計。

   (2) 弧度量的單位固然可以稱為「弧度」，但建議用「弳」，原因是「弧度」裡面又有「度」，跟 degree 的「度」容易混淆；而且既然舊單位 degree 對應一個字，新單位 radian 最好也同樣對應一個字。對初學的學生，教師宜不厭其煩地強調單位，刻意不要省略單位詞「弳」，因為如果沒有建立好單位的概念，則容易出現$\pi=180^\circ$的謬誤：左邊的π是數，而右邊的180°是量，兩者根本不能相比，何來等號？但是逐漸熟練其操作之後，可以省略弧度制的單位，告訴學生那是「默認的」（default）；因為弧度制的定義為兩種長度之比值（弧長對半徑），所以在物理意義上，它是無單位量。

   (3) 教學時，建議可以使用實際的繩長，製作與半徑等長的弧，演示 1 弳的角為多大，以強化學生的心像。

(4) 既然已經採用計算機做弧度制與角度制的換算，請教師不要總是使用 $p\times\pi$ 弳的弧度量和 $k°$ 的度度量 (其中 $p\in\mathbb{Q}$、$k\in\mathbb{Z}$，例如 $p=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、...，$k=30$、45、60、...)，以免限制了學生的經驗，而容易產生迷思概念：以為弧度量總是帶著 π 而度度量總是特殊整數。其實學生在 10 年級就有六十進制的度度量經驗，應該已經知道度度量未必為整數，現在應該維持或增強這個概念。

(5) 在適當的情境中，用計算機將弧度量轉換成度度量之後，讓學生以六十進制 (度、分、秒) 寫出近似的結果。

(6) 不論是弧度制與角度制的換算，或弧長、扇形面積，都用到「比例」的概念，教學時不妨先測試學生的預備知識是否完備，連結 S-9-6。

(7) 弧度量與度度量的互換，宜在後續學習的脈絡中，經常練習。

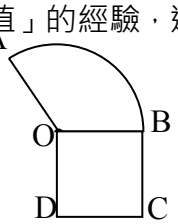
錯誤類型

學生會誤將 π 當作是 $180°$，就會有 π^2 弧度 = $180\times180^\circ$ 的錯誤觀念，這是數學教學中長期忽略「單位」的結果，宜在教學過程中留意。。

釋例

1. 應強調度和弳是兩種測量角的單位，用不同單位測出來的數值當然不同，例如同樣長度的公分和英吋、同樣溫度的攝氏和華氏溫標。類似地，$180°=\pi$ 弳≈3.14 弳，π 和 180 是同一個角 (平角) 用兩種單位測量所得的數值，它們當然不相等：$\pi\neq180$ 而且 $\pi\neq180°$，是「π 弳」等於「180 度」。連結生活中「同一個量用不同單位測得不同數值」的經驗，避免度度量和弧度量的混淆。

2. 如圖有一個花臺形狀包含一個正方形 OBCD 及扇形 AOB，
扇形的半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=3$，AB 弧的長為 6，則



(1) ∠AOB 為多少弧度?大約幾度?

(2) 扇形 AOB 的面積為多少，比正方形 OBCD 的面積大還是小?

3. 利用量角器及圓心在原點的單位圓比較 (1) $\cos3$、$\cos3^\circ$ (2) $\sin3$、$\sin3^\circ$ 的大小，再使用計算機驗證你的結果是否正確。

評量

避免太過複雜與需要特殊技巧的圖形讓學生計算面積或周長。

S-11A-1 空間概念：空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、直線與平面的位置關係，三垂線定理。 **備註：**須認識兩面角，但除了直角以外，不必以幾何方式處理一般的兩面角。	s-V-2

先備：三視圖（S-7-2），空間中的線與平面（S-9-12），長方體上的三角測量（G-10-7）。

連結：弧度量（N-11B-1），空間坐標系（G-11A-2），空間中的平面與直線方程式（G-11A-9,10）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   就內容而言，與 99 課綱相同。但新課綱特別增訂了空間概念的學習脈絡，例如在七年級透過三視圖熟練空間中的思維，9 年級以長方體為具體物件而學習線與線的平行、垂直、歪斜，面與面的垂直與平行，以及線與面的垂直。10 年級雖無空間概念條目，但是在三角比的應用上，刻意安排長方體上的測量，鞏固線與面的垂直概念，並練習基本的操作。所以，新課綱的教材，應善用這些提早安排的前置經驗。

2. 相關約定

   (1) 所謂「空間」是指三個維度的歐幾里德空間，亦即在日常尺度之下，根據生活經驗而認知的空間。

   (2) 歐幾里德的幾何公設固然是最重要的典範，但也有值得檢討之處。十九世紀末以來，產生了幾組不同的歐氏幾何公設系統。本課綱建議以希爾伯特(David Hilbert)在 1899 年於「The Foundations of Geometry」(Townsend 譯）提出的系統為基礎。該系統以不具數學定義的「點」、「直線」與「平面」作為空間中的基本元素，並以一組公設指定它們之間的關係。希爾伯特公設包括（以下使用通用的語言，而不贅述「決定」、「交點」、「落在」等詞彙的定義）：

   i. （空間中）相異兩點決定唯一的直線。
   ii. 不共線三點決定唯一的平面。
   iii. 若直線上有（相異）兩點落在某平面上，則整條直線落在該平面上。
   iv. 若兩平面有一個交點，則它們至少還有另一個交點。
   v. 至少存在不共面的四點。
   vi. 平面上任給一直線 L 與線外一點 A，在該平面上存在唯一的直線，通過 A 點且與 L 沒有交點。

   其中 vi 是「平行公設」，注意希爾伯特和歐幾里德的表達方式不同。

   (3) 當兩平面交於一條直線，該直線稱為其一平面在另一平面上的截痕。

(4) 當空間中兩直線交於一點，這兩條直線落在一平面 F 上，兩直線的夾角是在平面 F 上測量的角。

(5) 當直線 L 與平面 F 交於 P 點，且 L 垂直於平面 F 上所有過點 P 的直線，則稱 L 與 F 垂直，L 是 F 的法線。

(6) 不論是在直線與平面，或平面與平面之間，垂直與平行的符號皆依序為 $\perp$ 和 $/\!/$。

(7) 直圓錐之頂點與底面任一直徑之兩端點所形成的角，稱為直圓錐的頂角（aperture of a right circular cone）。直圓錐之頂點到底面圓周上任一點的線段或射線，稱為直圓錐的母線（generatrix）。

3. 學習目標

(1) 理解不共線三點、交於一點的兩直線、直線與線外一點，皆可決定唯一的平面。在空間中的任一平面上，可以運用平面幾何的任何知識。

(2) 理解空間中的平行線，是指落在同一平面上的不相交直線。

(3) 理解空間中的「角」落在某一平面上；所謂夾角的測量，是在該平面上操作的。

(4) 理解空間中一點，能找到至多三條通過該點且互相垂直的直線；那三條直線兩兩決定一平面，這三張平面兩兩垂直。

(5) 理解直線垂直於平面的定義，理解垂直於同一平面的（相異）直線皆彼此平行，而垂直於同一直線的（相異）平面亦皆彼此平行。

(6) 當直線 L 不垂直於平面 F 且交於一點 P 時，所謂直線與平面的夾角，是指 L 與 L' 的夾角，其中 L' 是 L 在 F 上的正射影（將 L 的點垂直投影到 F 上）。

(7) 理解並能運用法線定理：當直線 L 與平面 E 交於點 P，若 L 垂直於過 P 且落在 E 上的兩相異直線，則 L 垂直於 E。

(8) 理解兩平面必存在公垂面；兩平面的夾角（兩面角）是依它們在公垂面（兩平面交線的垂面）上的截痕而測量的。

(9) 理解三垂線定理。

4. 教學斟酌

(1) 空間概念的教學關鍵之一，是以平面媒體（書本或黑板）溝通空間概念，這種溝通的能力攸關教學成效。本課綱從小學階段起，即注意培養這種溝通能力，例如辨識透視圖、三視圖、示意圖之差異等等的課程安排。最根本的教學之道，仍是「多使用實體模型」，提供學生真實的（動手的）經驗。但是，使用平面作為溝通媒體，在教學中實難避免，雖然課程的設計從五年級就開始發展這套溝通的圖示和語言，十一年級的教師還是要特別留意空間溝通的有效性，確保學生具備使用語言和平面圖示表現空間概念的溝通能力。

(2) 學生在 9 年級以長方體為具體對象而學習了直線與直線的平行、垂直、歪斜關係，平

面與平面的垂直與平行關係，以及線與面的垂直關係。本條目的教學，應善用上述前置經驗。

(3) 10 年級的三角測量，應讓學生憑直覺而認識長方體上若某邊 L 垂直於某面 E 於 A 點，則 L 垂直於 E 上通過 A 的所有直線。這是法線定理的前置經驗。此條目意欲處理一般的直線與平面垂直關係。

(4) 高中數學課程裡，嚴格來說並沒有空間幾何，而僅為空間概念。此概念的發展，就功能而言有兩大目標：測量距離與夾角，而為了支援這兩項目標，課程儘速提供直角坐標系作為輔助工具。所以，此條目的教學，就是要藉由生活中建立的直觀概念，以及過去（九年級和十年級）在長方體上面建立的概念，延伸到坐標空間的建立、理解與熟悉。一般化的空間幾何課題，宜斟酌其需求性；例如，不一定要在無坐標的條件下探討一般的兩面角問題。

條目範圍

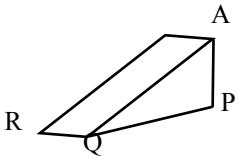
空間幾何的內容浩瀚，本條目僅止於支援空間直角坐標系、空間向量、平面方程式與直線方程式的基礎概念。

錯誤類型

1. 考慮兩平面相交的關係時，誤以為可以交於一點。此錯誤認知可能源自於未能將平面無限延伸，而僅以兩片平板作為概念心像。
2. 當兩條直線分別落在互相平行的兩個平面上，當它們投影到另一平面之後彼此垂直時，學生不認為它們彼此「歪斜」。

釋例

1. 法線定理實為空間性質的關鍵基礎。這個定理的建立，可以利用畢氏定理（正逆敘述），也可以僅利用三角形的全等推論；但是，事實上也容許藉由操作而歸納出這個概念。
2. 將教室視為一個（理想化的）長方體，可以提供很方便的空間概念模型。例如張開一扇門的角度，很自然是看門在地板上的張角，而地板是門和牆的公垂面。教室四周的柱子，都是地板的垂線，它們彼此平行。
3. 直圓錐（面）提供連結三視圖、示意圖、展開圖的機會，而其面積公式再度連結了弧度量。學生已經學過，使用展開圖圓心角的比例來計算圓錐體（側面）的表面積；現在運用弧度量，則展開圖的圓心角 θ 滿足 $R\theta = 2\pi r$，其中 R 為母線長，r 為底部半徑。所以圓錐的面積為 $\frac{1}{2}R^2\theta = \pi Rr$。
4. 三垂線的關係，在正規論證之外，希望能讓學生透過生活經驗而理解，例如以下三種理解的方式。



(1) 用三明治形體（如圖）來想像：面對三明治的斜面，E 是底面，AP 是右後方鉛直的稜

邊（A 點在上），QR 是斜面下緣的水平稜邊（Q 點在右），則直線 AQ 是斜面右緣的稜邊。$\angle AQR$ 是直角。

(2) 用直角板的旋轉來想像：沿用前面的符號，E 是底面，直線 PQ 和 QR 是平面上垂直於 Q 點的兩條直線。放一支直角板在平面上，$\angle PQR$ 即為直角，想像將直角板的頂點 P 朝平面 E 的「正上方」提高到 A 點，而固定 QR 邊在平面上，則三角板的 AQ 邊是原來 PQ 邊的旋轉和伸長，而三角板的直角維持不變；$\angle AQR$ 保持直角。

(3) 其實這就是兩個垂直面的性質，用地板和牆壁來想像：當直線 AP 正交平面 E 於 P 點，而點 Q、R 在平面上，其中直線 QR 垂直於直線 PQ，則由 A、P、Q 三點決定的平面 F 是 E 的垂面，可以想像 E 是地板而 F 是牆壁，則直線 QR 就是地板上垂直於牆壁的一條直線；因為 QR 是平面 F 的垂線，所以 QR 垂直於 F 上所有通過 Q 點的直線，包括直線 AQ。

G-11A-1 平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。 **備註：**請注意連結 10 年級所學的基礎，此處之向量盡量以位置向量為主，以線性組合為主要目標。	g-V-1

先備：以平面直角坐標系、方位距離標定位置（G-7-1）。

連結：空間向量（G-11A-3）、平面向量的運算（G-11A-6）、二元一次方程組的矩陣表達（A-11A-1）、平面上的線性變換（F-11A-3）。

後續：複數（N-12甲-3, N-12乙-1）。

基本說明

1. 相關約定

(1) 向量表示為 $\vec{a}$，若始點 A 終點 B 的向量表示為 $\overrightarrow{AB}$。

(2) 零向量 $\vec{0}$ 不考慮方向。在提及向量與向量的平行或垂直時，不討論 $\vec{0}$。

(3) $\left|\vec{a}\right|$ 表示向量的長度。

(4) 由兩位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 之線性組合 $\left\{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\,|\,0\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1\right\}$ 形成的平行四邊形，稱為由 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$「決定」的平行四邊形。

2. 學習目標

(1) 能理解向量同時具有大小及方向的特性；只要此兩特性相等的向量，就是同一個向量。

(2) 能做平面坐標上 A、B 兩點所形成的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐標表示，以及一點 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐標表示。

(3) 理解平面向量之加法、減法與係數積運算的意義，能透過圖形或坐標方式操作平面向量的加法、減法與係數積。

(4) 能計算平面坐標上兩點之內分點坐標。

(5) 理解平面上一點的位置向量，並能轉換點坐標及其位置向量這兩個概念。

(6) 理解兩向量之線性組合的意涵，並能操作線性組合；能在平面坐標上標示出如 $\{\alpha(1,0)+\beta(1,1)\,|\,0\le\alpha\le 1, 1\le\beta\le 2\}$ 的區域。

3. 教學斟酌

(1) 向量概念建議以位置向量為主，銜接 10 年級以坐標方式學習三角與直線的歷程，並透過位置向量介紹向量的加法、減法及係數積運算，最後再以純向量形式介紹向量的加、減及係數積。

(2) 學生常忘記向量可移動到任意始點，教學時宜製造機會，讓學生能在脈絡中多練習此操作；可利用自製教具讓學生動手做平面上的向量移動。

(3) 建議從向量線性組合的觀點來看三點共線性質，順便連結直線參數式，往前可以將分點公式的結果連結 10 年級已介紹過的數線上的分點公式，往後也可以銜接空間向量的相關性質。

(4) 教導平面向量的最主要目的，是為空間向量乃至於高維度向量的操作（加、減、係數積與線性組合）建立概念心像；在高維度，向量很難做具體的操作，難免成為概念性的操作，而其概念心像則須依賴於平面向量的操作經驗。而高中的向量教學，總目標是為大學之線性代數和矩陣計算相關課程奠定基礎，並不是支援物理課程的工具，也不是處理平面幾何的利器。在此課程理念之下，平面向量之幾何教學素材，例如三角形的三心相關性質等，還是應聚焦於線性組合觀念的連結。

條目範圍

1. 不證明三點共線的充要條件：已知 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，$A$、$B$、$C$ 三點共線若且惟若 $\alpha+\beta=1$。
2. 不觸及基底及線性相關、獨立等名稱。

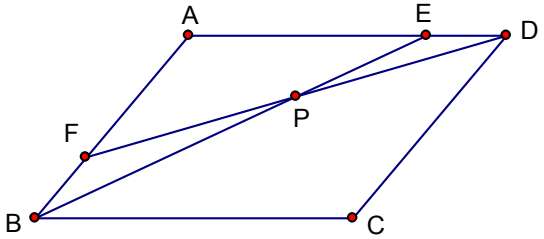
錯誤類型

1. 在未確定為位置向量時，誤把點坐標當作向量運算。
2. 誤將向量長度符號當作絕對值使用，例如 $\vec{a}=(2,-1)$，則有 $|\vec{a}|=|(2,-1)|=(2,1)$ 的錯誤結果。
3. 忘記向量可移動到任意始點，或者不會操作平面向量。

評量

不應設計過度複雜的三點共線之線性組合問題。例如以下題目不宜：

平行四邊形 $ABCD$ 中，E 是線段 AD 上一點，且 $\overline{AE}=3\overline{ED}$，$F$ 是線段 AB 上一點，且 $\overline{AF}=2\overline{FB}$，若 BE 與 DF 交於點 P，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則數對 $(x,y)=$ ？$\overline{DP}:\overline{PF}=$ ？



G-11A-2 空間坐標系：點坐標，兩點距離，點到坐標軸或坐標平面的投影。	g-V-1

先備：平面直角坐標系（G-7-1）、空間中的線與平面(S-9-12)。

連結：空間概念（S-11A-1）、空間向量（G-11A-3）。

基本說明

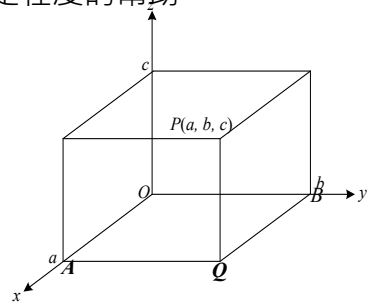
1. 與 99 課綱的差異

基本上與 99 課綱無差異，唯本課綱在九年級已透過長方體的例子，建立空間中線與線、線與面的位置關係，因此學生對於空間坐標系的了解，應有一定程度的幫助。

2. 相關約定

(1) 以右手系 x-y-z 表示空間坐標系（如右圖）。

(2) 坐標平面分別以 xy 平面、yz 平面、xz 平面表示。



3. 學習目標

(1) 能在空間坐標系中，做點到坐標平面的正射影點，以及點到坐標軸的正射影點。

(2) 透過空間坐標系的建立，將空間中的點到坐標軸與坐標平面的距離，與此點的坐標連結。

(3) 求空間中兩點的距離。

4. 教學斟酌

(1) 為協助學生建立空間坐標的觀念，在探討空間中（異於原點）某點 P 的坐標時，宜以原點和 P 點為頂點，x、y、z 軸為邊，做輔助長方體，連結長方體的經驗以幫助觀察與思考。

(2) 空間坐標中點到坐標平面、點到坐標軸的距離概念，可透過國中已了解的長方體，建立距離及垂直概念。

(3) 透過點到坐標平面的投影、畢氏定理，及長方體概念，理解空間中兩點的距離公式。

條目範圍

空間坐標系的建立，主要讓學生了解由點 $P(a,b,c)$ 的坐標，即可得知點 P 到 x、y、z 軸的距離，以及點 P 到 xy 平面、yz 平面、xz 平面的距離，不涉及 $\overrightarrow{OP}$ 與 x、y、z 軸的夾角問題。

釋例

除透過上圖的長方體觀察直線 PA 垂直於 x 軸外，亦可透過三垂線定理瞭解 PA 垂直於 x 軸，因此點 P 到 x 軸的距離為 $\overline{PA}$；同理點 P 到 y、z 軸的距離分別為 $\overline{PB}$、$\overline{PC}$。

錯誤類型

學生會以為點 $P(a,b,c)$ 到 x 軸的距離是 $|a|$，應透過上圖的長方體，讓學生觀察到 $\overline{OA}=|a|$，而點 $P(a,b,c)$ 到 x 軸的距離為 $\overline{PA}$。

G-11A-3 空間向量：坐標空間中的向量係數積與加減，線性組合。	g-V-1

先備：空間中的線與平面（S-9-12）。

連結：空間概念（S-11A-1），空間坐標系（G-11A-2），空間向量的運算（G-11-6），平面方程式（G-11A-9），空間中的直線方程式（G-11A-10）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   就內容而言，與 99 課綱相近。但新課綱將此課題在 B 版中移除。

2. 相關約定

   (1) 向量表示為 $\vec{a}$，若始點 A 終點 B 的向量表示為 $\overrightarrow{AB}$。

   (2) 零向量 $\vec{0}$ 不考慮方向。在提及向量與向量的平行或垂直時，不討論 $\vec{0}$。

   (3) $|\vec{a}|$ 表示向量的長度。

   (4) 由兩位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 之線性組合 $\left\{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\,|\,0\le\alpha\le1,\ 0\le\beta\le1\right\}$ 形成的平行四邊形，稱為由 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$「決定」的平行四邊形。

3. 學習目標

   (1) 能做空間坐標中 A、B 兩點所形成的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐標表示，以及一點 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐標表示。

   (2) 理解空間向量之加法、減法與係數積運算的意義，能操作空間向量的加法、減法、係數積。

   (3) 能計算空間坐標中兩點之內分點坐標。

   (4) 理解空間中一點的位置向量，並能轉換點坐標及其位置向量這兩個概念。

   (5) 理解兩向量之線性組合的意涵，並能操作線性組合；能在空間坐標中標示出如 $\left\{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,1)\,|\,0\le\alpha\le1,0\le\beta\le1\right\}$ 的區域。

4. 教學斟酌

   (1) 向量概念建議以位置向量為主，教學時宜以平面向量作為參照，將平面向量之加、減、係數積和線性組合的概念，類比到空間向量，讓學生同時複習平面向量也學習到空間向量新概念。

   (2) 因為立體圖形在 3D 轉為平面 2D 圖像後，空間感會受到影響，教學時建議以空心長

方體的模型，讓學生在其頂點與邊上的點取為向量的兩端，操作空間向量的加減法；除了坐標化之外，同時提供向量加減法的直觀概念。

(3) 學生常忘記向量可移動到任意始點，除了多連結平面向量的經驗以外，也可以多製造練習此概念的機會。

條目範圍

不觸及基底及線性相關、獨立等名稱。

錯誤類型

1. 在未確定為位置向量時，誤把點坐標當作向量運算。

2. 誤將向量長度符號當作絕對值使用，例如 $a=(2,-1,-1)$，則有 $\left|\vec{a}\right|=\left|(2,-1,-2)\right|=(2,1,2)$ 的錯誤結果。

3. 忘記向量可移動到任意始點，或者不會操作空間向量。

評量

評量時採用的空間形體，以能順利置於空間坐標系之內的類型為宜。

G-11A-4 三角不等式：向量的長度，三角不等式。 **備註：**涵蓋實數的三角不等式，作為向量之三角不等式的特殊例。	g-V-4 n-V-4

先備：三角形的基本性質（S-8-8）。

連結：空間概念（S-11A-1）。

後續：複數（N-12甲-3、 N-12乙-1），函數的極限（F-12甲/乙-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

本課綱將實數的三角不等式放在此條目，當作向量之三角不等式的特殊狀況。

2. 相關約定

用 $\left|\vec{a}\right|$ 表示平面向量或空間向量 $\vec{a}$ 的長度。

3. 學習目標

(1) 能做平面向量以及空間向量的長度運算。

(2) 理解平面向量的三角不等式，並能類比於實數 a、b 的同樣不等式形式。

(3) 理解兩空間向量可以落在同一平面上，而它們符合三角不等式。

4. 教學斟酌

(1) 本條目宜融入平面向量與空間向量的教學單元，不必獨立一個單元。

(2) 當 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不平行，理解三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$，或者 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$，都可以用三角形的三邊作為表徵，利用此表徵發展三角不等式，並說明等號成立的條件。

(3) 因為實數的不等式$\|x|-|y\| \le |x \pm y| \le |x|+|y|$看不到「三角形」的關係，導致對於「三角」不等式的名稱產生疑惑。所以將這個特例放在本條目，提供教師平面上三角形三邊關係的類比。實數的三角不等式。

(4) 三角不等式 $\|x|-|y\| \le |x+y|$的等號成立條件為x, y異號，而$|x+y| \le |x|+|y|$ 的等號成立條件為x, y同號，學生常忽略兩者之間的差異。對照到向量形式，則應注意平行的狀況有同向與反向兩種，教學上可強化此兩種觀點的連結。

(5) 不等式 $|x|-|y| \le |x-y|$也是正確的，教師宜指出這條不等式「顯而易見」而非「錯誤」。

錯誤類型

學生可能混淆「求解」的不等式和「恆」不等式，例如求解不等式$\|x-3|-|x+1\| \le 2$相對於三角不等式$\|x-3|-|x+1\| \le 4$，這兩個觀念需謹慎釐清並給予足夠的時間，使學生在合理的脈絡中分辨兩者。

釋例

學過向量內積以及柯西不等式之後，可以與三角不等式連結：

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$，所以$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$。再從這裡，運用$|\vec{a}| = |(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}| \le |\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{b}|$ 的技巧推論 $\|\vec{a}|-|\vec{b}\| \le |\vec{a}-\vec{b}|$。如果能理解內積與柯西不等式不限維度，則三角不等式也不限維度。

G-11A-5 三角的和差角公式：正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。 **備註：**請注意連結 10 年級所學的基礎，以正弦和餘弦為主，正切之對應公式以推論之練習為原則。	s-V-1 g-V-4

先備：極坐標與直角坐標的轉換（G-10-5），廣義角的正弦、餘弦（G-10-6），餘弦定理 （G-10-7）。

連結：向量的運算（G-11A-6），正餘弦的疊合（F-11A-2）。

後續：複數的極式（N-12甲-3）。

基本說明

1. 學習目標

(1) 能理解正弦、餘弦的和差角公式推導過程。

(2) 能透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正切的和差角公式。

(3) 能透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正弦、餘弦的倍角與半角公式。

(4) 能使用正弦、餘弦的和差角、倍角與半角公式解決相關問題。

2. 教學斟酌

(1) 建議連結 10 年級的極坐標概念，搭配餘弦定理，推導餘弦的差角公式，再搭配三種線對稱及旋轉直角之後的坐標關係，擴展出全部正弦、餘弦的和差角公式。

(2) 透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正切的和差角公式，並連結十年級的直線斜率概念，處理兩直線夾角問題，作為正切的差角公式的應用。

(3) 透過正弦、餘弦的和差角公式推導倍角及半角公式後，可搭配特殊角（如 15 度、30 度、45 度、75 度）加以驗證或熟練其公式的使用。

(4) 協助學生釐清為何倍角公式所得到的三角函數值具有唯一性，而半角公式則須依照角度所在的象限進行判斷。

(5) 請注意連結 10 年級所學的基礎，以正弦和餘弦為主，正切之對應公式以推論之練習為原則。

條目範圍

1. 與差角公式相關的三角恆等式問題不宜作為教學及評量的主要問題。
2. 倍角公式的使用應著重情境的連結，不宜做過多使用乘法公式之相關問題。
3. 不含和差化積與積化和差。
4. 不含 cot、sec、csc 之對應公式。

釋例

1. 如果已經學過向量內積，則可以做以下連結：設單位圓上兩點之極坐標為 $P[1,\alpha]$、$Q[1,\beta]$，而 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 之夾角 θ 為 $|\alpha-\beta|$ 在 $[0,\pi]$ 範圍內的同界角，則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的坐標算法得到 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，而內積公式得到 $\cos\theta$。此時用到 cos 為「偶函數」的重要關鍵，使得 $\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$，於是連結了餘弦的差角公式。
2. 承以上符號，如果學過線性組合與二階行列式的面積意涵，則由 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 決定的平行四邊形面積為 $|\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta|$，而該平行四邊形的高為 $\sin\theta$，故得到 $\sin|\alpha-\beta|=|\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta|$；但因為 sin 是「奇函數」所以不能解開絕對值。這就是「為什麼」我們偏好使用餘弦（而不是正弦）來計算夾角的原因。
3. 餘弦的倍角公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$ 將來是做 $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 之反導函數的工具，教師可適度重視此倍角公式。

評量

本條目的重點在於正弦和餘弦，關於正切的和差角、倍角、半角公式等，以推論之練習為原則，請勿過度評量。

G-11A-6 平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。	g-V-5

先備：直線方程式（G-10-2）、空間中的線與平面（S-9-12）。

連結：平面向量（G-11A-1）、空間向量（G-11A-3）、空間向量的運算（G-11A-7）、二元一次方程組的矩陣表達（A-11A-1）。

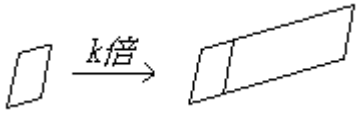
後續：複數（N-12甲-3）。

基本說明

1. 相關約定
   (1) 以符號 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 代表兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$ 的內積。內積的代數定義，又稱為內積的坐標算法；內積的幾何定義，又稱為內積公式。
   (2) 向量的垂直不討論零向量。
   (3) 兩向量的夾角θ取$0\le\theta\le\pi$。
   (4) 為搭配二元一次聯立方程式的矩陣表達以及向量的線性組合習慣，並吻合大學線性代數的習慣，將兩向量$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$決定的行列式記為$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$，也可以簡記作$\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{vmatrix}$；定義行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$。
2. 學習目標
   (1) 能操作向量在指定方向的正射影，知道平面向量內積的坐標算法。
   (2) 兩向量平行與垂直的概念，可與直線的平行與垂直結合。在平面上，向量與斜率皆為決定方向的概念，因此，可透過向量內積求得兩向量及直線的夾角。
   (3) 理解內積公式並能用以解決問題。
   (4) 利用向量內積為投影的概念，得知投影長必不大於原向量長，導出柯西不等式。
   (5) 兩向量$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$所決定的平行四邊形面積$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=|a_1b_2-a_2b_1|$恰為行列式之絕對值。
3. 教學斟酌
   (1) 向量的正射影為向量內積的相關概念，而定義向量的正射影後，應介紹任意的非零向量皆可表成兩互相垂直向量的線性組合，此即向量分解的概念。
   (2) 可適度強調兩向量相加、相減仍為一向量，但是向量的內積為一純量，如同力與位移有方向性，但兩者相乘後變只有正功與負功，已無方向性的概念。
   (3) 可利用向量內積求兩向量或兩直線夾角的餘弦，並適當引入計算機求夾角的估計值。

釋例

1. 可將行列式視為有向面積，行列式的性質除了展開驗證外，也可透過有向面積直觀的解釋。例如，以下我們用 $\left|\vec{a}\quad\vec{b}\right|$ 簡記以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之行向量寫成的行列式，則當其中一個向量做了 k 倍的係數積，如下圖，



有向面積也就變為原來的 k 倍，亦即 $\left|k\vec{a}\quad\vec{b}\right|=k\left|\vec{a}\quad\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\quad k\vec{b}\right|$。同樣可以用面積觀點推論行列式的分配律 $\left|\vec{a}+\vec{b}\quad\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\quad\vec{c}\right|+\left|\vec{b}\quad\vec{c}\right|$，細節從略。

2. 承上，從面積觀點可以輕易得到：$\left|\vec{a}\quad\vec{a}\right|=0$，再配合行列式的係數積、分配律，可以推論 $\left|\vec{a}\quad\vec{b}\right|=-\left|\vec{b}\quad\vec{a}\right|$。

3. 雖然以下並非高中數學的範圍，但為了對教師同仁闡述行列式的（解析）幾何意涵，也就是面積或高維度的體積意涵，我們補充說明 n 階行列式可以用以下四個性質定義：前述的係數積、分配律、歸零性質，以及 $|I|=1$，其中 I 是 n 階單位方陣，也就是 n 維空間中的單位正方體的有向體積為 1。此定義的動機或模型，顯然就是面積或體積。從這個定義，可以推導所有行列式的運算公式與性質。由此可見，行列式不純然是代數領域的數學物件，它同時也是幾何的。請教師在教學過程中，平衡對待行列式的兩種意義。

4. 讓內積連結正弦與餘弦的差角公式，參閱 G-11A-5。

錯誤類型

利用柯西不等式求極值問題，需確認等號成立後，才可得極值。學生會因大部分的題目，極值都恰好會成立忽略此概念。

評量

1. 行列式最主要是作為平行四邊形面積的應用連結，以及後面的克拉瑪公式之連結，因此評量上不宜過度操作技巧性的運算，以及複雜的代數計算問題，例如：下列問題不適合做為評量：求 $\begin{vmatrix}3+\sqrt{7}-2\sqrt{5} & -6+3\sqrt{7}+\sqrt{5}\\ -1-2\sqrt{7}+3\sqrt{5} & 2+4\sqrt{7}-9\sqrt{5}\end{vmatrix}$ 之值。

2. 不過度操作柯西不等式求極值的技巧性問題。例如不宜利用柯西不等式求 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(9a+4b)$ 的極值。

G-11A-7 空間向量的運算：正射影與內積，兩向量的平行與垂直判定，柯西不等式，外積。 **備註：**可用柯西不等式解釋二維數據的相關係數範圍。※	g-V-3

先備：平面直角坐標系（G-7-1），空間概念（S-11A-1）。

連結：空間向量（G-11A-3），平面向量的運算（G-11A-6），三階行列式（G-11-8）。

後續：平面方程式（G-11A-9），空間中的直線方程式（G-11A-10）。

基本說明

1. 相關約定
   (1) 以符號 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 代表兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的內積，$\vec{a}\times\vec{b}$ 代表兩空間向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的外積。
   (2) 向量的垂直不討論零向量。
   (3) 兩向量的夾角θ取$0\le\theta\le\pi$。
2. 學習目標
   (1) 能操作向量在指定方向的正射影，知道空間向量內積的坐標算法。
   (2) 理解內積公式，能用它求出空間中兩向量的夾角。
   (3) 能將一向量分解成兩互相垂直的分量。
   (4) 能夠判定空間中的兩向量是否平行或垂直。
   (5) 由平面向量的柯西不等式，推論出空間向量的柯西不等式，並說明等式成立的條件。
   (6) 認識向量外積的定義，並理解兩向量的外積仍為一個向量，其長度等於前述兩向量所決定的平行四邊形面積，而其方向垂直於前述平行四邊形。
3. 教學斟酌
   (1) 在此條目中，每個觀念的引入，大部分都可從平面向量開始，再類比推論到空間向量。引入觀念後，再證明這些性質。然而內積的運算，卻可以在兩向量所決定的平面上，從三角形的餘弦定理而得到。
   (2) 利用內積的定義，求出空間中兩向量的夾角，教師可以在這邊說明：
   ●空間坐標中的直線不再有斜率觀念，不能用斜率及反正切來計算夾角，所以內積和反餘弦就是計算夾角的主要工具。
   ●將立體圖形自訂坐標之後，可以更快速簡潔的解決問題。
   (3) 在定義外積時，應清楚說明外積$\vec{a}\times\vec{b}$是一個向量，外積不具交換性而有負交換性：$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$。外積的方向性質與右手定則，可以結合物理的力矩概念來說明。
   (4) 延續平面向量中，兩個不平行的向量所決定的平行四邊形面積為$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$，代入空間中的向量坐標表示法，化簡的結果與平面向量的結果作比較。此結果再連結到外積的長度。

(5) 向量的內積運算和外積運算都不滿足消去律，亦即若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，即使 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 也可能 $\vec{b}\neq\vec{c}$。其實這個現象的更根本原因，是向量的內積和外積都不滿足非零性質：即使 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 且 $\vec{b}\neq\vec{0}$，也可能 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 或 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$。

(6) 教導柯西不等式時，需特別引導柯西不等式之等號是否成立的觀念；此外，以向量觀點解釋柯西不等式，可建立學生對兩向量夾角動態關係與內積值變化的心像，給不易掌握代數式的學生，提共另一種學習途徑。

(7) 可將柯西不等式擴展為兩個同樣長度之數列$\langle a_k\rangle$、$\langle b_k\rangle$，k=1, 2, …, n，之間的不等式，並用以解釋二維數據的相關係數範圍。但是可以不必用 n 維空間的向量來解釋，因為 n 維向量的夾角可能造成困擾，而且「n 維向量」和「二維數據」兩種「維度」觀念，也徒增困擾；僅以二維數據的代數關係來認識即可。

(8) 利用向量內積或外積求得兩向量夾角之餘弦或正弦之後，可適當引入計算機求夾角的估計值。

錯誤類型

1. 學生會把向量內積與外積的符號「．」、「×」誤以為是數與數的乘法，唸法也不正確。

2. 學生易混淆以下觀念：向量內積的結果是一個值，向量外積的結果是一個向量，但是在表示內積與外積的運算結果時，寫出錯誤的形式。

3. 學生對於名詞指涉的對象易混淆：正射影長是長度，而向量的正射影是向量。

4. 「負交換」的二元運算（$x*y=-(y*x)$）是學生在空間向量的外積才學到的新運算關係，容易忽略也容易產生認知衝突，需謹慎處理並給予足夠的時間使其內化。

5. 學生沒辦法判斷柯西不等式的使用時機，或是沒有正確使用柯西不等式。

評量

在情境脈絡中使用內積與外積，並不會特別受到它們的「代數缺陷」的干擾（例如不滿足消去律，向量的內積不再是向量等）。在評量中引導學生正確使用這些工具，不要利用它們的缺陷來命題。

G-11A-8 三階行列式：三向量決定的平行六面體體積，三重積。 **備註：**以平行六面體的體積意義為重點。	g-V-5

先備：直線方程式（G-10-2），三角比的性質（G-10-7），空間概念（S-11A-1）。

連結：面積與行列式（G-11A-6）、方陣（A-11A-3）、空間向量的外積（G-11A-7）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

就內容而言，與微調後 99 課綱的 B 版教材相同，而本課綱將此內容規劃在 A 類的必修

課程裡。在教學脈絡上，則延續 99 課綱著重於幾何觀點的期望。

2. 相關約定

(1) 令$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$為空間中的位置向量，所謂$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$「決定」的平行六面體，是指坐標空間中，符合以下條件的唯一平行六面體：以原點為一個頂點，以$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$為三個稜邊。

(2) 所謂三重積是指 Scalar Triple Product，亦即$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$，其中$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為空間向量。

(3) 當我們寫$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$出所決定的三階行列式，習慣上依序將$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的向量坐標寫在第一、第二、第三列。

3. 學習目標

(1) 理解「同底等高」的平行六面體之體積皆相等，亦即祖暅原理。

(2) 理解三重積的絕對值$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$是由$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$決定的平行六面體體積，並能操作三重積的運算。理解三向量共面的概念。

(3) 知道三階行列式的運算規則，理解其運算性質及對應的幾何（體積）意涵。

(4) 認識並理解二階行列式和三階行列式在平面上和空間中的類比關係，以及它們具備同樣的運算性質。

(5) 理解三重積與三階行列式的等價關係。

4. 教學斟酌

(1) 祖暅原理是國中階段「同底等高的平行四邊形或三角形之面積皆相等」之性質的空間版本。如果按照本說明手冊的建議，在十年級便可搭配直線方程式的學習，利用平行線（斜率相同的直線方程式）的性質，在坐標平面上發展出平行四邊形或三角形面積的「坐標算法」。如果具備此種前置經驗，此時應該更容易理解祖暅原理，並利用平行面做體積的概念性操作。

(2) 三重積是空間向量的一種有用的運算，可視為空間向量之運算的延伸學習。而三重積與三階行列式的關聯，是有趣而且基本的知識，值得讓學生知道。但是本條目的最主要學習目標，是三階行列式與體積的關聯。

(3) 承前項，學生固然應該知道行列式的運算性質，若能透過其幾何意義的理解而記憶那些運算性質，當然是最理想的。但是，對於某些學生，經由二階行列式與平行四邊形的關聯來理解（記憶）那些性質，並直接認定三階行列式「繼承」同樣的性質，也是可以接受的。不論如何，都不應過度練習行列式的運算性質。

(4) 三階行列式並不僅能從三重積引入。只要能兼顧學生的認知發展以及「三階行列式之幾何（體積）意涵」都可以。

(5) 二階行列式為 0 時，確實只有發生零（平面）向量或平行向量的情況。但是三階行列

式為 0 卻是三（空間）向量共面的情況，學生特別需要注意這種狀況的認識、理解與熟悉；這將是「線性相關」的重要概念心像。

條目範圍

本條目不含四階或更高階的行列式。

錯誤類型

學生經常傾向於從三重積為 0（或者其三階行列式為 0），過於簡化地推論存在零向量，或者存在平行向量，而遺漏三向量共面的狀況。

評量

1. 不要過度評量行列式的運算性質，例如范德蒙行列式是不宜的評量對象。
2. 建議評量設計能結合線性組合及平行六面體體積的概念，例如：已知由$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$決定的平行六面體體積為 5 立方單位，問$2\vec{a}$、$3\vec{a}+2\vec{b}$、$2\vec{b}-\vec{c}$所決定的平行六面體體積，是合宜的考題。但是，應避免將目的相同的問題，在抽離幾何意義的的情況下，以純粹行列式操作的形式出現。
3. 勿出現過度使用行列式運算技巧進行化簡行列式的問題，如：$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$。

G-11A-9 平面方程式：平面的法向量與標準式、兩平面的夾角、點到平面的距離。	g-V-4 s-V-2

先備：空間中的直線與平面的垂直關係（S-9-13），法線定理（S-11A-1），向量的運算（G-11A-6,7）。

連結：向量的線性組合（G-11A-3），空間中的直線方程式（G-11A-10）。

基本說明

1. 學習目標

(1) 理解平面的法向量觀念，並能利用法向量及平面上一點，寫出平面方程式的標準式。

(2) 能利用平面法向量求出兩平面的夾角。

(3) 能推論空間中點到平面的距離公式，並應用於解題。

(4) 能寫出不共線三點所決定的平面方程式。

(5) 理解兩位置向量的所有線性組合，形成一個通過原點的平面，並能寫出其方程式。

2. 教學斟酌

(1) 建議從空間概念的法線定理引入法向量觀念。

(2) 建議沿用 10 年級處理直線、二次與三次函數、圓方程式的「平移」方法，先聚焦於通

過原點的平面，理解任何平面都平行於一張通過原點的平面。如果學過直線方程式，可討論通過原點的法線，然後平移到其他法線。

(3) 兩個不平行的位置向量 (有不共線三點)，可以決定一個通過原點的平面，此觀念不僅連結線性組合，也呼應法線定理，而前述兩個位置向量的外積就提供了一個法向量。

(4) 截距式是不共線三點決定一平面的特例，而且其方程式可對照平面上的直線截距式，可提醒學生注意兩者的類比性。

(5) 利用法向量垂直平面上任一個向量推導出標準式，應強化學生能從標準式看出平面法向量的能力，並透過向量係數積的想法，提醒學生法向量並不唯一。

(6) 應提醒學生，空間中的方程式 $ax+by=c$ 不是 xy 平面上的直線，而是一張垂直於 xy 平面的平面；可類比於平面上的方程式 $x=a$ 或 $y=b$ 。

(7) 可連結平面上求直線夾角使用斜率與斜角正切值的觀念，讓學生體會到空間中因為沒有斜率定義，所以必須透過法向量解決夾角問題。此處可順便與空間中兩面角的幾何處理手法作比較。

(8) 在 10 年級已經處理過平面上點到直線的距離，此時宜以相同 (或可供類比) 的思考方法，處理空間中點到平面的距離。

(9) 若已經學過柯西不等式，可在點到平面的距離公式部分安排適當的題目，同時可使用柯西不等式及公式解題。

(10) 使用計算機之後，可適度採用較為符合情境的法向量，而不必刻意湊數據。法向量長度、單位法向量、點到平面距離，以及兩平面夾角，都可使用計算機。

錯誤類型

1. 類推二維結論，認為 $3x+2y-z=2$ 在空間中為直線方程式。
2. 誤以為 $3x+2y=2$ 在空間中為一直線。
3. 誤以為 $x=2$ 在空間中為一直線。

G-11A-10 空間中的直線方程式：空間中直線的參數式與比例式，直線與平面的關係，點到直線距離，兩平行或歪斜線的距離。	g-V-4 s-V-2

先備：直線方程式 (G-10-2)、法線定理 (S-11A-1)、向量的運算 (G-11A-6,7)。

連結：空間坐標系 (G-11A-2)、空間向量的運算 （G-11A-7 ）、平面方程式 (G-11A-9)。

基本說明

1. 相關約定

(1) 與直線平行的向量稱為直線的方向向量，通常以 $\vec{v}$ 表之。

(2) 若空間中直線與平面無交點，則直線與平面平行；若空間中直線與平面恰有一交點，

則直線與平面相交；若空間中直線與平面有無限多個交點，則直線在平面上。

(3) 點到直線距離、兩平行直線距離或兩歪斜線距離，指的都是最短距離，因此兩平行直線距離或兩歪斜線距離，都是公垂線與兩直線的交點距離。

2. 學習目標

(1) 了解空間中的直線，欲決定其方向時，因為有 3 個變量，所以無法沿用平面上的斜率的概念，而且沒有唯一確定的法向量，只能透過與直線平行的向量（方向向量）來決定其方向。

(2) 透過一定點 A 與動點 $P(x,y,z)$，形成與方向向量平行的向量，而推導出空間中直線的參數式與比例式。

(3) 透過圖形上的觀察，由空間中直線與平面的交點個數，定義直線與平面的位置關係，並可利用解聯立的方法以及向量的方向，分辨直線與平面的關係。

(4) 了解距離為最短距離的概念後，垂直方向即為最短距離。因此空間中點到直線的最短距離，可透過直線上的動點與定點距離的最小值求得，或向量垂直內積為零的概念求得最短距離，而直線上的動點表示法即為直線的參數式。

(5) 能用兩直線的交點個數及方向，判定空間中兩直線的位置關係。

3. 教學斟酌

(1) 空間中直線的參數式講述方式，應讓學生體會到動點是走方向向量的 t 倍概念；而比例式中的比值即為參數式中的 t 值。

(2) 由空間中直線的參數式，可類比成平面上直線的參數式。

(3) 兩不平行的相異平面聯立 $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2\mathrm{x}-\mathrm{y}+3\mathrm{z}=5 \end{cases}$ 即為兩平面的交線，欲求此交線時，可透過外積求得方向向量，以及任找皆在兩平面上的點；另外，也可透過加減消去法減少變數下求得直線參數式，不過需讓學生理解每次平面的加減運算後，交線上的點仍在運算後的方程式上。

(4) 在空間中，並非沒有交點的兩直線就是平行線，宜連結學生在九年級和十年級藉由長方體的稜邊而建立的兩直線平行、垂直、歪斜概念，並透過方向向量讓學生分辨平行與歪斜的不同。

(5) 空間兩平行直線的距離可轉化為點到直線的距離求得。

錯誤類型

1. 求空間中兩歪斜線 L_1、L_2 的公垂線或兩直線的交點時，直線 L_1、L_2 上點的參數假設皆習慣以 t 表示，但此時欲對這兩直線運算，動點並非同步的移動，因此需將其假設成不同的參數符號（例如：s 和 t）。

2. 空間中兩直線沒有交點時，不一定是平行，得透過方向向量分辨平行直線與歪斜線的差異。

另外，當兩直線方向向量平行時，也不一定代表兩直線平行，有可能是兩直線重合或者平行。

評量

1. 求兩歪斜線的公垂線參數式時，因為計算繁複，應盡量設計簡單的數字運算，以降低困難度。
2. 空間中的直線關係大多數為歪斜，不必做太多直線交點的問題。

A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達：定義方陣符號及其乘以向量的線性組合意涵，克拉瑪公式，方程組唯一解、無窮多組解、無解的情況。 **備註：**以平面向量的具體操作體現線性組合的意涵，克拉瑪公式以連結平面向量之線性組合以及平行四邊形面積為重點。	g-V-4 a-V-3

先備：二元一次聯立方程式的解法與應用（A-7-5），二元一次聯立方程式的幾何意義（A-7-6）。

連結：平面向量（G-11A-1），平面向量的運算（G-11A-6），矩陣的運算（A-11A-3）。

後續：三元一次聯立方程式（A-11A-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   強調矩陣運算式的線性組合意涵，此外，以往克拉瑪公式偏重代數觀點，本課綱希望能以向量線性組合與平行四邊形面積切入，以便將來大學銜接線性代數的學習。

2. 相關約定

   (1) 二階方陣以方括號紀錄，例如 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

   (2) 做方陣乘以向量的計算時，將向量改寫成方括號的「行矩陣」形式 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。

3. 學習目標

   (1) 認識方陣符號，能將二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2\mathrm{x}+b_2\mathrm{y}=c_2 \end{cases}$ 寫成矩陣運算式 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$。

   (2) 能理解二元一次方程組方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2\mathrm{x}+b_2\mathrm{y}=c_2 \end{cases}$ 可以從向量觀點寫成 $(c_1,c_2)=x\vec{a}+y\vec{b}$ 的線性組合，其中 $\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$。據此理解：平面上任一向量皆可唯一表示成兩個互不平行非零向量之線性組合。

   (3) 能從線性組合的觀點，理解克拉瑪公式中，x、y 值的大小分別為兩平行四邊形面積的比值。

(4) 能從向量線性組合觀點解釋方程組唯一解、無窮多組解、無解的情況。

4. 教學斟酌

(1) 在國中學生學到以加減消去法解二元一次方程組，在高中學到以矩陣列運算求解，學習了矩陣乘法之後可以利用反矩陣求解，本條目再從向量的幾何觀點引入克拉瑪公式，希望能讓學生對於向量的線性組合意涵有更深刻的理解，未來能在學習線性代數時，順利類比到更高維的向量空間。

(2) 在教學的順序上，建議先由向量線性組合觀點，解釋方程式無解，與無窮多解的情況，然後在解釋唯一解時，以兩平行四邊形面積的比值即為 x、y 值的大小，引入克拉瑪公式。

(3) 教師可以從直線的斜率、直線的法向量與兩直線相交的狀況，與聯立方程組解的關係做連結。

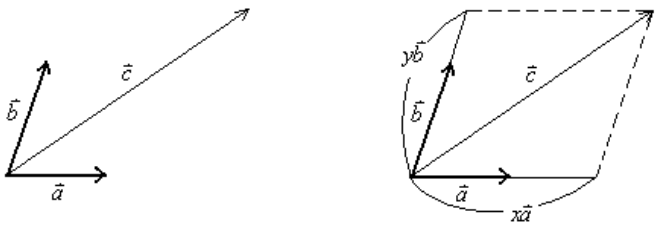
(4) 應同時透過幾何及代數方法介紹平面上任一向量皆可唯一表示成兩個互不平行非零向量之線性組合。在幾何部分，可藉此熟練向量加、減法的圖形概念與係數積是向量的伸縮概念，在代數部分，可藉此連結線性組合與聯立方程組間的關係。此處應讓學生理解給定向量的分解並不唯一，選定的分解對象不同，分解結果就會不同，連結到代數運算時，可挑選以(1,0)、(0,1)為分解對象及其他的向量為分解對象做比較。

(5) 建議在此條目之教學時，暫時不必將「行矩陣」推廣為「2×1 矩陣」。矩陣的一般性階數，留到「矩陣」單元再談（A-11A-3）。

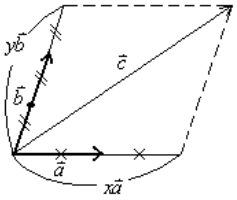
釋例

克拉瑪公式也可以使用線性組合、兩向量決定的平行四邊形面積比推得，老師可以斟酌補充，釋例如下。

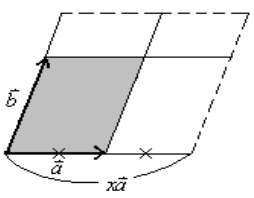
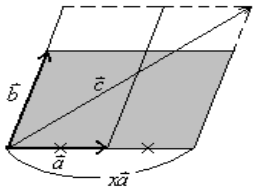
當克拉瑪之判別式不為 0 時（係數行列式不為 0），例如方程組 $\begin{cases}3x-2y=3,\\5x+4y=16.\end{cases}$ 首先 $\vec{a}=(3,5)$、$\vec{b}=(-2,4)$、$\vec{c}=(3,16)$，則方程組可以改寫成 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$，亦即 $x\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\16\end{bmatrix}$ 或 $x(3,5)+y(-2,4)=(3,16)$。也就是把 $\vec{c}$ 寫成「$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的線性組合」。再換句話說，我們將 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 當作基礎的向量，把給定的一個 $\vec{c}$ 拆解成 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的「成分」，而 x、y 只是 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的比重而已，如下圖。

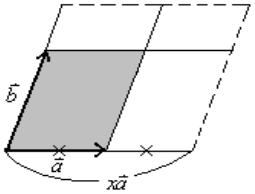
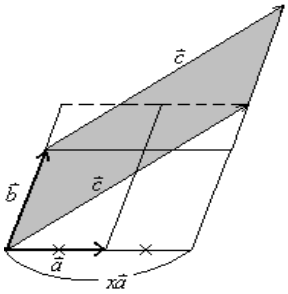


如果我們可以看出$x\vec{a}$是$\vec{a}$的兩倍，那麼x當然就是2；
同樣地，如果$y\vec{b}$是$\vec{b}$的$\frac{3}{2}$倍，y就是$\frac{3}{2}$。



而我們又要怎麼知道$x\vec{a}$與$\vec{a}$的比例關係呢？我們可以用面積關係來轉換：

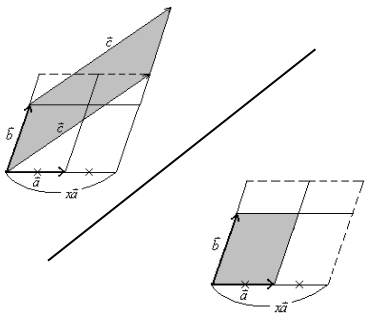
$\vec{a}:x\vec{a}=$  : 

$=$  : 

可見

$\vec{a}:x\vec{a}=$「$\vec{a}$、$\vec{b}$所張出的平行四邊形面積」:「$\vec{c}$、$\vec{b}$所張出的平行四邊形面積」。

而在代數上，$\vec{a}:x\vec{a}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$。

進而知道 $x=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=$ 

從前面的討論，知道克拉瑪判別式不為0的意思就是係數向量$\vec{a}$、$\vec{b}$不平行，故它們可以決定一個（面積不為0的）平行四邊形。如果判別式為0，意思就是$\vec{a}//\vec{b}$（我們假設$\vec{a}$、$\vec{b}$皆為非零向量）。此時，如果$\vec{a}//\vec{c}$，也就是$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$互為平行向量，則方程組有解，而且教師可以展示它有無窮多組解（當$\vec{c}=\vec{0}$時也可以推論同樣結論）。如果$\vec{a}//\vec{b}$但是$\vec{c}$不跟它們平行，則線性組合$x\vec{a}+y\vec{b}$只能形成一條直線，但$\vec{c}$不在那條直線上，所以無解。

A-11A-2 三元一次聯立方程式：以消去法求解，改以方陣表達。用電腦求解多元一次方程組的觀念與示範。 **備註：**可連結插值多項式，作為產生三元一次聯立方程式的範例之一，連帶介紹牛頓插值多項式。高斯消去法之增廣矩陣不延伸至方陣之 rank 觀念。可適度連結平面向量之線性組合意涵，解釋方程組唯一解、無窮多組解、無解的情況，但不延伸線性獨立之相關課題。可在觀念上推廣到更多未知數的一次聯立方程式，說明高階方程組用電腦求解，並應以方便取得的資訊工具電腦軟體示範之。（三平面幾何關係的代數判定。★）	g-V-4 a-V-3

先備：二元一次聯立方程式（A-7-2,3,4,5,6，A-11A-1）。

連結：矩陣的運算（A-11A-3），平面方程式（G-11A-9）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   以消去法求解三元一次聯立方程式的程序，以及其解的三種情況(唯一、不存在、無窮多) 之概念理解，這兩項核心課題，與 99 課綱相同。但是新課綱不講述三階克拉瑪公式的解法，所以不強調此條目與三階行列式的連結。新課綱也不強調以三平面的關係來解釋「解」的三種情況，而希望以三向量的線性組合意涵來解釋那三種情況。最後，新課綱希望讓學生認識更多元的一次方程組，以及求解的資訊工具。

2. 相關約定

   (1)「方程組」是「聯立方程式」的同義詞。

   (2) 三階方陣以方括號紀錄，例如 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$。

   (3) 做方陣乘以向量的計算時，將向量改寫成方括號的「行矩陣」形式 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

3. 學習目標

   (1) 理解插值多項式的意涵，並作為產生三元一次聯立方程式的動機之一。

   (2) 認識三元一次聯立方程式的意義，理解其「解」的意義，知道如何做「解」的驗算。

   (3) 對照二元一次聯立方程式，理解同樣有代入與消去兩大類的求解方法，其中代入法相當於「降階」，但因為消去法可以發展出一般性的演算法，所以我們偏重於消去法。

   (4) 認識「增廣矩陣」的價值在於分離係數，並能用以操作高斯消去法，寫出方程組的解，或者判定無解或非唯一解；理解方程組的解若不唯一，則有無窮多組。

   (5) 從二元、三元方程組，經類比而認識更多元的方程組，並知道宜以資訊工具求這些方

程組的解，也知道如何驗算其解。

4. 教學斟酌

(1) 可以用三平面的幾何關係，來解釋「解的三種情況」：不存在、唯一、不止一組（則必有無窮多組）。但請勿過度強調三平面幾何關係的代數判定，宜類比於二元一次方程組的線性組合意涵，用線性組合來解釋「解的三種情況」，建立一致性的概念心像。

(2) 教師應明白高斯消去法可能遇到需要尋找主元（pivoting）的情況（意思是：消去法的某個步驟，遇到對角線元素為 0，必須先將該列與下方的某列交換，才能繼續進行消去步驟），否則雖然方程組有唯一解卻無法繼續執行消去程序。但是，不必教導這個細節，只要在練習與評量的時候，避免命題發生需要尋找主元（pivoting）的狀況即可。

(3) 未必需要以增廣矩陣操作反方陣，所以不需要將高斯消去法程序之後的矩陣，化為單位方陣。

(4) 求解多元一次方程組的程序，並非計算機（calculator）的適用範圍，教師宜以學生容易合法取得的資訊工具，示範其求解的程序，並做驗算的示範。

(5) 可在觀念上推廣到更多未知數的一次聯立方程式，說明高階方程組用電腦求解，並應以方便取得的資訊工具電腦軟體示範之。

(6) 建議將「矩陣的運算」條目內容（A-11A-3），放在本條目之後。因此，在本條目教學時，暫時不必將「行矩陣」推廣為「3×1矩陣」。矩陣的一般性階數，留到「矩陣」單元再談。

條目範圍

1. 不談高斯消去法的尋找主元（pivoting）操作，在練習與評量的時候，避免命題發生需要尋找主元（pivoting）的狀況即可。
2. 以高斯消去法做增廣矩陣至上三角形式即可，不必將對角線元素化為 1，也不必做反向消去獲得對角線形式。
3. 高斯消去法之增廣矩陣不延伸至方陣之秩（rank）觀念。
4. 本條目不含關於「線性獨立」之課題。

錯誤類型

1. 學生容易忽略「無唯一解」其實又分為兩種狀況，或者「有解」也分為兩種狀況。
2. 即使是「退化」的插值問題（例如以共線三點或水平三點，求二次插值多項式函數），轉換成聯立方程式之後，仍有唯一解，而非無解或無窮多組解的狀況。
3. 學生誤以為（類似二元一次時）三元一次聯立方程式的無唯一解情況，必發生在兩組係數成比例時。所以，當學生觀察三組係數互不成比例時，就誤認為必有唯一解。

釋例

1. 以(相異)三點 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3) 決定(最高)二次多項式函數 $y=ax^2+bx+c$，可造成以 a、b、c 為未知數的三元一次聯立方程式。
2. 類比於高斯消去法完成之後的「倒退代入求解」程序，連帶介紹牛頓插值多項式，並理解(對同樣一組插值點)用不同方法得到的插值多項式，是同一個多項式函數。
3. 當學生難以想像空間向量之間的關係時，可適度以類比的方式，用平面向量之線性組合意涵，解釋方程組的唯一解、無窮多組解、無解三種情況；可以探討三個空間向量共面的情況，而不延伸出線性獨立之相關課題。例如用下面的觀點說明之。

若將方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 寫成 $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$，其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$、$\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$，則方程組的意義為：求做由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 得到 $\vec{d}$ 之線性組合的係數。以下，我們排除 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為 $\vec{0}$ 的情況，假設 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 皆為非零向量。

當行列式 $\Delta=\left|\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}\right|\neq 0$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 決定一個平行六面體。類比於 A-11A-1 條目對二元一次方程組的線性組合解釋，讓學生相信此時必有唯一解。令高斯消去法做完之後的方程組為 $x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=\vec{D}$，則 $\Delta\neq 0$ 的情形，就是 $\vec{A}=(\bullet,0,0)$、$\vec{B}=(*,\bullet,0)$、$\vec{C}=(*,*,\bullet)$ 的情形，其中 $\bullet$ 表示任意一個非 0 的數，而 $*$ 表示任意數。

如果 $\Delta=0$，就知道由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 決定的平行六面體體積為 0，此時有以下兩大類的情況。

一、 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 互相平行，也就是 $\vec{a}=\beta\vec{b}=\gamma\vec{c}$ 或者 $\vec{A}=(\bullet,0,0)$、$\vec{B}=(\bullet,0,0)$、$\vec{C}=(\bullet,0,0)$ 的情形。此時，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的所有線性組合，僅能形成一條直線，稱它為 L。如果 $\vec{d}$ 不平行於 L，則方程組無解；如果 $\vec{d}$ 平行於 L，也就是 $\vec{D}=(*,0,0)$，則方程組有解，但是此時有無窮多組解。詳情請教師自行引導。

二、 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 雖然不完全互相平行，但是其中一個是另外兩個的線性組合(請教師適度解釋細節，並獲得一般性的概念)，或者 $\vec{A}=(\bullet,0,0)$、$\vec{B}=(\bullet,*,0)$、$\vec{C}=(\bullet,\bullet,0)$。此時，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的所有線性組合，僅能形成一個平面，稱它為 P。若向量 $\vec{d}$ 不平行於 P，則 $\vec{d}$ 不可能是 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的線性組合，所以方程組無解；如果 $\vec{d}$ 平行於 P，也就是 $\vec{D}=(*,*,0)$，則方程組有解，但是此時有無窮多組解。

評量

1. 更多未知數的多元一次聯立方程式，僅作概念上的介紹，並示範以資訊工具(電腦軟體)求解，不必列入評量範圍。

2. 無須直接評量三平面幾何關係的代數判定。

A-11A-3 矩陣的運算：矩陣的定義，矩陣的係數積與加減運算，矩陣相乘，反方陣。將矩陣視為資料表，用電腦做矩陣運算的觀念與示範。 **備註：**可以在概念上探討任意階的反方陣，但若要確切算出反方陣，則僅限 2 階。	a-V-3

連結：方陣乘以向量的線性組合意涵（A-11A-1、A-11A-2），矩陣的應用（F-11A-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本課綱新增「將矩陣視為資料表」。

2. 相關約定

   (1) 矩陣以方括號紀錄，例如 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ 稱為矩陣的第 1 行，其右（如果存在）依序稱為第 2 行、第 3 行...；而 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ 稱為矩陣的第 1 列，其下（如果存在）依序稱為第 2 列、第 3 列...。

   (2) 每行 m 個數（也就是有 m 列）、一共有 n 行的矩陣，稱為 $m\times n$ 階矩陣（讀作 m 乘 n 階），其中 m、n 為正整數。方陣是當 $m=n$ 時的矩陣特例，$n\times n$ 階矩陣稱為 n 階方陣。

   (3) 用兩個正整數 i、j 的有序對 $[i,j]$ 指稱矩陣內第 i 列、第 j 行的位置，其中 $1\le i\le m$、$1\le j\le n$，而 $m\times n$ 是矩陣的階數。矩陣的一般性表達法為 $A=[a_{ij}]$，其中 a_{ij} 表示矩陣 A 在 $[i,j]$ 位置的元（element）。

   (4) 當 A 是二階或三階方陣，可用 $\det A$ 表示它的行列式，故 $|\det A|$ 是其行列式的絕對值。

   (5) 矩陣 A 的第一行可以記作 A_1，依此類推 A_j 表示第 j 行。

   (6) 每一個元都是 0 的矩陣，稱為零矩陣，通常記作 O 或 $O_{m\times n}$。

   (7) 令 $A=[a_{ij}]$ 為一個 n 階方陣，則 a_{11}、a_{22}、…、a_{nn} 稱為 A 的對角線元。

   (8) 對角線元皆為 1，其他元皆為 0 的 n 階方陣，稱為 n 階單位方陣，通常記作 I_n 或者 I。

   (9) 如果方陣 A 存在反方陣，則稱 A 為可逆方陣，其反方陣記作 A^{-1}。

3. 學習目標

   (1) 能了解矩陣的符號、階數的定義，並能指稱矩陣的行、列和元的位置。

   (2) 能操作矩陣的加法、減法及係數積的運算。

   (3) 能操作矩陣相乘的運算，並與線性組合連結。

   (4) 能算出二階方陣的反方陣。

4. 教學斟酌

(1) 如果已經先安排了 A-11A-1 和 A-11A-2 的條目內容，建議將矩陣視為方陣的一般化，並先將方陣乘以向量的運算，推廣到矩陣乘以行矩陣的運算，以便合理說明矩陣乘法的階數搭配原理。然後將 A、B 兩個矩陣的乘法運算 AB，理解為 A 分別乘以 B 的第一行、第二行、…。

(2) 有關矩陣的定義建議從情境問題中引入，強調矩陣作為簡化問題工具的角色，並藉此將矩陣作為資料表使用，賦予矩陣加減法及係數積的具體功能，而不僅只是數字操作。

(3) 有關矩陣乘法之結合律、分配律及「不可交換」律的介紹，宜從從情境中出發，避免純代數運算的驗證。例如可利用二元一次聯立方程式的經驗，說明「不可交換」律。

(4) 建議將二階反方陣與求解二元一次聯立方程式做連結，更進一步可以作為平面上的線性變換的基礎概念。

(5) 可以在概念上探討任意階的反方陣，但若要確切算出反方陣，則僅限 2 階。

(6) 本條目的運算可透過電腦輔助方式（如 Excel），讓學生實際從電腦表單中操作數據的變化，強化學生對於矩陣為資料表的心像。

(7) 本條目雖然沒提到矩陣的轉置運算，但是可以在合理的情境裡介紹此觀念。但不宜在沒有脈絡的題目裡操作轉置。

條目範圍

不含三階以上的反方陣計算。

評量

請掌握矩陣的學習目標，在評量中彰顯矩陣的用途，勿過度與其他單元做連結，例如勿刻意求矩陣各元之和，也不要把矩陣相等的概念性問題轉換成複雜的聯立方程式問題。

A-11A-4 對數律：從 10^x 及指數律認識 log 的對數律，其基本應用，並用於求解指數方程式。 **備註**：認識一般底的對數，但勿過度練習。	a-V-1 n-V-2

先備：常用對數（N-10-4）。

連結：指數與對數函數（F-11A-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

10 年級已講述過以 10 為底的常用對數，學生學習對數的經驗，和以往迥然不同。在此希望透過解指數方程式的需要，理解即使底數不為 10，仍可以用對數表示其解。且本條目仍需使用計算機融入課程，學習目標不含查表。

2. 相關約定

(1) 給定任意 $0<a\neq 1$，則任意正數 x 皆可改寫成 $x=a^{\log_a x}$。相對於 $\log x$ 稱為 x 的對數，現在 $\log_a x$ 稱為以 a 為底 x 的對數；此外，在 $\log_a x$ 中，稱 a 為底數，x 為真數。

(2) 常用對數 $\log x=\log_{10} x$。

3. 學習目標

(1) 將 $x=10^{\log x}$ 推廣到 $x=a^{\log_a x}$，其中 $0<a\neq 1$，$x>0$。

(2) 透過指數律認識對數律，並利用對數律解決對數相關問題。

(3) 能用對數律解指數方程式。

4. 教學斟酌

(1) 適當的複習 10 年級中底數為 10 的對數運算。

● 例如：當最後解到 $10^x=3$ 而得到 $x=\log 3$ 時，利用計算機求 $\log 3$ 的近似值。

(2) 沿用十年級所學的 $x=10^{\log x}$，其中 $x>0$，則對數律其實都是指數律的另一個形式。

● 例如：對任意正數 x 和 y，則 $xy=10^{\log xy}$，而另一方面 $xy=10^{\log x}\cdot 10^{\log y}=10^{\log x+\log y}$，比較 10 的指數部分，得到 $\log xy=\log x+\log y$。

以上論述可以把底數 10 換成任意 a，其中 $0<a\neq 1$。

(3) 對數的引入，可搭配解指數方程式的過程，對於解底數不是 10 的指數方程式，也可透過將底數皆換成底數 10 來解之。

● 例如將 $2^x=3$ 換成 $\left(10^{\log 2}\right)^x=10^{\log 3}$，因此 $10^{x\log 2}=10^{\log 3}$，比較指數而得 $x\cdot\log 2=\log 3$，故得解 $x=\dfrac{\log 3}{\log 2}$。

以前，如果先定義 $\log_2 3$ 再導出像 $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$ 這樣的關係稱為「換底公式」。但是如果沿用上述的脈絡，其實這樣的關係是 $\log_2 3$ 的定義，亦即 $\dfrac{\log 3}{\log 2}=:\log_2 3$。

(4)「換底公式」的意義就是「對數的底並不重要」，而「換底公式」的教學目標是：理解對數可以使用「任意底」$0<a\neq 1$，但是任意底皆可換成一組方便的標準底。以目前的國際慣例而言，存在三個常用的標準底：10、e、2。學生使用的計算機上，可能已經提供以 10 和 e 為底的兩種對數，學生應能運用這些功能計算任意底的對數值。計算機上不存在「任意底」的對數按鍵，足以表示「任意底」的對數並不重要，勿過度強調它。

(5) 承上，在高中階段，能用常用對數解決的問題，就不要透過其他底的對數。

釋例

複雜的指數方程式除了善用以 10 為底的對數概念外，也應設計搭配計算器的問題。例如

求解 $2^{10^x}=10^6$ 等價於 $(10^{\log 2})^{10^x}=10^6$，比較指數得到 $\log 2\cdot 10^x=6$，亦即 $10^x=\frac{6}{\log 2}$，再搭配計算機求得 $x=\log(\frac{6}{\log 2})$ 的近似值。

錯誤類型

1. 學生對於對數律的了解不夠透徹時，易有誤用情形。
   例如：誤以為 $\log(a+b)=(\log a)(\log b)$。
2. 解 5^{100} 展開後之整數部分為幾位數？其最高位數字為何？這類問題時，學生若採用取 log 的策略時，最後求出 $\log 5^{100}$ 的值後，會誤以為就是 5^{100} 的值，或是首數的值與最高位數的連結不易了解。建議這類型的題目可改換為以 10 為底的指數，並搭配計算機解之。

評量

1. 過度操作對數律的對數問題不適合做為評量主要概念。
   例如此題不宜：$9^{\log_3 2}+2^{-\log_4 9}-5^{\frac{\log 2}{\log 5}}$。
2. 首數尾數相關問題，重點在於與科學記號相呼應，不應過度操作下列衍伸問題。
   - 例如此題不宜：設 $1<x<100$，且 $\log 4x$ 之尾數為 $\log x$ 之尾數的 3 倍，求 x。

F-11A-1 三角函數的圖形： sin, cos, tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。(cot, sec, csc 之定義與圖形※)	f-V-3 n-V-7 g-V-2

先備：廣義三角比（G-10-6）。

連結：弧度量（N-11A-1）、正餘弦的疊合（F-11A-2）。

後續：函數（F-12甲/乙-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
   99 課綱將本條目放在 12 年級，本課綱移至 11 年級 A 版，但是將 cot, sec, csc 列為進階教材，建議全國性考試不列入範圍。
2. 相關約定
   (1) 探討三角函數（而不是三角比）時，自變量一律以弧為單位。
   (2) 平移與伸縮變化的正弦函數 $B+A\sin(\omega x+\phi)$ 又稱為正弦波（sinusoidal wave），B 稱為基準值或基線（baseline），A 稱為振幅，$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 稱為週期，ϕ 稱為相位角。

3. 學習目標

(1) 能正確描繪出 sin, cos, tan 三個函數圖形，且知道其定義域與值域。

(2) 了解三角函數圖形的重要特徵：週期、振幅、對稱性。

(3) 能用計算機做弧度量的三角函數值。

(4) 能透過水平與鉛直平移、水平與鉛直伸縮，來變化三角函數的圖形，並理解它們對應的意涵：相位角、基準值、週期、振幅。

(5) 能利用三角函數圖形求方程式與不等式的解。

(6) 認識週期性現象，並能用正弦函數的伸縮平移 $B+A\sin(\omega x+\phi)$，也就是正弦波，作為該現象的數學模型。

4. 教學斟酌

(1) 在 10 年級雖然有多項式函數，但是因為沒有其他函數的參照，所以沒有提及它們的定義域與值域。在 11A 課程中，宜以多項式函數、三角函數與指對數函數彼此參照，並利用它們為具體範例，講解函數圖形（相對於方程式圖形）的特徵：例如利用繪製鉛直線檢定，以及定義域和值域的觀念；一般性的函數觀念，則待 F-12 甲/乙-1 再講。

(2) 課綱建議「方格紙、計算機」作為本條目之教具，是希望學生能有親手描繪 sin、cos、tan 函數圖形的經驗。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際觀察 sin 與 cos 圖形的對稱和平移關係。

(3) 建議在學生操作描點法繪製函數圖形之後，以數學軟體繪製圖形，輔助學生理解三角函數圖形是平滑的曲線，也用來觀察圖形經平移及伸縮後的變化。

(4) 因為餘弦函數是正弦函數的特殊相位，所以不必討論以餘弦函數作為模型的週期性現象。

(5) 斟酌學生的學習狀況與需求，在此可以暫時不講 cot, sec, csc。

釋例

1. 參照圓的方程式，帶領學生從函數的對應關係，理解函數圖形與方程式圖形的差異，進而理解 $y=f(x)$ 之函數圖形，與任一條鉛直線最多僅能有一個交點。
2. 參照多項式函數，正、餘弦函數的定義域像它們一樣，為全部實數（整條 x 軸），但是正切函數的定義域則不一樣。如果先學過指對數函數，也參照它們的定義域。
3. 值域的教學，宜先連結多項式函數的舊經驗：一次和三次函數的值域為全部實數（整條 y 軸），但二次函數則否；可見函數的值域未必是全部實數。在對照之下，凸顯正弦與餘弦函數值域的特殊性：它們是閉區間。如果先學過指對數函數，也參照它們的值域。
4. 在坐標平面上觀察函數的週期性，是很直觀的。但是生活中也常使用「頻率」，教材與教師可透過生活中的實例，引導學生連結週期與頻率的意義。原則上，當自變數（坐標的橫

軸）表示時間，則 $f=\frac{1}{T}$ 即為頻率。

5. 函數平移的習慣符號是「減」平移量，例如 $f(x-h)$，但是正弦波的習慣符號，卻是「加」相位角，如 $\sin(\omega x+\phi)$。這個習慣上的差異，是因為相位角的意義並不強調平移，而是指定一個波的「起始相位」：當時間 $x=0$ 時，波的位置相當於角 ϕ 的正弦值。如果連結相位角與函數平移的觀念，還要留意波形的平移單位數，並不僅是相位角 ϕ，也受到 ω 的影響。
6. 透過實際操作或以電腦演示，讓學生體認：如果橫軸和縱軸的單位長相同，則弧度制單位的三角函數圖形比角度制的圖形「好看」得多。如果縮短橫軸的單位長，固然可以讓角度制的三角函數圖形變得好看，但是曲線的「切線斜率」就失真了；事實上，在單位長不相等的坐標平面上，「切線斜率」失去了經驗的連結。這就是數學選擇三角函數的自變數採用弧度制的理由。

錯誤類型

1. 學生會誤以為正弦函數是由一些半圓弧連接而成。
2. 正弦函數與餘弦函數的圖形互為平移，學生易混淆。

評量

1. 本單元的三角方程式與不等式，限於使用三角函數圖形即可解出的，勿過於複雜。提醒：可以利用計算機的三角或反三角按鍵。
2. 可以利用三角方程式的有解或無解，連結三角函數的值域觀念。
3. 高二時的評量，應避免合成函數型態試題，例如以下試題不宜：
   函數 $f(x)=3\sin^2 x-5\sin x+1$，則 (1) $f(x)$ 的最大值與最小值各為多少？(2) 在 $0\le x<2\pi$ 的範圍內，解不等式 $f(x)\ge 0$。

F-11A-2 正餘弦的疊合：同頻波疊合後的頻率、振幅。	f-V-3 s-V-1

先備：廣義的三角比（G-10-6）。

連結：三角的和差公式（G-11A-5），三角函數的圖形（F-11A-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
   本條目 99 課綱中是在 12 年級，本課綱將三角函數的圖形與正餘弦的疊合移到 11 年級，讓三角函數的學習在 11 年級能完整學習。
2. 學習目標
   (1) 理解 f 和 g 兩個函數圖形的疊合，等同於 $f+g$ 的函數圖形。應用於正、餘弦函數，則是正弦波和餘弦波的疊合。

(2) 理解一個正弦波和一個同頻率餘弦波的和，是一個同頻率的正弦波（但振幅或相位角可能不同）。

(3) 理解餘弦波是（同頻率）正弦波的平移，所以兩個同頻率正弦波的和仍是同頻率正弦波。

3. 教學斟酌

(1) 課綱建議「方格紙、計算機」作為本條目之教具，是希望學生能有親手描繪正餘弦疊合圖形的經驗。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際操作兩函數的「疊合」並有機會觀察正弦波的「相位」。

(2) 運用和角公式，含相位角的正弦波 $\sin(\omega x+\phi)$ 可以轉換成無相位差（相位角為 0）的正餘弦疊合；而本條目的主題，是前述轉換的逆運算。

(3) 相位角的意義可以是數學上的函數圖形平移，但是工程和物理上的看法比較直接：它就是指此波的起始角，亦即當 $x=0$ 時，波的位置（相位）是 $\sin\phi$。

(4) 可運用數學歸納法，說明將任意（有限）多個同頻正弦波的疊合，仍然是一個同頻率的正弦波。

條目範圍

1. 本條目不討論不同頻率的正弦波疊合。
2. 本條目不討論波速，所以也沒有波長。

錯誤類型

1. 當正弦波 $A\sin(\omega x+\phi)$ 的角頻率 $\omega\neq 1$ 時，波形的平移單位數，並不是相位角 ϕ；這雖然是函數圖形之伸縮平移的基本知識，但是學生經常忽略。例如學生無法分辨 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 與 $\sin 2(x+\frac{\pi}{3})$ 的差異。
2. 學生常忽略限定範圍內的極值問題，例如：試求函數 $y=2\sqrt{3}\sin x-2\cos x+1$ 在 $0\le x\le\pi$ 範圍內的最大值與最小值，忽略了自變數限定在 $0\le x\le\pi$。

評量

不必過度評量疊合之後的極大值和極小值，也不要過度評量從三角函數合成出來的極大值和極小值，因為它們都不是本條目的學習目標。例如不宜求函數 $f(x)=\frac{1-6\sin x}{3+\cos x}$ 的最大值。

F-11A-3 矩陣的應用：平面上的線性變換，二階轉移方陣。	f-V-5 a-V-3

先備：廣義角三角比（G-10-6、G-10-7），圖形的對稱（G-10-1）。

連結：矩陣相乘（A-11A-3），平面向量的線性組合（G-11A-3），事件的獨立性（D-11A-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱原本有三階轉移方陣，微調之後改限二階。本課綱維持二階轉移方陣的原則。但 99 課綱在 10 年級安排獨立事件之機率課程，故 11 年級必然已經具備學習轉移矩陣先備知識，可是本課綱將獨立事件與轉移方陣都安排在 11 年級，教材須留意兩個課題的前後關係。

2. 學習目標

   (1) 理解平面上的四種線性變換：鏡射、旋轉、推移及伸縮。

   (2) 能求出平面上的四種線性變換所對應的矩陣。

   (3) 理解平面上的四種線性變換對於圖形面積的影響。

   (4) 理解轉移方陣的定義。

   (5) 能操作轉移方陣解決情境問題。

3. 教學斟酌

   (1) 建議可連結平面上向量的線性組合觀念，將圖形上的每個點視為從原點出發的一個向量，此向量必可以坐標平面上的 2 個基底向量(1,0)、(0,1)進行線性組合，則平面上的四種線性變換就相當於將原基底(1,0)、(0,1) 轉換成為四種不同的矩陣。透過將向量以基底進行分解，再將平面變換對應到基底的轉換，可讓學生對於平面變換所對應的矩陣更加有所感覺，而且對於平面變換所造成的面積影響也能一併說明。

   (2) 此處可選取或設計適當的數學軟體（如 GGB），讓學生調整二階方陣的各元數值，觀察其對應的圖形變化，並透過矩陣乘法連結解二元一次方程式，讓學生能實際算出二階方陣的變換結果。

   (3) 對於適當的學生，可嘗試解釋任意二階方陣皆可定義一個線性變換，而它們可以視為把平面上的點映射到另一點的函數。方陣相乘 $AB=C$ 的意義，是依序用 B 和 A 做線性變換的結果，等於用 C 做一次線性變換。這可以推論：依序做任意多個線性變換的結果，仍然是一個線性變換。

   (4) 介紹轉移矩陣的定義之前，必須先有獨立事件的機率觀念，明白獨立的重複試驗之機率算法。所以，如果教材先安排矩陣課程，則宜將轉移方陣延後至機率的章節，當作

矩陣的連結與應用。關於轉移矩陣的乘法結果仍為轉移矩陣，亦可透過各事件機率和為 1 的結果，讓學生有所體驗。

(5) 注意在轉移方陣的主題裡，也可以綜合運用古典、主觀和客觀機率。

(6) 可利用樹狀圖條列方式協助學生將情境問題的條件轉化成轉移矩陣，再利用轉移矩陣進行解題，但因高中並未教授馬可夫鏈相關問題，也還沒有正式介紹極限觀念，所以不宜涉及穩定狀態之求解。

條目範圍

1. 不含三階（含）以上的轉移矩陣及相關問題。
2. 不含有關穩定狀態的轉移矩陣問題。
3. 不含任意變換可分解為四個基本變化的合成。

釋例

對適當的學生，可以解釋線性變換之所以被稱為「線性」，乃至於線性組合之所以被稱為「線性」，是因為這種變換「保持直線」：它們把直線映成直線（假設變換的方陣為可逆方陣）。說明的方式之一如下。

由於直線可由點及方向向量組成，而點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量（將點視為位置向量），可將直線 L 以參數式 $\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ 表示，其中 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 且 $t \in \mathbb{R}$，即 L 上任一點 (x, y) 可表示為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。經過方陣 A 的變換為

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + tA\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}。$$

其中 $\begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。假設 A 為可逆方陣，則 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，所以方陣 A 把直線 L 變換成另一直線 L'。

錯誤類型

平面變換的順序會造成結果不同，例如：先對直線：$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1$ 以原點為中心旋轉 30°，再以 $\boldsymbol{x}$ 軸為對稱軸做鏡射，應寫成：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$，而不是 $\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$。

評量

轉移矩陣的穩定狀態其實就是特徵向量問題；本條目不含穩定狀態，當然也不引伸到特徵值和特徵向量，請勿評量這些關於方陣的課題。

F-11A-4 指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。 **備註：**認識一般底的對數函數，重點是任意底的對數皆可以換至常用對數，不在同一條式子裡刻意混用不同底的對數。任何指數函數 a^x 皆可改寫成 10^{kx}，其中 $0<a\neq 1$。	f-V-4 g-V-2

先備：常用對數（N-10-4）。

連結：對數律（A-11A-4）。

後續：函數（F-12甲-1）、微分（F-12甲-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   因為計算機的引入，對數查表不再是學習目標。

2. 相關約定

   (1) $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數，其中 $0<a\neq 1$。

   (2) $y=f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底的對數函數，其中 $0<a\neq 1$。

3. 學習目標

   (1) 定義指數函數、對數函數， 並說明兩函數的底數限制。

   (2) 學習指數函數與對數函數的圖形。

   (3) 能了解指數函數與對數函數圖形中遞增、遞減與底數的關係、以及透過觀察圖形，能直觀了解圖形的漸近線、凹向性。

   (4) 給定 a，$0<a\neq 1$，將指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $\mathrm{y}=\log_a x$ 的圖形繪在同一坐標平面上，觀察兩者對稱於直線 $y=x$，讓學生了解兩函數圖形點 $(x,y)\leftrightarrow(y,x)$ 的互換關係。

   (5) 給定任意兩個數 a、b，$0<a\neq 1$ 和 $0<b\neq 1$，不僅對數函數可以換底：$\log_a x=\dfrac{1}{\log_b a}\log_b x$，指數函數也可以換底：$a^x=b^{kx}$，其中係數 $k=\log_b a$。

   (6) 讓學生了解指數函數、對數函數在科學和金融上的應用。

4. 教學斟酌

   (1) 指數函數與對數函數的學習，應搭配方格紙、計算機，先透過描點繪圖認識指數函數與對數函數在局部範圍內的圖形，再使用輔助軟體觀察指數函數與對數函數的完整圖形。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際觀察指數函數與（同底）對數函數的對稱情形。

   (2) 在 10 年級雖然有多項式函數，但是因為沒有其他函數的參照，所以沒有提及它們的定義域與值域。在 11A 課程中，宜以多項式函數、三角函數與指對數函數彼此參照，並

利用它們為具體範例，講解函數圖形（相對於方程式圖形）的特徵：例如鉛直線檢定，以及定義域和值域的觀念；一般性的函數觀念，則待 F-12 甲/乙-1 再講。

(3) 指數函數與對數函數的圖形的性質（增減性、凹向性、漸近線）的了解，不須數學化的說明，僅須透過圖形上的觀察，直觀的認識，再輔以數值化的說明。

(4) 就好像給定任何一個 a，$0<a\neq 1$，就有一個指數函數 a^x，同理，給定一個 a，$0<a\neq 1$，$\log_a x$ 也要視為一個由 a 決定的函數，不要在教學和評量中讓 a 和 x 皆為變數。

(5) 一正數 a 的科學記號數字 $m\times 10^n$ 若改寫成 $10^{\log a}$，則科學記號的指數 n 就是 $\log a$ 的整數部分，也就是首數；而係數 m 就是 10 的「$\log a$ 的小數部分」次方，也就是 10 的尾數（mantissa）次方，這是為什麼英文稱科學記號的係數為「尾數」。

(6) 透過實例說明指數函數、對數函數在科學（例如：pH 值或地震規模...）和金融上的應用（例如：利率問題...）。

條目範圍

1. 指數函數與對數函數互為反函數的概念，只需透過圖形觀察了解點的對稱性，不需數學化的說明。
2. 有關自然指數 e，僅建議搭配計算機讓學生感受到此數的存在，不做數學上的定義與介紹。

釋例

1. 參照多項式函數，指數函數的定義域像多項式函數一樣，為全部實數（整條 x 軸），但是對數函數的定義域則不一樣。如果先學過三角函數，也參照三角函數的定義域。
2. 值域的教學，宜先連結多項式函數的舊經驗：一次和三次函數的值域為全部實數（整條 y 軸），但二次函數則否；可見函數的值域未必是全部實數。指數函數的值域並非全部實數。如果先學過三角函數，也參照三角函數的值域。
3. 指數函數的換底，較少受到重視。其實，在工程和科學上，將來全部的指數函數全都會換成標準的指數函數 $\exp(kx)$，也就是以 e 為底的指數函數。
4. 可搭配計算機，讓學生操作當每年複利一次、每月複利一次、每天複利一次、每小時複利一次、每分複利一次、每秒複利一次、每 0.1 秒複利一次...的利息變化，體會何謂連續複利，並發現標準指數函數的底數 e。

錯誤類型

學生易忽略指數、對數函數的基本條件限制，例如：方程式 $x^2=2^x$ 與方程式 $2\log_2 x=x$ 不相等。

評量

1. 指數函數與對數函數在不同底數下的交點數不同，這類概念不應納入正式的評量。
   - 例如此題不宜：下列選項何者正確？

若 $0<a<1$，則 $y=a^x$ 的圖形與 $y=\log_a x$ 的圖形恰有 1 個交點。

2. 將 $\log_a x$ 視為一個函數，變數僅為 x，不要在評量中讓 a 和 x 都在變化，這並不是學習對數函數的目標。例如求解 $\log_x 100=3\log x+5$，或者若方程式 $\log_a|x|+2x^2-11=0$ 恰有兩實根 α,β，且已知 $|\alpha-\beta|=4$，求 a 之值，皆為不宜的評量考題。

D-11A-1 主觀機率與客觀機率：根據機率性質檢視主觀機率的合理性，根據已知的數據獲得客觀機率。	d-V-3 d-V-5

先備：認識機率（D-9-2）、複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：條件機率（D-11A-2）、貝氏定理（D-11A-3），轉移方陣（F-11A-3）。

後續：離散型隨機變數（D-12甲/乙-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱並沒有明白指出這兩個觀念，但是在條件機率與貝氏定理的操作練習中常使用客觀機率。

2. 相關約定

   (1) 本課綱所謂的客觀機率就是頻率機率，也就是以調查或試驗而獲得的事件發生頻率(相對次數)，當作事件發生的機率。

   (2) 所謂主觀機率就是在缺乏調查或試驗資料，而且不能運用古典機率的情況下，對於不確定性現象的主觀量化估計。

   (3) 主觀機率和客觀機率並不是獨立的觀念，而是兩種除了古典機率以外，獲得機率之數值的常用方法。因此，它們沒有專屬的符號。

3. 學習目標

   (1) 理解機率是不確定性的量化數值。

   (2) 能套用古典機率發展出來的機率性質，作為主觀機率和客觀機率的推論依據，或用那些性質來檢核主觀機率和客觀機率的合理性。

4. 教學斟酌

   (1) 透過主觀機率與機率性質的推論，讓學生體會機率在個人生活與社會情境中的價值：在不確定的情況下，協助理性的思考與決策。

   (2) 透過客觀機率，讓學生認識機率與統計的連結，並理解生活經驗中獲得的機率，經常屬於客觀機率。建議以計算機作為本條目之教具，用來計算統計的相對發生次數。教師可以採用更合適的資訊工具進行此項教學，也務請留意勿僅限於教師演示，讓學生有機會習得使用資訊工具獲得客觀機率的估計。

(3) 關於機率類型的用語，還沒有趨於統一，宜提醒學生留意不同的用語。

(4) 注意在轉移方陣的主題裡，也可以綜合運用古典、主觀和客觀機率。

(5) 本條目教學中援引的情境，請盡量符合現實，盡量使用真實數據，與學生個人與社會的生活經驗相呼應，並留意高中社會領域課程中的應用。

條目範圍

此條目不含隨機變數的觀念，也不含抽樣和隨機試驗。所以，討論客觀機率時，不討論因為抽樣而造成統計數據的不確定性。

釋例

1. 對於單一事件，任何介於 0 與 1 之間的主觀機率都符合機率理論。但是，經由古典機率發展出來的機率理論，可以用來判斷主觀機率的合理性。例如拋一只圖釘，如果認為針尖朝上的機率是 0.5，又認為不朝上的機率是 0.6，則不合理而應該修訂。
2. 以下舉隅關於機率類型的用語。所謂機率類型就是獲得機率之數值的方法。主觀機率當然與個人經驗有關，但是一般文獻所謂的「經驗機率」並非主觀機率，反而是客觀機率；在那些文獻中，所謂「經驗」是調查或試驗的意思。有些文獻把古典機率和頻率機率合稱為客觀機率。除了高中課程中認識的三種類型以外，還有一類稱為形式機率，運用機率密度函數的定積分而獲得的機率，即屬此類。

評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。

D-11A-2 條件機率：條件機率的意涵及其應用，事件的獨立性及其應用。	d-V-3

先備：複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：主觀機率與客觀機率（D-11A-1），貝氏定理（D-11A-3），轉移方陣（F-11A-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱將條件機率安排在 10 年級，本課綱則將此內容延後到 11 年級，使得本條目可綜合運用主觀機率與客觀機率，與單純的古典機率有所區隔。
2. 相關約定

   在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率表示為 $P(B \mid A)$。
3. 學習目標

   (1) 能在情境中辨識條件機率。

(2) 在古典機率的情境中，能計算條件機率 $P(B \mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ 。

(3) 能在古典機率的情境中，了解事件獨立性的定義，並能判別給定的事件是否獨立。

(4) 能理解並應用獨立事件的餘事件推論：若 A，B 兩事件獨立，則 A 的餘事件也與 B 獨立。

(5) 能理解並應用獨立事件的乘法法則：若 A，B 兩事件獨立，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ 。

(6) 在主觀機率與客觀機率的情境中，能理解獨立事件的意義，並運用乘法法則解決問題。

4. 教學斟酌

(1) 主觀機率是依照個人信念或既有經驗而決定的，但是它也可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，而這種現象可以作為條件機率的直覺認識。

(2) 教學時，應引導學生從情境或題意中，辨別所要求得的是否為條件機率。

(3) 在古典機率的情境中 $P(B \mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$，但是在概念上宜闡釋該式的意義是縮小樣本空間到事件 A 的意思，而 $A\cap B$ 宜在情境中闡釋為 A 集合裡面的 B 子集，不宜強調集合的操作。

(4) 獨立事件的定義，幾乎僅在古典機率的情境中才能驗證，但是在實際應用時，獨立性幾乎都是先驗的假設。教學過程中，教師宜多在情境中舉例，讓學生感受獨立性，建立直觀，進而將古典機率情境中的獨立性質，運用在主觀機率與客觀機率的情境中，以解決問題。

(5) 學生容易弄混獨立事件與事件互斥，教師宜舉例說明解除學生迷思。

條目範圍

在情境問題中處理獨立事件的個數，以兩個或三個為原則。

釋例

單純的主觀機率並不多見，因為或多或少我們都會參考客觀數據後再決定主觀機率，這說明機率的形成是揉合主觀與客觀。而受到客觀條件影響的主觀機率，就是條件機率的直觀認識。例如「下週日天雨」的主觀機率，應該會受到現在是四月還是十月的影響，也應該會因為今天是週一還是週五而有所不同。

錯誤類型

1. 學生將條件機率 $P(B \mid A)$ 誤以為是積事件 $P(A\cap B)$ 的機率。因此題目的敘述上務求清楚明瞭，尤其條件機率的敘述，應強調在什麼的條件下。

2. 學生在文氏圖裡建立了錯誤的獨立事件心像（誤以為互斥事件）。

評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。例如：溫布頓男子網球賽採五戰三勝制（即先勝三局者獲勝晉級），根據過去紀錄知 A 選手與 B 選手實力有段差距，A 選手與 B 選手獲勝的機率比為 4：1，但比賽前兩局 A 選手因失誤過多致二局皆敗。假設經過短暫休息後，A 選手恢復原來水準，假設沒有其他特殊狀況發生，請問比賽最後結果誰獲得晉級的可能性較大？

D-11A-3 貝氏定理：條件機率的乘法公式，貝氏定理及其應用。	d-V-3

先備：複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：主觀機率與客觀機率（D-11A-1），條件機率（D-11A-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱將條件機率與貝氏定理安排在 10 年級，本課綱則將此內容延後到 11 年級，使得本條目可綜合運用主觀機率與客觀機率，與單純的古典機率有所區隔。

2. 學習目標

   (1) 能在古典機率的情境中推論條件機率的乘法公式：
   $P(A\cap B)=P(B\mid A)\cdot P(A)=P(A\mid B)\cdot P(B)$。

   (2) 在主觀機率與客觀機率的情境中，能理解條件機率之乘法公式的意義，並將之視為「法則」而予以應用。

   (3) 能理解貝氏定理所求出的機率值為條件機率的概念。

   (4) 能推導並理解出貝氏定理的一般化結果，並用以解決問題。

3. 教學斟酌

   (1) 貝氏定理強調的是樣本空間的分割概念，通常不再能窮舉樣本空間與事件的元素，甚至即使能夠指出樣本點，也不再符合古典機率之機會相等前提。此處要特別提醒學生，以凸顯貝氏定理跟古典機率的差異之處。

   (2) 可透過條件機率及貝氏定理的問題，強化學生對於探討機率問題時，應特別留意樣本空間的觀念。

條目範圍

此條目不含隨機變數的觀念，所以也不正式引用機率質量函數。

釋例

應用條件機率和貝氏定理時，實際上經常搭配古典機率、主觀機率與客觀機率使用。例如

以 $P(A|B)\cdot P(B)$ 計算 $P(A\cap B)$ 時，可能 $P(A|B)$ 用古典機率決定，而 $P(B)$ 則使用主觀或客觀機率。

錯誤類型

貝氏定理為條件機率的應用，因此條件機率所強調的在哪一個樣本空間的概念，學生還是很容易迷失。例如下列問題：假設有三個保險箱，每一個保險箱各有兩個抽屜，第一個保險箱的每一個抽屜裡各放一個金幣，第二個保險箱裡的一個抽屜放一個金幣，另一個抽屜放一個銀幣；第三個保險箱的每一個抽屜各放一個銀幣。若隨意打開一保險箱中的一個抽屜，發現裡面放的是一個金幣，則這個保險箱的另一個抽屜也是放金幣的機率是多少？

評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。

11 年級數學 B 學習內容解析

N-11B-1 弧度量：弧度量的定義，弧形與扇形面積，計算機的 rad 鍵。	n-V-7

先備：圓弧長與扇形面積（S-9-5），度度量的六十進制（G-10-6）。

連結：週期性數學模型（F-11B-1）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   本條目之設立，主要是為學習正弦函數提供慣用的語言以及標準的單位，並為學生準備單位轉換的素養。有關弧長、扇形面積公式等，皆非重點。此外，可使用計算機輔助度度量與弧度量的轉換。

2. 相關約定

   弧度量的單位名稱為弳（radian），又稱「弧度」。相對地，以度（degree）為單位測量角，稱為度度量。弧度量又稱為弧度制，度度量又稱為角度制。

3. 學習目標

   (1) 認識度和弳是兩種測量角的單位，並能互相轉換。

   (2) 能使用計算機的 rad 鍵與 deg 鍵做角的測量值之換算，並能理解換算過程會有誤差。

   (3) 順帶提及其他度量衡的單位轉換。

4. 教學斟酌

   (1) 弧度制的採用是為了繪製三角函數圖形、提供自然科學使用，以及當$|\theta|$很小時，可以有$\sin\theta\approx\theta$之估計。

   (2) 弧度量的單位固然可以稱為「弧度」，但建議用「弳」，原因是「弧度」裡面又有「度」，跟 degree 的「度」容易混淆；而且既然舊單位 degree 對應一個字，新單位 radian 最好也同樣對應一個字。對初學的學生，教師宜不厭其煩地強調單位，刻意不要省略單位詞「弳」，因為如果沒有建立好單位的概念，則容易出現$\pi=180^\circ$的謬誤：左邊的π是數，而右邊的180°是量，兩者根本不能相比，何來等號？但是逐漸熟練其操作之後，可以省略弧度制的單位，告訴學生那是「默認的」（default）；因為弧度制的定義為兩種長度之比值（弧長對半徑），所以在物理意義上，它是無單位量。

   (3) 教學時，建議可以使用實際的繩長，製作與半徑等長的弧，演示 1 弳的角為多大，以強化學生的心像。

   (4) 既然已經採用計算機做弧度制與角度制的換算，請教師不要總是使用$p\times\pi$弳的弧度量和k°的度度量（其中 $p\in\mathbb{Q}$、$k\in\mathbb{Z}$，例如$p=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、…，$k=30$、45、60、…），以免限制了學生的經驗，而容易產生迷思概念：以為弧度量總是帶著π而度度量總是

特殊整數。其實學生在 10 年級就有六十進制的度度量經驗，應該已經知道度度量未必為整數，現在應該維持或增強這個概念。

(5) 在適當的情境中，用計算機將弧度量轉換成度度量之後，讓學生以六十進制（度、分、秒）寫出近似的結果。

(6) 弧長與扇形面積可作為應用的範例，藉以熟悉弧度量的定義。公式本身不是學習重點，而是藉以闡明弧度量的範例。

(7) 不論是弧度制與角度制的換算，或弧長、扇形面積，都用到「比例」的概念，教學時不妨先測試學生的預備知識是否完備（S-9-6）。

(8) B 類課程是部分學生所受的最後一門正式數學教育，在設計的理念上，宜搭配課綱條目而為學生統整複習，更完善地準備其數學素養。以本條目而言，可擴及其他測量單位的認識。

錯誤類型

學生會誤將 π 當作是 $180°$，就會有 π^2 弧度 = $180\times180^\circ$ 的錯誤觀念，這是數學教學中長期忽略「單位」的結果，宜在教學過程中留意。

釋例

1. 應強調度和弳是兩種測量角的單位，用不同單位測出來的數值當然不同，例如同樣長度的公分和英吋、同樣溫度的攝氏和華氏溫標。類似地，$180°=\pi$ 弳≈3.14 弳，π 和 180 是同一個角（平角）用兩種單位測量所得的數值，它們當然不相等：$\pi\neq180$ 而且 $\pi\neq180°$，是「π 弳」等於「180 度」。連結生活中「同一個量用不同單位測得不同數值」的經驗，避免度度量和弧度量的混淆。

2. 利用量角器及圓心在原點的單位圓，以實際操作比較 (1) cos 3、cos 3° (2) sin 3、sin 3° 的大小，再使用計算機驗證你的結果是否正確。

3. 可以藉著弧度制與角度制的學習機會，複習過去（國小、國中階段）常見的單位轉換，例如英制與公制的長度單位（含英哩與公里）、攝氏與華氏溫標等；也適合進一步涉及過去在學校裡少見，但是生活中常用的單位轉換，例如「坪」與平方公尺、毫升與液體盎司、酒精濃度的百分比及「度」（Proof）等。

評量

避免過度練習計算面積或周長的題目。

S-11B-1 空間概念：空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係。利用長方體的展開圖討論表面上的兩點距離，認識球面上的經線與緯線。 **備註：**留意學生在地理課的需求，認識球面上的大圓與小圓。認識直線與平面的垂直關係、直線與直線的平行與垂直關係、兩平面的垂直關係；認識兩面角，但除了直角以外，不必以幾何方式處理一般的兩面角。	s-V-2

先備：三視圖（S-7-2），空間中的線與平面（S-9-12），長方體上的三角測量（G-10-7）。

連結：弧度量（N-11B-1），空間坐標系（G-11B-4），在空間中認識平面圖形（S-11B-2、G-11B-3）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   空間概念的 B 類條目不僅刪除三垂線定理，更要在內容與範例選材上，關注於提供文史藝術設計等方面的基礎數學素養。與 A 類課程相同的是，本課綱特別增訂了空間概念的學習脈絡，詳見 S-11A-1 的描述，新課綱的教材應善用這些提早安排的前置經驗。

2. 相關約定

   (1) 所謂「空間」是指三個維度的歐幾里德空間，亦即在日常尺度之下，根據生活經驗而認知的空間。

   (2) 歐幾里德的幾何公設固然是最重要的典範，但也有值得檢討之處。十九世紀末以來，產生了幾組不同的歐氏幾何公設系統。本課綱建議以希爾伯特（David Hilbert）在 1899 年於「The Foundations of Geometry」（Townsend 譯）提出的系統為基礎。該系統以不具數學定義的「點」、「直線」與「平面」作為空間中的基本元素，並以一組公設指定它們之間的關係。希爾伯特公設包括（以下使用通用的語言，而不贅述「決定」、「交點」、「落在」等詞彙的定義）：

   i. （空間中）相異兩點決定唯一的直線。
   ii. 不共線三點決定唯一的平面。
   iii. 若直線上有（相異）兩點落在某平面上，則整條直線落在該平面上。
   iv. 若兩平面有一個交點，則它們至少還有另一個交點。
   v. 至少存在不共面的四點。
   vi. 平面上任給一直線 L 與線外一點 A，在該平面上存在唯一的直線，通過 A 點且與 L 沒有交點。

   其中 vi 是「平行公設」，注意希爾伯特和歐幾里德的表達方式不同。

   (3) 當兩平面交於一條直線，該直線稱為其一平面在另一平面上的截痕。

(4) 當空間中兩直線交於一點，這兩條直線落在一平面 F 上，兩直線的夾角是在平面 F 上測量的角。

(5) 當直線 L 與平面 F 交於 P 點，且 L 垂直於平面 F 上所有過點 P 的直線，則稱 L 與 F 垂直，L 是 F 的法線。

(6) 不論是在直線與平面，或平面與平面之間，垂直與平行的符號皆依序為 $\perp$ 和 $/\!/$。

(7) 直圓錐之頂點與底面任一直徑之兩端點所形成的角，稱為圓錐的頂角（aperture of a right circular cone）。

(8) 以「球」當作地球的模型來定義經線和緯線。球面與通過球心之平面的交集（又稱為截痕），稱為球面上的大圓。

3. 學習目標

(1) 理解不共線三點、交於一點的兩直線、直線與線外一點，皆可決定唯一的平面。在空間中的任一平面上，可以運用平面幾何的任何知識。

(2) 理解空間中的平行線，是指落在同一平面上的不相交直線。

(3) 理解空間中的「角」落在某一平面上；所謂夾角的測量，是在該平面上操作的。

(4) 理解空間中一點，能找到至多三條通過該點且互相垂直的直線；那三條直線兩兩決定一平面，這三張平面兩兩垂直。

(5) 理解直線垂直於平面的定義，理解垂直於同一平面的（相異）直線皆彼此平行，而垂直於同一直線的（相異）平面亦皆彼此平行。

(6) 當直線 L 不垂直於平面 F 且交於一點 P 時，所謂直線與平面的夾角，是指 L 與 L' 的夾角，其中 L' 是 L 在 F 上的正射影（將 L 的點垂直投影到 F 上）。

(7) 理解並能運用法線定理：當直線 L 與平面 E 交於點 P，若 L 垂直於過 P 且落在 E 上的兩相異直線，則 L 垂直於 E。

(8) 理解兩平面必存在公垂面；兩平面的夾角（兩面角）是依它們在公垂面（兩平面交線的垂面）上的截痕而測量的。

(9) 在連結生活經驗的前提之下，統整複習以前學過的空間形體、形體上的平面圖形、形體的平面展開圖、形體的三視圖，並能用來輔助思考和從事設計。

(10) 理解直圓錐是一個線段繞對稱軸旋轉而成的形體，其中對稱軸與線段之交點為直圓錐的頂點，該線段是直圓錐的母線（generatrix）。

(11) 認識並理解球面、經線、緯線，以及球和平面的截痕與截面，並能用來輔助思考和加以應用。

4. 教學斟酌

(1) 空間概念的教學關鍵之一，是以平面媒體（書本或黑板）溝通空間概念，這種溝通的能力攸關教學成效。本課綱從小學階段起，即注意培養這種溝通能力，例如辨識透視

圖、三視圖、示意圖之差異等等的課程安排。最根本的教學之道，仍是「多使用實體模型」，提供學生真實的（動手的）經驗。但是，使用平面作為溝通媒體，在教學中實難避免，雖然課程的設計從五年級就開始發展這套溝通的圖示和語言，11 年級的教師還是要特別留意空間溝通的有效性，確保學生具備使用語言和平面圖示表現空間概念的溝通能力。

(2) 學生在 9 年級以長方體為具體對象而學習了直線與直線的平行、垂直、歪斜關係，平面與平面的垂直與平行關係，以及線與面的垂直關係。本條目的教學，應善用上述前置經驗。

(3) 10 年級的三角測量，應讓學生憑直覺而認識長方體上若某邊 L 垂直於某面 E 於 A 點，則 L 垂直於 E 上通過 A 的所有直線。這是法線定理的前置經驗。此條目意欲處理一般的直線與平面垂直關係。

(4) 本條目的教學，主要倚重過去（9 年級和 10 年級）在長方體上面建立的概念，以及生活中建立的直觀概念。但是，作為數學思維方式的演示，本條目的教學應適度闡釋空間幾何的公設化思維發展歷程。

(5) 留意學生在地理課的需求，認識球面上的大圓與小圓。認識直線與平面的垂直關係、直線與直線的平行與垂直關係、兩平面的垂直關係；認識兩面角，但除了直角以外，不必以幾何方式處理一般的兩面角。

(6) B 類課程是部分學生所受的最後一門正式數學教育，在設計的理念上，宜搭配課綱條目而為學生統整複習，更完善地準備其數學素養。以本條目而言，可擴及生活中（例如建築、裝飾和商業設計中）常見的形體，討論在這些形體上出現的平面圖形，或者連結展開圖、三視圖，討論展開或正射影之後的平面圖形。參閱釋例。

條目範圍

1. 空間幾何的內容浩瀚，本條目僅止於支援空間直角坐標系的基礎概念，以及關於空間思維的數學素養。
2. 本條目雖然定義了兩面角，但是教學目標在於認識，請勿過度操作。宜在常見的形體上處理兩面角，且原則上應提供具體的示意圖，例如釋例 9 所畫的圖。

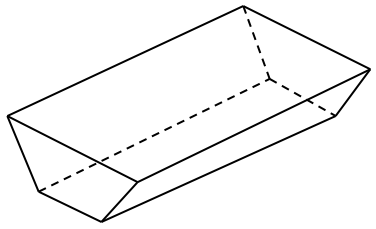
錯誤類型

1. 考慮兩平面相交的關係時，誤以為可以交於一點。此錯誤認知可能源自於未能將平面無限延伸，而僅以兩片平板作為概念心像。
2. 當兩條直線分別落在互相平行的兩個平面上，當它們投影到另一平面之後彼此垂直時，學生不認為它們彼此「歪斜」。
3. 四面體和金字塔易生混淆，宜釐清四面體是三角錐，而金字塔是四角錐。三稜鏡的形狀是

三角柱。

釋例

1. 法線定理實為空間性質的關鍵基礎。這個定理的建立，可以利用畢氏定理（正逆敘述），也可以僅利用三角形的全等推論；但是，事實上也容許藉由操作而歸納出這個概念。
2. 將教室視為一個（理想化的）長方體，可以提供很方便的空間概念模型。例如張開一扇門的角度，很自然是看門在地板上的張角，而地板是門和牆的公垂面。教室四周的柱子，都是地板的垂線，它們彼此平行。
3. 連結（複習）直圓錐（可簡稱為圓錐），理解對稱軸是直圓錐底面的一條法線，且該法線通過底面的圓心。理解母線之後，可了解直圓錐之頂點到底面圓周上任一點的線段，皆可為母線。通過直圓錐之頂點且垂直於底面的截面，皆為等腰三角形，其底邊即為底面的直徑，而其頂角就是直圓錐的頂角。
4. 連結（複習）三視圖，認識（直）圓柱、角柱、圓錐、角錐（含金字塔）的三視圖，並適度練習繪製。
5. 連結（複習）展開圖，認識（直）圓錐、無蓋長方盒、無蓋圓柱盒的展開圖，並適度練習繪製。可進一步推廣到方槽或圓槽（trough）的展開圖與三視圖：方槽和圓槽的前後兩側都是鉛直面，依序是梯形和半圓形。例如，下圖是一個梯形的方槽。



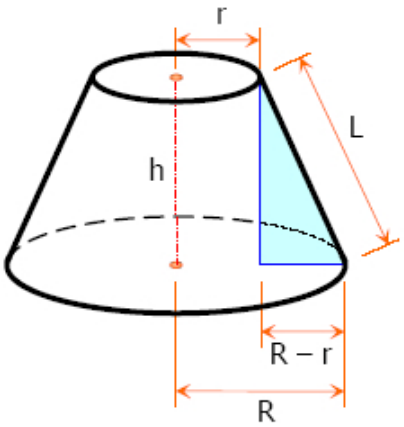
6. 柏拉圖多面體（正多面體）的展開圖（正十二面體、正二十面體僅適度理解即可）；可運用歐幾里得對「僅有五種正多面體」的證明方法，探討展開圖的夾角性質。
7. 藉由「削切」正多面體的方法，認識（部分）阿基米德多面體（半正規多面體），連結截面概念，認識截面與半正規多面體之面的平面幾何圖形。在架設欄杆或扶手的直立柱頭上，經常可見「削切」的造型設計，例如下圖 (a) 的柱頭裝飾（單維彰攝於金門），是正方體削切頂點而成的 3-4-3-4 半正規多面體（每一個頂點周圍的面都是正三、四、三、四邊形）。下圖 (b) 則是正方體削切兩個頂點而成的設計，可當作筆插，某餐廳用來放置帳單（單維彰攝於中壢）。

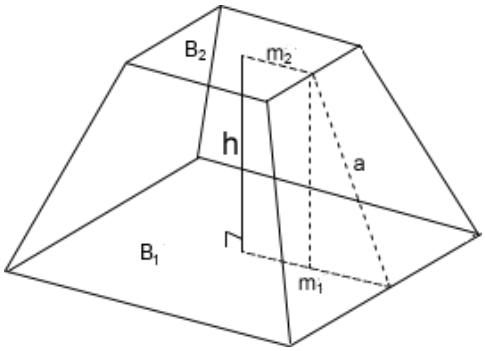
(a)

(b)

8. 直圓錐(面)提供連結三視圖、示意圖、展開圖的機會，而其面積公式再度連結了弧度量。學生已經學過，使用展開圖圓心角的比例來計算圓錐體(側面)的表面積；現在運用弧度量，則展開圖的圓心角 θ 滿足 $R\theta = 2\pi r$，其中 R 為母線長，r 為底部半徑。所以圓錐的表面積為 $\frac{1}{2}R^2\theta = \pi Rr$。

9. 將錐體上方的尖端截掉之後，成為臺(frustum)，如下圖顯示圓錐臺和角錐臺。





10. 連結生活環境中的梯形：例如當粗細不同的四角柱連接在一起時，銜接處常會出現梯形，如右圖(單維彰攝於中央大學)；又如方形地磚鋪到略為下陷的落水口周圍時，常會被切割成梯形。閥口的角柱形花盆的側面是梯形，角錐臺的側面也是梯形。

11. 球的任一個(平面)截面都是圓形，球面上的任一個(平面)截痕都是空間中的圓形。當截面包含球心時，截圓達到最大直徑，此時的截痕是球面上的大圓。引導學生理解兩個(相異)大圓必交於兩點，它們是球的直徑端點。可適度引導學生以直覺想像，所謂「直立」在球面上就是頭腳的延伸直線通過球心，並想像沿著大圓直立著等速運動時(例如乘腳踏車或滑板)，身上不會感受離心力，故大圓相當於球面上的「直線」。

12. 球面上的所有經線都是大圓，但緯線之中，僅有赤道為大圓。在球面上，沿著經線的 1 緯度距離是固定的，不因緯度高低而不同。但是，地理教材也許會說靠近赤道的 1 緯度較短，而靠近南北極的 1 緯度較長：北緯 0° 到 1° 沿著經線的距離約為 110.57 公里，但是北緯 89° 到 90° 沿著經線的距離約為 111.69 公里。這是因為地球並不是球形，而地球的緯度是沿用北半球航行者根據北極星之仰角而決定的，請看 S-11B-2 之釋例。

S-11B-2 圓錐曲線：由平面與圓錐截痕，視覺性地認識圓錐曲線，及其在自然中的呈現。	s-V-2

先備：一次與二次函數（F-10-1）、空間概念（S-11B-1）。

連結：平面上的比例（G-11B-3），空間坐標系（G-11B-4）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

99 課綱已經弱化圓錐曲線單元，本課綱則將為學科學習而準備的圓錐曲線列在選修數學甲（稱為「二次曲線」），而將素養導向的學習列在本條目中。本條目不強調數學運算，而是從理解與欣賞的角度認識圓錐曲線。因此，教科書應重新設計本條目的學習內容，不宜複製 99 課綱的圓錐曲線單元。

2. 相關約定

給定空間中不互相垂直的兩相交直線，令其交點為 P 且所夾的銳角為 α，則以其中一直線為軸，旋轉另一直線所成的形體，稱為對頂錐（double cone）；其中點 P 稱為此對頂錐的頂點，而 2α 稱為它的頂角（aperture of a double cone）。

3. 學習目標

(1) 能認識圓錐曲線的歷史緣由。

(2) 能認識圓錐曲線圖形可以由單點光源以不同角度照射在牆面上所形成的光暈構成。

(3) 能認識圓錐曲線也可以由某一平面和對頂錐以不同角度相切所形成的截痕而來。

(4) 能認識圓錐曲線在科學與技術方面的具體應用，例如天體運行的軌道。

(5) 能認識各式圓錐曲線的標準式，並理解圓錐曲線即二次曲線。

4. 教學斟酌

(1) 本條目的圓錐曲線教學，應注重具體的操作認識，說明在生活中所見的圓錐曲線，讓學生對圓錐曲線有視覺性的認識。

(2) 相對於 S-11B-1 之教學常舉多面體之「削切」為例，本條目之教學可常舉圓柱體、圓錐體之「削切」為例。

(3) 如果要經由焦點和準線所構成之動點軌跡來介紹圓錐曲線，應只停留在觀賞（動畫）

和理解的層面，避免代數性操作。

(4) 應該介紹圓錐曲線和二次曲面在科學與建築工程中的具體應用，以讓學生認識數學曲線與曲面之美麗與實用。空間中的二次曲面僅止於理解它們與二次曲線的關係，例如旋轉橢圓而得橢球，橢球的橫剖面為橢圓，旋轉雙曲線而得雙曲面，旋轉拋物線而得拋物面等等。

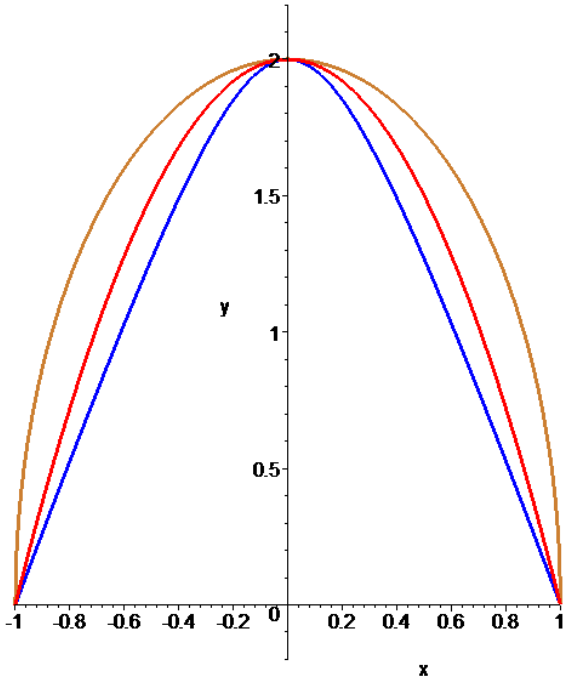
(5) 宜先從直覺或舊經驗分別認識拋物線、橢圓、雙曲線之後，才利用圓錐與平面之截痕來統整這些曲線，而且應該提供充分之動機。引出圓錐模型之後，應強調平面以不同角度和直圓錐相切所得的截痕與各式圓錐曲線的對應關係，以讓學生能認識圓錐曲線彼此之間的關係。如此的教材不只一種設計方式，後面的釋例列舉一些素材供參考。

條目範圍

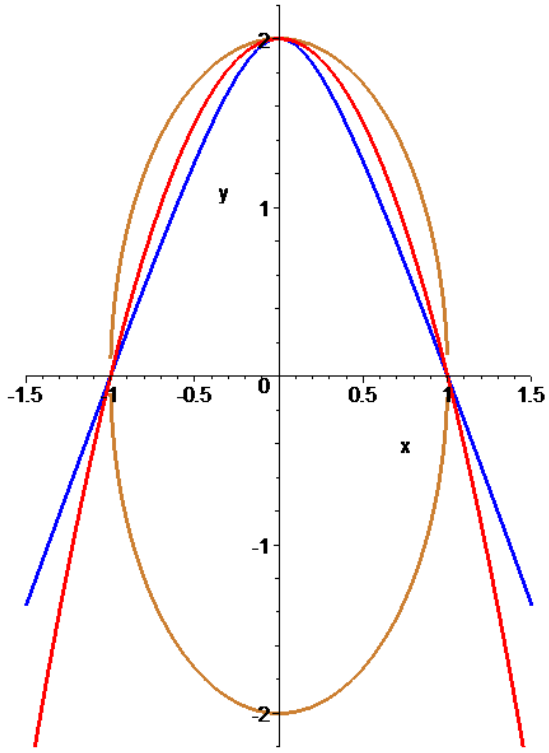
1. 本條目不牽涉幾何作圖，但是可適度以焦點和準線所構成的動點，做輔助說明。
2. 本條目不涉及求焦點坐標、正焦弦長、圓錐曲線之切線、離心率等計算問題。

錯誤類型

誤以為「彎彎的開口曲線」都是拋物線。例如圖一包含三條通過 $(\pm 1,0)$ 和 $(0,2)$ 三點的二次曲線，由外而內依序是橢圓、拋物線、(一支) 雙曲線。觀察雙曲線在左右兩側已經接近兩條直線。放大製圖範圍，如圖二，則雙曲線的「近似直線」性質更明顯；相對地，拋物線則到處皆略為彎曲。



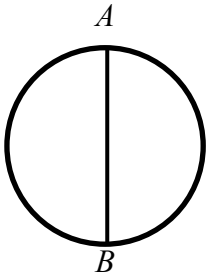
[圖一]

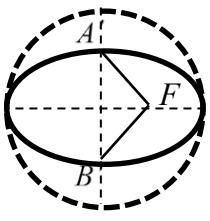


[圖二]

釋例

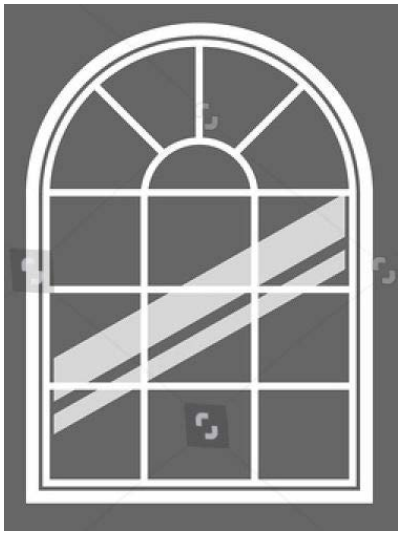
1. 學生在九年級或十年級時，可能已經聽說二次函數的圖形叫做「拋物線」。此時可能有兩個主要的教學重點。第一，「拋物線」既非英文（希臘文）parabola 的音譯也非其意譯，而是根據其物理性質而重新命名的。為何稱為「拋物」線？這是可以根據理想的自由拋射物原理計算出來的。第二，利用這個機會探討方程式圖形與函數圖形的差異，讓學生理解函數圖形只能獲得開口朝上或朝下的拋物線，但是方程式圖形可以做出開口朝右或朝左的拋物線。
2. 可以從「壓扁的圓」來認識橢圓。將圓 C: $x^2+y^2=a^2$ 的鉛直方向等比例縮短，成為橢圓 Γ，其中 Γ 交 y 軸於 $(0,\pm b)$ 兩點，$0<b<a$。則 Γ 在上半平面的一點 (x,y') 滿足比例式 $y':\sqrt{a^2-x^2}=b:a$，可得方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ 之圖形即為 Γ。想像圓 C 在 y 軸上的直徑在壓扁過程中變成通過點 $(c,0)$ 的折線，保持長度為 $2a$，可決定 $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$，稱這兩點為橢圓的兩個焦點，又可進一步發現：從一焦點往 Γ 上任一點 (x,y') 再折返另一焦點的距離恆為 $2a$，可見焦點可以作為推廣的圓心角色，而橢圓的長軸長 $2a$ 可以作為推廣的直徑角色（從圓心往圓上任一點再折返圓心的距離恆為直徑）。參閱下圖。





3. 前述「壓扁的圓」也可以改為「拉長的圓」。同樣的思考方法，還可以用來推論半圓形石碑在地平面上的陰影為半個橢圓的情況，或者圓柱體在平面上的截痕為橢圓，或者將平面 P_1 上的圓正射影到另一平面 P_2 成為橢圓，其中 P_1 與 P_2 相交且非垂直。而最後這項觀點，可以解釋為何生活中所見的圓，在視覺上幾乎都是橢圓（例如看一個圓形的杯口）。斜切香腸的截面是橢圓，斜持圓桶狀的杯子時，杯內的液面是橢圓。

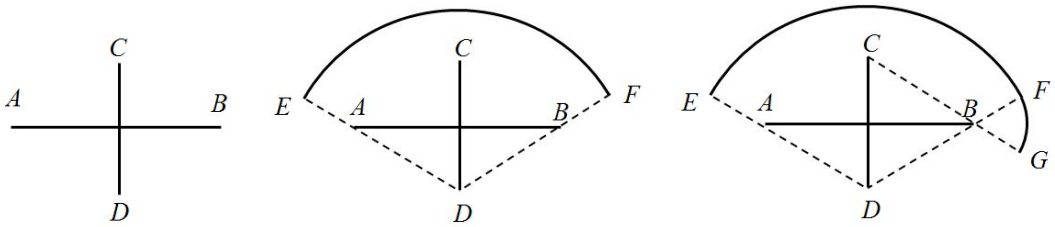
4. 在斜面屋頂上安裝直立式圓頂天窗，是常見於高緯度地區的建築式樣，如右圖。圓頂窗的前視圖，可以分為上方的半圓形以及下方的矩形，示意如圖三(a)。為了安裝那樣的天窗，需要割開一部分的屋頂。將屋頂視為空間中的平面，則它要割開的區域邊界，是圓頂窗的邊界向後水平延伸的曲面與屋頂平面相交的截痕。窗的矩形部分在屋頂上需要割出一個長方形，其邊長可由矩形的邊長與屋頂的仰角決定。窗的半圓部分，則是半圓柱與平面的截痕，所以是半個橢圓，其半軸長也可以算出來。圖三 (b) 是準備安裝圓頂天窗的施工中屋頂照片（單維彰攝於中壢），可以看到建築工人已經安置了準備開窗的長方形和半個橢圓形基座。



[圖三]　(a) 圓頂窗前視圖　(b) 圓頂天窗在斜背屋頂上的基座

5. 英語的「橢圓」(elliptic) 是個比較專業的形容詞，而「卵形」(oval) 是比較口語的說法；相反的，華語的「橢圓」反而比較口語，而「卵形」相對少用。現在學生知道橢圓有其精確的定義，而卵形另有幾種不同的定義 (略)。在英語和華語的日常用語中，「橢圓」不見得真的是橢圓而可能是卵形，「oval」也不見得真的是卵形而可能是橢圓。例如美國總統的「橢圓辦公室」英文名稱是「oval office」，但是它確實是橢圓(就設計原理而言)，其長軸約 36 英呎，短軸約 29 英呎。這個橢圓內切於兩個合併的矩形：以短軸為其中一邊，與半長軸同寬的兩個矩形；這兩個矩形皆為黃金矩形。

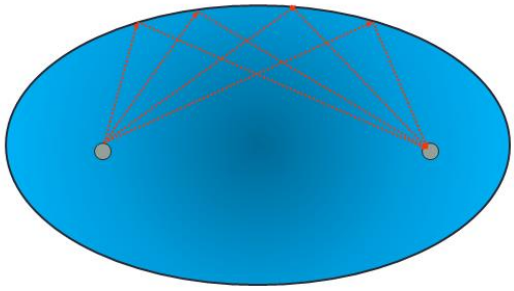
6. 承上，其生活中所謂的「橢圓」餐桌、茶几或者「橢圓」廣場、劇院、球場、大廳，有時候並非橢圓形，而是一種卵形。例如看似橢圓的羅馬競技場 (右圖)，其地基是用以下這種卵形設計的。在平面上設定互相垂直平分的 AB 線段與 CD 線段，如圖四 (a)。選一個長度 R，滿足 $R>\overline{CD}$ 且 $R>\overline{BC}$，以 D 為圓心做 (圓) 弧 EF，使得 E、A、D 共線而且 F、B、D 共線，如圖四 (b)。接著，以 B 為圓心，BF 為半徑，做另一弧 FG，使得 C、B、G 共線，如圖四 (c)。接下來，以 AB 直線和 CD 直線為對稱軸，完成這條曲線，即為一種卵形。



[圖四]　　(a)　　(b)　　(c)

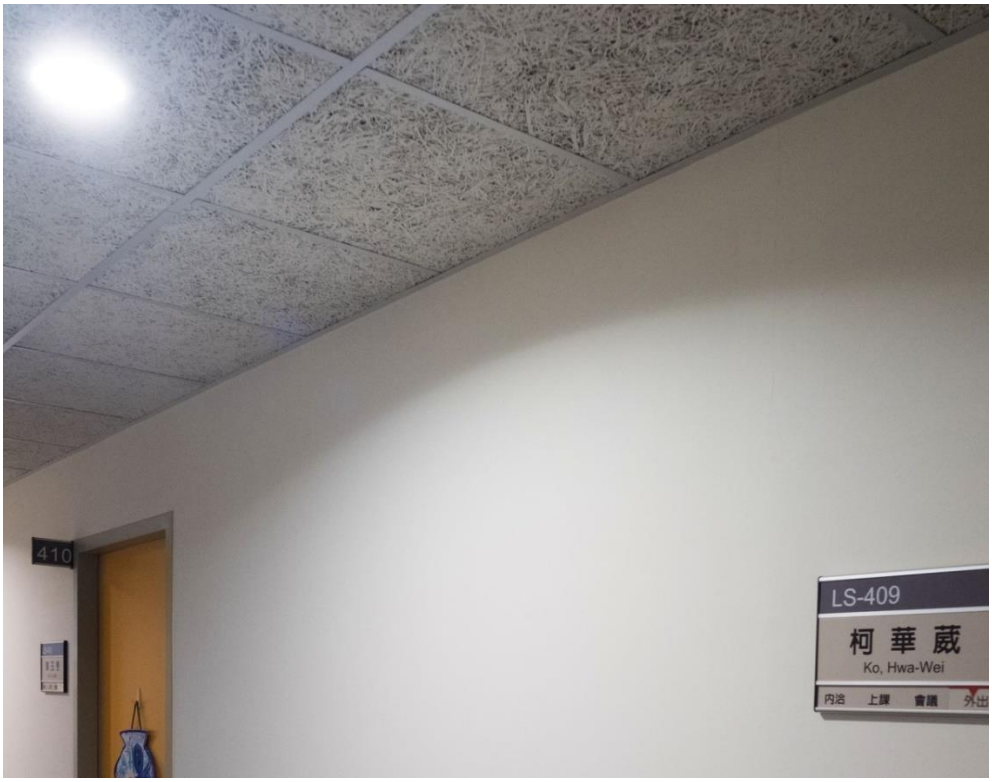
以上平面設計的關鍵是，兩弧 (例如 EF 弧和 FG 弧) 須「平滑」相接，數學的意義就是在圓 D (以 D 為心、R 為徑的圓) 和圓 B (以 B 為心、$\overline{BF}$ 為徑的圓) 的交點 F 處，兩圓的切線相同。

可是，的確有橢圓形的廣場。例如義大利中北部一座城市 Lucca 有個露天廣場，就是真正的橢圓。從廣場上某個焦點發出聲音，經牆壁反射後會匯聚在另一焦點上。如下圖。



7. 承上，按照「共切線」的原則，可以設計各種平滑的圓弧造型。例如「洋蔥拱」的半側曲線 (參閱 G-11B-2) 可以用平滑銜接的兩弧設計出來，又例如可以用平滑銜接的兩弧銜接長方形的對角頂點，造成各種「S 曲線」。
8. 如果用橢球當作地球的模型，則其通過南北極的縱剖面為一橢圓，其中鉛直的短軸兩端點是南北極，而水平的長軸兩端點在赤道上。橢球的緯度並不是從「球心」定義的，而是源自於北半球之航海者測量北極星仰角的傳統。橢圓上一點 P 的緯度，要先做橢圓過 P 點的切線：推廣圓的切線觀念，與橢圓僅交於 P 點的直線，是它的切線；此切線即航海者所見的「地平面」在地球縱剖面上的截痕。過點 P 與切線垂直的直線為橢圓過 P 點的法線，注意：圓的法線皆通過圓心，但是橢圓的法線則通常不通過中心。橢圓上一點 P 的法線與長軸的夾角決定 P 的緯度。用上述模型定義的緯度，更接近地球科學使用的緯度，而 1 個緯度的距離並不等長：用地球的真實尺度來計算，北緯 0° 到 1° 的橢圓弧長約為 110.57 公里，而北緯 89° 到 90° 的橢圓弧長約為 111.69 公里。

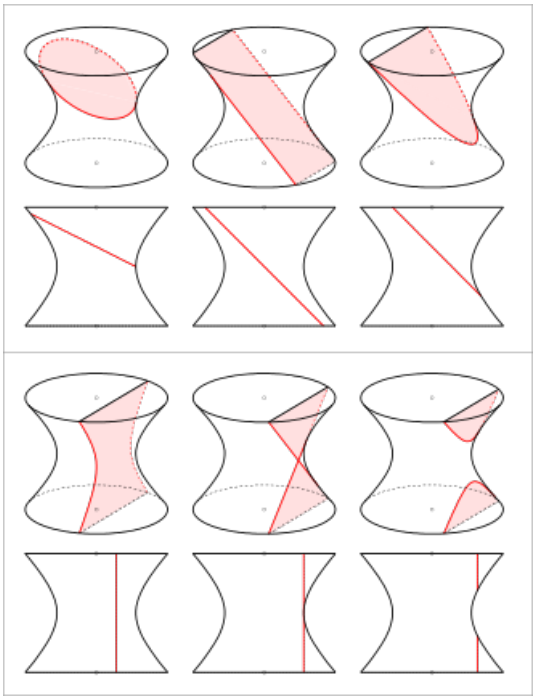
9. 生活中常見的光源，可分成兩大類：平行光源與點光源，前者的典型即陽光，後者的典型之一則為手電筒。圓錐是點光源照亮區域的數學模型，而當它照著一堵牆，則牆就是圓錐的截平面。例如圖五的照片（蔡宗良先生攝於中央大學），呈現走廊上方的頂燈朝正下方發光時，在牆壁上照亮的區域。頂燈是點光源，它照亮一個圓錐區域，而牆壁則是一個截平面。牆上被照亮區域的邊界，其數學模型就是雙曲線。



[圖五]

10. 在充分認識橢圓及其標準式之後，也可以考慮從數學的角度考慮橢圓標準式的變形（加號改為減號）而討論該方程式的圖形特徵，從而導入雙曲線。

11. 著名的高第（Antoni Gaudi）雙曲面（hyperboloid）可以用直線段造出其骨架，在建築結構和造形設計中均有典範應用。用高第的想法，可以直覺地認識雙曲面，然後才從雙曲面上獲得平面上的截痕：橢圓、拋物線、雙曲線，如圖六。圖六引自以下 Wiki 百科：https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid。也可以參考以下影片的動態展現：https://www.dropbox.com/s/quligrdxxqswszr/Gaudi_hyperboloid.vob（VOB 檔案，可用微軟 Media Player 播放。）



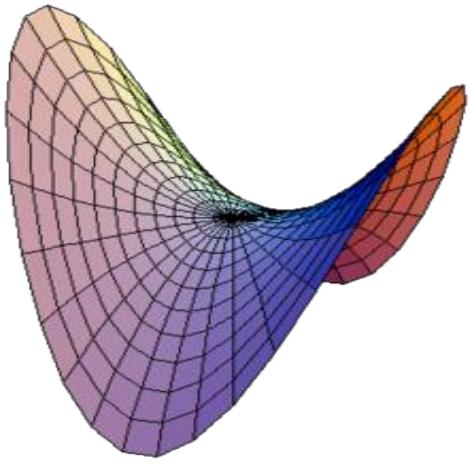
[圖六]

12. 在本單元定義圓錐曲線不應從解析幾何切入，也不宜由對頂錐導入，而須借助視覺直觀。若有對頂錐之教具，盡量用教具進行教學，否則也應該盡量設法利用動畫、虛擬實境、3D 繪圖軟體。設對頂錐的對稱軸為直線 L，且頂角為 2α。設有一平面 E，若 E 與 L 交於頂點外的一點，令 θ 為 E 在該點之法線與 L 之夾角。當 $\theta=0°$ 時，對頂錐在平面 E 上的截痕為一個圓；當 $0°<\theta<\alpha$ 時，截痕為一個橢圓；當 $\theta=\alpha$ 時，截痕為一條拋物線；當 $\alpha<\theta<90°$ 時，截痕為一對雙曲線；當 $\theta=90°$ 時，平面 E 包含對稱軸 L，截痕為兩條相交的直線。而若 $E\,//\,L$，則截痕亦為一對雙曲線。

13. 參閱 G-11B-3「釋例」第 3 條，該例可以用來處理以下問題：把一個直徑為 R 的球投入開口朝上、頂角為 θ 的直圓錐，當球卡在圓錐內的時候，球心到圓錐頂點的距離為何？此時球與圓錐交於空間中的一個圓，該圓的直徑為何？

14. 當學生具備空間概念之後，建議列舉一些三維的二次曲面讓學生認識其數學結構與應用之美。例如狀如馬鞍的雙曲拋物面（如下圖）。雙曲拋物面名稱之由來為，此曲面與垂直平面的截痕均為拋物線，而與不通過鞍點的水平平面的截痕為雙曲線。雙曲拋物面在力學上

有其穩定結構，廣泛被運用於無樑柱的建築設計之中。



G-11B-1 平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。	g-V-1

先備：以平面直角坐標系、方位距離標定位置（G-7-1）。

連結：平面向量的運算（G-11B-2）、矩陣與資料表格（A-11B-1）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

平面向量是基礎而重要的數學概念，學習數學 B 的學生，可能以後再也沒有機會學習這個概念，故設此條目以促成更完整的數學素養。B 類課程的教材與教學範例，應盡量為藝術、設計學群的需求著想。在平面設計的工作上，包括包裝、商標、字型，都有向量方法，甚至專業的電腦輔助設計軟體都採用向量表徵作為操作介面。另一方面，平面向量的加、減和係數積，是將矩陣視為資料表格而做基本運算的具體特例（單行或單列矩陣），它成為 A-11B-1 的前置經驗。

2. 相關約定

(1) 向量表示為 $\vec{a}$，若始點 A 終點 B 的向量表示為 $\overrightarrow{AB}$。

(2) 零向量 $\vec{0}$ 不考慮方向。在提及向量與向量的平行或垂直時，不討論 $\vec{0}$。

(3) $\left|\vec{a}\right|$ 表示向量的長度。

(4) 由兩位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 之線性組合 $\left\{\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\,|\,0\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1\right\}$ 形成的平行四邊形，稱為由 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$「決定」的平行四邊形。

3. 學習目標

(1) 能理解向量同時具有大小及方向的特性；只要此兩特性相等的向量，就是同一個向量。

(2) 能做平面坐標上 A、B 兩點所形成的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐標表示，以及一點 A 的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐標表示。

(3) 理解平面向量之加法、減法與係數積運算的意義，能透過圖形或坐標方式操作平面向量的加法、減法與係數積。

(4) 若將一平面圖形各點位置視為位置向量，能理解對各點進行平面向量之加法、減法與係數積就是對圖形進行移動與縮放。

(5) 能計算平面坐標上兩點之內分點坐標。

(6) 理解平面上一點的位置向量，並能轉換點坐標及其位置向量這兩個概念。

(7) 理解兩向量之線性組合的意涵，並能操作線性組合；能在平面坐標上標示出如 $\{\alpha(1,0)+\beta(1,1)\,|\,0\le\alpha\le 1, 1\le\beta\le 2\}$ 的區域。

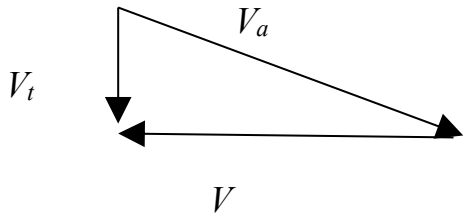
4. 教學斟酌

(1) 向量概念建議以位置向量為主，銜接十年級以坐標方式學習三角與直線的歷程，並透過位置向量介紹向量的加法、減法及係數積運算，最後再以純向量形式介紹向量的加、減及係數積。

(2) 在 11B 教導平面向量的最主要目的，是為建立坐標幾何的素養，為矩陣運算及其資料表格的意涵做準備。在此概念之下，教學可避免過多純數學和物理的內容。

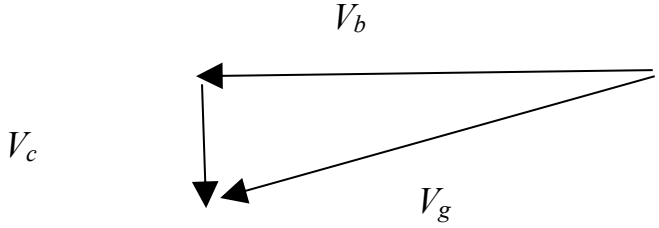
釋例

1. 海上航行者，或者風浪板的運動員，在行進間有真風 v_t（true wind）和感受風 v_a（apparent wind），運動員的行進速度為 v，若 $v_t=0$ 時，運動員所感受風的方向與行進方向相反，所以 $v_a=-v$；因此一般情形 $v_t\neq 0$ 時，$v_a=v_t+(-v)=v_t-v$ 感受風 v_a 是真風 v_t 減行進速度 v，如下圖。【由澎湖科技大學通識中心侯建章助理教授提供，他曾獲得亞洲風浪板巡迴賽壯年組冠軍】

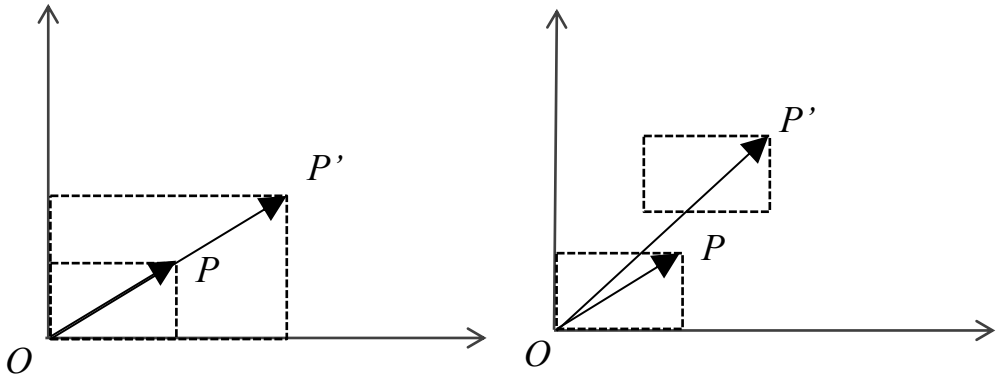


$$v_a = v_t + (-v) = v_t - v$$

2. 在海洋的航行中，船隻有對地速度 v_g（SOG: speed over ground），例如船隻的定位訊號在地圖上的移動速度，也有對水速度 v_b（boat speed），而兩者之向量差是水流或洋流的速度 v_c 造成的：$v_g=v_b+v_c$，如下圖。【來源同上】



3. 在電腦繪圖和影像處理時，經常要將物體放大縮小或位移。若要把長方形圖形放大兩倍，可將平面上的點 P 以「$\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OP}$」的方式變換到點 P'，如下左圖。若是要將長方形往右移兩單位，往上移三單位，可將平面上的點 P 以「$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2(1,0)+3(0,1)$」的方式變換到點 P'，如下右圖。



條目範圍

1. 不含三點共線之相關問題。
2. 不觸及基底及線性相關、獨立等名稱。

錯誤類型

誤將向量長度符號當作絕對值使用，例如 $\vec{a}=(2,-1)$，則有 $|\vec{a}|=|(2,-1)|=(2,1)$ 的錯誤結果。

評量

本條目不強調「位移向量」的用途，不宜過度評量需要移動向量以求解的問題。

G-11B-2 平面向量的運算：正射影與內積，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角。	g-V-5

先備：直線方程式 (G-10-2)、空間中的線與平面 (S-9-12)。

連結：平面向量 (G-11B-1)、矩陣與資料表格 (A-11B-1)。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

本條目不含面積與行列式、科西不等式的學習目標。本條目的教學，應盡量在藝術設計或日常生活範圍內的物理經驗上，製作教材與教學範例，以闡明正射影、求夾角等概念的意義。本條目所談的夾角，可以主要用角度制表示。

2. 相關約定

(1) 以符號 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 代表兩向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的內積。內積的代數定義，又稱為內積的坐標算法；內積的幾何定義，又稱為內積公式。

(2) 向量的垂直不討論零向量。

(3) 兩向量的夾角 θ 取 $0°\le\theta\le180°$。

3. 學習目標

(1) 能操作向量在指定方向的正射影，知道平面向量內積的坐標算法。

(2) 兩向量平行與垂直的概念，可與直線的平行與垂直結合。在平面上，向量與斜率皆為決定方向的概念，因此，可透過向量內積求得兩向量及直線的夾角。並可以發展直線的法向量方程式。

(3) 理解內積公式並能用以解決問題。

(4) 理解向量內積與正射影的關聯。

4. 教學斟酌

(1) 向量的正射影為向量內積的相關概念，而定義向量的正射影後，應介紹任意的非零向量皆可表成兩互相垂直向量的線性組合，此即向量分解的概念。

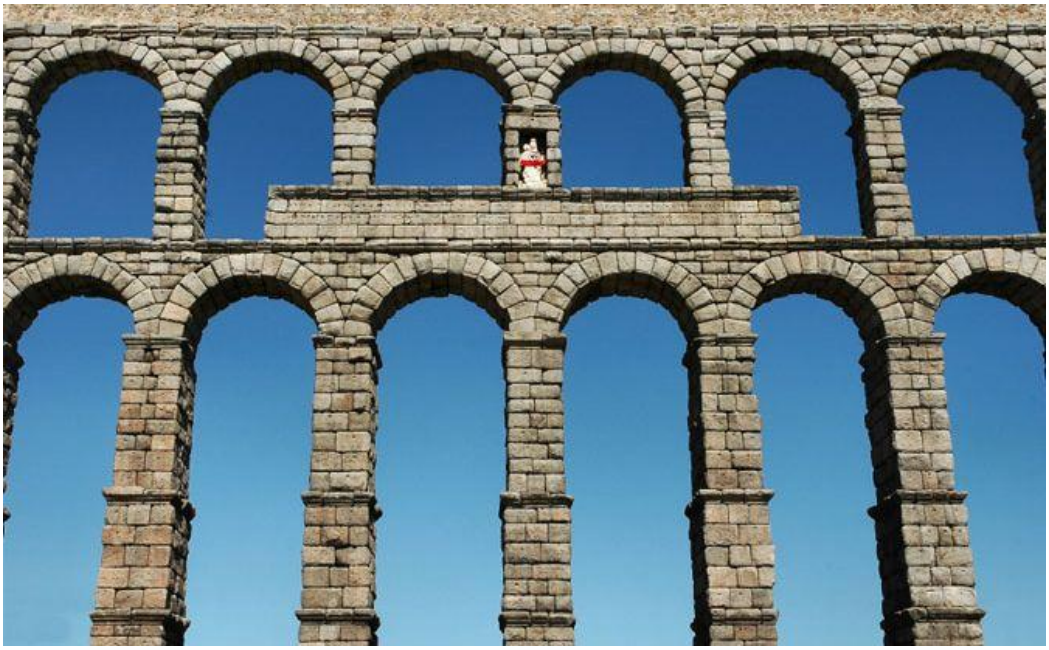
(2) 可適度強調兩向量相加、相減仍為一向量，但是向量的內積為一純量，如同力與位移有方向性，但兩者相乘後變成只有正功與負功，已無方向性的概念。

(3) 可利用向量內積求兩向量或兩直線夾角的餘弦，並適當引入計算機求夾角的估計值。

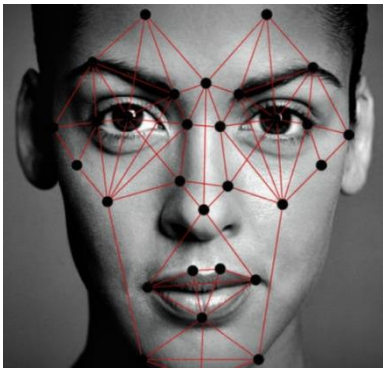
釋例

1. 哥德尖拱（參閱 G-11B-3 的條目說明）兩弧相交處的切線夾角稱為尖拱之頂角，它是可以運用解析幾何或平面向量來推算的。類似地，洋蔥拱（如下圖）的頂角也是可以用向量方法推算的。

2. 羅馬圓拱（參閱 G-11B-3 的條目說明）的合頂石之重量，必須由其左右兩側的石塊支撐起來。這裡出現將力分解成水平、鉛直分量的需求。整個半圓拱的重量，依此原理被往下和往外（兩側）傳遞和累加。向下的力由基柱和地基承擔，向外的力則需要另外設法。重要的是，將許多個全等的圓拱並列時（如下圖），水平分力並不會疊加，而是跟一式圓拱產生的左右分力相同；這也是向量思考方法的應用。



3. 向量內積也可以應用在臉部辨識。首先辨識機器根據被辨識人的臉部特徵建構一個特徵圖形（如下圖）。以後要辨識時以鼻樑為起點，各臉部特徵點為終點，形成許多特徵向量，再計算各向量內積值的差異。



http://3smarket-info.blogspot.tw/2016/05/blog-post_501.html

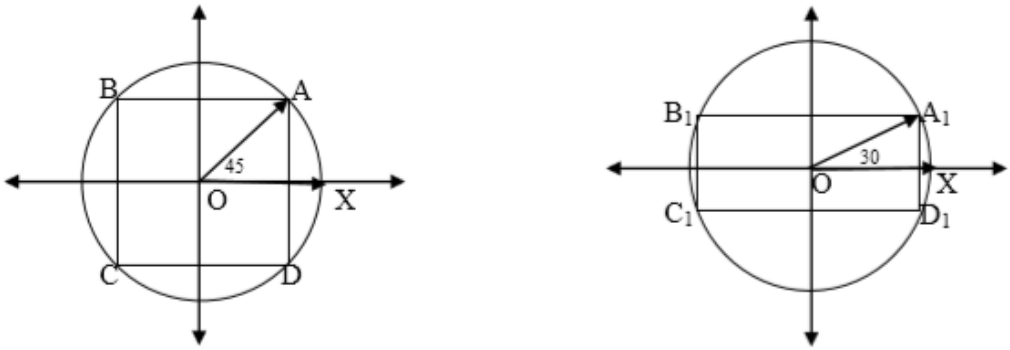
例如以向量內積辨識下圖之中兩個矩形的相似度。進行特徵比對程序時，特徵向量間的差異值是比對的主要依據。假設左邊正方形是內建圖形，右邊長方形是要比對的特徵圖形。首先算出：

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX}=1\times1\times\cos45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OX}=1\times1\times\cos30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

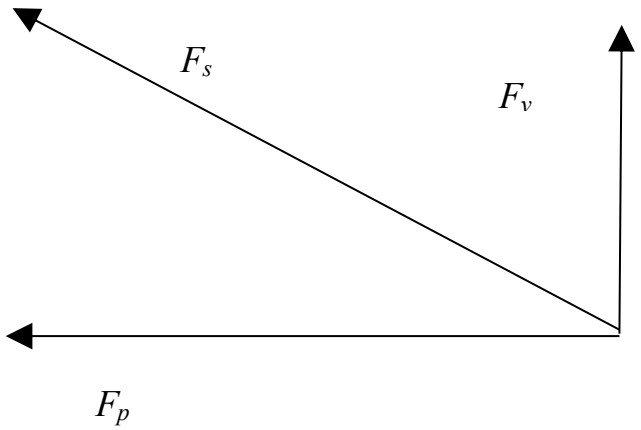
歐幾里德距離法是最常用來計算差異值的方法，其計算式為

$$d_E=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k-i_k)^2}$$

其中 c_k 為特徵向量內積值，i_k 為對應的內建向量內積值。兩向量之間的差異，計算後所得到的值越小代表兩向量差異量越小，也就是兩圖形相似度越高。



4. 帆船或風浪板的推動力來自風帆，風帆產生推力 F_p（push），但是因為舵（rudder）控制了行進方向，船隻只能朝著特定方向前進。船隻在行進方向所受的推力 F_s 是由風帆供應的，F_s 分解成互相垂直的分量 F_p 和 F_v，其中 F_v 會對船體產生側向力，造成船身傾斜，如下圖。



這就是為什麼航行中的帆船經常是斜的，如下圖。造成傾斜是因為帆之受力位置在船身之上，因此產生力矩，該力矩可由船體下方之加重龍骨或船員之重量加以抵銷，避免造成船體翻覆。【由澎湖科技大學通識中心侯建章助理教授提供，他曾獲得亞洲風浪板巡迴賽壯年組冠軍】

由此可見，帆船的行進方向只能「順風」：給定 F_p 之後，F_s 只能落在 F_p 之方向的某個角度範圍內。這個天然限制，使得帆船的航行「大方向」與季節有關。這個話題，可以跟歷史、地理、地球科學跨領域連結。

評量

本單元的評量盡量從建築、藝術與生活應用的角度讓學生體會向量的功用。舉例時兩向量夾角先從學生熟悉的特別角入手，練習與測驗時可用一般角，並搭配計算機計算。

G-11B-3 平面上的比例：生活情境與平面幾何的比例問題（在設計和透視上）。	g-V-4

先備：相似形（S-9-1）、平行線截比例線段（S-9-3）、數列與級數（N-10-6）。

連結：按比例成長模型（F-11B-2）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

本課程意欲藉此條目讓學生統整複習幾何知識，以及使用「比例」解決問題的意識和能力。並欲使學生藉由平面幾何的比例認知，增進其藝術設計方面的欣賞與應用能力。此條目所指的平面幾何，包含在生活經驗範圍內的空間中的平面幾何。此條目所指的比例，包括百分比、比例式、三角比。

2. 相關約定

可告知錐體的體積公式。

3. 學習目標
   (1) 透過平面幾何的比例問題讓學生理解生活情境中幾何的應用。
   (2) 理解平行線截取等比例線段性質，並進而利用單點透視法與繪製透視圖，並能計算在空間中同一物體在不同距離的大小比例。
   (3) 能認識黃金比例和費波納西數列之歷史與應用，並透過實際作圖畫出等角螺線以理解其比例之美。
   (4) 在連結生活經驗的前提之下，對於在 S-11B-1 條目中統整複習的幾何形體，整合運用基本的比例方法（包括三角比），處理一些量化的問題。
4. 教學斟酌
   (1) 雖然本單元主題為平面上的比例，並非只介紹平面圖形，而是應含括如何將三度空間的立體形狀轉化為二度空間的平面圖形，以符合視覺經驗。
   (2) 七年級學過三視圖，可設計此條目的教學與其連結。
   (3) 利用單點透視，理解人類視覺的幾何成像模式。可以搭配實際作圖練習尋找消失點。
   (4) 藉由古希臘的中外比（黃金比例）和中世紀費波納西的兔子繁殖問題兩者的共通性，讓學生理解數學之奧妙。費波納西數列前後項比值所牽涉到的極限概念僅需直觀性理解，無需證明。
   (5) 透過幾何作圖畫出等角（對數）螺線，並與「按比例成長模型」單元相互呼應。
   (6) B 類課程是部分學生所受的最後一門正式數學教育，在設計的理念上，宜搭配課綱條目而為學生統整複習，更完善地準備其數學素養。以本條目而言，可擴及生活中（例如建築、裝飾和商業設計中）常見形體所衍生的平面圖形，用基本的比例方法處理關於這些形體的量化問題。

條目範圍

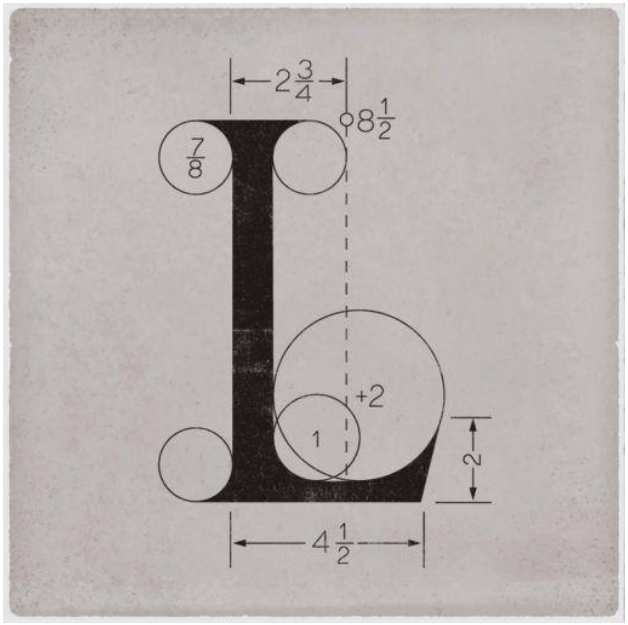
1. 本條目不涉及平面幾何之證明和以嚴謹方式證明無窮數列之極限。
2. 本條目所談平面上的比例，係國中平面幾何知識的延伸，雖然牽涉到幾何作圖，但應該以實作與欣賞為主，不能過度強調幾何證明的嚴謹性。
3. 本條目的透視係指繪畫技巧上所謂的單點透視法則，不論及兩點透視和三點透視。

釋例

1. 生活中常用的 A4 紙，是 A 系列紙張規格的一部份，此系列的紙張裁切法，在工業和商業上有許多好處，也提供影印的方便，例如兩張 A4 紙可以合併印成一張 A3，或者合併縮印成一張 A4。A 系列紙張規格設計，是很基本的比例應用，它的長邊是短邊的 $\sqrt{2}$ 倍，這也是生活中最常見的 $\sqrt{2}$ 。
2. 地圖上顯示的距離都是水平距離，忽略了地表的坡度。對於騎登山車或越野跑步的人來說，

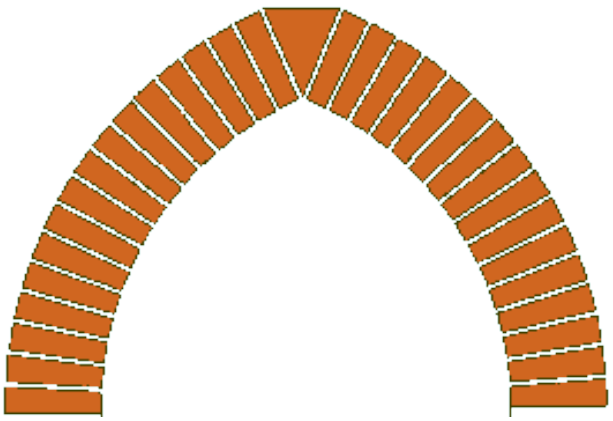
更關心地表上的路徑距離。假如知道路徑的平均坡度（可以從海拔高度估算），就可以運用三角比，從水平距離估計路徑的距離。

3. 給定圓 C 的半徑為 r，當 C 與兩直線 $y=\pm mx$ 相切，設其圓心在 y 軸上，可求圓心坐標與切點坐標。
4. 承上，該想法可應用於「圓角」的設計：把角的頂點與兩邊之一部分置換成一段圓弧，使圓弧與角的兩射線「平滑」相接，也就是角的邊恰為圓的切線。把直角換成半徑為 r 的圓角是簡單的：令 $\angle BAC=90°$，在 AB 射線和 AC 射線上分別取點 B_1 和 C_1 使得 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=r$，則在點 B_1、C_1 做 AB 直線、AC 直線的垂線，其交點即為所需的圓心。對於一般的角以及給定的 r，則三角比是很有幫助的。
5. 圖案設計、造形設計、商標設計、商業與工業設計、字型設計，有豐富的例子讓本條目的教材選用。例如 G-10-4 條目介紹過的：由圓弧、直線「平順」銜接而成的曲線設計，在本條目皆有再發展的機會。下圖展示一個拉丁字母 L 的設計圖。

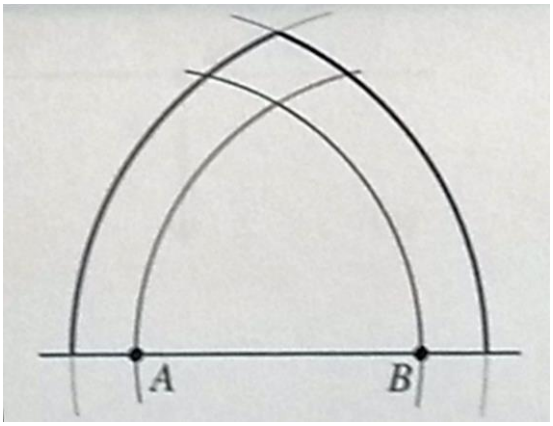


6. 所謂羅馬拱（Roman arch）的前視圖，基本上是同心的半圓環（不含兩側的基柱部分），參見下圖。其中正中央最高處的石塊稱為合頂石（keystone 或 capstone）。組成圓拱的楔形（wedge）石塊未必全等。假如設定合頂石的圓心角為θ（如下圖），其餘部分左右對稱，而且由下至上用體積 9:7:5:5 的楔形石塊組成，可以算出各塊的圓心角。如果已經決定了圓拱的內外徑和厚度，已知石塊的密度，則給定合頂石的重量，則可推算其圓心角。

7. 哥德式（Gothic）大教堂之所以可以建得那麼高大，而且開出面積很大的彩繪窗，關鍵原因就是建築的骨架從圓拱結構改為尖拱結構，又稱為哥德拱，參見下圖 (a)。哥德拱原本只能坐在正三角形上，方法就是歐幾里德從給定線段 AB 做正三角形的尺規方法，如圖 (b) 所示。後來發現可以做在任意等腰三角形上，於是解放了哥德拱的寬高比例限制。例如米蘭大教堂的尖拱設計基礎是一個邊長 5:5:8 的等腰 ΔABC，其中 $\overline{AB}=8$，也就是兩個 3:4:5 的直角三角形合併而成的等腰三角形。設計者要做兩個分別通過 A、C 點和 B、C 點的圓弧來決定尖拱的形狀，學生應先理解如此尖拱的形狀並不唯一，然後在 AB 直線上決定兩個圓心的位置。

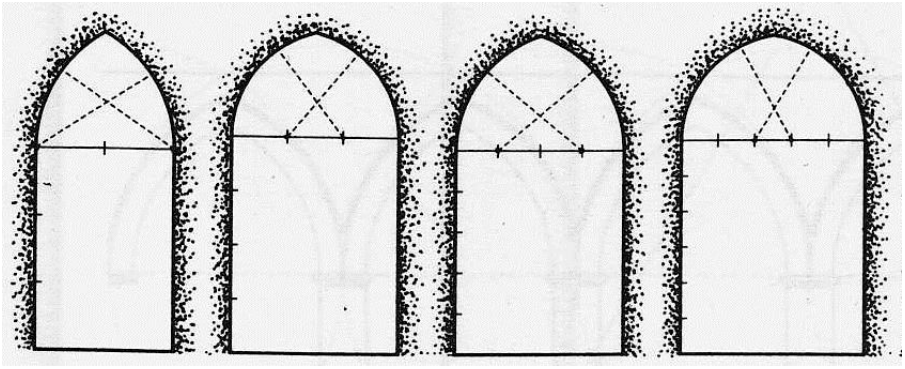


(a)



(b)

8. 掌握比例原則之後，建築師可以更多元地設計各式哥德式尖拱門窗造型。如下圖之 (h) 是標準的根據正三角形所做出的尖拱；造型 (i) 的拱形稱為三分之一拱，其做法為將門窗寬度三等份，然後以兩邊位於三分之一的分點為圓心，門窗寬度的三分之二長為半徑，各做兩弧相交而成。同理，(j) 為四分之一拱，(k) 為五分之二拱。

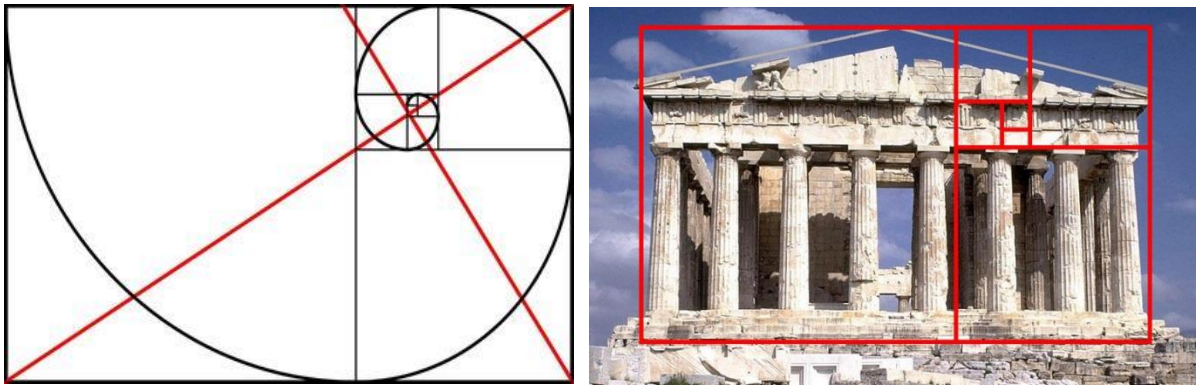


(h)　　(i)　　(j)　　(k)

9. 可以從生活情境出發強調平面上比例問題的重要性，例如一條筆直鐵軌兩旁景物由近而遠呈等比例縮小，進而引入單點透視法，定義視覺上的消失點與水平線。作為課外的補充，可以舉不符合透視法則的繪畫作品以強調透視法是一種視覺幾何學。

10. 搭配三角比，可處理錐體、槽、盆、臺（參閱 S-11B-1）等形體的邊（稜）長、高、表面積、體積或容積等問題，還可以適度計算展開圖上的夾角。

11. 黃金比有許多題材，可挑選計算負擔不大而且與藝術、設計相關的題材作為本條目的教材。黃金矩形的連續切割，如下圖 (u)，也有許多可考慮使用的題材。其中一種題材，是用來分析「協調」的設計，例如圖 (v) 是古希臘帕德嫩神殿的立面分析圖。



(u)　　(v)

請注意不宜「宣告」或「斷言」黃金比的矩形就是「美的」或「和諧的」矩形，在哲學上，美的觀念是先驗的，不能被數學公式所定義。只能說很多設計師「認為」黃金比是美的或和諧的，而採用這個特殊的比值。上面的圖 (v) 就是一幅常見的解釋：黃金矩形之所以受到偏愛，很可能是因為比較容易在一份設計（例如帕德嫩神殿的前視圖）裡，安置不同尺度但全都彼此相似的長方形，而那些長方形又都伴隨著正方形，帶來莊

重穩定的感覺，但不會像直接使用正方形那樣的呆板。

12.介紹黃金比例和費波納西數列的共通性時不宜採取直接講述法，宜透過引導式教學模式讓學生自行解題和發現，並輔以黃金比例的藝術作品和符合費波納西數列的大自然規律，以讓學生了解數學的應用與奧妙。

13.若要評量學生對於平面比例的理解，可以在一幅符合透視法的圖片中，給定某一參考物體的尺寸和它與某標的物的距離，要求學生計算標的物的尺寸。此時學生須先以透視法則找出消失點，然後依據平形截線等比例之性質計算出標的物的尺寸。

評量

實施本單元的教學練習或評量時動手操作是相當重要的。以尺規方式作圖不僅可讓學生體驗幾何比例之美，更能領略尺規作圖嚴謹之重要性：例如在黃金矩形內描繪對數螺旋，如果比例不正確，則各段弧線將無法平順連接。本單元之尺規作圖不涉及幾何證明。

G-11B-4 空間坐標系：點坐標，兩點距離，點到坐標軸或坐標平面的投影。 **備註：**由球心在原點之球面上的經緯度計算空間坐標。	g-V-1

先備：平面直角坐標系（G-7-1）、空間中的線與平面（S-9-12）。

連結：空間概念（S-11B-1）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

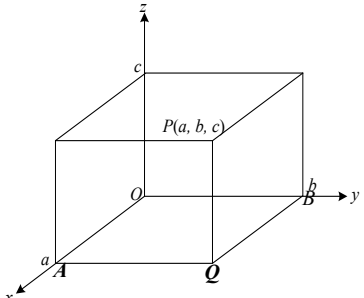
本課程因為還有球面的學習，故可藉由球心在原點之球面上，以經緯度所決定之點的空間坐標，而提升空間與球面的概念。

2. 相關約定

(1) 以右手系 x-y-z 表示空間坐標系（如右圖）。

(2) 坐標平面分別以 xy 平面、yz 平面、xz 平面表示。

(3) 在球面上定義經緯度，不延伸至橢球或地球上的經緯度。



3. 學習目標

(1) 能在空間坐標系中，做點到坐標平面的正射影點，以及點到坐標軸的正射影點。

(2) 透過空間坐標系的建立，將空間中的點到坐標軸與坐標平面的距離，與此點的坐標連結。

(3) 求空間中兩點的距離。

(4) 能由球心在原點之球面上的經緯度計算空間坐標。

4. 教學斟酌

(1) 為協助學生建立空間坐標的觀念，在探討空間中（異於原點）某點 P 的坐標時，宜以原點和 P 點為頂點，x、y、z 軸為邊，做輔助長方體，連結長方體的經驗以幫助觀察與思考。

(2) 空間坐標中點到坐標平面、點到坐標軸的距離概念，可透過國中已了解的長方體，建立距離及垂直概念。

(3) 透過點到坐標平面的投影、畢氏定理，及長方體概念，理解空間中兩點的距離公式。

條目範圍

1. 空間坐標系的建立，主要讓學生了解由點 $P(a,b,c)$ 的坐標，即可得知點 P 到 x、y、z 軸的距離，以及點 P 到 xy 平面、yz 平面、xz 平面的距離，不涉及 $\overrightarrow{OP}$ 與 x、y、z 軸的夾角問題。

2. 不涉及球面上任意兩點之間在球面上的距離。

釋例

除透過上圖的長方體觀察直線 PA 垂直於 x 軸外，亦可透過三垂線定理瞭解 PA 垂直於 x 軸，因此點 P 到 x 軸的距離為 $\overline{PA}$；同理點 P 到 y、z 軸的距離分別為 $\overline{PB}$、$\overline{PC}$。

錯誤類型

學生會以為點 $P(a,b,c)$ 到 x 軸的距離是 $|a|$，應透過上圖的長方體，讓學生觀察到 $\overline{OA}=|a|$，而點 $P(a,b,c)$ 到 x 軸的距離為 $\overline{PA}$。

A-11B-1 矩陣與資料表格：矩陣乘向量的線性組合意涵，二元一次方程組的意涵，矩陣之加、減、乘及二階反方陣。將矩陣視為資料表，用電腦做矩陣運算的觀念與示範。	a-V-3

先備：二元一次方程組的解法與應用（A-7-5），二元一次方程組的幾何意義（A-7-6）。

連結：平面向量（G-11B-1）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

本條目以概念理解為主要教學目標，在筆算時，以二階方陣為主要練習對象。學習「將矩陣視為資料表」時，盡量以電腦軟體實作。

2. 相關約定

(1) 二階方陣以方括號紀錄，例如 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

(2) 做方陣乘以向量的計算時，將向量 (a,b) 改寫成方括號的「行矩陣」形式 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。

(3) 用兩個正整數 i、j 的有序對 $[i,j]$ 指稱矩陣內第 i 列、第 j 行的位置，其中 $1 \le i \le m$、$1 \le j \le n$，而 $m \times n$ 是矩陣的階數。矩陣的一般性表達法為 $A=[a_{ij}]$，其中 a_{ij} 表示矩陣 A 在 $[i,j]$ 位置的元（element）。

(4) 如果方陣 A 存在反方陣，則稱 A 為可逆方陣，其反方陣記作 A^{-1}。

3. 學習目標

(1) 認識方陣符號，能指稱矩陣的行、列、元，能將二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，寫成矩陣運算式 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$。

(2) 能理解二元一次方程組方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，可以從向量觀點寫成 $(c_1,c_2)=x\vec{u}+y\vec{v}$，其中 $\vec{u}=(a_1,a_2)$，$\vec{v}=(b_1,b_2)$ 的向量線性組合。據此理解：平面上任一向量皆可唯一表示成兩個互不平行非零向量之線性組合。

(3) 在矩陣視為資料表的具體情境中，理解矩陣加、減、乘的目的和意義。

(4) 在求解二元一次方程組的脈絡裡，理解反方陣。

4. 教學斟酌

(1) 如果已經先安排了 A-11A-1 和 A-11A-2 的條目內容，建議將矩陣視為方陣的一般化，並先將方陣乘以向量的運算，推廣到矩陣乘以行矩陣的運算，以便合理說明矩陣乘法的階數搭配原理，例如 $A_{m\times n}\,B_{n\times q}=C_{m\times q}$。然後將 A、B 兩個矩陣的乘法運算 AB，理解為 A 分別乘以 B 的第一行、第二行、…。

(2) 有關矩陣的定義建議從情境問題中引入，強調矩陣作為簡化問題工具的角色，並藉此將矩陣作為資料表使用，賦予矩陣加減法及係數積的具體功能，而不僅只是數字操作。

(3) 有關矩陣乘法之結合律、分配律及「不可交換」律的介紹，宜從從情境中出發，避免純代數運算的驗證。例如可利用二元一次聯立方程式的經驗，說明「不可交換」律。

(4) 建議將二階反方陣與求解二元一次聯立方程式做連結，更進一步可以作為平面上的線性變換的基礎概念。

(5) 可以在概念上探討任意階的反方陣，但若要確切算出反方陣，則僅限 2 階。

(6) 本條目的運算可透過電腦輔助方式（如 Excel），讓學生實際從電腦表單中操作數據的變化，強化學生對於矩陣為資料表的心像。

(7) 本條目雖然沒提到矩陣的轉置運算，但是可以在合理的情境裡介紹此觀念。但不宜在沒有脈絡的題目裡操作轉置。

評量

請掌握矩陣的學習目標，在評量中彰顯矩陣的用途，勿過度與其他單元做連結，例如勿刻意求矩陣各元之和，也不要把矩陣相等的概念性問題轉換成複雜的聯立方程式問題。

F-11B-1 週期性數學模型：正弦函數的圖形、週期性，其振幅、週期與頻率，週期性現象的範例。	f-V-3 n-V-7

先備：廣義三角比（G-10-6）。

連結：弧度量（N-11B-1），指數與對數（F-11B-2）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   本條目僅強調以正弦函數作為描述週期性現象的語言。

2. 相關約定

   (1) 探討三角函數（而不是三角比）時，自變量一律以弳為單位。

   (2) 平移與伸縮變化的正弦函數 $B+A\sin(\omega x+\phi)$ 又稱為正弦波（sinusoidal wave），B 稱為基準值或基線（baseline），A 稱為振幅（amplitude），$T=\frac{2\pi}{\omega}$ 稱為週期（period），ϕ 稱為相位角（phase angle）。

3. 學習目標

   (1) 能理解函數週期的定義。

   (2) 能從三角比概念轉換到三角函數概念。

   (3) 能了解如何描繪出 sin 函數圖形，且知道其定義域與值域。

   (4) 了解正弦函數圖形的重要特徵：週期、振幅、對稱性。

   (5) 能用計算機做弧度量的正弦函數值。

   (6) 能透過水平與鉛直平移、水平與鉛直伸縮，來變化正弦函數的圖形。

   (7) 認識週期性現象，並能用正弦函數的伸縮平移 $B+A\sin(\omega x+\phi)$，也就是正弦波，作為該現象的數學模型。

   (8) 能理解聲音震動所產生的聲波（音波）可以用正弦函數表示。

4. 教學斟酌

   (1) 工程領域之週期性函數大都以波形呈現，但 11B 內容應取材自文化與生活之中，讓學生了解函數的週期性就是一種模式的反覆出現。

   (2) 在十年級雖然有多項式函數，但是因為沒有其他函數的參照，所以沒有提及它們的定義域與值域。在 11B 課程中，宜以多項式函數、正弦函數與指對數函數彼此參照，並利用它們為具體範例，講解函數圖形（相對於方程式圖形）的特徵：例如利用繪製鉛

直線檢定，以及定義域和值域的觀念。

(3) 課綱建議「方格紙、計算機」作為本條目之教具，是希望學生能有親手描繪 sin 函數圖形的經驗。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際觀察 sin 圖形的對稱和週期性。

(4) 建議在學生操作描點法繪製函數圖形之後，以數學軟體繪製圖形，輔助學生理解正弦函數圖形是平滑的曲線，也用來觀察圖形經平移及伸縮後的變化。

條目範圍

有關 $B+A\sin(\omega x+\phi)$ 的圖形，僅限於讓學生了解有伸縮平移的現象，不涉及探討伸縮平移的順序及求平移量等概念。

錯誤類型

學生會誤以為正弦函數是由一些半圓弧連接而成。

釋例

1. 以圖騰或是裝飾條紋呈現重複模式的週期性現象，並讓學生判斷週期性現象的基本模式。例如以下圖騰和紋飾。

2. 在坐標平面上觀察函數的週期性，是很直觀的。但是生活中也常使用「頻率」，教材與教師可透過生活中的實例，引導學生連結週期與頻率的意義。原則上，當自變數（坐標的橫軸）表示時間，則 $f=\frac{1}{T}$ 即為頻率。當聲音振動頻率為 f 時，此振動波的方程式可以寫成 $A\sin(2\pi ft)$。當此振動是聲波時，頻率 f 表現為音高（pitch），振幅 A 表現為聽覺上的響度或音量（loudness），常用響度單位為分貝（dB：decibel），可連結對數函數（F-11B-

2)。單一頻率的聲波稱為純音 (pure tone)，很少樂器能夠發出純音，音叉和調音笛會盡可能接近純音。電腦設備可以推動揚聲器 (俗稱喇叭)，使其發出純音。有些數學軟體 (例如 Geogebra、Matlab)可以輸出聲波，用它們可以示範純音(除非揚聲器的品質非常好，否則不要輸出太高或太低頻的純音)。

3. 國際規定的標準音高(standard music pitch)之一，稱為 A440 或簡稱 A4，將「中央 A」(中央 C 之上的第一個 A，唱名是 La) 的頻率定為 $f=440$ 赫茲 (Hz，也就是每秒震動次數)，其純音的聲波為 $y=\sin(880\pi t)$ ，其中 t 為時間，以秒為單位。樂團在合奏之前，各樂器要把它的「中央 A」校準為 440Hz。由於揚聲器本身的物理限制，它無法發出很低頻的聲音 (例如低於 50Hz)，而一般人聽不到 20,000Hz 以上的聲波。
4. 參照圓的方程式，帶領學生從函數的對應關係，理解函數圖形與方程式圖形的差異，進而理解 $y=f(x)$ 之函數圖形，與任一條鉛直線最多僅能有一個交點。
5. 參照多項式函數，正弦函數的定義域亦為全部實數 (整條 x 軸) 。
6. 函數平移的習慣符號是「減」平移量，例如 $f(x-h)$ ，但是正弦波的習慣符號，卻是「加」相位角 $\sin(\omega x+\phi)$ 。這個習慣上的差異，是因為相位角的意義並不強調平移，而是指定一個波的「起始相位」: 當時間 $x=0$ 時，波的位置相當於角 ϕ 的正弦值。如果連結相位角與函數平移的觀念，還要留意波形的平移單位數，並不僅是相位角 ϕ ，也受到 ω 的影響。
7. 讓學生練習描繪不同週期和振幅的正弦函數圖形。
8. 以繪圖軟體讓學生從圖形直觀認識不同週期的正弦函數相加後，函數週期如何變化。

評量

不涉及 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的圖形是由 $y=\sin x$ 圖形平移＿單位且壓縮＿倍而得，此類相關問題不宜。

F-11B-2 按比例成長模型：指數函數與對數函數及其生活上的應用，例如地震規模，金融與理財，平均成長率，連續複利與 e 的認識，自然對數函數。	f-V-4 n-V-2

先備：指數 (N-10-3)、常用對數 (N-10-4)。

連結：平面上的比例 (G-11B-3)，振幅與頻率 (F-11B-1)。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   從生活上的應用開始去認識指數函數與對數函數，而非從代數表徵入手。
2. 相關約定

   (1) $f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底的指數函數，其中 $0<a\neq 1$ 。

   (2) $y=f(x)=\log_a x$ 稱為以 a 為底的對數函數，其中 $0<a\neq 1$ 。

3. 學習目標

(1) 了解指數函數 $y=a^x$ 與對數函數 $y=\log_a x$ 的定義。

(2) 學習指數函數與對數函數的圖形，並了解指數函數與對數函數圖形中遞增、遞減與底數的關係、以及透過觀察圖形，能直觀了解圖形的漸近線、凹向性。

(3) 將指數函數與對數函數圖形繪在同一坐標平面上，觀察兩者對稱於直線 $\boldsymbol{y=x}$，讓學生了解兩函數圖形點 $(x,y)\leftrightarrow(y,x)$ 的互換關係。

(4) 了解指數函數、對數函數的歷史和其在生活、科學和金融上的應用。

(5) 了解對數律並能用以解決情境中的應用問題。

4. 教學斟酌

(1) 本單元強調指數函數與對數函數在生活上的應用，宜從其歷史起源和實際案例出發，逐步引導學生認識指數函數與對數函數的必要性與有效性。

(2) 本單元的數學基礎建立在對「次方」和「等比」的概念上，須從這些先備概念開始，逐步引導學生認識 x^a 和指數函數 a^x 的差別，和對數函數為何能化繁為簡的關鍵。

(3) 指數函數與對數函數的圖形搭配的學習，應搭配方格紙、計算機、電腦軟體，先透過描點繪圖發現指數函數與對數函數圖形的大域性質，再使用輔助軟體觀察指數函數與對數函數的完整圖形。

(4) 指數函數與對數函數的圖形的性質（增減性、凹向性、漸近線）的了解，不須以數學化的說明，僅須透過圖形上的觀察，直觀的認識，再輔以數值化的說明。應注意本單元應與 11A 的教學有所差異，無須學習計算 $\log a$ 的首數與尾數等計算。

(5) 介紹利率中的單利與複利觀念，再引進連續複利觀念。由於學生尚無趨近無限的概念(不須以 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 說明 e)，應搭配計算機讓學生逐次操作並體會 e 之值逐漸趨近於 2.71828...，並了解計算機上的 e^x 按鍵之用途。

(6) 透過實例說明指數函數和對數函數在經濟學、建築工程和科學方面的應用，例如：pH 值、地震規模、鍊懸線造型之拱門和拱橋等。理解溶液酸鹼度、地震規模、星光亮度等量化數據為何適合以對數表示。

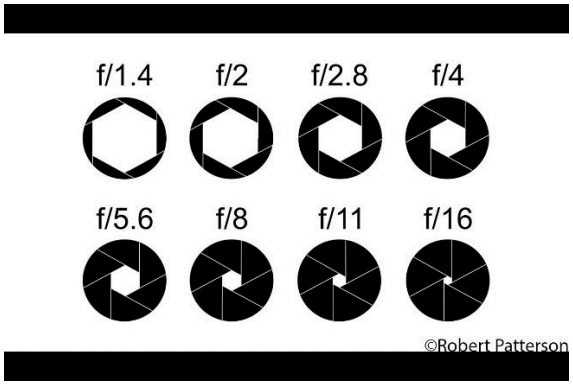
條目範圍

1. 指數函數與對數函數互為反函數的概念，只需透過圖形觀察了解點的對稱性，不需數學化的說明。
2. 有關自然指數 e，僅建議搭配計算機讓學生感受到此數的存在，不做數學上的定義與介紹。
3. 雖然要學習對數律，但是其目的為求解實際問題產生的指數方程式或對數方程式，勿做複雜的演算。

釋例

1. 參照多項式函數，指數函數的定義域像多項式函數一樣，為全部實數（整條 x 軸），但是對數函數的定義域則不一樣。如果先學過正弦函數，也參照正弦函數的定義域。
2. 值域的教學，宜先連結多項式函數的舊經驗：一次和三次函數的值域為全部實數（整條 y 軸），但二次函數則否；可見函數的值域未必是全部實數。指數函數的值域並非全部實數。如果先學過正弦函數，也參照正弦函數的值域。
3. 可搭配計算機，讓學生操作當每年複利一次、每月複利一次、每天複利一次、每小時複利一次、每分複利一次、每秒複利一次、每 0.1 秒複利一次...的利息變化，體會何謂連續複利，並發現標準指數函數的底數 e。

4. 專業照相機的鏡頭用 f 值（f-number）來調整的光圈（aperture）的大小。常見的 f 值，有 1.4、2、2.8、4、5.6、8 等（如右圖），這些數值其實是 $\sqrt{2}$ 、2、$2\sqrt{2}$ 、4、$4\sqrt{2}$ 、8 的近似值，也就是以 $\sqrt{2}$ 為公比的等比數列。它被稱為 f 值，是因為那個數值 p 表示光圈的直徑設定為 $\frac{f}{p}$ ，其中 f 表示鏡頭的焦距；因為光圈的數值放在分母，所以光圈的 f 值越大，光圈越小，如下圖。



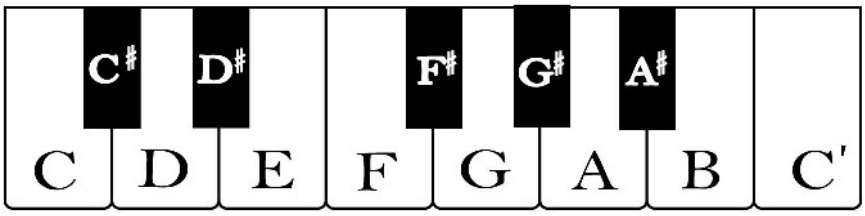
上圖的黑色部分是鏡頭的遮光片，而白色部分就是光圈：讓光透過鏡頭進入相機。雖然光圈是正多邊形而不是圓形，但可以用它的外接圓當作代表；f 值越大，光圈的直徑越小，透光的面積也就越小。因為相鄰兩個光圈的 f 值之比是 $1:\sqrt{2}$ ，所以光圈的面積比是 $1:2$ ；也就是說，鏡頭上透光的面積是以 2 為公比的等比數列。理論上，光圈的直徑可以連續變化，光學工業將光圈的直徑設定為 $\frac{f}{p}$ ，其中 $p=\left(\sqrt{2}\right)^x=2^{\frac{x}{2}}$ 。一般的像機鏡頭採用 $x=1$ 、2、3、4、5、6 來設定光圈，這些 x 對應光圈的一「格」（f-stop），因此也稱為整數格差（full- stop）的設計，意即光圈調整一格對應 x 加一或減一。更精密的光學鏡頭，可能有 1/2 格差（one-half-stop）或 1/4 格差（one-quarter-stop）的功能。

5. 美國密蘇里州聖路易斯拱門矗立一座高約 192 公尺的大拱門 (Gateway Arch，如右圖)，其形狀類似拋物線，但實際上是鍊懸線 (catenary)。鍊懸線之數學方程式是由指數函數所構成，其基本形式為 $y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$。鍊懸線在力學上有其穩定的結構，隨著建築材料與造型技術的進步，越來越常運用在建築設計裡。

6. 地震的強度與聲音的響度都是常用對數的典型應用，教材應該要提供這些例子。
7. 音樂音程中「十二平均律」也與比例成長有關，古希臘畢達哥拉斯以整數比例建立所謂的「畢氏音階」(表一)。文藝復興時期建築師帕拉底歐 (Andrea Palladio) 認為利用令人悅耳的音程比例所設計出來的建築也一樣會讓人住得舒適。而十九世紀德國哲學家謝林 (Johann Christoph Friedrich von Schiller) 也說「建築是空間中的音樂，一種凝固的音樂」。但文藝復興時期的音階理論已超越整數比例，因而誕生了「十二平均律」，也就是將原本八度音以 $\sqrt[12]{2}$ 的等比數列區分為 12 個音階，多出的音階稱為半音 (圖一中的黑鍵)，每個音階的弦長比例可以用 $f(x)=2^{x/12}$ 表示。採用十二平均律而做的音階，其音階的頻率形成一個等比數列，但是它們在聽覺上形成一組等差的聲響，其等差現象發生在頻率的對數上。

表一　畢氏音階

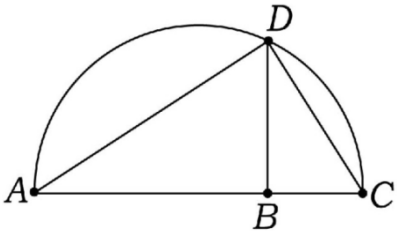
C/do	D/re	E/mi	F/fa	G/sol	A/la	B/si	C'/do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2



圖一

工匠要做出符合「十二平均律」弦長比例的樂器，例如大鍵琴、鋼琴，就必須依賴比例中項定理，如圖二 $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{BC}$。但是比例中項只能區分 2,4,8,16 份，就是無法 12 份。當時有一種做法是先定出 $G^{\#}$的位置，然後依據比例中項將 C/do 到 $G^{\#}$的弦長

分為 8 份等比，$G^{\#}$到 C'/do 分為 4 份等比，即可定出「十二平均律」的弦長。雖然鋼琴的琴弦因為材質不同而可以在長度上不完全符合前述比例，但是打開一台鋼琴可以看到琴弦的長度變化，確實類似指數函數$c\cdot 2^x$的輪廓。

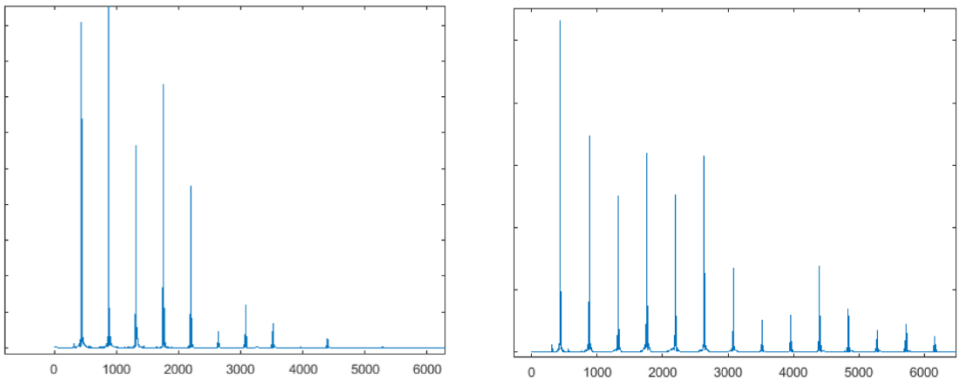


[圖二]

8. 根據 A440 標準，「中央 A」的頻率為 440Hz，所以可以用十二平均律的定義而推算中央 C 的頻率為$440\div 2^{9/12}\approx 261.6\,\text{Hz}$。雖然西方的現代樂理採用了十二平均律，但仍然將從 C 到 B 的連續十二個音階（如前面的圖一）稱為一個「八度」（octave）。就頻率而言，從頻率 f 到 $2f$ 之間的聲波範圍，就稱為一個八度。比中央 C 高八度的 Do 的頻率約為$261.6\times 2=523.2\,\text{Hz}$。人耳能聽到最高頻大約是 20,000Hz，就頻率而言是中央 C 的大約 80 倍，可是就音階而言，在中央 C 以上就只有$\log_2\frac{20000}{261.6}$個八度，也就是理論上只能有 6 個八度而已。鋼琴鍵盤在中央 C 以上（含）共有 4 個八度。

9. 生物或樂器很難發出純音，而是在一個基礎頻率之外，同時發出其他附帶頻率的聲波，稱為泛音（overtone）。除了打擊樂器以外，大部分樂器的物理性質使它發生基礎頻率兩倍、三倍、四倍...的聲波，稱為第一、第二、第三...泛音。樂器發出的基礎頻率，讓我們聽到它的音調（tone），而各泛音強度的組合，讓我們聽到它的音色（timbre）。例如，同樣吹奏「中央 A」的音調，長笛（flute）和雙簧管（oboe）的泛音強度分布如圖三。就是因為泛音的不同分布，才使得我們能夠分辨同音調的長笛、雙簧管不同音色，也使得電腦合成樂器（電子琴）可以用各頻率聲波的疊合來模擬各種樂器的音色。【黃國忠老師提供。關於「樂音的數學原理與數位模擬」更豐富的知識和範例，可造訪黃老師的網頁 https://sites.google.com/g-mail.nsysu.edu.tw/huangkuochung1】

以上關於音色的說明，簡化為各頻率聲波的疊合，但實際上更為複雜，演奏的技巧（例如斷奏和圓滑奏）也會影響音色。



[圖三] (a) 長笛的泛音分布 (b) 雙簧管的泛音分布

評量

1. 不做換底公式的評量。
2. 不強調指數與對數的計算。以多元評量方式，鼓勵學生觀察並搜尋自然界或生活中按比例成長的例子，並嘗試以列表和描點方式繪出成長圖形。
3. 不做有關首數與尾數的計算問題。

D-11B-1 主觀機率與客觀機率：根據機率性質檢視主觀機率的合理性，根據已知的數據獲得客觀機率。	d-V-3 d-V-5

先備：認識機率（D-9-2）、複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：不確定性（D-11B-2）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   99 課綱並沒有明白指出這兩個觀念，但是在條件機率與貝氏定理的操作練習中常使用客觀機率。本課綱在 A 類和 B 類課程，同時提出此條目，請在教學時發展這些機率觀念。

2. 相關約定

   (1) 本課綱所謂的客觀機率就是頻率機率，也就是以調查或試驗而獲得的事件發生頻率(相對次數)，當作事件發生的機率。

   (2) 所謂主觀機率就是在缺乏調查或試驗資料，而且不能運用古典機率的情況下，對於不確定性現象的主觀量化估計。

   (3) 主觀機率和客觀機率並不是獨立的觀念，而是兩種除了古典機率以外，獲得機率之數值的常用方法。因此，它們沒有專屬的符號。

3. 學習目標

   (1) 理解機率是不確定性的量化數值。

   (2) 能套用古典機率發展出來的機率性質，作為主觀機率和客觀機率的推論依據，或用那

些性質來檢核主觀機率和客觀機率的合理性。

4. 教學斟酌

(1) 透過主觀機率與機率性質的推論，讓學生體會機率在個人生活與社會情境中的價值：在不確定的情況下，協助理性的思考與決策。

(2) 透過客觀機率，讓學生認識機率與統計的連結，並理解生活經驗中獲得的機率，經常屬於客觀機率。建議以計算機作為本條目之教具，用來計算統計的相對發生次數。教師可以採用更合適的資訊工具進行此項教學，也務請留意勿僅限於教師演示，讓學生有機會習得使用資訊工具獲得客觀機率的估計。

(3) 關於機率類型的用語，還沒有趨於統一，宜提醒學生留意不同的用語。

(4) 本條目教學中援引的情境，請盡量符合現實，盡量使用真實數據，與學生個人與社會的生活經驗相呼應，並留意高中社會領域課程中的應用。

條目範圍

此條目不含隨機變數的觀念，也不含抽樣和隨機試驗。所以，討論客觀機率時，不討論因為抽樣而造成統計數據的不確定性。

釋例

1. 對於單一事件，任何介於 0 與 1 之間的主觀機率都符合機率理論。但是，經由古典機率發展出來的機率理論，可以用來判斷主觀機率的合理性。例如拋一只圖釘，如果認為針尖朝上的機率是 0.5，又認為不朝上的機率是 0.6，則不合理而應該修訂。

2. 以下舉隅關於機率類型的用語。所謂機率類型就是獲得機率之數值的方法。主觀機率當然與個人經驗有關，但是一般文獻所謂的「經驗機率」並非主觀機率，反而是客觀機率；在那些文獻中，所謂「經驗」是調查或試驗的意思。有些文獻把古典機率和頻率機率合稱為客觀機率。除了高中課程中認識的三種類型以外，還有一類稱為形式機率，運用機率密度函數的定積分而獲得的機率，即屬此類。

評量

此條目的評量，勿使用語意不清與生活脫離的機率問題，請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。

D-11B-2 不確定性：條件機率、貝氏定理、獨立事件及其基本應用，列聯表與文氏圖的關聯。	d-V-3

先備：複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：主觀機率與客觀機率（D-11B-1）。

基本說明

1. 與 A 類課程的差異

   99 課綱將條件機率安排在十年級，本課綱則將此內容延後到十一年級，使得本條目可綜合運用主觀機率與客觀機率，與單純的古典機率有所區隔。B 類課程所做的複合事件學習，以兩個事件為原則，且應盡量使用列聯表。列聯表與文氏圖的關聯，也是 B 類課綱強調的重點。

2. 相關約定

   在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的條件機率表示為 $P(B\mid A)$。

3. 學習目標

   (1) 能在情境中辨識何時適用條件機率。

   (2) 能在古典機率的情境中計算條件機率 $P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$，並運用條件機率計算積事件的機率：$P(A\cap B)=P(B\mid A)\cdot P(A)=P(A\mid B)\cdot P(B)$。

   (3) 能在古典機率的情境中，了解事件獨立性的定義，並能判別給定的事件是否獨立。

   (4) 在主觀機率與客觀機率的情境中，能理解獨立事件的意義，並運用乘法法則：若 A，B 兩事件獨立，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$。

   (5) 能理解貝氏定理所求出的機率值與古典機率所求出的機率值，所代表的意義。

   (6) 能用列聯表與樹狀圖協助處理條件機率與貝氏定理問題，並理解兩事件的列聯表與文氏圖之間的對照。

4. 教學斟酌

   (1) 主觀機率是依照個人信念或既有經驗而決定的，但是它也可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，而這種現象可以作為條件機率的直覺認識。

   (2) 教學時，應引導學生從情境或題意中，辨別所要求的是否為條件機率。

   (3) 本條目的教學，應盡量少用集合觀念而多用列聯表、樹狀圖。例如在古典機率的情境中 $P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$，但是在概念上宜闡釋該式的意義是縮小樣本空間到事件 A 的意思，而 $A\cap B$ 宜在情境中闡釋為 A 集合裡面的 B 子集，不宜強調集合的操作。

   (4) 獨立事件的定義，幾乎僅在古典機率的情境中才能驗證，但是在實際應用時，獨立性幾乎都是先驗的假設。教學過程中，教師宜多在情境中舉例，讓學生感受獨立性，建

立直觀，進而將古典機率情境中的獨立性質，運用在主觀機率與客觀機率的情境中，以解決問題。

(5) 學生容易弄混獨立事件與事件互斥，教師宜舉例說明解除學生迷思。

(6) 可透過條件機率及貝氏定理的問題，強化學生對於探討機率問題時，應特別留意樣本空間的觀念。

條目範圍

1. 在情境問題中處理獨立事件的個數，以兩個為原則。
2. 此條目不含隨機變數的觀念，所以也不正式引用機率質量函數。

釋例

1. 單純的主觀機率並不多見，因為或多或少我們都會參考客觀數據後再決定主觀機率，這說明機率的形成是揉合主觀與客觀。而受到客觀條件影響的主觀機率，就是條件機率的直觀認識。例如「下週日天雨」的主觀機率，應該會受到現在是四月還是十月的影響，也應該會因為今天是週一還是週五而有所不同。

2. 以在直觀上容易犯錯的例子提醒學生辨別古典機率與條件機率的差異。例如透過著名的 Monty Hall 遊戲讓學生認識到在情境變化前後計算機率值須用不同方式思考。

3. 列聯表、樹狀圖比較容易講解獨立事件與互斥事件的分辨，請考慮多運用。

4. 全班 35 個同學中，有 25 人考過全民英檢，有 20 人考過多益測驗，有 15 人兩者都考過，畫出文氏圖形並列出列聯表。處理這種列聯表，第一步須辨識表格的變項，如表一(a)，用 G 表示全民英檢，T 表示多益。第二步將已知的數據填入表格，如表一(b)。最後根據列聯表的規則，算出空格內的數據，如表一(c)。

108 課綱實施之後，學生在小學三年級就開始認識列聯表並練習上述操作。但是，等到那一批小學生升到十一年級之前，高中教師可補充此項工具的教學。

	G 過	G 否	
T 過			
T 否			

(a)

	G 過	G 否	
T 過	15		20
T 否			
	25		35

(b)

	G 過	G 否	
T 過	15	5	20
T 否	10	5	15
	25	10	35

(c)

[表一]

5. 列聯表可以用來處理和事件、條件機率等類型的問題。在和事件方面，因為列聯表的特性，所以列聯表上的和事件都是互斥的和事件，免除了考慮「取捨原理」的負擔。以下舉 103 年學測試題為例，呈現列聯表的解法。

題目：某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

列聯表解法示範：按題意寫出第一次療程的列聯表。第一步設計表格的變項，並填入題目提供的直接數據，如表二(a)；此處填入百分比，但是省略 % 符號。然後按照題意和列聯表規則，算出第一次療程實施後的情況，如表二(b)。從表 (b) 可判讀：接受第二次療程的病患有 51%，這些病患當中，只有屬於第一類的 21% 有七成的治癒機率，也就是 14.7% 的病患會在第二次療程被治癒。所以，第二次療程成功的條件機率為

$$\frac{14.7}{51} \approx \frac{15}{50} = 0.3 \text{。}$$

	類一		類二	
治癒				
無效				
	70			100

	類一	類二	
治癒	49	0	49
無效	21	30	51
	70	30	100

[表二] (a) (b)

6. 列聯表也可以用來處理貝氏定理類型的問題。舉例如下。

題目：有一袋爆米花，其中白米佔 2/3 ，黃米佔 1/3。只有 1/2 的白米及 2/3 的黃米會爆開，若隨機從袋中挑選出一粒米，並將它放入鍋中加熱且後來爆開了，試問挑選出來的米為白米的機率為多少？

列聯表解法示範：按題意在列聯表中寫出隨機抽到白米或黃米的機率，如表三(a)。然後按照題意算出白米與黃米的爆開機率，如表 (b)；此處用到獨立性的原理。按列聯表規則，可以填滿表 (b) 的所有空格，但是此題僅需「爆開」的小計，如表 (c)。已知爆開而抽到白米的條件機率即為

$$\frac{1/3}{5/9}=\frac{3}{5}=60\%\ 。$$

	白米	黃米	
爆開			
不爆			
	2/3	1/3	1

(a)

	白米	黃米	
爆開	1/3	2/9	
不爆			
	2/3	1/3	1

(b)

	白米	黃米	
爆開	1/3	2/9	5/9
不爆			
	2/3	1/3	1

(c)

[表三]

7. 在樹狀圖的表徵之下，獨立事件和條件機率的積事件處理方式，其實是一樣的：都是機率相乘。善用「在樹狀圖的樹枝上記錄機率」的表徵，則不論獨立事件或條件機率，都是沿著樹枝路徑將機率相乘，如此一致性的表徵，應可有效引導學生以機率觀念解決問題而不至於陷入符號的困擾。
8. 在樹狀圖的表徵之下，同一「層」的所有事件之機率總和是 1，因此比較容易處理餘事件。而樹枝的分岔就是互斥的，因此同層事件的機率相加，就是處理和事件的算法，免除了考慮「取捨原理」的負擔。

錯誤類型

1. 學生將條件機率 $P(B\mid A)$ 誤以為是積事件 $P(A\cap B)$ 的機率。因此題目的敘述上務求清楚明瞭，尤其條件機率的敘述，應強調在什麼的條件下。
2. 學生在文氏圖裡建立了不恰當的獨立事件心像，誤以為互斥事件必為獨立事件。

評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。例如：溫布頓男子網球賽採五戰三勝制(即先勝三局者獲勝晉級)，根據過去紀錄知 A 選手與 B 選手實力有段差距，A 選手與 B 選手獲勝的機率比為 4：1，但比賽前兩局 A 選手因失誤過多致二局皆敗。假設經過短暫休息後，A 選手恢復原來水準，假設沒有其他特殊狀況發生，請問比賽最後結果誰獲得晉級的可能性較大？

12 年級數學甲學習內容解析

N-12甲-1 數列的極限：數列的極限，極限的運算性質，夾擠定理。從連續複利認識常數 e。 **備註：**應包括牛頓求根法，示範不確知結果的數列極限，用計算機估計其值；以勘根定理為牛頓法找到合適的初始值。夾擠定理可示範古典的圓周率估計，從計算機的估計值看到夾擠的現象。(※認識常數 e 之後，可介紹標準指數函數及自然對數函數。)	n-V-8 n-V-2

先備：三次函數的圖形特徵（F-10-2），等比數列（N-8-6）。

連結：無窮等比級數（N-12甲-2），函數的極限（F-12甲-2），積分（F-12甲-6）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

本條目在 99 課綱列為高三選修（數甲、數乙）下冊，在本課綱則定位為積分的準備課程，所以建議在 12 年級上學期教授。此外，99 課綱明訂極限相關課題集中在同一章，而且獨立於微積分之前。本課綱則認為高中階段的極限課題應以支援學習微分、積分之所需為主，期望教材勿將極限集中於獨立的單元，而使其搭配微分、積分之學習脈絡。本條目在高中課程中的最主要目的，是為了能用數列的極限來理解級數的極限，而後者是為了理解定積分和無窮等比級數（其中又以循環小數為主要範例）。

2. 相關約定

數列〈a_n〉的首項足標，習慣設定為 1，也就是 a_1、a_2、⋯。

3. 學習目標

(1) 認識數列的收斂與發散的意義，並理解數列的極限意義。

(2) 認識極限符號 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 的意義及表示方法。

(3) 認識並能運用數列極限的運算性質。

(4) 學會不等式型式的數學歸納法證明。

(5) 學習極限的夾擠定理及其應用。

(6) 從連續複利的過程認識常數 e。

(7) 能利用牛頓求根法找到根的近似值。

4. 教學斟酌

(1) 因為「牛頓求根法」之學習目標，本條目宜放在微分之後。或者，本條目之學習目標不必集中在一個單元。

(2) 教學過程中介紹數列的極限，可利用數線上的位置，說明數列是否逐漸靠近某定值 L 的現象，也可以將數列視為數據，展現其（前面若干項的）折線圖，觀察它是否逐漸

靠近某水平線 $y=L$，讓同學感受收斂與發散的情形，再進而判斷極限值的存在與否情況。數列的極限是 $n\to\infty$，對象是無窮數列，與函數的極限 $x\to a$ 的意義不同，後者是為了微分而準備。在教學順序上，也可以考慮介紹積分之前才認識無窮數列的極限。

(3) 介紹極限觀念時，不妨建立對符號的直觀想像，例如對 n 與 n^2 兩個值，以真實的極大數代入：100 兆與 100 兆的平方，前者為後者的 100 兆分之一，所以當 n 趨向無窮大時。(n^2+n) 趨近 n^2、$(2n^2\text{-}5n+1)$ 趨近 $2n^2$…等等。

(4) 夾擠定理可示範古典的圓周率估計，從計算機的估計值看到夾擠的現象。

(5) 利用兩數列的比較關係，讓學生建立尋找數列上界、下界的能力，透過上界與下界的概念，讓學生建立以夾擠的方式求極限值的能力（搭配計算機）。

(6) 可搭配計算機，讓學生操作如下：假定年利率是 1=100%，引導學生列式，當每年複利一次、每月複利一次、每天複利一次、每小時複利一次、每分複利一次、每秒複利一次、每 0.1 秒複利一次...的利息變化，體會何謂連續複利。並觀察出本利和的成長倍率趨近於定值，再說明此極限值 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 為 e。然後了解計算機上的 e^x 按鍵之用途。

若年利率為 r，以計算機的操作，引導學生發現 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n$ 的結果為 e^r。若學生程度可接受，則再利用變數變換介紹：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{r}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)})^{\frac{n}{r}\times r}=\lim_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^r=e^r$。

(7) 以牛頓求根法示範不確知結果的數列極限，用計算機估計其值；可在導函數的應用單元，利用介值定理與給曲線上一點求切線的方法，以勘根定理為牛頓法找到合適的初始值，可當作一個遞迴數列的例子，這與之前所產生數列的方式不同作為比較。

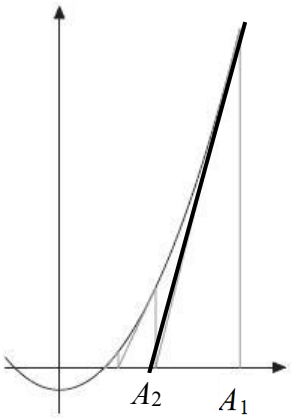
條目範圍

有關自然指數 e，僅建議搭配計算機讓學生感受到此數的存在，給出數學上的定義，但不須進一步運用或背誦其值。

釋例

牛頓法求 $f(x)=0$ 的實根 r 之近似值步驟：

1. 決定 a_1（通常先勘根）。
2. 過 $P(a_1, f(a_1))$ 做 $y=f(x)$ 之切線 L，
   L 之方程式為：_____，
   L 與 x 軸交於 $A_2(a_2, 0)$，
   a_2=_____。
   同理 a_3=_____ ……。



例如，試以牛頓法求 $f(x)=x^2-2$ 的正根。

步驟 1：因為 $f(1)f(2)<0$，此正根介於 1 與 2 之間，取 $a_1=2$。

步驟 2：過點 $P(2,f(2))=(2,2)$ 作 $y=f(x)$ 的切線，因為 $f'(2)=4$，此切線為 $y=4(x-2)+2$。

步驟 3：切線 $y=4(x-2)+2$ 與 x 軸交點的坐標 $x=\frac{3}{2}$，取 $a_2=\frac{3}{2}$。

重複步驟 2、3，可得一數列 $a_1,a_2,a_3,.....$，其值會愈來愈接近此實根。過點 $P(\frac{3}{2},f(\frac{3}{2}))=(\frac{3}{2},\frac{1}{4})$ 作 $y=f(x)$ 的切線，因為 $f'(\frac{3}{2})=3$，此切線為 $y=3(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{4}$。而切線 $y=3(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{4}$ 與 x 軸交點的坐標 $x=\frac{17}{12}$，取 $a_3=\frac{17}{12}\approx 1.41\overline{6}$，已經很接近 $\sqrt{2}$ 了。

錯誤類型

1. 錯誤使用極限的運算性質，如 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2})$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{n^2}+...+\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+...+0=0$ 的錯誤結果，教師可以成語「積沙成塔」來解釋，極限的和差公式只能推廣到有限多項，推廣到無窮多項是不可行的。
2. 錯誤使用極限的運算性質，如 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\times\lim_{x\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\times 0=0$。

N-12甲-2 無窮等比級數：循環小數，Σ 符號。	n-V-8

先備：等比數列（N-8-6），實數（N-10-1）。

連結：數列的極限（N-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱中，Σ 符號為 10 年級下學期教授，本課綱移至數甲選修上冊。

2. 相關約定

   (1) Σ 為連加符號，例如 $\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n+1)+f(n)$。

   (2) 規定 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ 的意義是「按照順序」加起來。

3. 學習目標

   (1) 認識無窮級數，學習使用 Σ 符號表達級數和。

   (2) 理解 Σ 符號的基本性質。

(3) 理解並能用部份和所形成的數列來判別無窮級數的收斂與發散。

(4) 認識無窮等比級數，並能判別無窮等比級數的收斂與發散的條件。

(5) 能推導出無窮等比級數的求和公式。

(6) 能將循環小數化為無窮等比級數，並求出其值，明白每一個循環小數都是一個有理數，進而推論循環小數化為分數的運算規則。

4. 教學斟酌

(1) 可從實際例子：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots$ 、$1+1+\cdots+1^k+\cdots$ 、$1+(-1)+1+\cdots+(-1)^k+\cdots$ 之前 n 項和（部份和）的數列 s_1，s_2，s_3，...，搭配計算的數值或數列（當作數據）的折線圖，來理解無窮級數和之存在（收斂）、發散、不存在性。

(2) 教學時可以找一些圖形中蘊含無窮等比級數和的關係，讓學生體會數學之美。

(3) 教學時可以先讓學生多練習將 Σ 符號的式子展開，累積對連加以及變數作用的經驗，再以實例說明 Σ 符號的性質。

(4) 學生對於「無窮」的概念，需要引導與時間消化，大部分學生認為 $0.\overline{9}<1$，但以無窮等比級數求和時又等於 1 而感到困惑，下面是幾個建議的引導方式：

(a) 從小學的經驗，學生能接受 $0.\overline{3}=\frac{1}{3}$，那麼 $0.\overline{9}=0.\overline{3}\times 3=\frac{1}{3}\times 3=1$。

(b) 如果 $0.\overline{9}<1$，它們相差多少？如果兩個數之間沒有距離，是不是就是相等的數？

(c) 無窮就是一直一直一直寫下去，當我們在寫 9 的循環時，就越來越接近 1，而這個動作不會停止（因為是無窮），所以最後這個值就是 1。

條目範圍

本條目不討論無窮級數的各項順序是否影響其和的問題（不討論絕對收斂），這裡規定無窮級數必須是將無窮數列「依序」加起來。

錯誤類型

1. 認為 $0.\overline{9}<1$。

2. 使用 $\sum$ 符號時，不能分辨變數與定值，例如：$\sum_{k=1}^{n}3a_k=3\sum_{k=1}^{n}a_k$ 與 $\sum_{k=1}^{n}na_k=n\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是對的，但 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=k\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是錯誤的。

N-12甲-3 複數：複數平面，複數的極式，複數的四則運算與絕對值及其幾何意涵。棣美弗定理，複數的 n 次方根。	n-V-3、n-V-4 g-V-4、s-V-1

先備：三角的和差角公式（G-11A-5）。

連結：複數與方程式（A-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異：

   複數的四則運算在 99 課綱中，放在 10 年級時，由虛根定義出虛數後，介紹虛數的四則運算；而本課綱已將方程式的虛根概念移至 12 年級，因此所有複數的相關概念皆一併在 12 年級中完成 。

2. 相關約定：

   (1) 複數的標準式：$z=a+bi, a, b\in\mathbb{R}$，其中 a 稱為實部，b 稱為虛部。$\bar{z}=a-bi$ 稱為 z 的共軛複數。

   (2) 複數 $z=a+bi, a, b\in\mathbb{R}$，當 $b\neq 0$ 時，稱 z 為虛數；其中當 $a=0, b\neq 0$ 時，稱 z 為純虛數。

   (3) 複數 $z=a+bi, a, b\in\mathbb{R}$，則複數 z 的絕對值 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 代表 z 在複數平面上與原點的距離。

   (4) 當 $z=a+bi, a, b\in\mathbb{R}$ 且 $[r,\theta]$ 為 z 在坐標平面的極坐標，則 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 為 z 的極式，其中 $r=|z|$，θ 稱為輻角。θ 的值不唯一，當 $0\le\theta<2\pi$ 時，θ 稱為 z 的主輻角 $\mathrm{Arg}(z)$。

3. 學習目標

   (1) 能連結複數與平面向量，連結複數的極式與和差角公式。

   (2) 能了解複數的標準式與極式在複數平面上的對應關係，並能轉換兩者之間的關係式。

   (3) 能操作複數的四則運算與絕對值，並理解其對應到複數平面的相應位置。

   (4) 能理解棣美弗定理，並應用到解複數的 n 次方根。

4. 教學斟酌

   (1) 學習本條目之前，學生已經具備極坐標和平面向量的知識，宜適當連結與應用。

   (2) 除理解每一個複數與複數平面的點形成一一對應關係外，可視原點到每一個複數點的幾何位置等同於向量概念的幾何意涵。

   (3) 複數極式的重點在於其對應的幾何概念，由極坐標與複數平面的概念結合，理解複數的極式其幾何意涵，並進而推導出複數極式的乘法、除法，及相對應的幾何位置。

(4) 可先由複數極式的乘法概念直觀的推導出當 n 為自然數時的棣美弗定理：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ ,$$

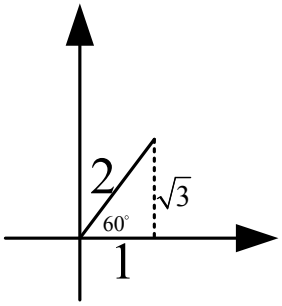
由正整數再推廣 n 為任意整數時，欣賞數學的規律之美。而棣美弗定理的理解不應僅止於代數公式的記憶，應強調其複數長度與角度的變化。

條目範圍

1. 棣美式弗定理：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ ，高中階段 n 僅限於整數範圍。
2. 解複數的 n 次方根問題，應僅限於 n 次方根問題，不應過度擴張一些技巧性解方程式的問題。

錯誤類型

1. 對複數極式的瞭解不清，導致複數極式轉換的錯誤。例如：
   $\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ 。
   或者將 -2 的極式表為 $-2(\cos 0+i\sin 0)$ 。
2. 誤以為 $\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$ 為一輻角為 60° 的複數。



釋例

1. 複數的標準式與極式的轉換，應搭配複數平面的幾何位置，由圖像觀察出到原點的距離，以及輻角大小；不要流於記憶 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$ 的關係式。例如：$z=1+\sqrt{3}i$ 由圖像可觀察出 $|z|=2$, $\theta=60^\circ$ ，並進而求得 $z=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ 。
2. 複數的四則運算，應搭配其對應於複數平面的位置，而加減法所對應到複數平面的位置，應讓學生體會此概念類比於向量的加減運算。例如：若 $z_1=1+2i,\ z_2=3-4i$ ，則 $z_1+z_2=1+2i+3-4i=4-2i$ 。此運算所對應的向量概念是：z_1 相當於 $\overrightarrow{v_1}=(1,2)$ ，z_2 相當於 $\overrightarrow{v_2}=(3,-4)$ ，而 $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(1,2)+(3,-4)=(4,-2)$ 。

評量

本條目重點在理解複數對應到複數平面上的幾何意涵，及棣美弗在方根問題上的應用，因此下列題目不宜作為評量的重點：求 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$ 。

G-12甲-1 二次曲線：拋物線、橢圓、雙曲線的標準式，橢圓的參數式。 **備註：**含平移與伸縮，運用線性變換，旋轉橢圓的（以原點為中心）標準式，從標準式旋轉成斜的，因而認識含 xy 項的二元二次方程式，但並不直接處理含 xy 項的二元二次方程式。可從橢圓的參數式擴及圓的參數式。	g-V-4 g-V-5

先備：平面上的線性變換（F-11A-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本條目在 99 課綱是安排在第四冊，做為必修課程內容，本課綱則安排在選修部分，由選修數甲的學生修習。在 99 課綱部分強調不處理傾斜與退化型的二次曲線，本課綱則希望能結合平面變換，讓學生了解二次曲線標準式經過旋轉會產生含 xy 項的二元二次方程式。

2. 學習目標

   (1) 能理解二次曲線的幾何定義。

   (2) 能透過解析方式理解二次曲線與二元二次方程式的關係。

   (3) 能利用二次曲線的幾何定義推導出標準式及相對應的焦點、對稱軸、漸近線和拋物線的準線。

   (4) 能將二次曲線標準式進行平移、旋轉及伸縮變換，並觀察二元二次方程式變換後的特徵。

   (5) 能將橢圓標準式轉換成橢圓參數式，並進一步透過伸縮變換的概念推導出圓的參數式。

3. 教學斟酌

   (1) 二次曲線幾何定義的引入可透過具體操作（摺紙、橢圓規等）及電腦軟體輔助，協助學生從具體圖像去理解二次曲線。此處應引導學生從過去的描點（離散型思維）提升至連續型圖形的思維。

   (2) 應讓學生能實際進行二次曲線的標準式推導，藉此熟悉根式運算及配方規則，並在過程中連結圖形的對稱特性與方程式間的關係。

   (3) 本條目希望連結平面變換與二次曲線，讓學生充分理解二次曲線這個名稱中的二次所具有的意涵。因此透過標準式進行平移、旋轉及伸縮變換觀察其標準式所產生的各項差異。但不討論任意二元二次方程式（含 xy 項）所代表的圖形類別。

   (4) 可透過圖形對稱的方式引導學生理解水平方向及鉛直方向標準式的不同。

   (5) 可適當引入非標準型之二次曲線問題，但僅限於討論對稱軸、焦點、頂點間之關係，不應涉及透過坐標軸旋轉方能處理之幾何量問題。

   (6) 透過標準式引入橢圓參數式時，應說明此處的參數 θ 並非橢圓上一點與中心點連線與 x 軸正向之夾角。

(7) 可透過伸縮變換將橢圓參數式推廣到圓的參數式，並可設計利用參數式進行極值問題之處理。

條目範圍

(1) 不進行二元二次方程式圖形類型之判別。

(2) 不涉及二次曲線光學性質之探討。

(3) 不涉及二次曲線與直線（如弦、切線等）的相關問題。

A-12甲-1 複數與方程式：方程式的虛根，代數基本定理，實係數方程式虛根成對的性質。	a-V-2 n-V-3

先備：一元二次方程式的解法與應用（A-8-7）。

連結：複數（N-12甲-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異：

   在 99 課綱中，複數與方程式放在 10 年級，本課綱將複數的導入與相關介紹，皆移至 12 年級。如果本條目安排在第二學期，則學生已經具備微積分的知識。（建議教材將微積分放在第一學期，所以本條目的教材能夠適度連結微積分。）

2. 相關約定：

   當一元二次方程式的根為虛數時，稱此方程式有虛根。

3. 學習目標

   (1) 透過解一元二次方程式的根，定義出虛數、複數。

   (2) 了解代數基本定理的意涵。

   (3) 了解實係數方程式虛根成對性質。

4. 教學斟酌

   (1) 代數基本定理重點在了解方程式根的個數與方程式次數的關係，可透過三次方程式的實例，利用因式分解，講解其定理意涵。

   (2) 由代數基本定理與實係數方程式虛根成對性質，再結合多項式函數的圖形，對於多項式函數圖形與 x 軸的交點個數，能有更確實的了解。

條目範圍

本條目的重點強調方程式根的個數，以及實根、虛根的個數，因此特殊解根的技巧、三次以上求根的公式，皆超出本條目的範圍。

錯誤類型

虛根成對性質，學生會忽視實係數的條件，因此會誤以為任何函數 $f(x)$ ，若 $f(1+i)=0$ ，

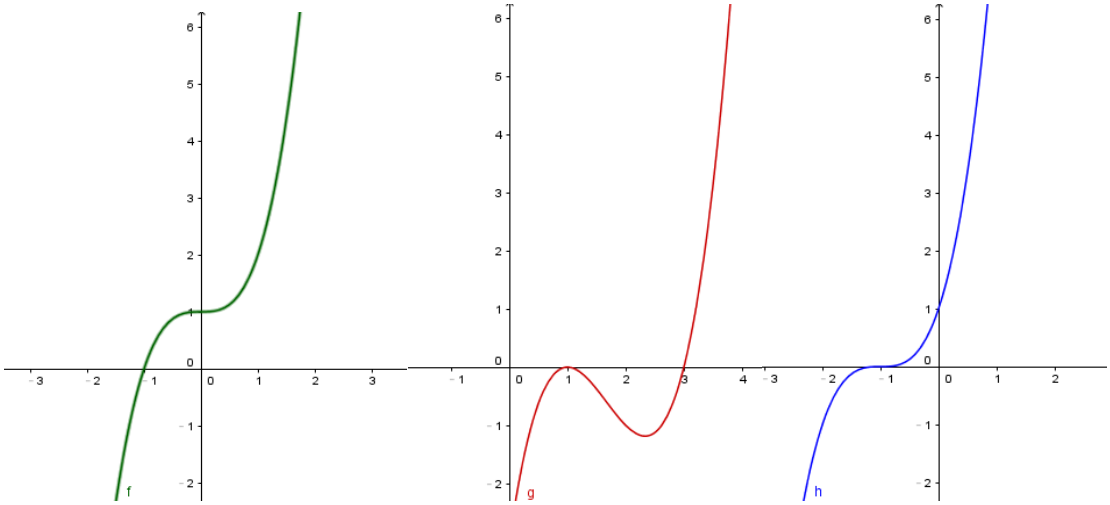
則 $f(1-i)=0$。

釋例

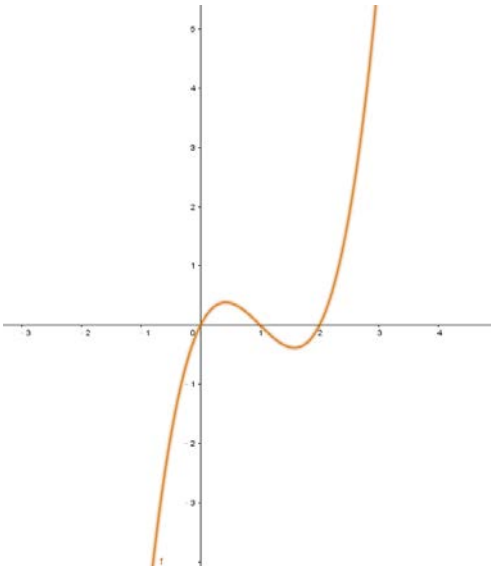
1. 虛根成對性質，可透過實例的展開，使其了解，虛根成對與不成對之下，對係數的影響。例如：$(x+1-2i)(x-1+2i)$ 與 $(x+1-2i)(x+1+2i)$ 的比較。
2. 講解代數基本定理的過程，宜與圖形連結。例如：

   $f(x)=x^3+1$ ，$g(x)=x^3-5x^2+7x-3=(x-1)^2(x-3)$ ，$h(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

   其對應的圖形如下：



依序代表一實根、三實根（其中包含一個二重根）、三重根的狀況。而下圖則是 $k(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ 的圖形，代表有三相異實根的狀況。



評量

1. 不涉及特殊技巧求解方程式根，例如此題不宜：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$。
2. 不涉及整係數方程式求有理根的相關問題，例如此題不宜：$2x^4+x^3-6x^2-2x+3=0$。

F-12甲-1 函數：對應關係，圖形的對稱關係（奇偶性），凹凸性的意義，反函數之數式演算與圖形對稱關係，合成函數。# **備註：**在學習微分或相關內容的脈絡中，認識函數作為可操作的對象，例如 $f \pm g$、$f \circ g$，熟練這些操作。	f-V-1 g-V-2

先備：多項式函數（F-10-1、F-10-2）、三角函數（F-11A-1）、指對數函數（F-11A-4）。

連結：微積分及其應用（F-12甲-3、F-12甲-4、F-12甲-6、F-12甲-7）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱在 10 年級配合多項式內容的學習，介紹單項多項式的圖形具有線對稱與點對稱的圖形特徵，並引入函數的奇偶性，本課綱則將此概念挪至 12 年級與函數圖形一起介紹。本單元不另立章節，應融入各條目的學習之中，適度安排在各單元。

2. 相關約定

   (1) 高斯函數 $[x]$ 定義為「不超過 x 的最大整數」。對正數 x 而言，$[x]$ 就是其整數部分。

   (2) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$。

3. 學習目標

   (1) 能理解函數的定義域、對應域及值域。

   (2) 能認識分段函數的圖形。

   (3) 能從圖形中觀察出奇函數的圖性對稱關係與偶函數的圖性對稱關係，並能從函數式中判斷函數的奇偶性。

   (4) 能理解函數凹凸性的圖形特徵與代數表達。

   (5) 能從圖形中觀察出互為反函數的兩個函數圖形有對稱於直線 $y=x$ 的現象，並能透過函數式的運算進行此兩種函數的轉換。

   (6) 能將函數作為操作的對象，包括係數積 kf、加減 $f \pm g$、乘 fg、除或分式 $\frac{f}{g}$、合成 $f \circ g$。

   (7) 能進行不同函數的合成，並能決定合成函數的定義域及值域。

4. 教學斟酌

   (1) 學生已於 10 年級及 11 年級接觸過函數概念，此處應適時引入過去所學過的函數作為學習的出發點，並強化學生對於定義域及值域的了解。

   (2) 分段函數的介紹與可從絕對值函數及高斯函數引入，讓學生對於函數圖形的種類能有不同於多項式函數的經驗。

   (3) 函數奇偶性應著重在函數圖形的特徵，以連結未來函數積分計算。可從代數觀點介紹奇函數的定義為：$f(-x) = -f(x)$，偶函數的定義為：$f(-x) = f(x)$，但不建議做繁

雜的代數運算來判斷函數的奇偶性。

(4) 函數的奇偶性介紹可搭配函數積分及圖形面積間的關係做介紹，讓學生能實際體會函數奇偶性對簡化計算的威力。

(5) 可連結已經學過的指對數函數圖形或多項式函數圖形，讓學生體會函數的凹凸性，並進一步引入函數凹凸性的判斷性質：凹口向上：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$；凹口向下：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$。此內容可搭配函數圖形的凹向判斷一起介紹，並連結以往的指對數函數圖形。

(6) 介紹反函數概念須強調函數本身必為一對一函數，藉此強化學生對於定義域與對應域的理解。並透過描繪圖形過程中點與點的對應情形，讓學生觀察出圖形有對稱直線 $y=x$ 的現象。也可將 x 軸當作定義域、y 軸當作對應域，反函數圖形就是將定義域及對應域交換。因此，圖形的對稱軸即為 x 軸及 y 軸的對稱軸，也就是直線 $y=x$。

(7) 可透過簡單的例子讓學生體會函數的合成，例如 $(x-a)^n = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$，其中 $f(x)=x^n$、$g(x)=x-a$，又如 $\sqrt{x^2+1} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$，其中 $f(x)=\sqrt{x}$、$g(x)=x^2+1$。讓學生能理解複雜的函數關係式可視為簡單的函數之合成，並為將來的函數微分連鎖律做準備。

錯誤類型

方程式及函數皆能在坐標平面上繪出圖形，但學生容易因為方程式能畫出圖形而誤以為是函數。

釋例

(1) 從 $y=\cos x$ 的圖形中觀察出圖形具有對稱 y 軸的特徵，再輔以偶函數的代數運算方式檢驗，可以協助學生更了解偶函數同時具有的代數及圖形特徵。同時也可以舉 $y=\sin x$ 為奇函數的例子。

(2) 從學生的舊經驗中提取指數函數 $y=a^x$ 及對數函數 $y=\log_a x$ 圖形，從圖形中觀察出兩個圖形具有對稱於 $y=x$ 的特徵，並透過代數運算的過程，將 $y=\log_a x$ 轉換成 $x=a^y$，對照 $y=a^x$，引出反函數之間的代數運算方式。

(3) 利用 $y=x^2$ 的圖形及反函數的圖形對稱特徵、代數運算方式，推得反函數為 $x=y^2$，此時可引導學生判斷函數的定義，去檢證討論 y 是 x 的函數與 x 是 y 的函數，這兩個問題。並連結國中以鉛直線檢驗 y 是 x 的函數的方法，引導學生理解 x 是 y 的函數的圖形檢驗應採用水平線。透過此過程協助學生了解反函數的定義域與對應域並不相同。

評量

不宜出現討論 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的交點數之考題。

F-12甲-2 函數的極限：認識函數的連續性與函數在實數 a 的極限，極限的運算性質，絕對值函數和分段定義函數，介值定理，夾擠定理。 **備註**：請注意連結 10 年級所學的多項式相除之基礎；此處的目標是處理微分，勿過度延伸。	f-V-6 n-V-2 a-V-1

先備：多項式的除法原理（A-10-2）。

連結：微分與導函數（F-12甲-3、F-12甲-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

本條目在 99 課綱列為高三選修(數甲、數乙)下冊，在本課綱則定位為微分的準備課程，所以建議在 12 年級上學期教授。此外，99 課綱明訂極限相關課題集中在同一章，而且獨立於微積分之前。本課綱則認為高中階段的極限課題應以支援學習微分、積分之所需為主，期望教材勿將極限集中於獨立的單元，而使其搭配微分、積分之學習脈絡。本條目在高中課程中的最主要目的，是為了寫出導數的定義。

2. 學習目標

(1) 能從圖形直觀認識與辨識函數的連續性。

(2) 能從極限的概念檢驗函數在實數 a 的連續性。

(3) 能透過檢查左、右極限的方法確定函數在實數 a 的極限是否存在。

(4) 能進行函數極限的四則運算。

(5) 能藉由函數連續的特性理解介值定理，並用來解決問題。

(6) 能利用夾擠定理處理函數的極限問題。

3. 教學斟酌

(1) 盡量使用繪圖工具讓學生觀察求極限之附近的函數圖形。例如在 $x=1$ 附近觀察 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的圖形；如果軟體能任意 zoom in 則效果更好。在有理式的情況，一旦發現分子、分母在求極限的目標點上同時為 0，注意要連結因式定理而斷言此有理式必定可以約分。可以舉出適當的非多項式例子，參閱釋例。

(2) 建議由各種連續與不連續函數圖形，來引入函數連續的概念。

(3) 要引導學生區辨函數在實數 a 的極限是否存在，並進一步探討此極限值與函數在該點的函數值是否相等，透過圖形理解函數連續的定義。

(4) 透過實例介紹函數極限的四則運算。

(5) 透過圖形觀察理解連續函數符合介值定理，並取其特例 $y=0$ 時，說明結論為勘根定理。

(6) 可適當運用計算機，透過逐次計算理解極限的意義。

錯誤類型

將 $x \to a$ 與 $x = a$ 所代表的意義混淆，並誤以為 $\lim_{x \to a} f(x)$ 總是等於 $f(a)$。

釋例

1. 透過夾擠原理說明 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$，做為與 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x - a}$ 不同類型的例子。
2. 透過計算機的協助，讓學生操作 $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$ 的極限值，得到常數 0.693147.....，並引入 $\ln 2$，讓學生知道指數函數在 $x \to 0$ 的極限值為一個與自然對數有關的常數，做為將來學習指數函數微分的基礎。

F-12甲-3 微分：導數與導函數的極限定義，切線與導數，多項式函數及簡單代數函數之導函數，微分基本公式及係數積和加減性質。 **備註：**※可以將 $\sin x$ 、$\cos x$ 、2^x 、3^x 等函數的導函數，當作微分的例子。	f-V-6 n-V-7 a-V-2

先備：除法原理（A-10-2）、直線方程式（G-10-2）。

連結：函數的極限（F-12甲-2）、導函數（F-12甲-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

本課綱在 10 年級的多項式函數課題中，開始準備大學數學「分析」課程的前置經驗。多項式的泰勒形式，多項式函數的局部圖形，對三次函數的初步探究，都是微分的前置經驗，宜善加利用。

2. 學習目標

(1) 能理解變化率與導數之間的關係，以及割線與切線的關係。

(2) 能透過極限理解導數在函數圖形上的意義，並推導出導數的定義。

(3) 能理解導數與導函數之間的關係。

(4) 能理解導數與函數圖形切線斜率的關係。

(5) 能透過定義推導出多項式函數及簡單代數函數之導函數。

(6) 能透過極限的四則運算推導出微分基本公式及係數積和加減性質。

3. 教學斟酌

(1) 將導數視為切線斜率的同時，修正學生過去認為切線為「與函數圖形恰有一個交點之直線」的觀念。

(2) 透過函數圖形在某點的切線概念引入導數的定義，利用左右極限的處理，搭配適當的例子(如 $f(x) = |x|$)，讓學生觀察導數的存在性與圖形的連續性之間的關係。

(3) 連結 10 年級的多項式對 $(x - a)$ 進行綜合除法的過程，介紹 $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限值，以

作為後續引入 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數概念。

(4) 教學過程中應讓學生熟練透過導函數的定義推導出各種基本的微分公式，例如 $\left(\sqrt{x}\right)'$、$\left(\frac{1}{x}\right)'$。

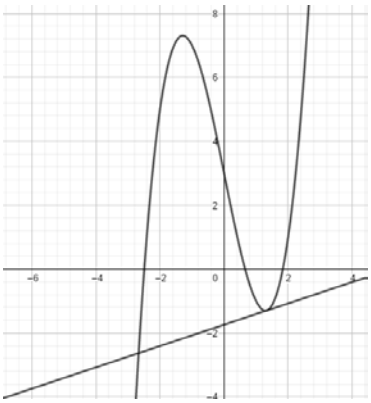
(5) 可利用 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 的結果，引導學生透過導數的定義推導出三角函數的導函數，以做為 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 的應用；求三角函數之導函數的操作過程，也是和差角公式的重要應用示範之一。

條目範圍

簡單代數函數以 x^r 為限，其中 $r\in\mathbb{Q}$，不應出現 $\left(\sqrt{3x+4}\right)'$ 的題型。

錯誤類型

學生會誤以為切線與曲線只有一個交點，如學生會誤認為下圖的直線不是切線。



F-12甲-4 導函數：微分乘法律，除法律，連鎖律，高階導數，萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定，一次估計，基本的最佳化問題。 **備註：**以多項式函數為主要操作對象。連鎖律以 $(x-a)^n$ 的微分為主；多項式函數的泰勒展開式。	f-V-7 f-V-2

連結：函數極限（F-12甲-2）、微分（F-12甲-3）。

基本說明

1. 學習目標

(1) 能透過導函數的定義推導出微分乘法律、除法律。

(2) 能認識萊布尼茲符號，並與導函數定義對應。

(3) 能透過函數合成理解微分連鎖律並加以應用。

(4) 能推廣導函數的定義到高階導數，並正確計算出結果。

(5) 能由函數的一階導數及二階導數判斷函數的單調性及凹凸性，並能對函數圖形的外觀能有更清楚的描述。

(6) 能運用函數的單調性及凹凸性解決最佳化問題。

(7) 能透過對函數微分，求函數的一次估計。

2. 教學斟酌

(1) 微分乘法律與除法律的推導過程應著重在補項的選取，可透過這樣的推導練習，讓學生更熟悉導數的定義及使用。

(2) 引入萊布尼茲符號後，結合函數合成的概念，可引導學生思考：若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，則 $y=f(u)=f(g(x))$，則 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，引入連鎖律的概念，強調 $\frac{du}{dx}$ 的存在性，並可將微分的除法律作為檢證的範例。

(3) 高階導數的引入在二階部分可透過與自然學科連結(如：加速度)，強調其功能與意義，並連結函數圖形的凹凸性，高於二階以上的導數計算則以概念陳述、介紹為主，勿設計過多階的導數運算練習。

(4) 三次多項式函數圖形的完整分類可做為本條目的整合應用問題，老師可以透過一、二階導數的計算對三次多項式函數做完整的分析，順便檢核學生對於導數意義與功能的了解。

(5) 最佳化問題的設計建議可連結自然科學、經濟學或工程學科相關題材，以協助學生連結未來大學學習內容。

(6) 一次估計的學習引入建議從切線方程式著手，藉由提取切線方程式的概念，結合多項式的泰勒展開形式，讓學生理解一次估計中，「一次」的意義。

條目範圍

(1) 以多項式函數為主要操作對象，連鎖律以 $(x-a)^n$ 的微分為主，勿多做其他變化及延伸。

(2) 題目設計要留意極值發生的位置，不要涉及需使用牛頓定理求根的情形，盡量設計使用因式定理檢驗即可求出極值發生位置的問題。此處的因式選擇以 $(x\pm1),(x\pm2),(x\pm3),(x\pm4),(x\pm5)$ 原則，不宜設計太大的數字。

F-12甲-5 黎曼和：黎曼和與定積分的連結。	f-V-9 n-V-8

先備：常用的求和公式（N-10-6），一次與二次函數（F-10-1），三次函數的圖形特徵（F-10-2）。

連結：數列的極限（N-12甲-1），Σ 符號（N-12甲- 2），積分（F-12甲-6）。

基本說明

1. 相關約定

   若多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 連續，取 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，n 為正整數，將區間 $[a,b]$ 等分成 n 個小區間 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,3,\ldots,n$，其中 $x_0=a$、$x_n=b$，符號 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x$ 表示黎曼和。當每一個 $f(x_k)$ 皆為區間 $[x_{i-1},x_i]$ 內的最大值時，稱為上和 U_n；為最小值時，稱為下和 L_n。若 $\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty} L_n$，則以符號 $\int_a^b f(x)dx$ 表示此值，並稱為 $f(x)$ 從 $x=a$ 到 $x=b$ 的定積分。

2. 學習目標

   (1) 能找出函數在閉區間的上和與下和。

   (2) 了解黎曼和的極限與定積分的關係。

   (3) 了解黎曼和可以用來估計面積。

   (4) 了解定積分與面積的關係。

   (5) 熟悉定積分的符號並能運用定積分的性質。

3. 教學斟酌

   (1) 定積分以多項式函數為主要操作對象，但在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形。可包含連續的兩段或三段折線函數、絕對值與一次或二次函數的合成、高斯函數。

   (2) 先介紹黎曼和的值，再引入定積分的符號，如此，學生能熟悉 $\int$ 與 $\sum$ 的連結、dx 和 Δx 的連結，順利認識並正確使用符號。

   (3) 黎曼和中，是由函數 $f(x)$ 的值乘上 Δx 而得，所以 $f(x)$ 圖形與 x 軸所圍出的區域面積與定積分的值不一定相等，應以實例讓學生理解。函數 $f(x)$ 的圖形在 x 軸上方時，其定積分值為正，在 x 軸下方時，其定積分值為負；定積分的下限大於上限時，因為 $\Delta x<0$ 所以也會出現相反的定積分值。因此應讓學生理解：當計算面積時，需注意區間內函數值是否有正負的變化；若有，則先求出 $f(x)=0$ 的解，然後分段積分。而且，要注意定積分的下限、上限有方向性。

釋例

利用面積的觀念，計算下列各定積分值：

(1) $\int_{-1}^{3}|x-2|dx$ ，　(2) $\int_{1}^{3}[x]dx$ ，　(3) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ 。

錯誤類型

1. 在計算黎曼和時，寫錯分割點的值或忘記乘上分割後的區間寬度。
2. 未正確使用定積分符號，例如：$\int_a^b f(x)$ 是錯誤的寫法。
3. 學生誤以為定積分的值即為曲線與 x 軸所圍成的面積，這是不理解在定積分的值是黎曼和，而黎曼和是將函數值與區間寬度相乘，所以當函數值為負時，其值為負。例如：$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ 而 $\int_0^1(-x^2)dx=-\frac{1}{3}$ 。
4. 學生無法分辨 $\int_{-1}^{1}|x^3|dx$ 與 $\left|\int_{-1}^{1}x^3dx\right|$ 的不同。
5. 學生不知道 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ 。

F-12甲-6 積分：多項式函數的反導函數與不定積分。定積分在面積、位移、總變化量的意涵，微積分基本定理。 **備註：**不涉及分部積分與變數變換。定積分以多項式函數為主要操作對象，但在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形。可包含連續的兩段或三段折線函數，絕對值與一次或二次函數的合成。	f-V-8 f-V-2

先備：一次與二次函數（F-10-1）、三次函數圖形特徵（F-10-2）。

連結：微分（F-12甲-3），導函數（F-12甲-4），黎曼和與定積分（F-12甲-5），積分的應用（F-12甲-7）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本課綱不將被積分函數嚴格限制為多項式函數，而是以它們為主要操作對象，但在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形。
2. 相關約定

   (1) 若 $F'(x)=f(x)$ ，則稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 之反導函數。

   (2) 令 $f(x)$ 是一個連續函數， $F(x)$ 是它的一個反導函數，則 $f(x)$ 的不定積分就是它所有可能的反導函數，記作 $\int f(x)dx=F(x)+C$ ，其中 C 是任意實數。
3. 學習目標

   (1) 能了解並運算反導函數與不定積分。

(2) 能理解定積分在面積、位移、總變化量的意涵並計算其值。

(3) 能利用積分的概念，推論出自由落體的速度函數與位置函數，並理解自由拋射物的水平位置與鉛直位置。

(4) 認識多項式的微積分基本定理，並計算定積分。

(5) 熟練不定積分與定積分的運算性質。

4. 教學斟酌

(1) 建議由黎曼和算出 $\int_0^b x\,dx=\frac{b^2}{2}$ 、 $\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}$ 與 $\int_0^b x^3\,dx=\frac{b^4}{4}$ 的定積分公式，觀察並引出反導函數的概念，再介紹多項式的微積分基本定理，並用以簡化定積分的求值過程。當多項式的次方較高、項數較多時，計算較為繁瑣，應仔細說明、示範，並讓學生適度練習。

(2) 可以利用位移的意義來解讀定積分，讓學生直覺地認識微積分基本定理，這是用數學的物理意義反過來「認識」數學的最佳範例。但數學畢竟須要自身的證明，否則不能作為實驗科學（自然科學）的可靠模型，建議在附錄中補充微積分基本定理的證明。

條目範圍

不涉及分部積分與變數變換。

釋例

1. 若學生理解位置函數的導函數為速度函數，而且速度函數的導函數為加速度函數，則可應用不定積分來推導出前兩個函數：因為自由落體為等加速度運動，即 $a(t)=-9.8$ ，而加速度函數是速度函數 $v(t)$ 的微分，亦即 $v(t)=\int a(t)\,dt=-9.8t+c$ ，因為自由落體 $v(0)=0$ ，故 $c=0$ ；同理，速度函數 $v(t)=9.8t$ 是位置函數 $s(t)$ 的微分，因此 $s(t)=\int v(t)dt=\int -9.8tdt=-4.9t^2+k$ ，又 $s(0)=h$（自由落體原始高度），故 $s(t)=-4.9t^2+h$。由此可推得，若將物體在鉛垂方向拋射，則僅改變 $v(0)$ 與 $s(0)$ 的值，即可推得速度函數與位移函數，再將之應用到斜拋運動，將初速分解為水平與鉛垂分力，即可得到時間與物體位置的關係。
2. 可另外補充利用函數的對稱性，很多的定積分問題都不須要真正的計算就能得到，例如可以使用 $\int_0^1 x^2\,dx$ 來計算 $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ ，可得 $\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 \sqrt{x}dx=1$ 。
3. 若 $a>0$ ，奇函數的圖形對稱於原點，所以 $\int_{-a}^{a} x^3dx=0$ ；而偶函數圖形對稱於 y 軸，所以 $\int_{-a}^{a} x^2dx=2\int_0^a x^2dx$ 。
4. 由三角函數圖形也可觀察到 $\int_0^{2\pi} \sin x dx=0$ 、 $\int_{-a}^{a} \sin x dx=0$ ，以及求 $\int_0^{2\pi} 1+\sin x dx$ 。

F-12甲-7 積分的應用：連續函數值的平均，圓的面積，球的體積，切片積分法，旋轉體體積。	f-V-8 f-V-2

先備：一次與二次函數（F-10-1），三次函數的圖形特徵（F-10-2）。

連結：黎曼和與定積分（F-12甲-5），積分（F-12甲-6）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   本課綱增加「連續函數值的平均」的定義。

2. 相關約定

   若函數 $f(x)$ 為連續函數，則稱 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內的平均。

3. 學習目標

   (1) 理解將連續函數的定積分值除以區間長度，即為此區間內函數值的平均。

   (2) 能利用定積分表達並計算 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形與直線 $x=a$ 、 $x=b$ 所圍成的區域面積。

   (3) 能理解如何利用積分與圓的周長推出圓面積公式。

   (4) 能利用切片積分法求立體的體積與旋轉體的體積。

   (5) 能推論出圓錐體體積與球體體積的公式。

4. 教學斟酌

   (1) 過去沒有談論過連續量的平均值，建議由離散的平均值來引導，當欲求的數值為連續型的情形，可以視為「離散的數值平均為長條圖的平均長度」，類推到「連續函數在區間內的平均高度」，即區域內面積（定積分值）除以區間寬度。

   (2) 介紹切片積分法，可以用直四角椎的體積示範，參見釋例 1.。

   (3) 可以利用實際物品如紅蘿蔔、甜筒杯、柳丁等地切片來讓學生體會曲線繞 x 軸旋轉而成的體積。將來學生在計算體積的定積分時，才能理解為何要將 $f(x)$ 平方，也不會漏掉要乘上 π 倍。

   (4) 對於程度較好的學生，可補充：利用球體體積公式的結果，利用微分推論出球體表面積的公式。作法如下：球體體積對球體半徑 x 的函數為 $f(x)=\frac{4}{3}\pi x^3$，將半徑 x 的球體，減去半徑 a 的球體，則剩下一個厚度為 $(x-a)$ 的球殼，當 x 非常接近 a 時，這球殼的體積大小，幾乎等於一個底面積為球體表面積、高為 $(x-a)$ 的長方體體積，所以球體的表面積= $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ，即半徑 a 的球體表面積 A= $f'(a)=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^{3-1}=4\pi a^2$ 。

   (5) 沿著半徑將圓分割成環的算法，並不適用於橢圓，除了橢圓並無「半徑」的原因以外，

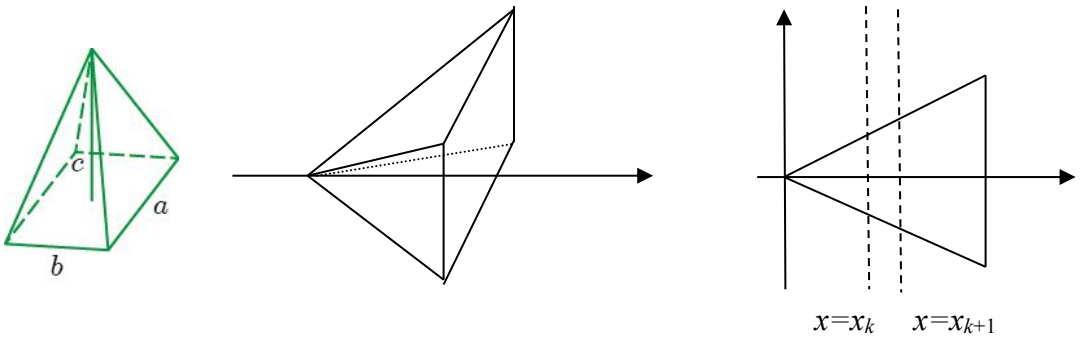
主要的原因是，橢圓並非一個「均勻對稱於中心點」的圖形，所以，無論如何將橢圓分割成「環」狀，都不會是個「厚度」一致的平面區域，所以無法使用簡單的公式寫成黎曼和。但橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面積可以透過定積分 $\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 而得，答案是 $ab\pi$。

條目範圍

不涉及其他積分法。

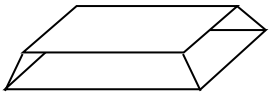
釋例

利用切片積分法求直四角錐的體積：



將直四角錐如圖置放，則將 x 軸上的閉區間 $[0,c]$ 等分，則 $\Delta x=\frac{c}{n}$，

每一個切分截取出來的切片為四角錐台(上下皆為矩形)，其高度為 Δx，



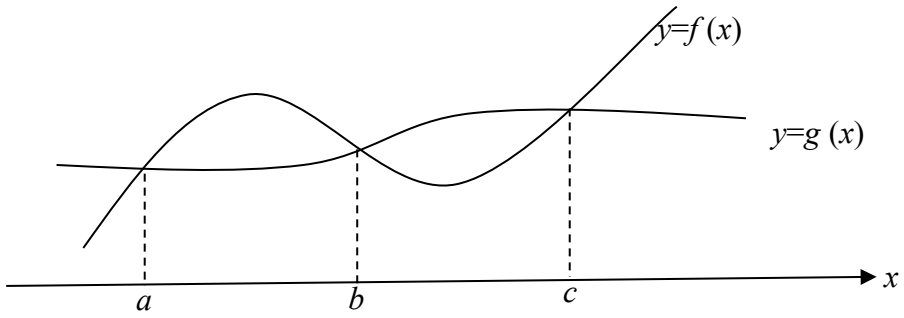
按比例，矩形的長：$a=$ 矩形的寬：$b=$ x_k ：c，所以 $\frac{abx_k^{\ 2}}{c^2}\cdot\Delta x\le$ 四角錐台的體積 $\le\frac{abx_{k+1}^2}{c^2}\cdot\Delta x$

因此四角錐台的體積為 $\int_0^c\frac{ab}{c^2}x^2dx=\frac{ab}{3c^2}x^3\Big|_0^c=\frac{1}{3}abc$。

錯誤類型

1. 在求旋轉體體積時，學生不知道繞著 x 軸旋轉與繞著 y 軸旋轉，常會得到不同的旋轉體，應使用動畫或實際操作來體會欲求出的空間中形體，讓學生領會旋轉體的形狀。
2. 學生不明白 $\int\pi[f(x)]^2dx\ne\pi\left(\int f(x)dx\right)^2$。

3. 參照下圖，誤以為兩曲線在 $[a,c]$ 之間的面積即為 $\int_a^c [f(x)-g(x)]dx$ ，但應該是 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx+\int_b^c [g(x)-f(x)]dx$ 。



D-12甲-1 離散型隨機變數：期望值、變異數與標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。	d-V-4

先備：數據分析（D-10-2）、複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：二項分布與幾何分布（D-12甲-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱主要是介紹二項分布與常態分布，而後者涉及連續型隨機變數。本課綱刪除常態分布與信賴區間等內容，故沒有連續型隨機變數，聚焦於離散型隨機變數。此條目應連結 D-12 甲-2 的二項分布與幾何分布，因此與 99 課綱不同的是增加了幾何分布的期望值、變異數與標準差。

2. 相關約定

(1) 隨機變數 X 的機率質量函數 $p(x)=P(X=x)$ ，表示 $X=x$ 時發生的機率。

(2) 隨機變數 X 的期望值 $\mu=E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 。

(3) 隨機變數 X 的變異數 $\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=(x_1-\mu)^2p(x_1)+(x_2-\mu)^2p(x_2)+\cdots(x_n-\mu)^2p(x_n)$ ，而變異數的正平方根 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sigma$ ，稱為隨機變數 X 的標準差。

3. 學習目標

(1) 由隨機現象理解隨機的意義，並進而定義離散型隨機變數。

(2) 由隨機變數的觀點，定義期望值，讓學生了解 10 年級所提的期望值，與這裡透過隨機變數的定義相同。

(3) 定義隨機變數的標準差與變異數，並與數據的標準差、變異數做比較，了解兩者皆為平均差量的意涵。

4. 教學斟酌

(1) 可透過例子讓學生體會期望值雖為隨機變數期望出現的值，但卻可能永遠也不會有此

值出現。

(2) 透過不同標準差的例子，讓學生感受標準差的意涵，並可適度的引入計算機或軟體輔助計算。

條目範圍

不涉及連續型的隨機變數概念。

錯誤類型

學生對於符號 $E(X^2)$ 與 $(E(X))^2$ 兩者的意義不易分辨清楚，因此在操作變異數時，建議盡量少使用 $E(X^2)-(E(X))^2$ 符號，以免造成學生學習上的困難。

釋例

有 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 共 k 個相異數值，且 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 出現的次數分別為 $f_1,f_2,\cdots f_k$，而 $f_1+f_2+\cdots+f_k=N$，則 $\frac{f_i}{N}$ 可視為得到數值 x_i 的機率，令 $p_i=\frac{f_i}{N}$，則組數據的

變異數 $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot f_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i$，

標準差 $\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i}$，可以此數據的變異數定義類比隨機變數的變異數。

評量

標準差與變異數的計算量頗大，評量的重點應放在瞭解這兩個變量的意義上，切勿流於複雜的計算，若需透過實例計算數值，應適當的融入計算機操作。

D-12甲-2 二項分布與幾何分布：二項分布與幾何分布的性質與參數。 **備註：**應用於事件發生機率的合理性檢定。	d-V-4 d-V-5 a-V-1

先備：主觀機率與客觀機率（D-11A-1）、條件機率（D-11A-2）。

連結：離散型隨機變數（D-12甲-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱主要是介紹二項分布與常態分布，但本課綱不討論連續型隨機變數、常態分布與信賴區間，但加入幾何分布。並需介紹二項分布與幾何分布的期望值、標準差。以及至少有一個例子說明如何使用這兩個分布來做假設檢定。

2. 相關約定

(1) 以 $X\sim B(n,p)$ 代表隨機變數 X 是二項分布，即為獨立重複 n 次的伯努力試驗，且每次成功的機率為 p 的機率分布。

(2) 以 $X \sim G(p)$ 代表隨機變數 X 是每次成功機率為 p 的幾何分布。

3. 學習目標

(1) 能理解伯努力試驗、重複試驗、獨立的重複試驗，並進而定義二項分布。

(2) 認識二項分布與幾何分布的定義。

(3) 能在直觀上理解二項分布與幾何分布的期望值，再搭配數學證明。

(4) 能運用二項分布或幾何分布來做假設檢定。

4. 教學斟酌

(1) 請學生主動分享二項分布與幾何分布在生活上的例子。

(2) 認識二項分布與幾何分布後，透過實例說明如何運用這些概念進行假設檢定的檢測，無須做超出此概念的檢定判斷。

(3) 須理解標準差的意涵與用途，但不一定要證明幾何分布的標準差公式，可以提供為參考資料。

條目範圍

在這裡的假設檢定，並不需要做到統計課程中的第一型、第二型錯誤，請參考下面的釋例，讓學生能直觀性的瞭解即可。

錯誤類型

例：紅白黑 3 種顏色的球，問抽中紅色或非紅色的機率分布；

例：紅白黑 3 種顏色的球，問抽中紅色球出現為止的機率分布；

這兩個問題分別代表二項分布與幾何分布，讓學生分辨出兩者的不同。

釋例

假設檢定的例子可以如下面的釋例呈現：

我們有一個銅板，令 p 表示銅板正面的機率，假設 p 只可能是 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$。我們想要藉由丟擲銅板 6 次並且採用以下的判斷準則來判定 p 之值：若正面次數不多於 2 次，則判定 $p = \frac{1}{3}$；反之，若正面次數多於 2 次，則判定 $p = \frac{1}{2}$。

(1) 若 $p = \frac{1}{3}$，則可以做出正確判定的機率為何？

(2) 若 $p = \frac{1}{2}$，則可以做出正確判定的機率為何？

12 年級數學乙學習內容解析

N-12乙-1 **複數**：複數平面，複數的四則運算與絕對值。	n-V-3

先備：絕對值（N-10-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   複數的四則運算在 99 課綱中，放在 10 年級時，由虛根定義出虛數後，介紹虛數的四則運算；而本課綱已將方程式的虛根概念，移至 12 年級，因此所有複數的相關概念皆一併在 12 年級中完成。

2. 與選修甲的差異

   沒有複數的極式，也就沒有主幅角的相關課題。沒有棣美弗定理、n 次方根。

3. 相關約定

   (1) 複數的標準式：$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$，其中 a 稱為實部，b 稱為虛部。$\overline{z}=a-bi$ 稱為 z 的共軛複數。

   (2) 複數 $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$，當 $b\neq 0$ 時，稱 z 為虛數；其中當 $a=0, b\neq 0$ 時，稱 z 為純虛數。

   (3) 複數 $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$，則複數 z 的絕對值 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 代表 z 在複數平面上與原點的距離。

4. 學習目標

   (1) 能連結複數與平面向量。

   (2) 能操作複數的四則運算與絕對值，並理解其對應到複數平面的相應位置。

5. 教學斟酌

   (1) 本條目教學之前，學生已經具備平面向量的知識，宜適當連結與應用。

   (2) 除理解每一個複數與複數平面的點形成一一對應關係外，可視原點到每一個複數點的幾何位置等同於向量概念的幾何意涵。

條目範圍

本條目不涉及複數的極式、棣美弗定理及解複數的 n 次方根問題。

錯誤類型

對複數的共軛複數瞭解不清。例如：誤以為 $2+\sqrt{3}$ 的共軛複數為 $2-\sqrt{3}$。

釋例

複數的四則運算，應搭配其對應於複數平面的位置，而加減法所對應到複數平面的位置，應讓學生體會此概念類比於向量的加減運算。例如：若 $z_1=1+2i$ 、$z_2=3-2i$，則

$z_1+z_2=1+2i+3-2i=4$，此運算所對應的概念等同於平面向量的加減：$\overrightarrow{v_1}=(1,2)$、$\overrightarrow{v_2}=(3,-2)$，則 $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(1,2)+(3,-2)=(4,0)$。

評量

因為沒有複數的極式，因此不涉及旋轉概念的相關問題。

N-12乙-2 無窮等比級數：循環小數，認識 Σ 符號。	n-V-8

先備：等比數列（N-8-6），實數（N-10-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱中，Σ 符號為 10 年級下學期教授，本課綱移至數乙選修上冊。

2. 與選修甲的差異

   數列極限的教學不另立條目，僅用於討論無窮等比級數的斂散性，不需要擴展到其他種類題型的操作。

3. 相關約定

   (1) Σ 為連加符號，例如 $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n+1)+f(n)$。

   (2) 規定 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ 的意義是「按照順序」加起來。

4. 學習目標

   (1) 認識無窮等比級數，學習使用 Σ 符號表達級數和。

   (2) 從無窮等比級數之部份和數列，認識數列的收斂與發散的符號 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 及其意義。

   (3) 理解 Σ 符號的基本性質。

   (4) 理解並能判別無窮等比級數收斂與發散的條件。

   (5) 能推導出無窮等比級數的求和公式。

   (6) 能將循環小數化為無窮等比級數，並求出其值，明白每一個循環小數都是一個有理數，進而推論循環小數化為分數的運算規則。

5. 教學斟酌

   (1) 教學過程中介紹數列的極限，可多舉例並利用數線上的位置，說明數列是否逐漸靠近某定值 L 的現象，也可以將數列視為數據，展現其 (前面若干項的) 折線圖，觀察它是否逐漸靠近某水平線 $y=L$，讓同學感受收斂與發散的情形，再進而判斷極限值的存在與否情況。待數列極限的觀念建立後，直接討論無窮等比級數。

   (2) 可從實際例子：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}+...$、$1+1+\cdots+1^k+\cdots$、$1+(-1)+1+\cdots+(-1)^k+\cdots$ 之

前 n 項和（部份和）的數列 s_1，s_2，s_3，...，搭配計算的數值或數列（當作數據）的折線圖，來理解無窮級數和之存在（收斂）、發散、不存在性。

(3) 教學時可以找一些圖形中蘊含無窮等比級數和的關係，讓學生體會數學之美。

(4) 教學時可以先讓學生多練習將 Σ 符號的式子展開，累積對連加以及變數作用的經驗，再以實例說明 Σ 符號的性質。

(5) 學生對於「無窮」的概念，需要引導與時間消化，大部分學生認為 $0.\bar{9}<1$，但以無窮等比級數求和時又等於 1 而感到困惑，下面是幾個建議的引導方式：

(a) 從小學的經驗，學生能接受 $0.\bar{3}=\frac{1}{3}$，那麼 $0.\bar{9}=0.\bar{3}\times 3=\frac{1}{3}\times 3=1$。

(b) 如果 $0.\bar{9}<1$，它們相差多少?如果兩個數之間沒有距離，是不是就是相等的數?

(c) 無窮就是一直一直一直寫下去，當我們在寫 9 的循環時，就越發的接近 1，而這個動作不會停止（因為是無窮），所以最後這個值就是 1。

條目範圍

本條目不討論無窮級數的各項順序是否影響其和的問題（不討論絕對收斂），這裡規定無窮級數必須是將無窮數列「依序」加起來。

錯誤類型

1. 認為 $0.\bar{9}<1$。
2. 使用 Σ 符號時，不能分辨變數與定值，例如：$\sum_{k=1}^{n}3a_k=3\sum_{k=1}^{n}a_k$ 與 $\sum_{k=1}^{n}na_k=n\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是對的，但 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=k\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是錯誤的。

評量

不介紹一般級數求和，例如：「求級數 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+.....$ 的值」、「求級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{5^k}$ 的值」皆不宜命題。

A-12乙-1 線性規劃：目標函數為一次式的極值問題，平行直線系。	a-V-4

先備：直線方程式（G-10-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱中，本單元為 11 年級上學期教授，本課綱移至 12 年級選修數乙。

2. 與選修甲的差異

   選修甲無此內容。

3. 學習目標

(1) 能理解平行直線系。

(2) 能將聯立二元一次不等式的圖形繪製在坐標平面上。

(3) 能知道可行解區域與目標函數的意義。

(4) 能利用平行線法與頂點法求出最佳解。

(5) 能理解題意，並將問題建立為線性規劃的數學模型。

4. 教學斟酌

(1) 學生已在10年級學習過單一的二元一次不等式的圖形，建議實際教學時應先複習相關概念，俾使學生能正確繪製圖形，進而順利學習繪製聯立不等式的可行解區域。

(2) 介紹平行直線系時，可適當連結直線的截距，幫助學生判斷直線常數項變動的情形。

(3) 雖然在國中階段的數學內容中，代數的單元裡，已介紹關於如何適當的將問題中的未知數設為變數，並列出題目中的相關條件對應到的式子，但解題涉及到學生的閱讀及理解、整合能力，教學時應注意學生是否掌握數學建模的流程。

條目範圍

不涉及求下列目標函數之極值問題：$\frac{y+3}{x-1}$ 、x^2+y^2 ...等非一次式的極值問題。

錯誤類型

遇到平行直線系 $ax+by=c$ 時，學生會誤以為直線愈往右，常數項愈大。教師宜適當舉例澄清學生迷思。

A-12乙-2 方程式的虛根：方程式的虛根，實係數方程式的代數基本定理，虛根成對的性質。	a-V-2 n-V-3

先備：一元二次方程式的解法與應用（A-8-7）。

連結：複數（N-12乙-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

在 99 課綱中，複數與方程式放在 10 年級，本課綱將複數的導入與相關內容，皆移至 12 年級。如果本條目安排在第二學期，則學生已經具備微積分的知識(建議微積分放在上學期)。

2. 與選修甲的差異

不含係數有虛數的方程式，不必強調根與係數關係，更嚴格地將方程式限制在三次（含）以內。

3. 相關約定

當一元二次方程式的根為虛數時，稱此方程式有虛根。

4. 學習目標

(1) 透過解一元二次方程式的根，定義出虛數、複數。

(2) 了解代數基本定理的意涵。

(3) 了解實係數方程式虛根成對性質。

5. 教學斟酌

(1) 代數基本定理重點在了解方程式根的個數與方程式次數的關係，可透過三次方程式的實例，利用因式分解，講解其定理意涵。

(2) 由代數基本定理與實係數方程式虛根成對性質，再結合多項式函數的圖形，對於多項式函數圖形與 x 軸的交點個數，能有更確實的了解。

條目範圍

本條目的重點強調方程式根的個數，以及實根、虛根的個數，因此特殊解根的技巧、三次以上求根的公式，皆超出本條目的範圍。

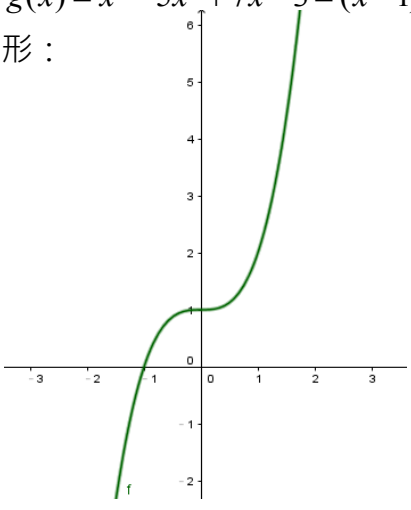
錯誤類型

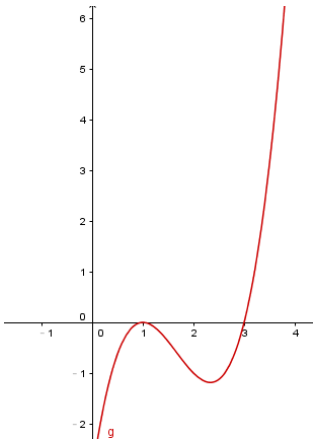
虛根成對性質，學生會忽視實係數的條件，因此會誤以為任何函數 $f(x)$ ，若 $f(1+i)=0$ ，則 $f(1-i)=0$ 。

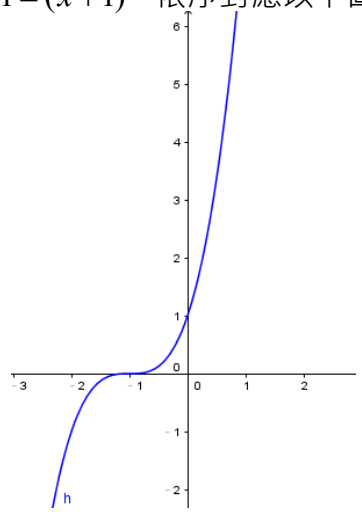
釋例

1. 虛根成對性質，可透過方程式實例的展開，使其了解，虛根成對與不成對之下，對係數的影響。例如：$(x+1-2i)(x-1+2i)=0$ 與 $(x+1-2i)(x+1+2i)=0$ 的比較。

2. 講解代數基本定理的過程，宜與圖形連結。例如：$f(x)=x^3+1$ 、$g(x)=x^3-5x^2+7x-3=(x-1)^2(x-3)$ 、$h(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$ 依序對應以下圖形：

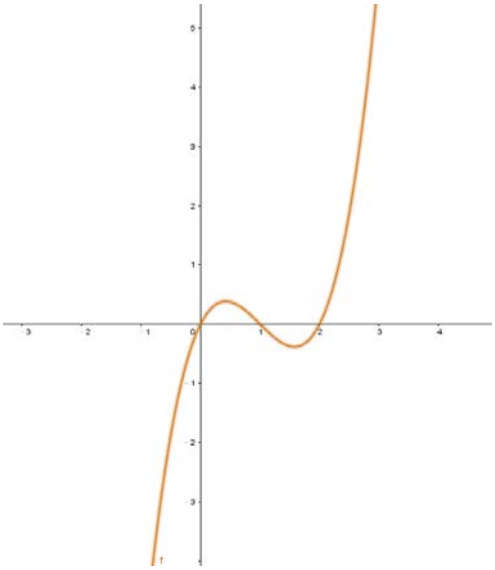






分別代表：一實根、三實根（其中包含一個二重根）、三重根。

而下圖 $k(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ 則有三相異實根。



評量

1. 不涉及特殊技巧求解方程式根，例如此題不宜：求解 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$ 的根。
2. 不涉及整係數方程式求有理根的相關問題，例如此題不宜：求解 $2x^4+x^3-6x^2-2x+3=0$ 的根。

F-12乙-1 函數：對應關係，圖形的對稱關係（奇偶性），凹凸性的意義。# **備註**：在學習微分或相關內容的脈絡中，認識函數作為可操作的對象，例如 $f\pm g$、$f\circ g$。	f-V-1 g-V-2

先備：正弦函數（F-11A-1 或 F-11B-1）、指對數函數（F-11A-4 或 F-11B-2）、一次與二次函數（F-10-1）。

連結：微積分及其應用（F-12乙-3、F-12乙-4、F-12乙-5、F-12乙-6）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異
   (1) 99 課綱在 10 年級配合多項式內容的學習，介紹單項多項式的圖形具有線對稱與點對稱的圖形特徵，並引入函數的奇偶性，本課綱則將此概念挪至 12 年級與函數圖形一起介紹。本單元不另立章節，應適度融合、安排在各條目的學習之中。
   (2) 99 課綱在數乙教材並未涵蓋圖形凹凸性的介紹，本課綱為銜接函數微分與極值問題之探討，需介紹圖形凹凸性的概念。
2. 與選修甲的差異
   不討論有關反函數的相關概念，也沒有一般性的合成函數。
3. 相關約定
   (1) 高斯函數 $[x]$ 定義為「不超過 x 的最大整數」。對正數 x 而言，$[x]$ 就是其整數部分。

(2) $f\circ g(x)=f(g(x))$。

4. 學習目標

(1) 能理解函數的定義域、對應域及值域。

(2) 能認識分段函數的圖形。

(3) 能從圖形中觀察出奇函數的圖性對稱關係與偶函數的圖性對稱關係，並能從函數式中判斷函數的奇偶性。

(4) 能理解函數凹凸性的圖形特徵與代數表達。

(5) 能將函數作為操作的對象，包括係數積 kf、加減 $f\pm g$、乘 fg、除或分式 $\frac{f}{g}$、合成 $f\circ g$。關於函數的合成，請看教學斟酌。

5. 教學斟酌

(1) 學生已於 10 年級及 11 年級接觸過函數概念，此處應適時引入過去所學過的函數作為學習的出發點，並強化學生對於定義域及值域的了解。

(2) 分段函數的介紹與可從絕對值函數及高斯函數引入，讓學生對於函數圖形的種類能有不同於多項式函數的經驗。

(3) 函數奇偶性應著重在函數圖形的特徵，以連結未來函數積分計算。可從代數觀點介紹奇函數的定義為：$f(-x)=-f(x)$，偶函數的定義為：$f(-x)=f(x)$，但不建議做繁雜的代數運算來判斷函數的奇偶性。

(4) 函數的奇偶性介紹可搭配函數積分及圖形面積間的關係做介紹，讓學生能實際體會函數奇偶性對簡化計算的威力。

(5) 為了在教學目標範圍內舉出較為豐富的例子，可連結已經學過的多項式函數圖形、三角函數圖形與指對函數圖形。但是，為使 11 年級 B 類課程的學生容易銜接，在三角函數方面應盡量僅使用 $\sin x$，在指對函數方面應盡量僅以 10 或 2 為底。

(6) 若欲以 $\cos x$ 作為函數的例子，須為 11B 的學生補充其定義；只要能了解 $\cos x$ 為 $\sin x$ 之平移即可。

(7) 不必深入一般性的合成函數，但是透過簡單的例子介紹合成函數，例如 $(x+1)^2=f(x+1)$，其中 $f(x)=x^2$，並知道 $f\circ g(x)$ 的意義是 $f(g(x))$。

條目範圍

函數的舉例，不必擴及 $\tan x$。

錯誤類型

方程式及函數皆能在坐標平面上繪出圖形，但學生容易因為方程式能畫出圖形而誤以為是函數。

釋例

從 $y=x^2$、$y=x^4$ 的圖形中觀察出圖形具有對稱 y 軸的特徵，再輔以偶函數的代數運算方式檢驗方式，可以協助學生對偶函數同時具有代數及圖形的特徵了解。同時也可以舉 $y=x^3$ 為奇函數的例子。

評量

(1) 不宜出現討論 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 的交點數之考題。

(2) 不宜出現關於 $\tan x$ 的考題。

F-12乙-2 函數的極限：認識函數的連續性與函數在實數 a 的極限，極限的運算性質，介值定理，夾擠定理。 **備註：**請注意連結 10 年級所學的多項式相除之基礎；此處的目標是處理微分，勿過度延伸。	f-V-6 n-V-2 a-V-1

先備：多項式的除法原理（A-10-2）。

連結：微分與導函數（F-12乙-3、F-12乙-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱明訂極限相關課題集中在同一章，而且學習極限內容之後，並無微積分。本課綱則認為本條目應以支援學習微分之所需為主，期望教材勿將極限集中於獨立的單元，而使其搭配微分之學習脈絡。本條目的最主要目的，是為了寫出導數的定義。

2. 與選修甲的差異

函數的極限與函數的連續性，主要透過圖形來認識。介紹函數極限的概念時，以多項式函數為主，以圖形作為連續性與極限之範例時，可涉及絕對值函數及分段函數。本條目的主要目的是為了支援微分的學習，不必延伸過多一般性的極限知識。

3. 學習目標

(1) 能從圖形直觀認識與辨識函數的連續性。

(2) 能透過檢查左、右極限的方法確定函數在實數 a 的極限是否存在。

(3) 能進行函數極限的四則運算。

(4) 能藉由函數連續的特性理解介值定理，並用來解決問題。

(5) 能利用夾擠定理處理函數的極限問題。

4. 教學斟酌

(1) 盡量使用繪圖工具讓學生觀察求極限之附近的函數圖形。例如在 $x=1$ 附近觀察

$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的圖形；如果軟體能任意 zoom in 則效果更好。在有理式的情況，一旦發現分子、分母在求極限的目標點上同時為 0，注意要連結因式定理而斷言此有理式必定可以約分。

(2) 建議由圖形來認識連續與不連續函數。

(3) 要引導學生從圖形區辨函數在 a 處的極限是否存在，並進一步探討此極限值與函數在該點的函數值是否相等。

(4) 透過實例介紹函數極限的四則運算。

(5) 透過圖形觀察理解連續函數符合介值定理，並取其特例 $y=0$ 時，說明結論為勘根定理。

(6) 可適當運用計算機，透過逐次計算理解極限的意義。

錯誤類型

將 $x\to a$ 與 $x=a$ 所代表的意義混淆，並誤以為 $\lim_{x\to a} f(x)$ 總是等於 $f(a)$。

F-12乙-3 微分：導數與導函數的極限定義，切線與導數，多項式函數之導函數，微分基本公式及係數積和加減性質。	f-V-6 n-V-7 a-V-2

先備：除法原理（A-10-2）、直線方程式（G-10-2）。

連結：函數的極限（F-12乙-2）、導函數（F-12乙-4）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱的選修數學乙，預備給所謂「社會組」和「文組」的學生選修，沒有微積分內容。本課綱的選修數學乙，則設計為支持大學商管、財金、社會科學等學群的學習，包含基本的多項式微積分內容。

2. 與選修甲的差異

   本條目不涉及非多項式函數之導函數微分，不納入「簡單代數函數」的微分。

3. 學習目標

   (1) 能理解變化率與導數之間的關係，以及割線與切線的關係。

   (2) 能透過極限理解導數在函數圖形上的意義，並推導出導數的定義。

   (3) 能理解導數與導函數之間的關係。

   (4) 能理解導數與函數圖形切線斜率的關係。

   (5) 能透過定義推導出多項式函數及簡單代數函數之導函數。

   (6) 能透過極限的四則運算推導出微分基本公式及係數積和加減性質。

4. 教學斟酌

(1) 將導數視為切線斜率的同時，修正學生過去認為切線為「與函數圖形恰有一個交點之直線」的觀念。

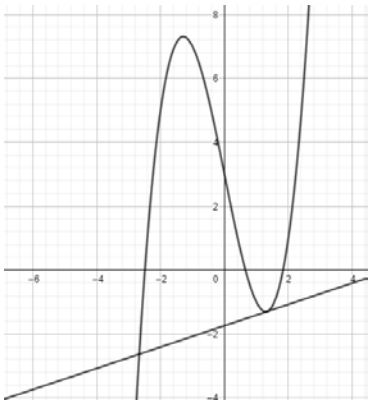
(2) 連結 10 年級的多項式對 $(x-a)$ 進行綜合除法的過程，介紹 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值，以作為後續引入 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數概念。

條目範圍

此條目所使用的函數僅限多項式函數。

錯誤類型

學生會誤以為切線與曲線只有一個交點，如學生會誤認為下圖的直線不是切線。



F-12乙-4 導函數：二階導數，萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定，基本的最佳化問題，導數的邊際意涵。	f-V-7 f-V-2

連結：函數極限（F-12乙-2）、微分（F-12乙-3）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱的選修數學乙無此內容。

2. 與選修甲的差異

本條目的高階導數僅做二階即可，不必發展乘法律、除法律、連鎖律，無「一次估計」。在應用方面，加強商管金融領域的範例，並強調導數的邊際意涵。

3. 學習目標

(1) 能認識萊布尼茲符號，並與導函數定義對應。

(2) 能推廣導函數的定義到二階導數，並正確計算出結果。

(3) 能由函數的一階導數及二階導數判斷函數的單調性及凹凸性，並能對函數圖形的外觀能有更清楚的描述。

(4) 能運用函數的單調性及凹凸性解決最佳化問題。

(5) 能認識導數的邊際意涵。

4. 教學斟酌

(1) 三次多項式函數圖形的完整分類可做為本條目的整合應用問題，老師可以透過一、二階導數的計算對三次多項式函數做完整的分析，順便檢核學生對於導數意義與功能的了解。

(2) 最佳化問題的設計，盡量連結社會科學、經濟學或財務金融相關題材，以協助學生連結未來大學學習內容。

錯誤類型

學生會混淆：$\lim_{x\to a} f(x)$ 及 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的意義及使用時機。

釋例

邊際分析（marginal analysis）是探討經濟量的變化率，如國內生產總值（GDP：gross domestic product）在一給定時間的成長速率或衰退速率，或在某一生產水準（產量：level of production）的總成本變化率等。以例說明經濟學間使用「邊際」的意義。

一、成本函數（cost function）

例 1、某公司製造 x 台冰箱的總成本函數 $C(x)=8000+200x-0.2x^2, 0\le x\le 400$。

(1) 試問製造第 251 台冰箱的真實成本（actual cost，實際成本）為何？

解：製造第 251 台冰箱的實際成本為前 251 台冰箱總成本與前 250 台冰箱總成本的差，即 $C(251)-C(250)=99.8$。

(2) 試求在 $x=250$ 時，總成本函數對 x 的變化率？

解：由導函數的變化率意義，總成本對 x 的變化率為 $C'(x)=200-0.4x$，所以當產量為 250 台時，總成本的變化率為 $C'(250)=200-0.4\times 250=100$。

(3) 試比較 (1)、(2) 的結果

解：生產第 251 台冰箱的真正成本與 250 台總成本變化率的值相當接近，即

$$C(251)-C(250)\approx C'(250)。$$

為何有此現象呢？因為 $C(251)-C(250)=\frac{C(251)-C(250)}{1}$，表示在區間 $[250,251]$ 內的平均變化率，而 $C'(250)$ 表示總成本在 $x=250$ 的瞬間變化率，故由導函數定義的變化率意義（或斜率定義）：

$$C(251)-C(250)=\frac{C(251)-C(250)}{1}\approx\frac{C(250+h)-C(250)}{h}\quad（當 h 夠小時）$$

$$\approx\lim_{h\to 0}\frac{C(250+h)-C(250)}{h}=C'(250)。$$

在某一產量時，再多生產一件產品的真正(實際)成本稱作邊際成本，可被在此一產量時的

總成本變化率近似，故經濟學家定義總成本函數的導函數C'為邊際成本函數，即在產量為x時，邊際成本$=C(x+1)-C(x)\approx C'(x)$＝邊際成本函數在$x$的值，也就是說，形容詞「邊際」同義於...的導函數。

【以上說明參考自:中大數學系,于振華教授,100 學年度,經濟系微積分聯合授課教材。】

F-12乙-5 積分：一次與二次函數的反導函數與定積分。定積分的面積與總變化量的意涵，微積分基本定理。 **備註：**不涉及分部積分與變數變換。在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形。	f-V-8 f-V-2

先備：一次與二次函數（F-10-1）。

連結：微分（F-12乙-3），導函數（F-12乙-4），積分的應用（F-12乙-6）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱的選修數學乙，預備給「社會組」和「文組」的學生選修，沒有微積分內容。本課綱的選修數學乙，則設計為支持大學商管、財金、社會科學等學群的學習，包含基本的多項式微積分內容。

2. 與選修甲的差異

   不使用黎曼和來定義定積分公式，而是介紹微積分基本定理，再引出反導函數的概念。被積分函數僅限制在一次與二次函數，但是在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形（例如折線函數）。

3. 相關約定

   (1) 若$F'(x)=f(x)$，則稱$F(x)$為$f(x)$之反導函數。

   (2) 令$f(x)$是一個連續函數，$F(x)$是它的一個反導函數，則$f(x)$在$x=a$到$x=b$的定積分值記作$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

4. 學習目標

   (1) 能了解並運算反導函數與定積分。

   (2) 能理解定積分在面積及總變化量的意涵並計算其值。

   (3) 認識多項式的微積分基本定理，並計算定積分。

   (4) 熟練定積分的運算性質。

5. 教學斟酌

   (1) 定積分以多項式一次與二次函數為主要操作對象，但在面積之意義明顯時，可擴及其他函數或給定的圖形。可包含連續的兩段或三段折線函數、絕對值與一次或二次函數

的合成、高斯函數。

(2) 應以實例讓學生理解。函數 $f(x)$ 的圖形在 x 軸上方時，其定積分值為正，在 x 軸下方時，其定積分值為負，因此應讓學生理解：當計算面積時，需注意區間內函數值是否有正負的變化；若有，則先求出 $f(x)=0$ 的解，然後分段積分。

(3) 總量等於變化率的積分。以物理上的速度函數，經濟學上邊際成本函數、邊際利潤函數...等等，來說明總量就是變化率的積分。前者，若欲求出某段時間內的位移總量，就是要求出速度函數在這段時間內速度函數的定積分；後者，若欲求出某個價格內的的成本總量、利潤總量，就是要求出這個價格區間內邊際函數的積分。雖然數乙這裡沒有介紹黎曼和，但仍可以利用圖形，不須列式的方式解說，讓學生理解曲線下面積為積分值的意義。

條目範圍

不涉及分部積分與變數變換。

釋例

1. 利用面積的觀念，計算下列各定積分值：
   (1) $\int_{-1}^{3}|x-2|dx$，　(2) $\int_{1}^{3}[x]\,dx$，　(3) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$。
2. 由 $y=x^2$ 與 $y=\sqrt{x}$ 在第一象限對稱於直線 $x=y$，可得 $\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\sqrt{x}dx=1$。
3. 若 $a>0$，奇函數的圖形對稱於原點，所以 $\int_{-a}^{a}x^3dx=0$；而偶函數圖形對稱於 y 軸，所以 $\int_{-a}^{a}x^2dx=2\int_0^a x^2dx$。

錯誤類型

1. 未正確使用定積分符號，例如：$\int_a^b f(x)$ 是錯誤的寫法。
2. 學生誤以為定積分的值即為曲線與 x 軸所圍成的面積。
3. 學生無法分辨 $\int_{-1}^{1}|x^3|dx$ 與 $\left|\int_{-1}^{1}x^3dx\right|$ 的不同。
4. 學生不知道 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

F-12乙-6 積分的應用：連續函數值的平均，總量與剩餘意涵。	f-V-9

先備：一次與二次函數（F-10-1）。

連結：積分（F-12乙-5）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱的選修數學乙無此內容。

2. 與選修甲的差異

沒有空間形體的積分（求體積），但增加積分在經濟學上的應用。

3. 相關約定

若函數 $f(x)$ 為連續函數，則稱 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ 為在 $[a,b]$ 內的平均。

4. 學習目標

(1) 理解將連續函數的定積分值除以區間長度，即為此區間內函數值的平均。

(2) 能利用定積分表達並計算經濟學上邊際函數 $y=f(x)$ 的總量。

(3) 理解消費者剩餘為需求曲線、價格線及 y 軸所圍成之面積。同理，生產者剩餘為供給曲線、價格線及 y 軸所圍成之面積。

5. 教學斟酌

(1) 過去沒有談論過連續量的平均值，建議由離散的平均值來引導，當欲求的數值為連續型的情形，可以視為「離散的數值平均為長條圖的平均長度」，類推到「連續函數在區間內的平均高度」，即區域內面積（定積分值）除以區間寬度。

(2) 經濟學中的供給與需求函數皆為隨產品數量變動的價格函數，其交點為平衡點（即均衡價），此時消費者剩餘與生產者剩餘對應到函數圖形中某區塊的積分值，請參考釋例 1。

條目範圍

不涉及其他積分法。

釋例

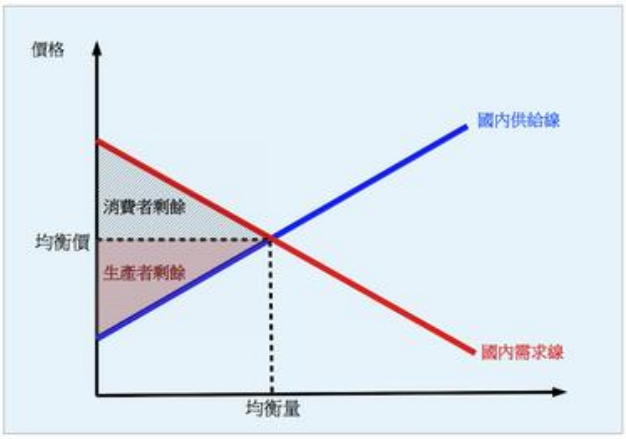
需求函數是顯示在特定時間內，某物品的價格 P 與需求量 Q 關係的函數，函數圖形上每一個點代表當其他條件相同時，在每一價格水平上，買主願意購買的商品量。

供給函數是顯示在特定時間內，某物品的價格 P 與供給量 Q 關係的函數。

需求函數與供給函數圖形的交點 (x,y)，x 表示市場均衡時的需求量，y 為均衡時的交易價。

消費者剩餘指的是消費者最高願付價款與實際支付價款的差額。

生產者剩餘指的是生產者實際收到的報酬與所要求的最低報酬之差額。



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb

例題：假設某產品的需求函數為 $D(x)=400-3x^2$，供給函數為 $S(x)=5x^2$，在市場均衡狀況下，

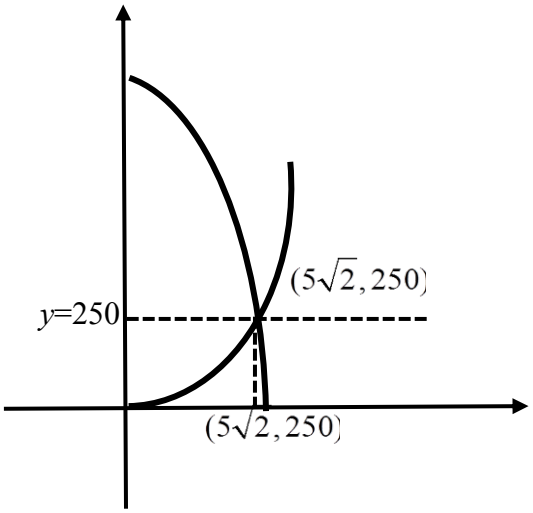
求消費者剩餘與生產者剩餘。

解答：市場達均衡時的價格為兩函數交點的 y 值。

解方程組 $\begin{cases} y=400-3x^2 \\ y=5x^2 \end{cases}$ 得 $x=5\sqrt{2}$，$y=250$。

因此消費者剩餘值為 $\int_0^{5\sqrt{2}}[(400-3x^2)-250]dx=500\sqrt{2}$，

生產者剩餘為 $\int_0^{5\sqrt{2}}(250-5x^2)dx=\frac{2500\sqrt{2}}{3}$。



D-12乙-1 離散型隨機變數：期望值、變異數與標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。	d-V-4

先備：數據分析（D-10-2）、複合事件的古典機率（D-10-4）。

連結：二項分布（D-12乙-2）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱主要是介紹二項分布與常態分布，而後者涉及連續型隨機變數。本課綱刪除常態分布與信賴區間等內容，故沒有連續型隨機變數，聚焦於離散型隨機變數。

2. 與選修甲的差異

   選修數學乙沒有幾何分布。

3. 相關約定

   (1) 一試驗只有**兩種**可能的結果者稱為**伯努利試驗**。

(2) 在相同條件下重複執行一個試驗，稱為**重複試驗**。

(3) 隨機變數 X 的機率質量函數 $p(x)=P(X=x)$，表示 $X=x$ 時發生的機率。

(4) 隨機變數 X 的期望值 $\mu=E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$。

(5) 隨機變數 X 的變異數 $\sigma^2=\mathrm{Var}(X)=(x_1-\mu)^2p(x_1)+(x_2-\mu)^2p(x_2)+\cdots(x_n-\mu)^2p(x_n)$，而變異數的正平方根 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sigma$，稱為隨機變數 X 的標準差。

4. 學習目標

(1) 由隨機現象理解隨機的意義，並進而定義離散型隨機變數。

(2) 理解隨機變數的獨立性概念。

(3) 由隨機變數的觀點，定義期望值，讓學生了解 10 年所提的期望值，與這裡透過隨機變數的定義相同。

(4) 定義隨機變數的標準差與變異數，並與數據的標準差、變異數做比較，了解兩者皆為平均差量的意涵。

5. 教學斟酌

(1) 可透過例子讓學生體會期望值雖為隨機變數期望出現的值，但卻可能永遠也不會有此值出現。

(2) 透過不同標準差的例子，讓學生感受標準差的意涵，並可適度的引入計算機或軟體輔助計算。

條目範圍

不涉及連續型的隨機變數概念。

錯誤類型

學生對於符號 $E(X^2)$ 與 $(E(X))^2$ 兩者的意義不易分辨清楚，因此在操作變異數時，建議盡量少使用 $E(X^2)-(E(X))^2$ 符號，以免造成學生學習上的困難。

釋例

1. 有 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 共 k 個相異數值，且 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 出現的次數分別為 $f_1,f_2,\cdots f_k$，而 $f_1+f_2+\cdots+f_k=N$，則 $\frac{f_i}{N}$ 可視為得到數值 x_i 的機率，令 $p_i=\frac{f_i}{N}$，則組數據的

變異數 $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot f_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i$，

標準差 $\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i}$，可以此數據的變異數定義類比隨機變數的變異數。

2. 學生能分辨出抽球試驗中，取出後放回下，第一次取出紅球與第二次取出紅球的試驗為獨立試驗；如果取出後不放回，則第一次取出紅球與第二次取出紅球的試驗彼此不獨立。

評量

標準差與變異數的計算量頗大，評量的重點應放在瞭解這兩個變量的意義上，切勿流於複雜的計算，若需透過實例計算數值，應適當的融入計算機操作。

D-12乙-2 二項分布：二項分布的性質與參數。 **備註**：應用於事件發生機率的合理性檢定。	d-V-4 d-V-5 a-V-1

先備：主觀機率與客觀機率（D-11A,B-1）、條件機率（D-11A,B-2）。

連結：離散型隨機變數（D-12乙-1）。

基本說明

1. 與 99 課綱的差異

   99 課綱沒有機率合理性的檢定，本條目則應至少有一個例子說明如何使用二項分布做機率合理性的檢定。

2. 與選修甲的差異

   本條目不含幾何分布。

3. 相關約定

   以 $X \sim B(n, p)$ 代表隨機變數 X 是二項分布，即為獨立重複 n 次的伯努力試驗，且每次成功的機率為 p 的機率分布。

4. 學習目標

   (1) 能理解伯努力試驗、重複試驗、獨立的重複試驗，並進而定義二項分布。

   (2) 認識二項分布的定義。

   (3) 能在直觀上理解二項分布的期望值，再搭配數學證明。

   (4) 能運用二項分布來做假設檢定。

5. 教學斟酌

   (1) 請學生主動分享二項分布在生活上的例子。

   (2) 認識二項分布後，透過實例說明如何運用這些概念進行假設檢定的檢測，無須做超出此概念的檢定判斷。

   (3) 須理解標準差的意涵與用途，但不一定要證明標準差公式，可以提供為參考資料。

條目範圍

在這裡的假設檢定，並不需要做到統計課程中的第一型、第二型錯誤，請參考下面的釋例，讓學生能直觀性的瞭解即可。

錯誤類型

(1) 例：投一公正的骰子 10 次，問投中點數 6 的機率分布；

這個問題學生會誤以為骰子有 6 種狀況，不是二項分布。

(2) 例：投一公正的骰子 10 次，問投中點數 6 的幾次時機率最大？

這個問題學生會誤以為 5 次，以為剛好各半時最大，忽略點數 6 出現的機率很小。

釋例

假設檢定的例子可以如下面的釋例呈現：

我們有一個銅板，令 p 表示銅板正面的機率，假設 p 只可能是 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$。我們想要藉由丟擲銅板 6 次並且採用以下的判斷準則來判定 p 之值：若正面次數不多於 2 次，則判定 $p=\frac{1}{3}$；反之，若正面次數多於 2 次，則判定 $p=\frac{1}{2}$。

(1) 若 $p=\frac{1}{3}$，則可以做出正確判定的機率為何？

(2) 若 $p=\frac{1}{2}$，則可以做出正確判定的機率為何？

伍 素養導向教材編寫原則

伍、素養導向教材編寫原則

一、素養導向教材編寫原則說明

素養導向教材撰寫的核心想法在於「來龍去脈」的建構。教材應營造生活、歷史或是數學的情境，讓學習者認知到特定數學知識發生的脈絡或與日常生活之間的關聯。學習任務安排應有一條明確的主軸，引領學生建立基礎的數學概念與發展相關的技能，進行探索，問題解決、找出模式並與他人溝通，幫助學生知道所學的內容在現實生活中、往後的數學學習或是專業科目的用處為何。素養導向教材須提供學習者對於數學有感的學習機會，讓學生認知到除了實用性之外，數學也有其人文、歷史或美學的層面。

以下分別說明教材的編寫原則。

（一）透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求

教材設計可透過生活情境或是數學史來引入教學題材，讓學生認識數學在生活中的用處、特定的數學知識是如何發展起來、或是鋪排要用到某個特定的數學知識的情境，以激發學生的學習動機。教師可設想一條數學知識創造的路徑，它不一定與數學知識發展的歷史進路相符；不過，這一條路徑要帶領學生在有限的時間內，在課堂中自然地進到脈絡中學習數學、發現或創造某個知識。在學習的過程中，學生可接觸到數學的人文與歷史層面，感受到特定的數學知識為何被創造出來以解決問題或是滿足人類探索的好奇心，來引動學生的學習興趣，培養對於數學的正向態度。

（二）以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念

數學素養的培養著重學習者能把情境問題轉換成數學問題求解，再把數學解答帶回原先的情境進行詮釋與決策。學習任務的安排應彰顯數學做為擬經驗科學的本質，讓學生在真實或數學的情境中，在教師的引導下，進行操作、探索、分析、比較，從中歸結出相關的原理原則。情境脈絡在素養教材中具備兩種功能：首先是讓學生應用學到的知識或技能；另外一個為運用情境脈絡的安排與鋪陳來發展學生相關的數學概念，讓學生有機會去學習重要數學內容與發展數學思維。

（三）讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通

素養教材除了引導學生探索概念、建構知識與發展相關技能之外，也設計讓學生須應用所學到之知識或技能來解決的問題。這些問題不一定是日常生活中的問題，也可以是數學本身的問題。學生在解決問題之後，教師應提供機會讓學生針對答案提出個人詮釋並和他人溝

通想法；經由和老師與同儕之間的互動，討論、質疑與辯證中建構數學知識。教師可藉由鼓勵不同觀點的提出，提供參與學習的機會，幫助學生經由課室的討論來澄清與反思自己的想法。

（四）教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會

素養教學活動設計讓學生在任務中進行操作、探索，再逐步進到抽象概念的學習；提供學生機會去感受數學是人類的活動，而不只是一堆冷冰冰的公式、符號或是反覆的解題練習。當學生在情境脈絡中進行數學活動，像是識別規律、建立模式與進行論證，和同儕共同合作解決問題或是挑戰彼此的想法等等，他們就有機會經驗到類似數學家在數學社群中的活動，感受到數學的人文成分，這樣的數學學習是活的、有感覺的。

（五）教材設計具備多重表徵

素養教材應運用表格、圖形、文字與數字等多種表徵，在中學階段可引進計算機工具與動態幾何環境等資訊工具，打造豐富的學習環境，讓學生進行表徵間的轉換，並鼓勵學生運用多種表徵表達他們的想法並和同儕、教師進行數學對話。多重表徵對於學生的數學概念與關係的理解以及現實生活的應用相當重要，它可以幫助學生有效組織其想法與和教師、同儕進行溝通。以多重表徵進行教學有助於學生認知思考層次的提昇與靈活思考，發展邏輯的解題策略，促進有意義的學習連結不同的表徵並應用於解題中。

（六）學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習

當教師應用素養教材進行教學時，必須整合教學與評量，評量是教學重要的一環，而不是只有教學結束後為之，才能對所有學生提供高品質的教學與促進深入理解。因此，學習任務須具備形成性評量的功能，要求學生說明想法或是解法以及提出論述。當學生在進行學習任務時，教師可以從學生的作答瞭解其學習狀況，發生了哪些困難或是迷思概念，以及確認學生的學習現況與學習目標之間的落差，並以此為基礎規劃後續的教學以促進數學的學習。

二、學習表現與學習內容雙向細目表參考示例

以下分階段以表格呈現如何結合學習表現與學習內容來開發素養導向教材。

（一）國民小學教育階段

以核心素養「數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。 n-III-11 認識量的常用單位及其換算，並處理相關的應用問題。
S-5-2 **三角形與四邊形的面積**：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 N-5-12 **面積**：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。	第三學習階段：五年級○學期（看課程安排）。 單元名稱：三角形與四邊形面積公式的應用。 學習目標： 1. 能夠切割拼合平面圖形，知道面積在此操作下的影響。 2. 以切割拼合方式，學習如何計算三角形和四邊形的面積。 3. 將面積計算和「公畝」、「公頃」、「平方公里」的學習結合，可以計算大區域之面積。 4. 引入大面積有關之應用問題，讓學生討論與應用。
設計說明： 學習日常生活中和面積相關的問題，在設計上的基本理念，可先透過面積公式的揭露，利用圖形的切割組合，讓學生理解各種面積計算的由來，並歸結為面積公式，來解決生活中有關面積的問題。（完整的單元教案請閱柒、教學單元案例，此教案假設為 N-5-12 教學完成後之應用，並作為 S-5-2 教學之前置活動。）	

（二）國民中學教育階段

以核心素養「數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	s-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。
S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變	第一學習階段：九年級（實施 3 節課）。 單元名稱：相似直角三角形邊長比值的不變性。 學習目標： 1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。 2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關

量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30°,60°,90° 其邊長比記錄為「$1:\sqrt{3}:2$」；三內角為 45°,45°,90° 其邊長比記錄為「$1:1:\sqrt{2}$」。	係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。 3. 認識計算機按鍵上 tan 的符號。 4. 計算特殊角的相似直角三角形邊長比值不變性。 5. 透過計算機的相似直角三角形邊長比值不變性(tan)的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。
設計說明： 自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將相似直角三角形邊長比值不變性，放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並以此介紹計算機中 sin、cos 和 tan 的按鍵功能，應用在非特別角的邊長比例問題。至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。)	

（三）普通型高級中等學校教育階段

以核心素養「數 S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。」以及「數-S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 **學習內容**	n-V-1 理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義，理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。
N-10-1 **實數：**數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十	第四學習階段：10 年級第一學期 (實施 4 節課)。 單元名稱：科學記號與 10 的冪次。 學習目標：

進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算（$\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★），科學記號數字的運算。 N-10-4 **常用對數：**log 的意義，常用對數與科學記號連結，使用計算機的 10^x 鍵和 log 鍵。	1. 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。 2. 能操作科學記號的加減乘除運算。 3. 能使用計算機做四則運算、計算 10^x 的值、計算 $\log x$ 的值，並明白其值僅為估計。 4. 能用計算機的 x^y 功能，探索形如 $(1.01)^x = 2$ 之方程式的近似解。 5. 能轉換科學記號數字與 10 的冪次，藉以理解 log 數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的冪次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值）。 6. 理解 $\log a$ 的意義就是 $10^{\log a} = a$，其中 a 為正數。反之，任意正數 a 都可以改寫成 $10^{\log a}$。能用 log 符號紀錄或表達數值。

設計說明：

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以 107 課綱將其移至高一（10 年級），並建議它出現在上學期的第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『先（高一）建立以**符號**表達數量的基本觀念，第二次教學（高二介紹指對數函數）再進入形式運思，也就是**抽象概念與代數性質**』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數量感，是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，達到符合數學素養教材的目標。（完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。）

陸 數學領域之議題融入說明

陸、數學領域之議題融入說明

面對變化快速的時代，學校教育需與社會脈動緊密連結，在課程發展中融入相關議題。議題融入的目標在培養學生批判思考及解決問題的能力，提升面對議題的責任感與行動力，實踐 「尊重多元、同理關懷、公平正義、永續發展」等核心價值，成為健全個人、良好國民與世界公民。

一、融入議題之選擇

本領域融入議題的選擇為呼應總綱及領綱的核心素養，並連結、延伸、統整及轉化本領域的學習重點，包含十九項議題。《數學領綱》「附錄二」中明列了「性別平等教育、人權教育、環境教育、海洋教育」四項議題之學習主題與實質內涵，其不但是國家當前重要政策，且為延續九年一貫課程之重大議題，以及培養現代國民與世界公民之關鍵內涵。十五項相關議題有「品德教育、科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、多元文化教育、閱讀素養教育、戶外教育、國際教育」等。其中「品德教育、多元文化教育、國際教育」已納入《總綱》核心素養，且轉化為領綱核心素養。「科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、閱讀素養教育、戶外教育」等議題之內涵，亦能呼應本領域之學習重點，深化與拓展本領域的學習。

二、議題融入之做法

議題多來自於生活事件或社會現象，故在設計議題融入課程，應思考本領域之「學習重點」與議題「學習主題和實質內涵」兩者呼應關係，並透過連結、延伸、統整與轉化等方式，發展學習目標，設計適切的課程內容，彰顯總綱及領綱之核心素養。

議題融入之作法，宜結合學生的舊經驗、生活情境或時事，善用多元的教學方法，透過體驗、省思、實踐的歷程，增進學生學習品質及培養探究、思辨與實踐的能力。再者，素養導向的課程歷程隱含著議題的潛在學習，學生透過任務或問題的覺察、規劃和執行，或與他人共同合作，其間所產生各種互動情境，如：爭執或協商等，皆可成為教師適時引導達成人權教育、性別平等教育、法治教育等實質內涵的具體做法。此外，議題亦具有跨學科性質，可藉由跨領域統整課程突顯議題教育的特色，拓展學生學習視角，期使對生活現象獲致較豐富多元與完整的認識，裨益核心素養的陶養。有關議題融入的具體作法可參考「議題融入說明手冊」。

三、議題融入之示例說明

四項議題融入本領域學習重點示例的說明，係以《數學領綱》「附錄二」為發展依據，茲

舉例如下。

（一）性別平等教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
性別權益與公共參與	性 E9 檢視校園中空間與資源分配的性別落差，並提出改善建議。	d-III-1 報讀圓形圖；製作長條圖、折線圖與圓形圖，並據以做簡單推論。 d-III-2 能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。	透過長條圖、折線圖與圓形圖等製作，運用校園空間與資源分配等數據資料，如：廁所間數，以檢視與了解可能存在的性別資源落差，並提出改善的方法。
	性 J10 探究社會中資源運用與分配的性別不平等，並提出解決策略。	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。 D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	1.在學習統計概念時，如：百分比、統計圖表等，可透過校園空間、資源分配運用等資料，進行統計圖表分析中，以理解資源運用與分配在性別上的差異。 2.可利用性別統計資料來設計學習任務或布題，讓學生在學習數學能力過程中，藉此認識與提昇性別平等意識。

（二）人權教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
人權與責任	人 J2 關懷國內人權議題，提出一個符合正義的社會藍圖，	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，	能運用統計圖表，針對國內外相關人權議題的數據資料進行簡單統計量分析與解讀，並透過數字理解真實

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
	並進行社會改進與行動。	與人溝通。	社會存在的偏見、貧窮、不公平、不正義等現象，擬定社會改進與行動策略，培養道德思辨的素養與公平正義的價值。

（三）環境教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
災害防救	環 U9 分析實際監測數據，探究天然災害頻率的趨勢與預估。 環 U11 運用繪圖科技與災害資料調查，繪製防災地圖。	d-V-4 認識隨機變數，理解其分布概念，理解其參數的意義與算法，並能用以推論和解決問題。	在數學學習任務中，藉由觀察、蒐集、記錄、分析等方式，探討或推測天然災害頻率的趨勢和發展，並運用分佈概念，進行災害資料調查與防災地圖繪製。

（四）海洋教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
海洋科學與技術	海 U12 了解海水結構、海底地形及洋流對海洋環境的影響。	d-V-3 理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。	以海水結構、海底地形或洋流做為學習任務的情境設計，結合不確性的概念及量化分析，處理相關問題並提出合理的見解。

柒 教學單元案例

柒、教學單元案例

數學素養導向教學依據數學領綱前導研究的建議，應兼具「知」、「行」、「識」三個面向。「知」就是「學什麼」或者「是什麼」，指的是數學內容。「行」就是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學生所能展現出來的數學能力，包括問題解題、程序執行、溝通、論證等等現今數學教育著重之能力面向。「識」就是「為什麼」、「你認為」、「是什麼」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，包括概念理解、連結、後設認知、以及欣賞數學的美等。再者，數學教育工作者可參考第伍章所列出之六項編寫原則進行素養導向教材設計與發展。以下分別呈現國小、國中、普高教育階段教學單元案例，具體展現新課綱素養導向的精神以及議題融入數學教學的做法。

一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用

（一）教學設計理念說明

1. 背景

本單元主要透過將長方形、三角形的重新切割及組合，讓學生理解面積的意義，並且能透過理解面積公式進而應用公式來解決生活中有關面積的問題。

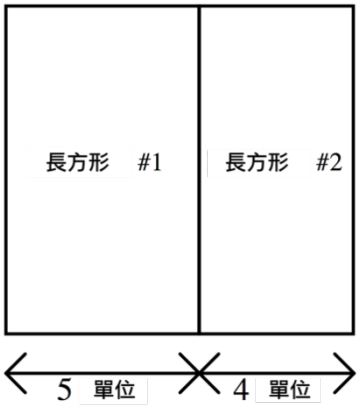
2. 設計理念

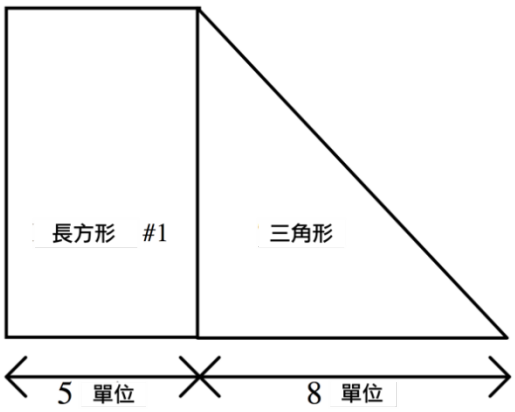
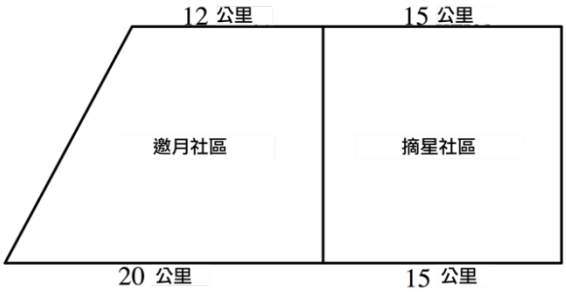
在數學的領域中，點、線、面的觀念常常被提到，生活中也常常會遇到面積的問題，例如比較物品表面大小等問題，透過面積公式雖然可以輕鬆解決問題，但在數學領域講究的是理解，因此在設計上的基本理念，主要先透過面積公式的揭露，然後利用各種圖形的圖片切割組合，來讓學生理解各種面積公式的由來，而且能夠將面積公式作應用，來解決生活中有關面積的問題。

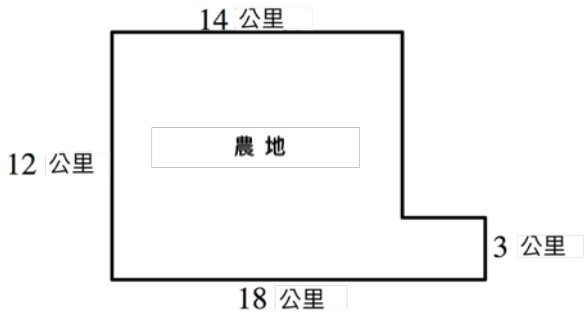
（二）教學單元案例

<table>
<tr><td>領域/科目</td><td colspan="2">數學。</td><td>設計者</td><td>林淑君。</td></tr>
<tr><td>實施年級</td><td colspan="2">五年級。</td><td>總節數</td><td>共 3 節，120 分鐘。</td></tr>
<tr><td>單元名稱</td><td colspan="4">三角形與四邊形面積公式的應用。</td></tr>
<tr><td colspan="5">設計依據</td></tr>
<tr><td rowspan="2">學習重點</td><td>學習表現</td><td>s-III-1理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。
n-II-9理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。
n-III-5理解整數相除的分數表示的意義。
n-III-9理解比例關係的意義，並能據以觀察、表述、計算與解題，如比率、比例尺、速度、基準量等。</td><td rowspan="2">核心素養</td><td rowspan="2">數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。
數-A3 具備轉化現實問題為數學問題的能力，並探索、擬定與執行解決問題計畫，以及從多元、彈性與創新的角度解決數學問題，並能將問題解答轉化運用於現實生活。
數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>S-5-2三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。
N-5-9整數、小數除以整數(商為小數)：整數除以整數(商為小數)、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為2、4、5、8之真分數所對應的小數。
N-5-12面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。</td></tr>
</table>

		N-5-10 解題：比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。		
議題融入	**學習主題**	人權違反與救濟。 永續發展。		
	實質內涵	人權教育：人 E7 認識生活中不公平、不合理、違反規則和健康受到傷害等經驗，並知道如何尋求救助的管道。 環境教育：環 E5 覺知人類的生活型態對其他生物與生態系的衝擊。		
與其他領域/科目的連結		自然、社會、健康教育。		
教材來源		自編教材。		

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
活動一： 教師布題： 1.下面兩個長方形中，哪一個面積比較大？你怎麼知道的？  	問題 1 10 分鐘	•分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。 •學生分組討論並發表。 •學生雖熟悉長方形面積的計算方式，但本題並沒有假設另一邊長。學生可以靠視覺的直覺，也可以察覺長方形#2 可以擺在長方形#1 內。
教師布題： 2.下面的長方形和三角形，哪一個面積比較大？你怎麼知道的？	問題 2 10 分鐘	•引導學生觀察此三角形面積其實和上題的長方形#2 面積一樣。 •由此初步討論直角三角形面積的計算方式。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
 教師布題： 3.邀月社區和摘星社區的住戶，互相在爭論一件事情，他們都覺得自己的社區比對方的社區大。誰是對的？寫一個解決這個爭論的解釋。  ※除了邀月社區的西邊界，所有邊界都是南北向或東西向。	問題 3 20 分鐘	•教師引導學生認識梯形的面積要如何恰當的和右邊長方形比較。 •由此初步討論梯形面積的計算方式。 後續數學課程建議： •利用這些切割拼合的經驗，後續教案可以討論一般三角形或梯形、平行四邊形等四邊形的面積計算方式，並以公式記錄其計算方式。才能完成 S-5-2。 •N-5-12 並未完成。但也可作為 N-5-12 教學的應用單元。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
活動二： 教師布題： 1.下圖是黎明社區的農地。構成邊界的線段都是互相垂直的線段。  	問題 1 20 分鐘	•分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。
今年春天，社區的農民打算引進空中噴灑農藥的技術，他們的計畫如下： •空中噴灑估計的費用是是每公頃 2200 元。 •1 平方公里是 100 公頃。 •他們引用一項研究，指出每消費 1 元殺蟲劑，農民將通過增加農業生產獲得 4 元。 根據上面的條件，回答下面的問題： (1)黎明社區的面積是多少平方公里？多少公頃？ (2)噴灑整個社區的成本是多少？ (3)農民可以從中獲利多少元？		•學生分組討論並發表。 •本題首先要討論面積如何計算，因為策略多元，適合討論發表。 •另一重點是 1 平方公里等於 100 公頃。教師要明白告知此單位換算。
教師布題： 2.世界衛生組織（WHO）於 2006 年報告指出，全球每年約有 300 萬人農藥中毒，死亡人數超過 25 萬人，請問 2006 年農藥中毒人口的死亡率大約是多少？	問題 2 10 分鐘	•引導學生運用整數相除求出死亡率。
教師布題：	問題 3	•引導學生運用整數相除

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
3.根據 2009 年全民健保資料指出，臺灣仍有 392 人因非蓄意性農藥中毒而住院。小明根據這項資料，他覺得：「這相當於每一天都有人受到農藥傷害。」這樣的聲明，你認為正確嗎？	10 分鐘	求證是否平均一天有一人受到農藥傷害。
活動三： 將學生分成兩組，分別代表農民及環保團體，從兩種不同的觀點搜集「噴灑農藥來提高農作物產量」以及「噴灑農藥度環境、人的健康造成的影響」的相關資料，然後讓學生進行辯論。	40 分鐘	•引導學生搜集相關資料（可與社會、自然、健康教育相關課程結合）。 •利用辯論活動，鼓勵學生運用數學協助計算立論之證據，讓學生發表所支持觀點的理由。

教學參考資料

1. 建議教師在引導學生搜集辯論主題的相關資料時，能提供學生一些搜集資料的框架，讓孩子能更完整全面的了解農藥的使用與環境、人體健康的密切相關性。例如：農藥的使用可以提升農作物產量與農民收益，解決糧食問題。但相對的，農藥的使用對社區健康所可能造成的成本，還有環境汙染可能造成的成本。
2. 就人權的教育而言，教師也應引導學生反思公共決策的公平性問題，即公共決策不能犧牲人性尊嚴，若造成人體健康或環境不可逆轉的侵害，即應被拒絕或禁止。
3. 雖然五年級的學生仍無法使用較複雜的數學評估增加農藥使用的人體健康與環境汙染的成本數值，但教師仍可以引導學生思考：「若農藥的使用會使人造成無法恢復的侵害，這樣可以嗎？」可藉此帶進人權的絕對保障觀念。甚者，也可詢問：「你們知道若遇到汙染的狀況，可以如何尋求救助嗎？」藉此讓學生認識汙染的通報機制，帶出學生行動面的學習。

二、國中組—相似直角三角形邊長比值的不變性

（一）教學設計理念說明

1. 背景

在我國早期的課程標準中，原先在 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準均有放入銳角三角函數的內容，以 83 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，2000)為例，將銳角三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易應用」，在基礎篇中，課本營造問題情境，並界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，而後教授兩個特殊直角三角形 (30° - 60° - 90° 與 45° - 45° - 90°) 的邊長比，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，至於餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，並明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單應用。

2. 設計理念

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將相似直角三角形邊長比值不變性，放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並以此介紹計算機中 sin、cos 和 tan 的按鍵功能，應用在非特別角的邊長比例問題。至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。

（二）教學單元案例

<table>
<tr><td>領域/科目</td><td colspan="2">數學。</td><td>設計者</td><td>原作者：鄧家駿教師、曾明德教師
改寫者：莊國彰校長、賴政泓教師。</td></tr>
<tr><td>實施年級</td><td colspan="2">九年級。</td><td>總節數</td><td>共 3 節，135 分鐘。</td></tr>
<tr><td>單元名稱</td><td colspan="4">相似直角三角形邊長比值的不變性。</td></tr>
<tr><td colspan="5">設計依據</td></tr>
<tr><td rowspan="2">學習重點</td><td>學習表現</td><td>s-IV-12理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。</td><td rowspan="2">核心素養</td><td rowspan="2">數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。
數-J-A2 具備有理數、根式之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。
數-S-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。瞭解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。
數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。
數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面的基本關係和性質。
數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>S-9-4相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為30°,60°,90° 其邊長比記錄為「$1:\sqrt{3}:2$」；三內角為45°,45°,90° 其邊長比記錄為「$1:1:\sqrt{2}$」。</td></tr>
</table>

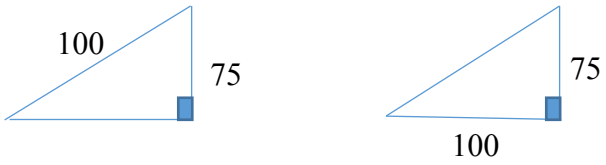
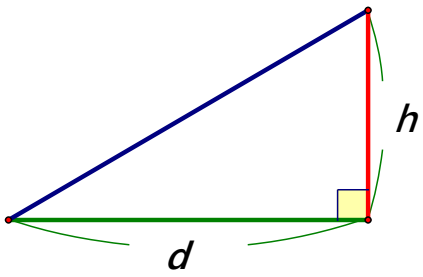
				性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。
議題融入	**學習主題**	安全教育：校園安全。 人權教育：人權與生活實踐。		
	實質內涵	人 J6 正視社會中的各種歧視，並採取行動來關懷與保護弱勢。 安 J6 了解運動設施安全的維護。		
與其他領域/科目的連結				
教材來源				
教學設備/資源		方格紙、直尺、捲尺、量角器、計算機。		

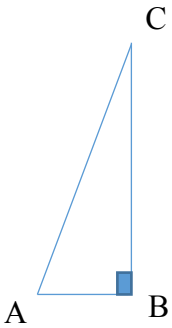
學習目標

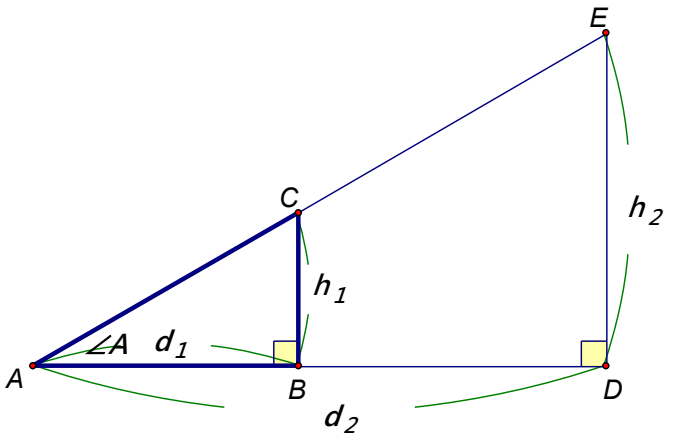
1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。
2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。
3. 認識計算機按鍵上 tan 的符號。
4. 計算特殊角的相似直角三角形邊長比值不變性。
5. 透過計算機的相似直角三角形邊長比值不變性(tan)的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。

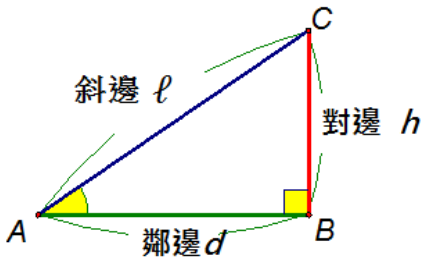
教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	備註
在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論： 阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤！」	10 分	引起動機： 以生活中險升坡的交通標誌，引起學生對於坡度的好奇心。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」 阿文：「真的是寫 75%不是 7.5%，google 地圖，附上連結，可以看到 google 上面的照片，」		
任務一：請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。 (1) (2)  教師可以請學生指出學生手冊上所描述「75%等於是指每前進 100 公尺會上升 75 公尺。」的圖形是他們所畫的哪一個?	15 分	藉由畫圖的方式，引導出學生將生活情境的問題抽象成數學情境。 因為此目標是要學生了解坡度的意義，尚無需在方格紙上作圖。
結論： 坡度的意義和表示方式： 以坡面上兩點間的高度差除以兩點間的水平距離 即 T（坡度）$=$ $\frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}}=\frac{h}{d}$ 其中 h 表示高度差，d 表示水平距離。 坡度在道路上的標示常以「百分率」的形式出現。 		總結學生的討論與引導，依據學生手冊上的說法，將每前進 100 公尺解釋成水平距離，而不是斜邊(實際路面)。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
任務二：給定 75% 和 7.5%的坡度，讓學生在方格紙(附件一)上畫出對應的直角三角形，並以量角器量出此角的角度。 1、 建議在製圖前先跟學生約定製圖時的水平方向與斜邊繪製的位置，以確認學生知道測量角度是指水平方向與斜邊的夾角。 2、學生可能的答案： 學生使用量角器測量兩個直角三角形的角度，「坡度 75%」大約是 36～37 度，另一個「坡度 7.5%」大約 4~5 度。 3、學生在畫坡度 7.5%時，有的會反應方格紙不夠大張，教師可以透過約分或擴分來提示，例如$\frac{7.5}{100}=\frac{75}{1000}=\frac{3}{40}=\frac{?}{20}=\frac{?}{4}$。 課堂討論(一)： 坡度(比值)相同時，可由 SAS 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：水平方向與斜邊的夾角相同。 第一節結束	20 分	讓學生思考同一坡度的直角三角形，畫出來可能大小不盡相同，但量出來的角度應是”大約”相等或是“必定相等”。 讓學生思考如何在有限範圍的方格紙中，畫出 75% 和 7.5%的坡度(相似形性質的應用)
任務三：讓學生繪製一個$\angle A=60$ 度的直角三角形，計算其坡度，並討論與「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。 1、跟學生約定將$\angle A=60$ 度擺放在水平方向與斜邊的夾角。  	15 分	學生在此須思考並決定此直角三角形的水平距離。讓學生使用量角器畫出 60 度角。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
2、仍請學生繪製在附件一的方格紙，以方便跟「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。 3、學生估算出來的坡度，是透過直尺測量高度 h（60 度的對邊長）、水平距離 d（60 度的鄰邊長），將高度 h 除以水平距離 d，可以得到比較好的估算結果約為 1.7 左右。 課堂討論(二)： 角度相同時，可由 AA 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：高度與水平距離的比值相同。		讓學生思考，當角度相同，大小不同的直角三角形，其坡度應是”大約相等”或是”必定相等”。
任務四：繪製「坡度 1」的直角三角形，來推算角度。	15 分	呼應課堂討論(一)，並由此題得到精確角度。
任務五：繪製$\angle B=45$ 度的直角三角形，來推算坡度。		呼應課堂討論(二)，並由此題得到精確比值。
結論: 由前面的兩個任務可以發現，兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其 $\frac{h}{d}$ 的比值也會相等。 同樣地，兩個直角三角形，當它們 $\frac{h}{d}$ 的比值相等時，h 的對角角度也會相等。  	5 分	呼應了學習內容 S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
▓直角三角形中，對於某一個銳角而言，介紹其鄰邊與對邊。  ▓由坡度的計算引入 $\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$，讀作 tangent A。 舉例並計算 $\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.732$呼應任務三的結果(在此為計算機上 $\sqrt{\ }$ 鍵的使用)。 ▓並藉由計算機上符號 tan 的按鍵，引發學生好奇心。以此介紹 tan 鍵的使用方法，並直接計算$\tan 45^\circ$的值與任務五相應。 第二節結束	10 分	學生學到了 tan 的符號，對應計算機上的按鍵，使學生熟悉使用方法，並嘗試於非特別角的角度。
任務六：請學生查詢內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》在公共空間，如校園、公園等等，常設有無障礙坡道來方便使用輪椅或行動不便者的通行。而根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，無障礙通路之設計需符合以下規定。 (1)坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於 $\frac{1}{12}$。 (2)坡道之起點及終點，應設置長、寬各 150 公分以上之平台。此處的長，指的是水平長度，而非斜面的長度。 (3)坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，且平台的水平長度至少 150 公分。 (4)各平台之坡度不得大於 $\frac{1}{50}$。	10 分	

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
任務七：請同學先想像其能接受的無障礙坡道，其坡面與水平地面的夾角。並根據規定(1)，請繪製坡道之坡度（高度與水平長度之比值）等於 $\frac{1}{12}$ 之直角三角形。	20 分	讓學生利用計算機嘗試，按鍵 $\tan 1^\circ$、$\tan 2^\circ$、$\tan 3^\circ$ $\tan 4^\circ$，發現 $\tan A = \frac{1}{12} \approx 0.083$ 的角度A在3°和4°之間。
任務八：實際測量或計算校園中無障礙坡道的坡度是否滿足內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》規定坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於 $\frac{1}{12}$?並與學校商借一輛輪椅，讓有興趣的學生親身體驗無障礙坡道使用的心得。	15 分	學生可經由測量無障礙坡道的高度和水平長度，並得到其比值;或直接測量坡面與水平地面的夾角，利用 tanA 的值，來判斷是否符合規定。 融入環境議題中的公共安全教育。激發學生對「無障礙坡道使用者」的同理心，與幫助他人的動力。
第三節結束		

三、高中組—科學記號與 10 的冪次

（一）教學設計理念說明

1. 背景

本課綱將科學記號的運算從國中移到高中，指對數中的「10 的冪次」、「認識常用對數的符號」與「計算機的使用」皆在高中課程中第一次出現。

2. 設計理念

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以本課綱將其移至高一（十年級），並建議它出現在上學期的第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『先（高一）建立以**符號**表達數量的基本觀念，第二次教學（高二介紹指對數函數）再進入形式運思，也就是**抽象概念與代數性質**』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數感，是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算輔助工具，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，達到符合數學素養教材的目標。本單元教材並融入了「安全教育」議題。

（二）教學單元案例

<table>
<tr><td colspan="2">領域/科目</td><td colspan="2">數學科。</td><td>設計者</td><td>吳汀菱、洪瑞英。</td></tr>
<tr><td colspan="2">實施年級</td><td colspan="2">十年級。</td><td>總節數</td><td>共 4 節，200 分鐘。</td></tr>
<tr><td colspan="2">單元名稱</td><td colspan="4">科學記號與 10 的冪次。</td></tr>
<tr><td colspan="6">設計依據</td></tr>
<tr><td rowspan="2">學習重點</td><td>學習表現</td><td colspan="2">n-V-1。</td><td>核心素養</td><td>B1 符號運用與溝通表達。</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="2">N-10-1、N-10-4。</td><td>B2 科技資訊與媒體素養。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">議題融入</td><td>學習主題</td><td colspan="4">安全教育概論。</td></tr>
<tr><td>實質內涵</td><td colspan="4">安 U1 預防事故傷害的發生。</td></tr>
<tr><td colspan="2">與其他領域/科目的連結</td><td colspan="4">物理、化學。</td></tr>
</table>

教材來源	自編教材。
教學設備/資源	計算機、A3 紙張若干、膠帶。

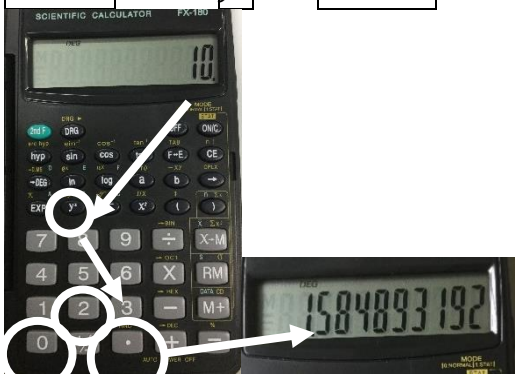
學習目標

1. 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。
2. 能操作科學記號的加減乘除運算。
3. 能使用計算機做四則運算、計算 10^x 的值、計算 $\log x$ 的值，並明白其值僅為估計。
4. 能用計算機的 x^y 功能，探索形如 $(1.01)^x = 2$ 之方程式的近似解。
5. 能轉換科學記號數字與 10 的冪次，藉以理解 log 數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的冪次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值）。
6. 理解 $\log a$ 的意義就是 $10^{\log a} = a$，其中 a 為正數。反之，任意正數 a 都可以改寫成 $10^{\log a}$。能用 log 符號紀錄或表達數值。

教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	備註
下列活動皆為分組進行，兩人一組。 活動一： 觀察計算機計算出極大數或極小數的結果時，請學生猜測螢幕上顯示的符號意義，再介紹科學記號的表示法及其加減乘除的運算。	15 分鐘	
活動二： 教師帶領閱讀科普短文「宇宙的大小」，並將學生分組進行文中引導的摺紙活動，將太陽系中的所有行星相對位置摺在一長條紙上，並作記號，最後，請同學思考要如何驗證其正確性。 學習單列出將各行星到太陽之間的距離(以科學記號表示)，學生可以利用計算機進行運算，驗證摺紙出來的結果是否正確。	35 分鐘	為避免少數學生對於文中敘述無法理解，教師可以從旁協助。
活動三： 小丁負責籌畫社團晚會，為了營造氣氛，他決定購買一些固體乾冰。 小丁購買回家之後，發現外包裝有下列警語: 「在低濃度時，二氧化碳氣體是無味的，但在較高濃度時會使人感到刺痛甚至窒息。這是因為當吸入濃度比大氣層平常濃度（二氧化碳約占 350 ppm）高很多的二氧化碳時，氣體溶解在黏膜和唾液中，產生了碳酸，所以會有酸的味道且鼻子和喉嚨會產生刺痛感。	30 分鐘	融入環境議題中的公共安全教育。提醒同學塵爆事件的

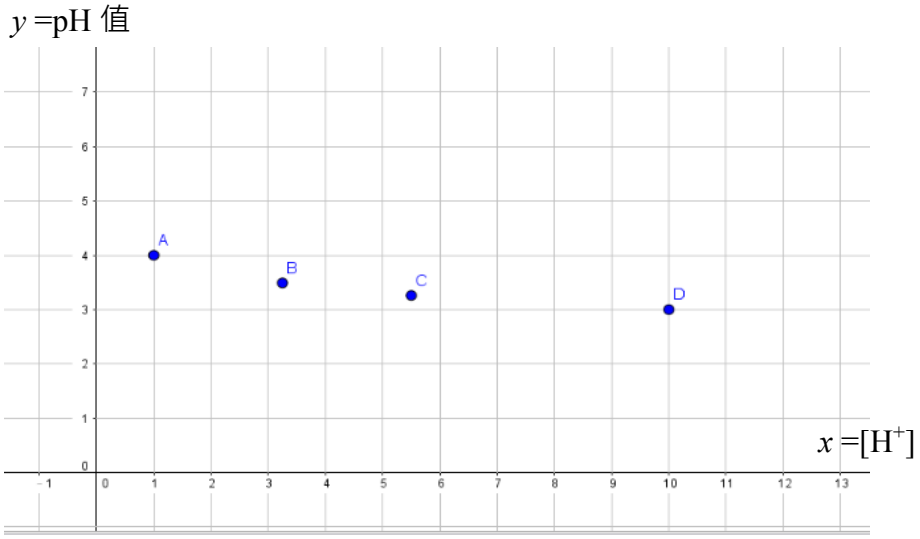
教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
研究發現，二氧化碳高於 5,000 ppm 的時候，會影響健康，而高於約 50,000 ppm 的濃度（相當於空氣中 5%的體積）被認為是有危險性的。」 小丁想:糟糕，我買了這麼多乾冰（10 公斤! ），而晚會場地為密閉空間，那會不會造成危險呢? 我們來幫他想一想： 1. 二氧化碳的分子量為 44，表示一莫耳的 CO2 重量為 44 公克，一莫耳物質中含有約 6×10^{23} 個粒子，廠商將乾冰切成每一小塊為正立方體，邊長為 3cm，又已知乾冰密度為 1.56 g/cm^3，請問每一小塊固體乾冰裡，有多少個 CO_2 分子呢? 2. 若不計空氣中原有的 CO_2 的濃度，10 公斤乾冰全部變成二氧化碳氣體，請幫忙計算晚會場地的體積至少要多少立方公尺，才不會影響健康? 3. 再估計一下，這個場地大約是幾個你們的教室大小呢? 活動四： 1. 阿丁在實驗室,發現有兩瓶鹽酸，一瓶內含 pH 值為 3 的鹽酸 1 公升,另一瓶內含 pH 值為 4 的鹽酸 1 公升,他將兩溶液混合在一起,請問混合溶液的 pH 值為多少? 2. 將 pH 值為 3 的鹽酸與 pH 值為 4 的純水，所以取體積分別為 1 公升與 3 公升，將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少? 活動五： 利用計算機探索 10 的幾次方是 5.5。 利用 y^x 鍵學習輸入計算 $10^{0.2}$：	30 分鐘 25 分鐘	教訓，在規劃團體活動時應提高警覺，注意安全。 如何估計教室大小，可請師生發揮創意，不拘泥於精確的答案。 應先了解學生是否懂得莫耳濃度計算的方法。 在活動四中，發現無法直接得到 pH 值，所以才進行活

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
輸入 10→按下 y^x 鍵→輸入 0.2→顯示 		動五探討 10 的幾次方會是 5.5。 活動完畢，回頭將剛才計算出的濃度都換算出其 pH 值。
由上述計算氫離子濃度與 pH 值得到的結果，我們可以將其中 4 個資料製成一個表格:		

$[H^+]$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	5.5×10^{-4}	3.25×10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
pH	1	2	3	3.26	3.49	4	5	6	7

如果將這些資料，畫在一個橫軸為$[H^+]$，縱軸為 pH 值的坐標軸上，則上面這些資料點是否符合「$[H^+]$與 pH 值為線性關係」?

下圖為氫離子濃度與 pH 值的關係圖，可以發現這些點並不在一直線上：



A(1×10^{-4},4)，B(3.25×10^{-4},3.49)，C(5.5×10^{-4} , 3.26)，D(10^{-3},3)

教學活動設計		
教學活動內容及實施方式	**時間**	**備註**
活動六： 將一張厚度為 0.1 mm（公釐）的紙，對摺再對摺，一直對摺多少次之後，它的厚度會超過 1 公里呢?	25 分鐘	可以請同學分享作法。 網路上有不少關於將紙對摺後厚度的討論與影片，老師也可以稍加補充。
活動七： 計算機有沒有功能可以直接求出 x，使得 $10^x=2$？ 試試看: 輸入 2→按下 log 鍵→顯示? 符號 log2=0.3010 表示甚麼呢? 你能再求出 log 4 與 log 5.5 嗎?	20 分鐘	
利用計算機，完成下列表格:(四捨五入到小數第四位)		

x	$\log x$	$10^{\log x}$
2		
3		
4		
5		
5.5		
7		
8		
9		
10		
20		

這裡可以與同學討論一下關於計算機產生誤差的原因。

<table>
<tr><th colspan="4">教學活動設計</th></tr>
<tr><th colspan="2">教學活動內容及實施方式</th><th>時間</th><th>備註</th></tr>
<tr><td colspan="2">
<table>
<tr><td>21</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>38</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>520</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1314</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>100000</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.01</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0.0002</td><td></td><td></td></tr>
</table>
有沒有甚麼發現呢?你能解釋為什麼嗎?
原來 $10^{\log x}=x$！
受限於計算機的顯示，我們只能找到 $\log x$ 的近似值，不過，當 $x=10^1,10^2,10^4,10^{-3},\ldots$時（為 10 的整數冪次），它的值就會是整數（也就是這個冪次方的大小）。
對數的定義：a 為實數，若 $10^a=x$，則 $a=\log x$。
從定義可以知道，因為 10^a 必為正數，因此 $\log x$ 中的 x 必為正數。

【任務】
1.想一想：log200 大約是多少？你怎麼得到這個結果的?
2.想一想：log56789 的值，整數部分是多少?你怎麼得到這個結果的?
3.想一想：log0.000001=?</td><td>5 分鐘

15 分鐘</td><td>可以請同學上台分享想法。</td></tr>
<tr><td colspan="4">參考資料：
1.宇宙的大小 2013/06/27　　作者：Shane L. Larson、翻譯：黃于薇
http://pansci.asia/archives/43718
原文出處 https://writescience.wordpress.com/2013/01/19/the-size-of-the-cosmos/
2.乾冰使用不當的新聞報導
https://kknews.cc/zh-tw/entertainment/qy3kp6r.html</td></tr>
</table>

捌 新舊課綱之課程實施銜接分析與建議

捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議

《數學領綱》承續《國中小九年一貫課綱》及《普高 99 課綱》的基礎，納入核心素養的理念加以深化與統合而成，並依照不同教育階段逐年實施。因此本章目的在提出新舊課程綱要銜接分析與建議，主要針對學生從六年級（使用舊課綱）升上七年級（使用新課綱），以及九年級（使用舊課綱）升上十年級（使用新課綱）時，因為學習內容中知識點的缺漏或新增，以及學習內容的差異所產生的銜接需求，進行分析與銜接建議，以提供教材編選與教學實施之參考。

一、新舊課綱之課程實施銜接分析

《數學領綱要》研修採取「減法原則」，銜接所產生的問題極小，都可以在課堂內調整達到銜接目的，詳細請參見下面分析及建議。

二、新舊課綱之課程實施銜接建議

十二年國民基本教育數學領域課程綱要（六升七年級）概念銜接與補充建議表

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
D-6-2 解題：可能性	從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A 比 B 可能」。	6 年級新增	無	9 年級於 D-9-2（**認識機率**）條目之前，於適當時機教授，預計一節課
備註	在九年一貫 9 年級的課程內容有兩圓關係、能理解多邊形內心與外心的意義和相關性、二次函數的配方與其應用問題、百分位數，但在新課綱已將這些內容刪除或移至普高（請參見附錄一），並且將九年一貫 9 年級的課程內容的統計圖表與統計數據調移至 7 年級、統計資料處理調移至 8 年級。雖然新增了空間中的線與平面（S-9-12），估計尚有很充裕的時間調整出至少一節課作為 D-6-2（解題：可能性）的銜接課程教學。另一方面，在 D-9-2（認識機率）的教學前，先作 D-6-2 的機率前置經驗的學習，更加促進學生對機率學習的效率。			

十二年國民基本教育數學領域課程綱要（九升十年級）概念銜接與補充建議

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
S-7-2 三視圖	立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 3×3×3 的正方體且不得中空。	7 年級新增	無	三視圖加強學生對於空間概念的成熟度，在國中階段已經發展到 S-9-12 的條目內容。所以普高僅作 S-9-12 的銜接教學。
N-8-6 等比數列	等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。	8 年級新增	無	10 年級於 N-10-6 講解遞迴數列時融入，預計一節課。
S-9-12 空間中的線與平面	長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。	9 年級新增	無	10 年級於 G-10-7 條目之前，於適當時機教授，預計一節課①。
備註	①新課綱在 10 年級的課程內容有絕對值、科學記號的運算、二次函數配方、百分位數，但九年一貫的國中生已習完這些單元，預估可以省下六節課。			

玖 實施要點重點說明

玖、實施要點重點說明

《數學領綱》中課程目標之第一點：「一、提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度。」有關「適性揚才」的一項重要設計，是高中階段提供 11 年級 A、B 兩類必修課程；修習 B 類課程的學生，在 12 年級可以不選修數學，也可以選修數學乙；並在「實施要點」提出兩項重點：「數學差異化教學」和「數學奠基活動」。課程目標之第三點：「三、培養使用工具，運用於數學程序及解解數學的正確態度。」更是這一次數學課綱與往年不同的特色，已經在第 5 頁中提及。本章針對這四點說明如下。

一、必修 B 類數學銜接選修數學乙的實施說明

如數學領綱「伍、學習重點」的宣示：

> *低數學需求的學生，可以只修習數學 B。有鑑於高中學生不容易太早定向，數學課程綱要的設計盡量使轉軌不致太困難，使得在 11 年級修習數學 B 的學生，有機會補足數學乙所需的先備知識而選修數學乙。《數學領綱，頁 6》*

而 108 課綱設計選修數學乙的基本精神是：

> *為社會科學與財務、金融、管理相關領域之大學階段學習做準備。除了教學內容的差異之外，範例與習題皆應依此基本精神而取捨。每學期 4 學分的一學年課程。（本手冊，頁 743）*

在十一年級修習 B 類數學課程的學生，若在十二年級希望為自己準備社會科學、財務、金融、管理相關領域之大學階段學習，則可選修數學乙。

就數學乙學習內容的先備知識而言，參閱本手冊頁 658-675 之「12 年級數學乙學習內容解析」，檢視每一項學習內容之「先備」需求，全都屬於 8 年級和 10 年級；僅有兩個條目涉及 11 年級的學習內容（F-12 乙-1 函數、D-12 乙-2 二項分布），都是 A 類與 B 類的交集部分。所以，僅就學習內容而言，修習 11B 必修課程的學生，可以銜接數學乙，不須補充特定的內容。

為使 11B 的學生順利銜接數學乙，教師應關切學生的數學操作能力與連結能力，意即有些老師說的「數學力」、有些老師說的「數學成熟度」。以下試舉幾個例子。

(1) 若給定 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，學生是否了解什麼是 $f(t)$？$f(kx)$？$f(x-h)$？而若要取 $h=-\dfrac{b}{3a}$，學生是否知道當 $f(x)=2x^3-3x^2+x+1$ 時，h 為何？是否能分辨函數 $f(x)-f(h)$

和方程式 $f(x)-f(h)=0$ 的意義？

(2) 是否能在形式上理解兩種直線的點斜式：$y=m(x-h)+k$ 和 $\frac{y-k}{x-h}=m$；嚴格來說，後者須設定 $x\neq h$。

(3) 是否能流暢地操作配方、平方差、和與差的平方？

(4) 是否能靈活操作二項式展開？

(5) 是否能夠理解函數圖形的意義：滿足 $y=f(x)$ 的點 (x, y) 在坐標平面上匯集而成的結果。根據上述理解而做的推論，例如 $s=f(t)$ 在 t-s 坐標平面上的圖形，就是 $y=f(x)$ 在 x-y 坐標平面上的圖形。例如多項式函數的泰勒形式 $f(x)=f(a)+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots$，可取前兩項形成另一個函數 $g(x)=a_1(x-a)+f(a)$，則 f 和 g 的圖形交於點 $(a, f(a))$，而 f 在點 $(a, f(a))$ 附近的函數圖形近似 g 的圖形。

(6) 在 10 年級學過正、餘弦的餘角關係 $\cos\theta=\sin(90°-\theta)$，正弦的補角性質 $\sin\theta=\sin(180°-\theta)$。在 11B 學過正弦函數的相位角。是否可以連結而了解 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，也就是說 $y=\cos x$ 的圖形是 $y=\sin x$ 的平移？

諸如以上的能力，並非一定要在 10 年級就達成，而是最好能在選修數學乙之前具備。另外，並非不具備上述能力就不能選修數學乙；如前述，11B 的學生已經具備選修數學乙所需的先備內容，可能需要留意的是先備能力。教師應在數學乙的教學過程中，注意學生的表現，而適時在類似前述的學習情境中予以輔助或增強。

二、使用工具的素養----計算機融入教學

十二年國民基本教育以「核心素養」做為課程發展之主軸，以裨益各教育階段間的連貫以及各領域/科目間的統整。根據《總綱》的定義，「核心素養」是指一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。而後《課程發展指引》及《核心素養發展手冊》更詮釋，「核心素養」承續過去課程綱要的「基本能力」、「核心能力」與「學科知識」，但涵蓋更寬廣和豐富的教育內涵。核心素養的表述可彰顯學習者的主體性，不再以學科知識作為學習的唯一範疇，而是關照學習者可整合運用於「生活情境」，強調其在生活中能夠實踐力行的特質。數學領域以此為基礎，並強調正確使用工具、及有效溝通的能力，詳述於數學領域課程綱要中的三面九項核心素養。為求簡明起見，可以綜合成下面四個要點。

(M1) 數學學科知識的素養。

(M2) 應用到學習、生活與職業生涯的素養。

(M3) 正確使用工具的素養。

(M4) 有效與他人溝通的素養。

這與李國偉等人對「數學素養」的定義相當一致，並與林福來等人在數學領綱前導研究中所述的「知、行、識」雖不同、但意境相通。

我國的數學教學有兩點值得大家重新思考。其一是過度的複雜計算，其二是過多延伸出來的知識。有關我國數學教育重視複雜計算這一點，數學領綱前導研究中八項建議的第二項是:「數的四則運算應該重視概念性理解，而非只是計算。建議所有四則運算的概念性理解都在單步驟問題中進行。對於學習成效較差的學生，教師應該盡量利用較小位數運算，讓他們有機會概念性理解。較大位數的運算，可以使用計算機來計算，並在運用計算機時能進行合理性的判斷。」這個建議，是有感於國內中小學數學教學過度強調複雜計算，以至於缺少時間培養學生數學概念的建立；這也是 108 數學課綱倡議「計算機融入教學」的根源。

根據第 3-4 頁中分析台灣二十幾年來計算機教學不成功的因素：

(1) 有些老師怕學生有了計算機，會依賴它而不好好學習數學。

(2) 教科書並未著墨、老師也無暇研發計算機如何融入教學。

(3) 大型考試不允許使用計算機，師生們害怕平時用慣了，考試時不能用會吃虧，乾脆不教不學。

針對第(1)點，我們將小學定位為奠定數學基礎的階段，暫不使用計算機，七年級是學生使用計算機的起點，並於《數學課綱》「陸、實施要點」中「四、教學資源」的第（三）項強調「... 計算機教學應重視，培養學生正確使用計算機的態度；應該讓學生明白，計算機及電腦的數值計算都因為有效位數的限制而有一定的誤差，在應用上要了解此侷限性的可接受度；並應該讓學生了解，計算機操作時所可能發生的錯誤與誤差，如鍵入錯誤、程序錯誤、有效位數不足等問題。在前述之基礎上，學生可使用計算機 ...。」

針對第(2)點，我們在學習內容需要用計算機的條文中，加上能使用相關按鍵的教學目標，並有 34 條學習內容將計算機列為參考較具，以利教科書編者及教師參考。

至於第(3)點，《數學課綱》「陸、實施要點」中「五、學習評量」的第（八）項敘明「為配合與落實培養學生正確使用工具之基本理念，除教師規劃課程時應融合於教學，學業成績評量及入學測驗宜容許學生使用直尺、三角板、量角器、圓規、計算機等常用的數學工具，

落實學生正確使用工具素養之養成。在命題上，附圖可以用示意圖呈現，並在其旁註明為示意圖。」，希望心測中心及大考中心，能在數學考科時允許使用計算機。

三、數學差異化教學

相對於把班級學生視為均質的群體，差異化教學為教師根據班級學生在學習特徵、準備度、以及興趣等諸多面向之不同，透過多樣的教學設計，極大化學生之學習參與。教師在擬定教學計畫時應考量到學生的背景、學習準備度、學習興趣、語言、以及學習條件，識別其個別需求，提供適當的學習支持，幫助每一位學生發揮其潛能，以達到最佳的學習效果。差異化教學的先決條件在於識別學生的學習準備度，其教學基礎建立在經由評量了解學生的特質。「形成性評量」為差異化教學的核心。進行差異化教學時，教師必須運用形成性評量蒐集學生的學習證據，進行學習診斷，了解不同學生學習現況與學習目標之間的差距，識別其學習問題、困難和迷失概念；從而在學生現有的學習基礎上，進行相應的教學活動，幫助他們達到學習目標。

再者，差異化的教學設計須提供不同程度學生最大的學習參與機會，這也是《數學領綱》理念的實踐。數學差異化教學的活動與評量應圍繞著此一理念而展開，鼓勵與邀請所有學習者參與課堂學習活動。在課程計畫與實施的過程中，教師可就「課程內容」、「實施過程」、「學習成果」、「情意感受」、以及「學習環境」等五項要素上，設計多層次的差異化教學活動，提供有感的學習機會，照顧學習需求不同的孩子。相關文獻建議有效的數學差異化教學有以下四種作法：

1. 根據同一教學目標，提供兩個或以上能搭配學生程度的類似任務，讓不同學習能力的學生獲得適合自己程度的學習任務，對於數學學習單元賦予類似任務可有效驅動學生進行分組討論。
2. 為教學目標設定不同層次，提供對應的活動讓一般程度與低程度學生有精熟指定目標的機會，並避免高成就學生將學習時間浪費在反覆練習上。
3. 運用與其他學科能力結合的多中心小組活動，讓數學學習有困難的學生，除了接受數學能力較佳的同學協助之外，仍能運用自己較佳的其他能力（如演說或繪圖等），在小組活動中做出貢獻，提升學習成就感。
4. 設計多種答案的問題或是多元解題路徑的問題(開放性問題)，最好是「低地板、高天花板」，使得學習低成就學生能夠參與解題，同時讓高成就學生覺得問題具挑戰性，鼓勵所有學生參與課堂學習。

數學差異化教學的案例，可參考國家教育研究院的「協力同行」網站項下的「課綱實施支持資源」/「十二年國教領域課綱素養導向教材教學模組」/「數學領域」。網址：https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-13644,c1587-1.php?Lang=zh-tw。

四、數學奠基活動

數學奠基活動的最大特點就是「數學好好玩、好好玩數學」！

既有知識與經驗的建立與充分連結是促進有感學習的基礎。數學抽象化的本質與太快速形式化的教學模式，在在讓學生對數學怯步，呈現「低學習動機」的現象。數學的奠基活動主要是在正式上數學課之前，提供學生充分參與活動的機會；活動歷程中，啟動學生思考而激發內在動機，因而建立其對相關內容的具象經驗，確實奠立未來課室內有感數學學習的基礎。例如：動手操作、數學遊戲、數學繪本閱讀等等。

數學奠基活動的重要特性就是「有感學習」。學生藉由操作奠基活動將自己遊戲中的所感、所知用自己的語言表達出來，沒有被框架限制住思維的自然語言。學生試著去分類、歸納、比較、梳理活動中蘊含的數學屬性，保持一顆探究的心，學習便能長長久久。

以奠基遊戲「長方形數」為例。學生透過操作不同數量的圍棋，具體圍出型式不同的長方形，而組成這個長方形的圍棋數量則稱為「長方形數」。學生在動手操作的過程中討論、分類與歸納「長方形數」的正例與非例，並搭配競賽計分的方式，激發學生求知的慾望。

舉例來說，如下面圖 1，甲學生排出每列三顆棋子共四列或每列四顆棋子共三列的長方形圖形，「12」便是一種長方形數。學生更能在活動中理解並歸納這兩種型式的長方形圖形經旋轉後為同一種長方形；如下面圖 2，乙學生排出每列兩顆棋子共兩列的長方形圖形，「4」亦是一種長方形數。學生在操作討論的遊戲過程中，將很自然地辨識出「4」不但是一種長方形數，亦是一種正方形數。正方形是一種特殊長方形，包含在長方形中的有感學習便悄然發生。

更因為每顆棋子視為一個點，排成一直線的圖形不是一種長方形數。如下面圖 3，當有學生發現「7」只能排出一列 7 顆棋子的圖形，既然不是「長方形數」，他便將「7」這種數因為沒人可得分而稱為「不分數」或可不讓對手得分的「勝利數」。學生在有感學習後說出的語言當然沒有數學的嚴謹性或共通性，但卻在遊戲歷程中奠下了未來學習「質數」的具體心像。

○○○ ○○○ ○○○ ○○○ 或 ○○○○ ○○○○ ○○○○	○○ ○○	○○○○○○○ 或 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
圖 1	圖 2	圖 3

教師因為學生的有感學習，教學更有信心，持續不斷去做，實質上就有不同層次的教學能量提升，教學相長的意涵莫此為甚。

引導學生進行數學奠基活動的注意事項：

1.絕大部分活動時間都應提供給學生玩。教師的介入要控制在大約總時間的六分之一以內，其餘時間都應提供給學生玩，教師以清楚說明活動規則為主。

2.數學奠基活動的評量，以形成性評量當下的觀察為主。例如學生在動作表徵與圖像表徵間交錯來回操作，建立具體心像的過程；以及在符號表徵下受惠於「符號化」的功能，進行「一般化」的推理，都是評量的重點，學生活動後的工作單回饋則是重要的教學材料，可提供教師正式上課前參考。

3.數學奠基活動的遊戲，如果有些學生不能有感的玩，教師應適度簡化遊戲的認知負荷，例如八張牌降為四張牌(從 8 個數相加減到 4 個數相加)，換句話說，同樣的遊戲，一班學生玩的「負荷」可以不同。

數學奠基活動的案例，可參考國立臺灣師範大學之「數學教育中心」網站。網址：http://www.sdime.ntnu.edu.tw/main.php。

拾 課綱 Q&A

拾、課綱 Q&A

一、第一部分 整體篇

Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教和九年一貫的數學課程理念差異為何？	A1： 素養培養：十二年國教數學課程理念強調核心素養的培養，為下一代的進階學習與職涯發展做好準備，促成社會的良好運作以及個人人生目標的實現，符合世界主要國家在新一波的數學教育改革的趨勢，這與以往九年一貫課程強調基本能力的開展相當不同，新課程強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。 機會均等：把每一位學生帶上來、適性揚才是十二年國教的重要理念，也是數學教育「公平」理念的實踐，故十二年國教數學教育的重要目標為提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度，這與九年一貫的課程目標相當不同。 層次明確：十二年國教的數學內容安排注重學習的層次性，從直觀的學習開始，逐步進到抽象的層次。以國中幾何主題為例，七年級為「直觀幾何」、八年級為「測量幾何」、九年級為「論證幾何」。同樣的道理，在規畫指數、對數、三角等學習內容時，先從數的觀點出發，之後才切入函數的概念、畫函數圖形、求導函數、函數積分等等。
Q2：學生在數學學習成果落差很大，對於落後學生，有何規劃？	A2： 課綱於「實施要點」鼓勵教師於課堂中進行差異化教學，提供所有學生學好數學的機會，並規範對於學習落後的學生，學校及教師應考量其學習方法、學習態度與學習能力，發展補救教學課程。在國中小階段，可運用彈性課程時間及時補救；並於高一上學期，針對會考成績不力的學生，要求各校設計「基礎數學」課程，補足其應有的數學基礎能力。另外，為了達成適性揚才的目標，所以數學領綱在高二規劃了 A、B 兩類課程，並鼓勵各校可發展各類選修課程，為學習落後學生提供學好數學的機會。
Q3：為何十二年國教數學課程要於學習重	A3： 為符合國際教育趨勢，並發展學生能運用計算機進行數學探索

Q 問題	A 回答
點引入計算機？有何配套措施？	與建模以及正確使用計算機的態度，因此於十二年國教數學課程加入計算機的相關內容。由於計算機的計算有一定的誤差，應強調其使用時機及侷限。學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，可適當使用計算機，執行複雜數字、統計數據、指數、對數及三角比的計算。實施時機以國、高中階段為宜。教師可在適當時機使用電腦輔助教學。 為落實計算機教學，有別於歷年數學課程綱要僅在實施要點內敘明教學可使用計算機，本次學習重點特別在適當條文中，納入教導使用計算機的方法及正確態度。此外，領綱研修團隊建議教育部於大型入學考試中，允許考生使用計算機。
Q4：引入計算機可能造成許多問題(例如：城鄉差距、學生過度依賴等)，其因應方式為何？	A4： 提供計算機的規格建議，讓業界、課綱和考試，都有所依循，並諮詢業界意見，確定符合規格的計算機價格是合理的。再者，計算機教學是從七年級開始，強調計算機使用的正確態度。小學階段則是先培養好基本的算術操作能力，了解算則的基本原理。
Q5:研修過程中,如何確保數學課程一到十二年內容的連貫性？	A5： 由於九年一貫課程已確立國中、國小課程內容的連貫，十二年國教課程研修參酌九年一貫課程的課程架構，以確保國中、小課程的連貫性；並於高中課綱研修時，以九年級數學學習內容/表現，當做十年級學生的起點行為，以確保國、高中課程的連貫性。再者，在研修機制中，由召集人運用核心會議，讓國小、國中、高中階段數學領綱副召集人共同討論與確定課程內容的連貫，並經全體委員會議討論與確認課程內容的連貫性。
Q6：時常有其他科目已經用到數學的概念，可是數學教師卻還沒教到，課程銜接不上，如何與其他科目連結？	A6： 數學做為其他學科學習的基礎，為確保課程內容能服務其他學科學習的需要，並能與其他學科做統整，研修過程設置領域統整工作圈協助各領綱進行橫向檢視，並運用領綱研修聯席會議，讓各領綱正、副召集人能彼此討論與交流課綱研修的規畫與內容，期能使各領域的學習重點能夠統整與沒有無謂重複之處。
Q7：數學做為語言與工具學科與其他各學	A7： 數學為科學之母，除了在國中階段介紹三角比與三角符號外，

Q 問題	A 回答
科的課綱協作有何規劃？	在高一也介紹對數符號，提供基礎科學學科教學使用。另外並提供相關有關按比例成長或衰退的數學模型、地震及週期現象等自然或科學現象教材進行說明。 對於社會學科的教學協作，除了既有的機率統計內容外，也針對社會組學生的地理經緯度與經濟學中的連續複利、邊際意涵及金融與理財進行介紹。 針對藝術設計等學科包括相關比例等生活情境與平面幾何的比例設計概念進行教學。

二、第二部分　國民小學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教國小課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1： 十二年國教領綱研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容，例如：刪除等量公理、強化模式觀察、強調數學素養之培養。(詳見附錄一對照表)
Q2:在第一學習階段，十二年國教比起九年一貫課綱每週多出一堂數學課，請問領綱對於多出了的一節課有何規劃？	A2： 相較於九年一貫課程，十二年國教課程在第一學習階段基本上未因節數增加而增加學習內容(除了初步認識單位分數)，目的是讓教師能更從容地教授數學基礎，讓學生有更充裕的時間探索數學概念與學好數學。

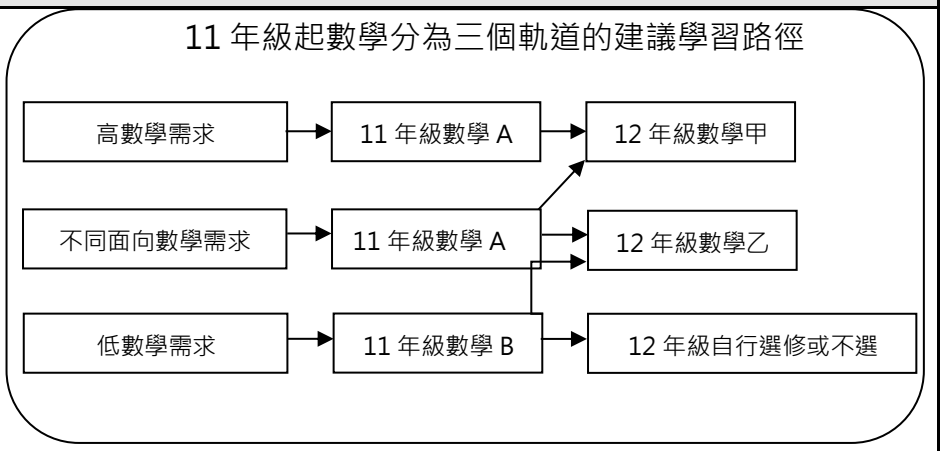
三、第三部分　國民中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：國中課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1： 十二年國教領綱在國中階段研修有兩大原則:「連貫性」與「減法原則」。 連貫性：先進國家的數學課程改革，注重「連貫」、「聚焦」與「嚴謹」，其中以「連貫性」最為重要。為達成課程連貫，本次課綱研修調整相關單元的學習年級。在九年一貫課程的基礎上，考量學生心智成熟階段，調整相關學習內容的順序，進而達成數學素養之

Q 問題	A 回答
	培養。(詳見附錄一對照表)。 減法原則：研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容。例如：兩圓關係、圓的弦切角、二次函數配方等繁雜內容。
Q2：三角比值回到國中教學對學生負擔是否太大？	A2： 在國中階段談到的三角課題，主要為直角三角形相似性質的延伸，開啟高中職三角函數學習的序幕。許多國家皆在九年級就教授直角三角比，以英國與芬蘭為例，兩國都是在九年級從比值切入，而且是接在畢氏定理單元之後，在相似三角形單元之前教授。在 S-9-4「直角三角比」的內容教授概念，目的為使學生認識相似直角三角形邊長比值的不變性，並解決簡單的三角測量問題。在備註及參考教具中提到，特殊角之外是要用計算機的，並不需要太多紙筆計算。至於三角函數的相關內容，則留到高中職教授。

四、第四部分　普通型高級中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：這次高中二年級的課綱分成 A、B 兩類，與 99 課綱分成 A、B 兩版有何不同？	A1： 99 課綱分成 A、B 兩版，而 A 版包含於 B 版，僅有內容多寡的差異。十二年國教數學從高二起分成 A、B 兩類不同課程，提供不同學習需求的學生選修，以達成適性揚才的理想。
Q2：請問不同學習需求的學生該如何選讀 A、B 兩類課程？	A2： 學生修習數學，從 11 年級起分為三個軌道，滿足學生的不同學習需求。依照學生的生涯規劃及適應性，對於數學有高需求的學生，可以修習數學 A、然後修習數學甲。對於數學有不同面向需求的學生，可以修習數學 A 或數學 B、然後修習數學甲或數學乙。對於數學的需求較低的學生，可以只修習數學 B。

Q 問題	A 回答
	
Q3：請問 A、B 兩類課程的差異為何？如何銜接三年級？	A3： A、B兩類課程的差異實情，請看本《課程手冊》頁550-634的詳細說明，或者參閱頁763的簡明對照表。就學習內容的條目而言，11A有23條，11B有12條，其中A、B共同的有2條，A類獨有的10條，B類獨有的2條，其他條目則是兩類都有但內容有差異，且兩類互不包含。 就銜接高三選修課程的先備知識而言，學好11A內容就可以銜接12年級數學甲，學好11A或11B內容都可以銜接12年級數學乙；學好11B內容，若想要學習12年級數學甲，尚需自行補足4條11A的學習內容：G-11A-5、F-11A-1、F11A-3、F-11A-4，並達到它們對應的學習表現。
Q4：現今普通型高中與技術型高中課綱的內容編排造成綜合型高中學生轉銜有很大的問題，此次課綱研修是否有因應的方式？	A4： 為讓綜合高中學生能於高二順利轉銜學術學程或專門學程，數學課綱研修團隊納入部分技術型高中課綱研修委員，且領綱研修正、副召集人出席技術型高中數學領綱研修會議，以溝通、交流兩邊的想法，並適時召開普通型高中、技術型高中及綜合型高中課綱研修聯席會議，以協助綜合型高中學生順利轉銜。
Q5：課綱內容結合計算機使用，學校端能否準備充裕的上課器材？	A5： 計算機在課綱的內容設定上僅需要一些基本功能，經調查，基本型計算機售價約在兩百元，一般學生應該有能力自行購買使用。對於特別困難的學生，可由主管教育行政機關協助，或請熱心團體及企業贊助。

Q 問題	A 回答
Q6：課綱內容結合計算機使用，如何與未來考試有所結合，以達課程順利進行？	A6： 數學領綱於「實施要點」敘明「除教師規劃課程時應融合於教學，學業成績評量及入學測驗宜容許學生使用直尺、三角板、量角器、圓規、計算機等常用的數學工具，落實學生正確使用工具素養之養成。」教育主管單位宜後續透過各種宣導管道，鼓勵教師及考試單位使用計算機。
Q7：許多單元被切割，請問原因為何？	A7： 新課綱的理念之一，將較困難單元的學習，第一次先建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學再進入形式運思，也就是抽象概念與公式使用的部分。所以將指對數分在高一與高二、三角函數則分成各年級都有，其中必修課程數學 A 加上選修數學甲的三角函數學習內容與現行課綱相同。

附錄一　十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表

附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表

《數學領綱》之研修雖然參考《九年一貫課程綱要》及《99 高中課綱》，但並不是單純的從中增刪條目而得，而是細致地重新撰寫，例如有些看似相同的條文，由於增加了限制使得內容有實質的減少，這些縱使是差異對照表也無法顯示，所列的異動只是最明顯的部分。

本附錄在比較《數學領綱》與《九年一貫課程綱要》、《99 高中課綱》比較明顯的差異。新課綱雖參考舊課綱內容，但並不是單純的從中增刪條目而得，而是細致的重新撰寫，有些看似相同的條文，由於增加了限制使得內容有實質的減少（例如，A-8-3 補充說明不再教分離係數法），在此差異對照表中無法一一列出。

一、國民小學學習階段

主題	學習內容	年 級				
		新增	分拆	調移	簡化	刪減
數與量（N）	N-1-4 解題：1 元、5 元、10 元、50 元、100 元。	一（部分新增）				
	N-2-5 解題：100 元、500 元、1000 元。	二（部分新增）				
	N-4-4 解題：對大數取概數。	四（部分新增）				
	（九年一貫）3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。		三 ⟹ 二、三			
	（九年一貫）3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。		三 ⟹ 三、四			
	（九年一貫）4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。		四 ⟹ 四、五			

主題	學習內容	年 級				
		新增	分拆	調移	簡化	刪減
	N-4-8 數線與分數、小數。			三、四、五⇒四		
	N-5-6 整數相除之分數表示。			四⇒五		
	N-5-11 解題:對小數取概數。			六⇒五		
	N-6-5 解題:整數、分數、小數的四則應用問題。			五、六⇒六		
	(九年一貫)1-n-06 能做一位數之連加計算。			一⇒二	二	
	(九年一貫)2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時,其數值不同,並能說明原因。					二(內容保留)
	(九年一貫)5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。					五(內容保留)
	(九年一貫)6-n-10 能理解正比的意義,並解決生活中的問題。					六
	(九年一貫)6-n-11 能理解常用導出量單位的記法,並解決生活中的問題。					六
空間與形狀(S)	S-3-4 幾何形體之操作。	三				
	(九年一貫)1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。		一⇒一、二			
	(九年一貫)6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。		六⇒五、六			
	S-2-1 物體之幾何特徵。			二、三⇒二		

主題	學習內容	年 級				
		新增	分拆	調移	簡化	刪減
	S-2-4 平面圖形的邊長。			二、三 ⇒ 二		
	S-4-5 垂直與平行。			二、四 ⇒ 四		
	S-4-7 三角形。			三、四 ⇒ 四		
	S-4-8 四邊形。			三、四 ⇒ 四		
代數（A）	（九年一貫）2-a-01 能用 <、= 與 > 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。		二 ⇒ 一、二			
	（九年一貫）6-a-01 能理解等量公理。					六
關係（R）	R-3-2 數量模式與推理（Ⅰ）。	三				
	R-4-4 數量模式與推理（Ⅱ）。	四				
	R-2-4 加法與減法的關係。			一、二 ⇒ 二		
	R-4-1 兩步驟問題併式。			三、四 ⇒ 四		
	R-5-3 以符號表示數學公式。			六 ⇒ 五		
資料與不確定性（D）	D-6-2 解題：可能性。	六				
	D-4-1 報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖。			四、六 ⇒ 四		
	D-5-1 製作折線圖。			六 ⇒ 五		

刪除 97 課綱（分年細目）：

2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。（刪除原因：原條目太細，併入長度與一般量的探索活動。）

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。（刪除原因：原條目本為檢查性項目，僅刪除條文，但原條目精神併入其他教學完成。）

6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。（刪除原因：主要是刪除正比的概念，但

原來相關比例思考問題併入 N-6-6 比例教學，正比關係之觀察可在 R-6-2 進行，但不急著介紹更多的概念。) 6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。(刪除原因 : 導出量單位較抽象，在學除速度外也缺乏其他理想又必要的範例，故保留在速度中認識即可。)

6-a-01 能理解等量公理。(刪除原因：教師和教科書經常進行過多教學，刪除不影響國中教學) **新修課綱「假」新增部分 (即本已有內容，特分開名列之部分) :**

N-2-3 解題：加減應用問題。

N-3-6 解題：乘除應用問題。

R-4-3 以文字表示數學公式。

N-5-7 分數除以整數。

N-5-9 整數、小數除以整數 (商為小數)。

R-6-1 數的計算規律。

R-6-2 數量關係。

R-6-3 數量關係的表示。

新修課綱新增部分：

S-3-4 幾何形體之操作。

R-3-2 數量模式與推理 (Ⅰ) 。

R-4-4 數量模式與推理 (Ⅱ)。

D-6-2 解題：可能性。

較大移動部分：

1. 分數將小三部分提前至二年級。小二：初步認識單位分數，小三：簡單分數 (真分數和假分數) 及其運算。
2. 併式教學完全移到四年級。
3. 數線：小三整數，小四分、小數。
4. 整數相除併到五年級。
5. 統計/資料部分，小四報讀長條圖與折線圖並製作長條圖，小五製作折線圖。

二、國民中學學習階段

主題	學習內容	年 級				
		新增	強化	調移	簡化	刪減
數與量（N）	N-8-6 等比數列。	八				
	計算機的使用(N-7-9、D-7-1、D-7-2、N-8-2、D-8-1、N-9-1、、D-9-1、D-9-3) 。		七、八、九			
	N-9-1 連比。			七⇒九		
	N-8-5 等差數列求和。				八	
	A-8-3 多項式的四則運算。				八	
	(九年一貫)7-n-05 能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。				七	
空間與形狀（S） 坐標幾何（G）	S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性。		九			
	S-9-12 空間中的線與平面。	九				
	S-7-1 簡單圖形與幾何符號。			八⇒七		
	S-7-2 三視圖。	七				
	S-7-3 垂直。			八⇒七		
	S-7-4 線對稱的性質。			八⇒七		
	S-7-5 線對稱基本圖形。			八⇒七		
	S-9-5 圓弧長與扇形面積。			八⇒九		
	(九年一貫）圓的弦切角、兩圓的外公切線長與內公切線長。					八
	(九年一貫）凸多邊形外角和公式。					八
	(九年一貫）兩圓關係。					九
	(九年一貫）9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質。					九
	(九年一貫）9-s-09 能理解多邊形內心的意義和相關性質。					九

主題	學習內容	年 級				
		新增	強化	調移	簡化	刪減
代數（A）	無。					
函數（F）	F-8-1 一次函數。			七⇒八		
	F-8-2 一次函數的圖形。			七⇒八		
	(九年一貫)二次函數的配方。					九
資料與不確定性（D）	D-7-1 統計圖表。			九⇒七		
	D-7-2 統計數據。			九⇒七		
	D-8-1 統計資料處理。			九⇒八		
	(九年一貫)9-d-04 能認識百分位數的概念，並認識第10、25、50、75、90 百分位數。					九

三、高級中等學校學習階段

I · 高中數學 99 課程綱要與 108 課程綱要差異對照表

刪除：必修部份（相對於 99 課綱數學 I, II, III, 和 IV-A）				
1	多項式函數的拉格朗日插值法、有理根判定、勘根定理。			
2	複數系、方程式的虛根、代數基本定理。			
3	重複組合。			
4	連加符號 Σ。			
5	三角比與對數值的查表。			
6	線性規劃。			
	必修數學 A		**必修數學 B**	
	7	二次曲線。	7	三角的和差公式。
			8	三角不等式、柯西不等式。
			9	線性變換、轉移方陣。
			10	空間概念之三垂線定理。
			11	空間中的直線、平面方程式。
			12	三元一次聯立方程式、三階行列式。
刪除：選修部份（相對於 99 課綱數學 IV-B+選修數學甲、選修數學乙）				
1	抽樣與統計推論。			
	選修數學甲		**選修數學乙**	
			2	一般三角函數的性質與圖形。
			3	數列及其極限。
弱化				
1	含絕對值的一次方程式、絕對值不等式。			
2	排列組合：教學目標設定在得到古典機率所需的計數範圍，以及二項式展開。			
3	三角測量：不另立單元，並且以長方體為主要模型。			
4	一般底的對數。			
5	平面向量的幾何表示（不在坐標平面上的平面向量）。			
6	三元一次聯立方程式的三平面關係。			
	必修數學 A+選修數學乙		**必修數學 B**	
	7	複數系、方程式的虛根。	7	三角恆等式。

			8	(認識) 圓錐曲線。
搬移				
1	複數系、方程式的虛根：10 ⟹ 12 年級選修 (數學甲、數學乙有所區隔) 。			
2	勘根定理：10 年級 ⟹ 選修數學甲 (在 10 年級以「十進制小數的估計」呈現) 。			
3	有理數指數與常用對數，在 10 年級先以記號的形式出現。			
4	指數與對數函數：10 ⟹ 11 年級 (數學 A、數學 B 有所區隔) 。			
5	連加符號Σ：10 ⟹ 12 年級 (選修數學甲、選修數學乙) 。			
6	條件機率與貝氏定理：10 ⟹ 11 年級。			
7	極坐標、廣義角：11 ⟹ 10 年級。			
8	直線方程式、圓方程式：11 ⟹ 10 年級。			
9	廣義角的三角比 (正弦定理、餘弦定理) ：11 ⟹ 10 年級。			
10	線性規劃：11 年級 ⟹ 選修數學乙。			
11	二次曲線：11 年級 ⟹ 選修數學甲。			
12	弧度量、三角函數：12 年級選修甲、數學乙 ⟹ 11 年級 (數學 A、數學 B 有所區隔) 。			
13	正餘弦函數的疊合：12 年級選修數學甲 ⟹ 11 年級數學 A。			
新增				
1	計算機融入教學，附帶科學記號數字與有效數字。			
2	二次、三次函數的局部圖形近似於一條直線；(10 年級) 三次函數圖形的對稱點。			
3	(數據分布) 百分位數。			
4	(10 年級古典機率) 期望值。			
5	主觀機率和客觀機率的概念。			
	必修數學 A		**必修數學 B**	
			6	認識球面上的經線與緯線。
			7	連續複利與 e 的認識。
			8	列聯表與文氏圖的關聯。
	選修數學甲		**選修數學乙**	
	6	幾何分布。	6	多項式函數的微分及其應用。
	7	認識指對數函數的標準底 e。	7	多項式函數的積分及其應用。(詳見下一幅表格：99 課綱與 108 課綱「數學乙」之差異對照表。)
	8	牛頓求根法。		

	9	認識含xy項的二元二次方程式的圖形。		

II．高中數學 99 課程綱要與 108 課程綱要選修數學乙差異對照表

主要課題	99 課綱數學乙	108 課綱數學乙
基本精神	為人文、社會領域之大學階段學習做準備。每學期 3 學分的一學年課程。	為社會科學與財務、金融、管理相關領域之大學階段學習做準備。除了教學內容的差異之外，範例與習題皆應依此基本精神而取捨。每學期 4 學分的一學年課程。
函數	函數的定義、圖形、四則運算，合成函數。	函數的定義、四則運算，並有圖形的對稱關係（奇偶性），凹凸性的意義。認識分段定義函數與基本的合成觀念。
無窮與極限	無窮數列的極限概念，無窮等比級數（含循環小數），夾擠定理。函數的連續性與其在實數 a 的極限，極限的運算性質，介值定理。	無窮等比級數（含循環小數），多項式函數、簡單有理函數、分段函數的連續性，它們在實數 a 的極限。極限的運算性質，介值定理，勘根定理，夾擠定理。
微分	無。	導數與導函數的極限定義，切線與導數，多項式函數之導函數，微分基本公式及係數積和加減性質。
	無。	二階導數，萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定，基本的最佳化問題，導數的邊際意涵。
積分	無。	微積分基本定理。
	無。	一次與二次函數的反導函數與定積分。定積分在面積與總變化量的意涵。
	無。	連續函數值的平均，總量與剩餘意涵。
線性規劃	無。(屬於高二必修課程。)	目標函數為一次式的極值問題，平行直線系。
機率與統計	同右。另有抽樣與統計推論，常態	離散型隨機變數的期望值、變異數、

	分布，及信賴區間、信心水準的解讀。	標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。二項分布的性質與參數。
三角函數	弧度量，三角函數的倒數與平方關係，三角函數的圖形。	無。(分散在高一和高二 A 類必修課程。)
複數	無。(屬於高一必修課程。)	複數平面，複數的四則運算與絕對值，方程式的虛根，代數基本定理。

附錄二　數學名詞解釋

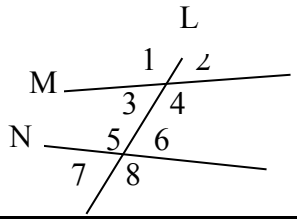
附錄二：數學名詞解釋

數與量(N)	
等號	兩運算式(數)之值相等，可以’ =’ 記之，唸為【等於】，如 4＋3=7。
大於、小於	甲大於 4，可以記為 甲＞4，或 4＜甲，前者唸為 甲大於 4，後者唸為 4 小於甲。
大於等於、小於等於	甲大於 4 或者可能等於 4，可記為 甲≧4，和甲不小於 4 同義。也可記為 4≦甲，即為 4 小於或等於甲。
加	4＋3=7，4 為被加數，3 為加數，7 為和。
減	4－3=1，4 為被減數，3 為減數，1 為差。
乘	4×3=12，4 為被乘數，3 為乘數，12 為積。
除	14÷4=3…2，14 為被除數，4 為除數，3 為商，2 為餘數。當餘數為 0 時，稱為整除，如 12÷4＝3。
自然數	自然數 1、2、3…為人類用來數物的數，可稱為計物數，又稱正整數。
整數	正整數、0 和負整數合稱為整數。
偶數	個位數為 0，2，4，6，8 的整數稱為偶數，又稱雙數。
奇數	個位數為 1，3，5，7，9 的整數稱為奇數，又稱單數。
絕對值	若 $a \geqq 0$，則定義$\|a\|=a$，唸為 a 的絕對值等於 a，如$\|7\|=7$；若 $a<0$，則定義 $\|a\| = -a$，如 $\|-7\|= -(-7)=7$。
分數	能化為$\frac{q}{p}$的型態，且 p、q 皆為整數者其中 $p\neq 0$，稱為分數；p 稱為分母，q 稱為分子；若 $0<q<p$ 時，$\frac{q}{p}$稱為真分數；否則，$\frac{q}{p}$稱為假分數；形如$2\frac{1}{3}$的分數，則稱為帶分數。 當 $p\cdot q<0$，$\frac{q}{p}$為負分數，記作$-\frac{\|q\|}{\|p\|}$。
最簡分數	一分數經化簡後(合併符號、約分)，若分子與分母的絕對值互質，此分數稱為最簡分數。
等值分數	一分數分子、分母同乘一整數，所得的分數稱為原分數的擴分；一分數分子、分母同除一公因數，所得的分數稱為原分數之約分；一分數擴分或約分後所得的分數，其值和原分數相同，稱為等值分數。
有理數	整數與分數，合稱為有理數。
無理數	實數中非為有理數者稱之。
實數	數線上所有點的坐標值，合稱為實數。
數線、坐標	在直線上任意指定一點為原點，指定一個正向，並給定一個線段，令其長為單位長，即成為一條數線。令數線上任一點 P 與原點的距離為單位長的 x 倍，當原點到 P 之方向為正向時，令其坐標為 $+x$，簡記為 x，否則其坐標為 $-x$。P 點坐標之絕對值為 x。
三一律	任給兩實數 a、b，則 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 三種關係必有且僅有一種成立。
複數、虛數	令 i 為虛數單位，規定其滿足 $i^2=1$ 並繼承除了三一律以外的所有實數運算性質，則 $a+bi$ 合稱為複數（其中 a、b 為實數），其中 a 稱為複數的實部，b 為虛部。虛部非零的複數稱為虛數，實部為零的虛數稱為純虛數。純虛數以及虛部為零的複數，皆不討論其大小。

因數、倍數	一正整數 a 若能整除另一正整數 b，a 稱為 b 的因數，b 稱為 a 的倍數。因數與倍數的關係，不推廣到正整數以外的數。
公因數、最大公因數	一正整數 a 同為兩個以上正整數的因數時，則 a 為這些數的公因數。在所有公因數中最大者稱為最大公因數。
公倍數、最小公倍數	一正整數 a 同為兩個以上正整數的倍數時，則 a 稱為這些數的公倍數。在所有公倍數中最小者稱為最小公倍數。
質數	一大於 1 的正整數只有 1 及本身兩個因數時，稱為質數。
合數	又稱合成數，大於 1 的正整數中不是質數者稱之。
互質	兩正整數若除了 1 以外無其他公因數，則稱此兩數互質。
質因數	某數的因數如果也是質數，稱為該數的質因數。
短除法	判別一數或一數以上的因數時只寫出除數和商，並不詳細運算除法過程，如 $\begin{array}{r\|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$ 其計算型態為短除法。若除數皆為質數，其過程即稱為質因數分解。
平方	一數自乘兩次，稱為平方。如 5×5=25，25 稱為 5 的平方。
平方根	$a^2=b$，$b\geqq 0$，則 a 為 b 的平方根（二次方根），如 $2^2=4$，$(-2)^2=4$，2、-2 皆為 4 的平方根，其中 2 為正平方根，-2 為負平方根，合記為$\pm\sqrt{b}$。
四捨五入	概數(近似值)的取法之一。若一數指定位數之下一位值小於 5，則將指定位數之下的數皆記為 0(捨去)；若大於等於 5，則在該指定位數加 1，並將以下所有數皆記為 0(進入)，稱為四捨五入。例如：325587 在千位四捨五入得 326000；3.1416 在百分位四捨五入得 3.14。
誤差	所謂「誤差」就是指「絕對誤差」，亦即估計值與理論值之差。
科學記號數字	非零的實數可轉換成唯一的科學記號數字，形式如 $\pm m\times 10^n$，其中 $\pm$ 稱為科學記號的「正負號」，當它為正時可以省略不寫；m 稱為科學記號的「係數」部分，須滿足 $1\leq m<10$；n 稱為「指數」部分，n 為整數。
準至、約至	對一給定的實數，「準至四位小數」或「算到小數點下第四位」的意思是將小數點下第四位以後的數值「無條件捨去」(chopping)，而「約至四位小數」或「取四位最近小數」或「約至小數點下第四位」的意思是在小數點下第四位做「四捨五入」(rounding)。在求 $f(x)=b$ 之近似解的情境中，「約至二位小數」或「取二位最近小數」或「約至小數點下第二位」的意思是：x 是使得 $f(x)$ 與 b 誤差最小的二位小數；當此數不唯一時，依情境做個案處理。不影響數值的 0 可以寫出來也可以省略。
有效數字	對非零的數，取其「n 位有效數字的估計值」或者「以 n 位有效數字表示」的意思是：先將它寫成科學記號數字，再將它的係數約至 $n-1$ 位小數，然後以普通記號或科學記號呈現其數值。數學的「有效數字」僅用來約定概數的精確度，並不像自然科學還需用來溝通測量的精確度。
十分逼近法	為估計一數值(如 $\sqrt{7}$)，先找出此數值位於那兩連續的整數之間，並視實際需要，可在兩數

	的十等分點再找出連續的兩點做逼近估計，依此類推當可求出我們所想知道此數的近似值。
計算機	在課綱文件裡「計算機」有時也稱為「計算器」，意指英文的 Calculator，並非 Computer；後者稱為「電腦」。
比	兩數量以「：」區隔並據以呈現兩量之大小關係稱為比，如：兩人體重比為 56：43，披薩價錢與個數之比為 600：2。符號「：」之前的數，稱為比的前項，另一數稱為後項。
比值	比之前項除以後項稱為比值。兩比相等和兩比之比值相等等價，如 3:4 的比值為 $\frac{3}{4}$ 或 0.75。比的前項與後項不必強調為非零，但後項為 0 之比值不存在。
連比	三或更多數量以「：」區隔並據以依序呈現其大小關係稱為連比；三個數量之連比，稱為三連比。
百分率	將一實數乘上 100 後附加%記號，稱為百分率，如 0.23=23%，1=100%，1.234=123.4%。符號 % 就是 $\frac{1}{100}$ 的意思，而 $x\%$ 就是 $\frac{x}{100}$ 的意思。
正比	兩變量 x 及 y，若可寫成關係式 $y = kx$，k 為常數(一固定數)，則稱 x，y 成正比，其中 k 稱為比例常數。
反比	兩非 0 變量 x 及 y，若可寫成關係式 $xy=k$，k 為非 0 常數，則稱 x，y 成反比，其中 k 稱為比例常數。
數列	按照順序一個接著一個排列的數，稱為數列。數列中的每一個數又稱為數列的「項」，其中第一個數稱為首項，如果存在最後一個數，稱之為末項，否則稱該數列為無窮數列。
等差數列	一數列任意相鄰兩項之後項減前項皆相等，稱為等差數列，前述兩項相減之值稱為公差。
等差中項	若三數成一等差數列，中間項稱為等差中項。
等比數列	一數列任意相鄰兩項之前項比後項皆相等，稱為等比數列，前述兩項之比值稱為公比，或者公比為 0。
等比中項	若三數成一等比數列，中間項稱為等比中項。
級數	將數列中各項按照順序接連相加，稱為級數。當數列為等差時，級數又稱為等差級數；當數列為等比時，級數又稱為等比級數。
數學命題	可以用數學知識判斷真偽的直述句。
幾何(S, G)	
角	共同端點的兩射線所成的角，前述端點為角的頂點，頂點與射線上任意另一點相連的線段，稱為角的邊。在空間中，在兩射線所共的平面上討論角。
平角	構成角之兩射線為一直線時，所成之角為平角，角度為 180 度或 π 弧。（小學：180 度的角稱為平角。）
直角	平角的一半，90 度或 $\pi / 2$ 弧。（小學：角度等於 90 度的角稱為直角。）
銳角	小於直角的角（不含零角）。（小學：角度小於 90 度的角。）
鈍角	大於直角但未達平角的角。（小學：角度大於 90 度的角。）
周角	平角的兩倍，360 度或 2π 弧。（小學：360 度的角稱為周角。）
零角	構成角之兩射線重疊時，所成之角為零角，角度為 0 度或 0 弧。
優角	大於平角但未達周角的角；又稱為凹角。

劣角	零角、銳角、直角、鈍角，合稱為劣角。
順(逆)時針	順著時針轉動方向移動稱為順時針，反之稱為逆時針。
旋轉角	以一邊（始邊）端點為中心，旋轉到另一邊（終邊）的旋轉角度稱為旋轉角，可分為順時針旋轉與逆時針旋轉兩種方向。
互補	兩角（含廣義角）之和為平角時，互為補角。（小學：兩角度數和為 180 度。）
互餘	兩角（含廣義角）之和為直角時，互為餘角。（小學：兩角度數和為 90 度。）
對頂角	兩直線相交而成不相鄰的兩角。兩對頂角相等。
銳角三角形	三個內角皆為銳角的三角形。
鈍角三角形	有一個內角為鈍角的三角形。
直角三角形	有一個內角為直角的三角形。
等腰三角形	有兩邊相等的三角形。此相等的兩邊稱為腰。兩腰所成的角，稱為等腰三角形的頂角，另外兩角稱為底角。若頂角為直角則稱為等腰直角三角形。
畢氏定理	直角三角形斜邊平方等於兩股平方和，又稱商高定理或勾股定理。
平行四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形。
菱形	四邊等長的四邊形。
箏形	有兩組鄰邊相等的四邊形。
梯形	有一組對邊（稱為上底與下底）平行的四邊形。非上底與下底的兩邊，稱為梯形的腰。
等腰梯形	兩腰等長的梯形。
矩形(長方形)	四個角均為直角的四邊形。
正方形	四個角均為直角且四邊等長的四邊形。
多邊形對角線	多邊形內一頂點和一不相鄰頂點的連線段。除非特別聲明，多邊形皆指凸多邊形，即周界上任兩點相連之線段皆落在多邊形之內。
多邊形內角	多邊形內由一頂點和兩夾邊所連成的角。
正多邊形	每邊等長之多邊形。共有 k 邊時，又稱為正 k 邊形。
多邊形外角	若一內角小於 180 度時，由此角一邊向頂點外側所做的角。若一內角大於 180 度時，不定義外角。
垂直	平面上相交之兩直線，以交點為頂點所成的四個角之一為直角時，兩直線互相垂直。空間中相交之兩直線，在其所共的平面上形成直角時，也稱為互相垂直。空間中相交的直線與平面，當前述直線與平面上過交點之所有直線互相垂直時，稱該直線與平面互相垂直。空間中相交的兩平面，各平面上與交線垂直相交於同一點的兩直線互相垂直時，兩平面互相垂直。
垂足	互相垂直之兩直線的交點，稱為彼此的垂足。空間中互相垂直的直線與平面之交點，稱為直線在平面上的垂足。
正射影	在平面上，給定一點 P 和一直線 L，過 P 且垂直於 L 的直線與 L 之交點，稱為 P 在 L 上的正射影點；一平面圖形 Γ 上的所有點在 L 上的正射影點，稱為 Γ 在 L 上的正射影。在空間中，給定一點 P 和一平面 F，過 P 且垂直於 F 的直線與 F 之交點，稱為 P 在 F 上的正射影點；一空間圖形 Γ 上的所有點在 F 上的正射影點，稱為 Γ 在 F 上的正射影。正射影皆可簡稱為射影。
平行	平面上兩直線沒有交點，稱此兩直線互相平行。空間中兩直線若共平面且沒有交點，也稱為

	互相平行。
平面坐標系	在平面上設定兩條互相垂直的數線，規定其交點為兩數線的原點，依慣例其中一條為橫軸，另一條為縱軸，且橫軸的正向到縱軸的正向為逆時針的移動；除非特別聲明，一般假設兩軸的單位長相等。已設定坐標系的平面，稱為坐標平面。橫軸上方(不含橫軸)稱為上半平面，下方稱為下半平面。兩軸將平面割成的四個區域(不含兩軸)，從橫軸正向與縱軸正向為邊界的區域開始，逆時針依序稱為第一、第二、第三、第四象限。
直角坐標	除非特別聲明，一般指坐標平面上一點 P 在橫軸、縱軸上的正射影點的坐標，依慣例記為有序對 (x, y)，其中 x、y 依序為橫軸、縱軸上的坐標。
周長	一平面圖形周界之長度。
尺規作圖	利用直尺、圓規繪製幾何圖形，且操作程序中不涉及線段長與角之測量者，稱為尺規作圖。
中點	線段上一點到兩端點等距離，稱該點為此線段的中點。
垂直平分線	過一線段中點且垂直於該線段的直線，稱為前述線段的垂直平分線，又稱為中垂線。
角平分線	將一角分成兩相等角的線稱為角平分線，又稱分角線。
全等	兩圖形可完全疊合，稱兩圖形全等。相對應之點、邊、角稱為對應點、對應邊、對應角。
相似	一圖形經縮放後與另一圖形全等，則稱此兩圖形相似。縮放後相對應之點、邊、角稱為對應點、對應邊、對應角。
對稱點 對稱圖形	除非特別聲明，一般指直線對稱，簡稱線對稱。給定兩點與一直線，該直線為以兩點為端點之線段的中垂線時，稱兩點對稱於該直線，它們互為對稱點。一圖形之所有點對一固定直線的對稱點，稱為該圖形的對稱圖形。一圖形與其對稱圖形全等時，該圖形本身也稱為對稱圖形。
對稱軸	若兩圖形或一圖形對一直線線對稱，則此直線稱為對稱軸，相對應之點、邊、角，則稱為對稱點、對稱邊、對稱角。
截線	在同一平面上，直線 L 分別與直線 M、N 相交於不同兩點，L 叫做 M 與 N 的截線。 
同位角	上圖中，∠1 和∠5，∠2 和∠6，∠3 和∠7，∠4 和∠8 分別稱為同位角。
同側內角	上圖中，∠3 和∠5，∠4 和∠6 分別稱為同側內角。
內錯角	上圖中，∠3 和∠6，∠4 和∠5 分別稱為內錯角。
比例線段	當四個線段中，兩個線段的比等於另兩個線段的比時，此四個線段稱為比例線段。
截面、剖面 截痕	空間中的形體被一平面切成兩份時，新造成的兩個彼此全等的平面圖形之任一個，稱為截面或剖面。給定一參考基準之水平面時，平行於水平面的截面稱為橫剖面，垂直於水平面的截面稱為縱剖面。空間中的形體與一平面的交集，在該平面上所成的圖形，稱為形體的截痕。
三角形中線	三角形一頂點和對邊中點的相連線段。
三角形重心	三角形三條中線的交點。
圓	平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓。前述固定點稱為圓心，以圓心和圓上

圓周 圓盤	一點相連的線段稱為半徑，前述距離稱為半徑長，亦簡稱為半徑。圓以及其內部的所有點（與圓心之距離小於等於半徑的點），稱為圓盤；前述之圓則為圓盤的周界，故又稱為圓周。圓可以指圓周或圓盤，須由前後文決定為何者。
弦、直徑	圓周上任兩相異點的相連線段。包含圓心的弦稱為直徑，直徑長亦簡稱為直徑。
圓周率	圓周長與直徑之比值成為圓周率，常用的近似值為 3.14。
弦心距	圓心到弦之中點的距離。　　（此時還沒有一般的點線距離觀念。）
弧	除非特別聲明，一般指圓弧，亦即圓周的一段。
弓形	由一弦和一弧所圍的圖形。
扇形	圓的兩半徑和一弧所圍成的圖形。
圓心角	以圓心為頂點兩半徑為邊所組成的角。
圓周角	圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角。
切線	針對圓而言，與圓共平面且僅交於一點的直線，稱為該圓的切線，前述交點稱為切點。一般而言，在曲線上固定一點，當包含該點在內的局部範圍越縮越小時，若曲線圖形越來越逼近一條通過該點之直線，稱該直線為曲線的切線，而前述之點為切點。
（兩圓）公切線	同時和兩圓相切的直線。
弦切角	由過圓上同一點的弦和切線所夾的角。
外接圓	過一多邊形所有頂點的圓，稱此圓為多邊形的外接圓。反之，前述多邊形稱為該圓的內接多邊形。
內切圓	多邊形內部中，與各邊相切的圓，稱為多邊形的內切圓。反之，前述多邊形稱為該圓的外切多邊形。
外心	若一多邊形有外接圓，則外接圓的圓心稱為此多邊形的外心。外心為各邊垂直平分線的交點。
內心	若一多邊形有內切圓，則內切圓的圓心稱為此多邊形的內心。內心為各角平分線的交點。
廣義角 同界角	在坐標平面上設定任一以原點為端點之射線 P，令 P 與橫軸正向射線所成之平角或劣角為 x。當 P（端點除外）落在上半平面或橫軸上時，周角之任意整數倍加上 x，或者當 P 落在下半平面時，周角之任意整數倍加上 $-x$，皆為 P 之廣義角。射線 P 稱為廣義角的終邊，同一終邊的廣義角，互為同界角。
有向角	以正的角度表示逆時針轉動、負的角度表示順時針轉動的廣義角。
輻角	坐標平面上一點 P（異於原點），以原點連接點 P 之射線為終邊的廣義角，稱為該點的輻角。原點的輻角可以是任意角。複數之輻角以其在坐標平面上對應點的輻角規定之。
主輻角	又稱為輻角的主值，意為在 0 度與 360 度（不含）之間（或等價的弧度量），或者在 -180 度（不含）與 180 度之間（或等價的弧度量），取輻角的值。
仰角、俯角	坐標平面上一通過原點的直線 L，若 L 有一部分落在第一象限，則它與橫軸正向所夾的銳角為 L 的仰角；若 L 有一部分落在第四象限，則它與橫軸正向所夾的銳角為 L 的俯角。橫軸的仰角規定為零角，縱軸的仰角規定為直角。一般直線的仰角或俯角，則規定為其通過原點之平行線的仰角或俯角。若採用有向角，則負的角度意為仰或俯的相反，例如 -30 度的仰角意為 30 度的俯角。
正方體	共有六面，每面均為全等之正方形的空間形體，為正四角柱的其中一種，又稱為正六面體。

長方體	共有六面，相鄰兩面皆垂直，每面皆為長方形或正方形；為直四角柱的其中一種。
直柱體	在某一組平行面上之截面皆為全等平面圖形的空間形體；當前述截面為兩個表面時，稱為柱體的底面或上底、下底。兩底面之對應點相連的線段落在柱體上，且垂直於底面。前述所有線段形成柱體的側面。
斜柱體	除了兩底面之對應點相連的線段不垂直於底面以外，符合其他直柱體條件的空間形體。
直三角柱	底面為三角形之直柱體，又稱為稜鏡或楔形。除非特別聲明，三角柱即指直三角柱。
正多角柱	底面為正多邊形的直柱體；當底面為正 k 邊形時，又稱為正 k 角柱。
直多角柱	底面為多邊形的直柱體；當底面有 k 邊時，又稱為直 k 角柱。
直圓柱	可以指直圓柱體或直圓柱面，須由前後文決定為何者。直圓柱體：上下底為兩全等圓盤的直柱體。直圓柱面：直圓柱體上下底以外之曲面，亦即直圓柱體的側面。除非特別聲明，圓柱即指直圓柱。
錐體	給定一平面圖形，稱為底面，以及平面外一點，稱為頂點。連接頂點與底面周界之每一點的線段，形成一個曲面，該曲面與底面所圍成的空間形體，稱為錐體。前述曲面稱為錐體的側面。
正四面體	共有四面，每面均為全等之正三角形的空間形體，亦稱正三角錐。
直四角錐	底面為正方形或長方形，頂點在底面之正射影為底面中點（兩對角線交點）之錐體。
正多角錐	底面為正多邊形，且頂點在底面之正射影為底面外心之錐體。當底面有 k 邊時，又稱為正 k 角錐。正四角錐又稱為金字塔。
直圓錐	可以指直圓錐體或直圓錐面，須由前後文決定為何者。直圓錐體：底面為圓盤，且頂點在底面之正射影為圓心的錐體。直圓錐面：直圓錐體的側面。除非特別聲明，圓錐即指直圓錐。連接頂點和底面圓周上任一點的線段，稱為圓錐的母線。頂點和底面任一直徑之兩端點形成的角，稱為圓錐的頂角。通過頂點與底面圓心的直線，稱為圓錐的對稱軸。
對頂錐	對稱軸為同一直線、僅相交於頂點且頂角相等的兩個直圓錐。
表面積	一空間形體的所有面的面積總和。
側面積	柱體或錐體的側面面積。
極坐標	坐標平面上一點 P，以其到原點之距離 r 和其輻角 θ 之有序對 $[r,\theta]$ 寫成的坐標。此時，原點亦稱為極點。
代數	
等量公理	當等號左右兩邊相等時，於等號兩邊各加、減、乘或除以同一個數(不可同時除以 0)，等號兩邊仍會維持相等。
移項規則	在等式中，將一個數或未知數從等號的一邊移到另一邊應遵守：(1)加換成減；(2)減換成加；(3)乘換成除；(4)移換成乘等規則。 不等式的移項規則原則上相同，不過將「負」的乘數或除數，移至另一邊時，不等號必須轉向，例：若 $-3x<6$，則 $x>6\div(-3)$，即 $x>-2$。
函數	在 A、B 兩組資料中，如果給定 A 組的一個資料，就能決定 B 組的一個資料，就稱 B 是 A 的一個函數。
線型函數	函數圖形為直線的函數，稱為線型函數，包括常數函數和一次函數。
多項式	由數和文字符號進行加法和乘法運算所構成的算式，稱為多項式。

	例：$3x, x+4, \frac{1}{6}x-5, x^2+1, \ldots$。
係數	**多項式中，變數以外的部分連同其前面的加減符號合稱為係數。** 例：x^2-3x+4，二次項的係數為 1，一次項的係數為 -3，零次(常數)項的係數為 4。
常數項	多項式中，不含變數的項稱為多項式的常數項。
多項式的次數	多項式中，係數不為 0 的最高次項的次數稱為多項式的次數。
一元一次式	$ax+b$，其中 a, b 為常數，$a \neq b$。
二元一次式	$ax+by+c$，其中 a, b, c 為常數，同時 a, b 不能同時為 0。
一元二次式	ax^2+bx+c，其中 a, b, c 為常數，$a \neq 0$。
分離係數法	兩多項式的四則運算中，只寫出各項係數，待運算結束後，再將結果以多項式的形式呈現。
解	滿足方程式或不等式的數，稱為解。
判別式	一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式，常以 $D=b^2-4ac$ 代表，依判別式的數值為正或負或零可以判斷根的性質。
統計與機率	
次數	各筆或各組資料出現或發生的「次數」、「人數」等。
相對次數	各筆或各組資料出現或發生的次數除以全部次數的總和。
累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的次數。
相對累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的相對次數。
平均數	所有資料的總和除以總次數，即所有資料的平均值。
中位數	第 50 百分位數，通常表示比這筆或這組數大和比這筆或這組數小的資料各佔一半。
眾數	出現次數最高的一個或一組數。
四分位數	第 25、50、75 百分位數也分別被稱為第 1、第 2、第 3 四分位數，第 2 四分位數又常被稱為中位數。
百分位數	各筆或各組資料的相對位置，表示有百分之多少的資料比該筆或該組資料的數要小。
列聯表	呈現資料兩不同屬性分類之計數或頻率之二維表格。
全距	資料中最大數與最小數的差。
四分位距	第 3 四分位數與第 1 四分位數的差。
機率	一個事件會發生的機會；機率常以百分率或分數來表示。
長條圖	以長條狀圖形高度或長度代表資料量的統計圖形，又稱 bar chart，其中各長條間並不相連接。
折線圖	以直線連接相鄰兩資料點的圖形。
圓形圖	以圓內各扇形面積代表資料統計量的圖形，又稱 pie chart。
直方圖	以長條狀圖形高度代表資料量的統計圖形，又稱 histogram，其中各相鄰長條間彼此相連接。
盒狀圖	以盒狀圖形表現最大數、最小數、第 1、第 2、第 3 四分位數位置的圖形，又稱 box chart 其中中間方盒的資料約佔 50%。

附錄三　108 數學課綱之計算機規格說明

附錄三：108 數學課綱之計算機規格說明

一、前言

本課綱自國中階段（7 年級）起，要求計算機（calculator）融入數學之教材、教法、評量。本文所謂之「計算機」皆指掌上型計算機，或稱電子計算器。以下說明相容於國民中學與普通高中之數學科「設備基準」，也符合考選部公告之「國家考試電子計算器措施」。

二、用途

課綱規劃計算機融入數學教學與評量，成為數學教育的一部份，培養學生正確使用工具的素養。計算機可以在適當的時機取代筆算或心算，此外，它還具有更積極的數學教育意義。在適當的時機，計算機促成探究、觀察實驗、歸納臆測、合作討論等教學方法的設計與執行，這本《課程手冊》已經提供了基本的建議與範例。在應用與評量的場合，計算機的操作，使得命題更能夠貼近真實的生活、職場、社會或科技情境。計算機的融入教學與評量，協助教師更容易達成素養導向的教學目標。

三、國中階段之學習所需

為融入國中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（國中必備功能）：

- 輸入整數與小數、小數（含正負號）、輸入科學記號數字。[1]
- 切換 $\pm$、倒數（$1/x$）。
- 四則運算（+、-、×、÷）、百分比（%）、平方根（$\sqrt{\ }$）。
- 調整四則運算之計算順序（括號）。
- 記憶加法功能（MR、MC、M+、M-）。
- 度度量之銳角三角比（sin、cos、tan）。

未列於上述必備功能，且未列於以下（第五節）「不得具備」之功能者，委請教師或學校斟酌是否使用。

四、普通高中階段之學習所需

為融入普通高中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（普高必備功能）：

- 所有國中必備功能。

[1] 計算精度在後面說明。

- 常數 π 。
- 平方（ x^2 ）、次方（ x^y ）、次方根（ $\sqrt[y]{x}$ ）。
- 角的弧度量與度度量互相轉換、度度量的十進制和六十進制轉換。
- 弧度量與度度量之廣義角三角比（sin、cos、tan）、反三角（ $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ ）[2]。
- 常用與標準的指數、對數（ 10^x 、log、 e^x 、ln）。
- 階乘（n!）。

雖然數據功能有助於課堂學習，卻引進了數據儲存功能。而這項功能，是引起考試主管機關疑慮的關鍵項目之一（請看下一節）。因此，計算機可否具備數據功能，也許值得將會考、學測或指考的規範考慮在內。

未列於上述必備功能，且未列於以下（第五節）「不得具備」之功能者，委請教師或學校斟酌是否使用。

五、考試的顧慮

完整的課程包括評量，所以，融入計算機的數學課程，必須適度地容許學生在考試時使用計算機。計算機只要滿足各階段的學習需求，就能滿足考試之所需。為了支援考試，計算機並不需要更多功能，反而不能有過多功能。為維護數學考試的公平性，以下列舉計算機不得具備的功能：

- 不得具備輸入文字的功能。
- 不得具備繪圖功能。
- 不得具備程序記憶功能，不能提供使用者自訂函式。
- 不得具備 MR、MC、M+、M- 以外的數值記憶功能（請看下一節詳細說明）。
- 不得具備通訊、錄音、攝錄影功能。
- 不得發聲、震動。
- 不得提供任何外插或內部擴充功能。
- 不得具備內建鍵盤以外的任何輸入功能。
- 不得具備內建屏幕以外的任何輸出功能。
- 不可外接電源（容許太陽能）。

[2] $\sin^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ 的值 θ 滿足 $-90° \le \theta \le 90°$ ， $\cos^{-1}$ 的值 θ 滿足 $0° \le \theta \le 180°$ ，或等價於前述範圍的弧度量。

六、採購的顧慮

數學課程融入計算機的理念之一，是培育正確使用工具的素養。計算機應當成為學生的普通常備文具，就像筆和尺一樣，可隨身攜帶、隨時自然地使用。

在前述意義之下，學生的智慧型手機或個人電子裝置，皆能安裝適當的應用程式（App）而成為滿足學習需求的計算機。在教室裡，乃至於在教師自辦的考試時，只要教師和學生達成協議，使用任何有效的工具都可以；甚至包括繪圖、製表、程式設計，只要有助於達成學習目標，皆應使用。但是，課程綱要考慮以下實務需求，做出計算機的建議：

(1) 全體學生都買得起，人手一機，人人有公平的學習機會[3]。

(2) 儘量維持全班學生一致的操作介面、操作流程和計算結果，以免加重課堂管理的負擔。

(3) 課程設計包含評量，所以必須在考試（含校內的段考）正常使用工具。

課程綱要建議學生使用滿足前面說明的計算機。目前還沒有針對國中、高中數學課程需要而設計的專用計算機，而考選部核定的「第二類」國家考試電子計算器，都滿足前述的教學需求及考試顧慮。合格的機型包括以下四款[4]：

E-More FX-127　　FuhBao FX-180　　Canon F-502G　　CASIO FX-82Solar

以上四款計算機都具備「一維數據」功能，所以看起來**似**乎擁有記憶功能，不符合考選部自己規定的「不得具備 MR、MC、M + 、M - 以外的數值記憶功能」。但是，仔細看 FuhBao FX-180 和 CASIO FX-82Solar 的說明書，發現這兩款計算機不能「調出」（Recall）或「編輯」（Edit）輸入的數據，只能輸入數據、即時刪除、顯示所有數據的統計值。由此可見，考選部認為這種計算機不算是「擁有記憶功能」。這個認定標準，值得參照。

計算機以整數或小數呈現數值時，應可顯示至少 8 位數字；以科學記號呈現時，係數部份應有至少 7 位數字，而指數部分則應至少介於 –99 和 99 之間。支援數學學習的計算機，對於有效位數的需求並不高，即使 7 位已經足敷使用。計算機顯示的最後一位數字，可能是正確的十進制數字，也可能是其下一位數的四捨五入值。例如 $2\div3$ 的結果，顯示 0.66666666 或者 0.66666667 都是正常的反應，又例如 $2\div300$ 以科學記號顯示 6.6666666×10^{-3} 或者 6.6666667×10^{-3} 也都是可以接受的。學生對於這些數值的理解，寫在相關學習內容的說明裡，

[3] 除了個人採購以外，各級學校的數學科設備標準，將包含採購計算機的建議，而教育部也將另有配套措施。這些支援系統，都不在本《課程手冊》的範圍內。

[4] 民國 106 年 10 月 11 日，在「比價撿便宜」網站上查到的最低價（新台幣）：E-More 110 元，FuhBao 169 元，Casio 350 元，Canon 699 元。

不在此贅述。

七、課堂管理的顧慮

為降低課堂管理的複雜度，班級最好能使用一樣的機型，但教師最好還是能熟悉幾種不同的計算機型式。以下列舉建議的注意事項。

- 負數的輸入法：有些機型的「 - 」可兼「負」和「減」兩種功能，有些機型的「 - 」僅為「減」號，另外有相反數按鍵。這兩種機型輸入負數的方法不同。
- 計算機的輸入法可分兩大類：前置 vs 後置。以 $\sqrt{2}$ 為例，「前置」類先按 $\sqrt{\ }$ ，螢幕上出現一個空的平方根，再按 2 和「 = 」就會算出結果；而「後置」類先按 2 再按 $\sqrt{\ }$ 就算出結果了。
- 如前一節所述，計算機顯示的最末一位數並不可靠：它可能是正確數值，也可能是下一位數的四捨五入。只要在學習與評量時，不要指定太多有效位數，例如僅指定 2 位、3 位、4 位或 5 位有效位數，就不會惹上計算機末位數的麻煩。
- 用次方（ x^y ）或次方根（ $\sqrt[y]{x}$ ）做負數的計算時，例如 $(-8)^{0.33333333}$ 或者 $(-8)^{(1\div 3)}$ 或者 $\sqrt[3]{-8}$ ，結果可能是 -2 也可能導致錯誤訊息。不論如何，高中數學課程約定不討論負數的次方根，也不討論負數的非整數次方。
- 發生 overflow，也就是計算結果超過計算機容許的最大正數或最小負數時，產生錯誤訊息或者 $\pm$ Inf。
- 發生 underflow，也就是計算結果超過計算機容許的最小正數或最大負數時，一律產生 0 或者產生 0 或 -0 。
- 1/0、$\log 0$ 、$\tan 90^\circ$ 等運算可能產生錯誤訊息，也可能產生 Inf。(Inf 是 Infinity 的意思。)
- 其他錯誤或無定義狀況，可能產生錯誤訊息，也可能產生 NaN。(NaN 是 Not a Number 的意思。)
- 最後，為確保在考場使用計算機的安全性，可優先考慮能具體提供以下保證的機款：
- 關/開電源將清除所有記憶的數據。
- 機體若曾經被開啟，一定會留下痕跡。

附錄四　必修 A 類、B 類課程與選修數甲、數學乙課程差異對照表

附錄四：必修 A 類、B 類課程與選修數學甲、數學乙課程差異對照表

一、十一年級必修數學 A 類、B 類課程差異對照表

主要課題	A 類必修	B 類必修
三角函數	弧度量、sin, cos, tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型(cot, sec, csc 之定義與圖形※)。正餘弦的和角、半角公式，同頻率正餘弦波的疊合。	弧度量、sin 函數的圖形、週期性，週期現象的數學模型。
指數函數與對數函數	指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型。對數律、指數與對數的換底，常用對數函數的圖形。指對數在科學和金融上的應用。	指數函數與對數函數及其生活上的應用。 連續複利與 e、自然對數的認識。
空間概念	空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係，三垂線定理，空間坐標系。	同左，但無「三垂線定理」。 利用長方體的展開圖討論表面上的兩點距離，認識球面上的經線與緯線。
向量	同右，增加面積與行列式。並增加空間向量的線性組合，內積與外積，三角不等式，柯西不等式。	平面向量的線性組合，正射影與內積，兩向量夾角。
線性代數	二元一次、三元一次聯立方程組的線性組合意涵。矩陣運算，反方陣，平面上的線性變換，轉移方陣。	二元一次聯立方程組的線性組合意涵。將矩陣視為資料表，在此意涵之下的矩陣運算。
不確定性	主觀機率與客觀機率，獨立性、條件機率與貝氏定理，以及它們的綜合應用。	同左，但各種複合事件以兩個事件為原則。 列聯表與文氏圖的關聯。
空間中的解析幾何	三階行列式、平面方程式、空間中的直線方程式，以及它們的綜合應用。	無。
素養課題	無。	**圓錐曲線：**由平面與圓錐截痕，視覺性地認識圓錐曲線，及其在自然中的呈現。 **平面上的比例：**生活情境與平面幾何

主要課題	A 類必修	B 類必修
		的比例問題（在設計和透視上）。

備註：(1) ※表示進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。

(2) 表格內淺橙色網底的內容，表示 B 類比 A 類多出來的部分。這些課題，有些會在選修數學甲或數學乙學到，有些則是 A 類課程的特殊化應用：例如球面上經緯線，是空間概念與三角比、正射影的應用。

二、十二年級選修數學甲、數學乙差異對照表

主要課題	數學甲	數學乙
基本精神	為自然科學與工程技術相關領域之大學階段學習做準備。除了教學內容的差異之外，範例與習題皆應依此基本精神而取捨。	為社會科學與財務、金融、管理相關領域之大學階段學習做準備。除了教學內容的差異之外，範例與習題皆應依此基本精神而取捨。
函數	同右。另有反函數之數式演算與圖形對稱關係，一般性的合成函數。	函數的定義、四則運算，並有圖形的對稱關係（奇偶性），凹凸性的意義。認識分段定義函數與基本的合成觀念。
無窮與極限	同右。另有無窮數列的一般性極限概念，而且函數的範圍增加指對數、三角、絕對值函數和分段定義函數。	無窮等比級數（含循環小數），多項式函數、簡單有理函數、分段函數的連續性，它們在實數 a 的極限。極限的運算性質，介值定理，夾擠定理。
微分	同右。另有簡單代數函數之導函數。	導數與導函數的極限定義，切線與導數，多項式函數之導函數，微分基本公式及係數積和加減性質。
	高階導數，萊布尼茲符號，微分乘法律，除法律，連鎖律。函數的單調性與凹凸性判定，一次估計，基本的最佳化問題。	二階導數，萊布尼茲符號。函數的單調性與凹凸性判定，基本的最佳化問題，導數的邊際意涵。
積分	黎曼和與定積分的連結，微積分基本定理。	微積分基本定理。
	多項式函數的反導函數與定積分。定積分在面積、位移、總變化量的意涵。	一次與二次函數的反導函數與定積分。定積分在面積與總變化量的意涵。
	連續函數值的平均，圓的面積，球的	連續函數值的平均，總量與剩餘意涵。

	體積，切片積分法，旋轉體體積。	
線性規劃	無。	目標函數為一次式的極值問題，平行直線系。
機率與統計	同右。另有幾何分布。	離散型隨機變數的期望值、變異數、標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。二項分布的性質與參數。
二次曲線	拋物線、橢圓、雙曲線的標準式，橢圓的參數式。	無。
複數	同右。另有複數的極式，複數運算的幾何意涵，棣美弗定理，複數的 n 次方根，根與係數關係。	複數平面，複數的四則運算與絕對值。方程的虛根，代數基本定理。

十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校
數學領域課程綱要課程手冊研發計畫成員

總計畫主持人：國家教育研究院課程及教學研究中心 洪詠善主任

總計畫共同主持人：靜宜大學教育研究所 黃政傑終身講座教授(跨領域小組召集人)

國立中正大學教育學院 蔡清田院長(核心素養工作圈召集人)

淡江大學教育學院 潘慧玲院長(議題工作圈召集人)

國立中正大學師資培育中心 林永豐教授(核心素養工作圈委員)

國家教育研究院課程及教學研究中心 范信賢副研究員(退休)

國家教育研究院課程及教學研究中心 李駱遜副研究員

國家教育研究院課程及教學研究中心 蔡曉楓助理研究員

國家教育研究院課程及教學研究中心 林明佳助理研究員

國家教育研究院課程及教學研究中心 鄭章華助理研究員

國家教育研究院課程及教學研究中心 吳文龍助理研究員

數學領域課程手冊研發成員

計畫主持人：國立臺灣大學數學系 張鎮華名譽教授

計畫共同主持人：國立臺南大學應用數學系 葉啟村教授

國立臺灣大學數學系 翁秉仁副教授

國立中央大學數學系 單維彰副教授

研究員：國家教育研究院課程及教學研究中心 鄭章華助理研究員

研發成員：(按姓氏筆劃排序)

臺北市立中山女子高級中學	吳汀菱教師
財團法人誠致教育基金會	林淑君教師
苗栗縣立信德國民小學	張煥泉主任
臺北市立三民國民中學	莊國彰校長
花蓮縣吉安國民小學	陳俊瑜教師
國立臺灣大學	楊一帆教授
國立勤益科技大學基礎通識教育中心	劉柏宏教授
國立高雄師範大學附屬高級中學	歐志昌教師
臺中市立中華國民小學	盧銘法教師
國立政治大學附屬高級中學	賴政泓教師
臺北市立第一女子高級中學	蘇麗敏教師

研究助理：國家教育研究院課程及教學研究中心 王瀚、江增成專案助理

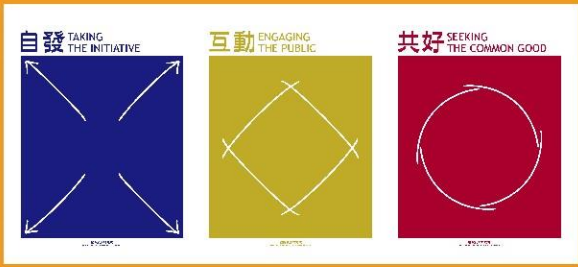
電子全文可至國家教育研究院網站 http: //www.naer.edu.tw 免費取用，歡迎各界參考利用

※本院保有本書所有權，欲利用本書全部或部份內容，需徵求同意或書面授權，引用時請註明出處

十二年國民基本教育課程綱要

國民中小學暨普通型高級中等學校

數學領域課程手冊



國家教育研究院
National Academy for Educational Research
www.naer.edu.tw