排列組合

教師手冊

教材設計理念

1 教材架構

本教材先從歷史與生活的角度切入，期望學生瞭解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。接著透過一連串的活動發展概念與程序性的知識，活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論，除了活動、任務之外，編者設計評量問題，希望學生透過解題實作，深化教材中的概念與知識。

2 教材設計想法

⑴第一單元編者選擇了介紹排列組合的歷史與生活上的相關應用，除了希望學生的學習可以更緊密連接排列組合的歷史與應用的脈絡之外，更希望能提升學生數學閱讀的能力。

⑵編者先從重複排列出發，以生活應用題引起動機，並結合前一單元的乘法原理，介紹重複排列。

⑶在直線排列的教法設計，有別於一般教科書。鑒於學生剛開始學習「排列」時，不一定有「位置」的想法，編者以「排入」的方式得出：n 個不同的物件排成一列，共有 $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n=n!$。有了 $n!$ 的觀念之後，並不急於介紹符號 P^n_k，而先進入「有相同物的排列」的計算，深化學生對乘法原理、除法原理與階乘（$n!$）觀念的掌握。

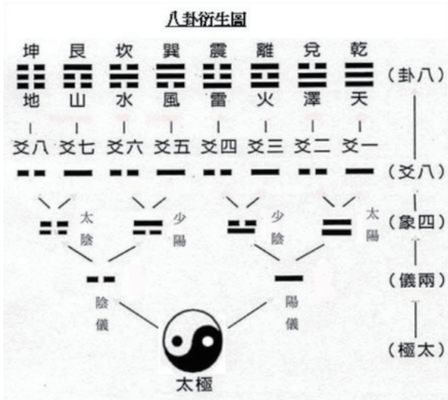
透過「有相同物的排列（不盡相異物排列）」觀念的建構，$P^5_3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=60$ 的學習脈絡很自然的透過下列方式進行：五人取三人排列，每一種排法勢必有兩個人不用排到，現以 a、b、c 各別表示第 1、2、3 位出場的順序，並以 x 表示不用出場，現在先固定五人的順序，則 $abcxx$ 的每一種排列就相當於一種出場方法，於是共有 $\dfrac{5!}{2!}=60$ 種出場的順序。即 $P^5_3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=60$。而組合數 C^5_3，就相當 $oooxx$ 的排列數，即 $C^5_3=\dfrac{5!}{3!2!}$。

⑷傳統的排列組合的教學中太多題型與策略技巧，使學生產生很大的挫折感，進而影響學生的學習動力。我們基本以最少的觀念希望只透過階乘（n！）與「有相同物的排列（不盡相異物排列）」觀念的掌握，其實背後基本上為樹狀圖與乘法原理，就可掌握「排列」與「組合」的核心！

⑸請教師理解每一活動為一教學模組，教師可根據學生程度、現場教學狀況與教學時數等，調整所布之題的功能，或可作為再一次講解以深刻印象，或作為課堂立即評量或是作業等。

⑹許多活動的任務陳列，有古有今，希望讓讀者有「貫古通今」之感；在排列組合的學習過程中，「每一個數學式子，背後都有其故事」，我們依此「式境合一」概念，對照解析幾何學習中的「數形合一」，設計開放性問題、多元表徵與平行作業等輔助學習者透過討論，從不同面向思考數學概念或解題，建立更清晰的數學觀念；教師手冊中有些「補充練習題」，可作為學生補充練習或思考之用。

壹　歷史與生活



在中國，周易繫辭上說：「易有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦」。陰陽八卦以符號邏輯排列組合的科學面貌，在中國的歷史上流傳了幾千年，影響了黃道曆法、中醫學理論、占卜術等早與人們的生活息息相關。「易」是變化的意思，「太極」指萬物的本源，相傳伏羲氏首畫一長線「—」為陽爻，次畫二短線「－－」為陰爻，象徵陰陽二氣，是為「兩儀」。若每次取 2 個爻，有 $2^2=4$ 種不同的排列，即為「四象」；若每次取 3 個爻為一卦，則形成「八卦」；而「周易」進一步取兩個八卦上下組合構造出「六十四卦」。

北宋著名科學家沈括（1031－1095）的《夢溪筆談》中，考慮過在 19×19 個格點的圍棋棋盤上所有可能的不同布局的總數，他利用棋盤上每一個格點都有黑子、白子、空位三種可能出現的狀態，應用排列組合知識計算出圍棋不同局面總數是 3^{361}。

至清代，陳厚耀（1648－1722），受西方數學傳入中國，其中許多關於排列組合計算內容的影響，撰寫了〈錯綜法義〉一文，以系統化的方式通過具體的例題，來說明各種類型的排列組合問題的計算方法。例如，他舉例「串名」問題來論述「無重複排列」問題：

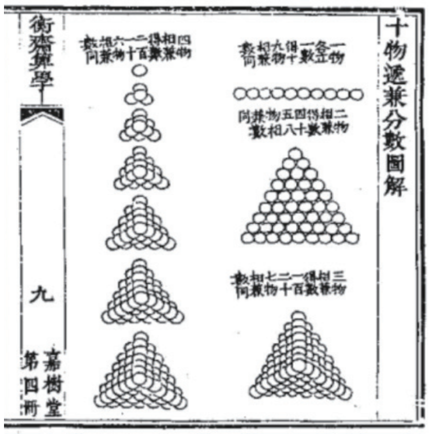
『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

而清代，汪萊（1768－1813）在著作《衡齋算學四》中稱組合理論為「遞兼數理」，經過自己的獨立刻苦鑽研，得出

$$C^n_m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}\text{、}C^n_m=C^n_{n-m}$$

等重要的組合關係式，他論證了組合數與傳統數學中的三角堆垛的關係，也與巴斯卡的工作有異曲同工之妙，為中國數學史上第一次以專題的形式探討組合的某些性質和計算公式。



汪萊的「十物遞兼分數圖解」，出自《衡齋算學》第四冊。可以清楚看出汪萊是透過三角垛來計算組合的。

教學補充・搭配學生手冊 P2

[教學活動安排]

老師導讀與解說歷史與生活部分，讓學生瞭解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。（摘自數學傳播十六卷三期民 81 年 9 月 *P*2，數學史在數學教育中的重要性，楊淑芬）

[教學注意事項]

1. 不要忽略歷史與生活部分而不教學。學習數學之目的不只在於訓練學生的思考能力，也要讓學生認識數學與生活的關係，及知道數學的來龍去脈，貫古通今，希望有助於提高學生的學習興趣。
2. 在第二節的任務中會以現代的觀點，處理本節中一些古代的數學問題。

在印度，排列組合問題的出現也是相當早的，據說在西元前 600 年左右，*Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？其答案是：單味 6 種，雙味 15 種，三味 20 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

另外，在西元前 200 年，*Pingala* 亦提到了從 n 個字母中，依次取 1，2，...，n 個字母，各有多少種方法的問題。據考證，印度人在六世紀時已經掌握了計算排列組合的一些基本公式。例如，大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出：16 種原料每次取 4 種，共有 1820 種取法。其次又提到一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，… 等，這樣總共有多少種不同開門的組合方法呢？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

隨著歐洲的文藝復興，排列組合的研究才開始在歐洲有了較快的發展，1494 年第一本涉及排列組合問題的印刷版著作出版，作者是義大利數學家帕奇歐里。而早期的機率理論的發展主要是討論古典機率問題，而古典機率的計算幾乎就是排列組合的具體應用，同時也促進了排列組合的進一步研究。最早進行這方面研究工作的首推義大利數學家塔塔利亞與卡當諾。之後，法國數學家巴斯卡與費馬，以及荷蘭數學家惠更斯等人都曾對排列組合作過研究。

西元 1713 年瑞士數學家雅各布．伯努利（*Jacob Bernoulli*，1654－1705），在其出版的著作《猜度術》中有系統的論述了排列組合，從而形成了近代的排列組合理論。上圖為 1994 年第 22 屆國際數學家大會在瑞士的蘇黎世召開，瑞士郵政發行的雅各布．伯努利的紀念郵票，郵票的圖案是雅各布．伯努利的頭像，及以他名字命名的大數定律及大數定律的幾何示意圖。

參考資料：

(1) 歐陽維誠，《周易的數學原理》，湖北教育出版社。
(2) *M.Kline*，《數學史－數學思想發展》，九章出版社。
(3) 劉雲章，《數學溯源－數學名詞的故事》。
(4) 李迪，《清代著名數學家汪萊及其數學成就－紀念汪萊逝世 180 周年》
(5) 朱家生、吳裕賓，《陳厚耀〈錯綜法義〉研究》
http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol5no1b.htm
(6) 《高中數學教學手冊》龍騰出版社

學生手冊 P3

教學補充・搭配學生手冊 P3

貳　排列組合

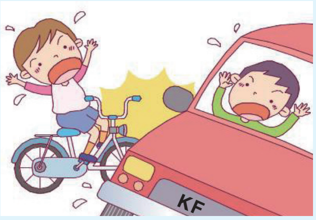
於前一節的單元學習中，已經學會了樹狀圖、加法原理、乘法原理及取捨原理；我們在日常生活中常會遇到一些有關排列的問題，利用以下的活動，複習乘法原理。

1 重複排列

以下我們藉由活動來認識重複排列。

活動 1 警方至多須清查多少輛汽車

1. 一輛汽車在公路上肇事後加速逃逸，據目擊者柯南指稱，只記得車牌號碼為 KFC－□□78，其中□為 0 到 9 的數字。聰明的你能否告訴警方至多只須清查多少輛就可以查出肇事汽車？



2. 承第 1 題，如果目擊者柯南，只記得車牌號碼為 D□□－5678，其中□為 A 到 Z 的英文字母。則警方至多須清查多少輛汽車？

1.
答：100 輛。
詳細解答參見右頁。

2.
答：676 輛。
詳細解答參見右頁。

活動一第 1 題中，0 到 9 的 10 個數字可以在兩個空格□□中重複出現的排列，以及第 2 題中，A 到 Z 共 26 個英文字母可以在兩個空格□□中重複出現的排列。像這樣排列時，如果相同的物件可以重複出現，這種排列就稱為**重複排列**。

學生手冊 P4

教學補充・搭配學生手冊 P4

❖ 活動 1

[教學活動安排]

1. 教師要引導學生把 0 到 9 的數字填入□□中。
2. 教師要引導學生把 A～Z 共 26 個英文字母填入□□中。
3. 教師要引導學生把自己融入活動的情境中。

[教學注意事項]

若有不了解的同學請他再回憶一下乘法原理。

【 活動 1 解答 】

1. 首先考慮第一個空格，有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十個數字可供選擇，所以有 10 種方法。
   接著考慮第二個空格，由於數字可以重複使用所以還是有
   0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十個數字可供選擇，如圖所示。

   □　　　□
   ↓　　　↓
   1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0　　1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0
   10 種選法　　10 種選法

   因此，由乘法原理知填完這兩個空格共有 $10\times10=10^2=100$ 種方法，
   即警方至多須清查 100 輛汽車。
2. 首先考慮第一個空格，有 A～Z 共 26 個英文字母可供選擇，所以有 26 種方法。
   接著考慮第二個空格，由於英文字母可以重複使用，所以還是有 26 個數字可供選擇，如圖所示。

   □ □
   ↓ ↓
   26 26

   因此，由乘法原理知填完這兩個空格共有 $26\times26=26^2=676$ 種方法，
   即警方至多須清查 676 輛汽車。

推廣問題

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有幾種排列的方法？答：m^n 種。

詳細解答參見右頁。

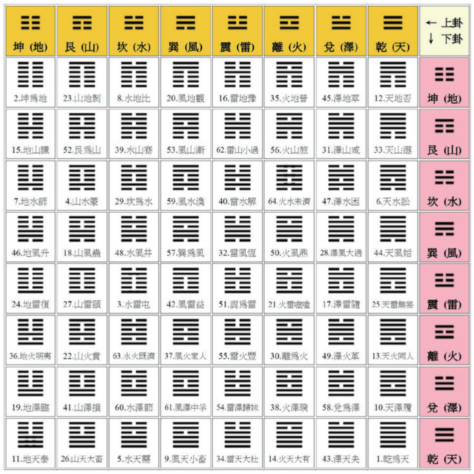
【重複排列】

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有 m^n 種排列的方法。

任務 1　古代的陽爻「一」、陰爻「－－」與八卦、六十四卦

請解釋在「周易」中的「八卦」與「六十四卦」的數量是如何產生的？詳細解答參見右頁。

八卦



六十四卦

補給站

「八卦」的八卦：

德國數學哲學大師威廉．萊布尼茲（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，1646 年 7 月 1 日－1716 年11 月 14 日）被稱為現代計算機基礎的二進位的發明者。據說萊布尼茲通過在中國的傳教士，得到了八卦圖，他領悟到只要把八卦中的陰爻代表 0，陽爻代表 1，就可以創立一種新的記數法：二進位。這一神話雖然已經被部分數學史家進行了批駁，但至今仍廣為傳播。

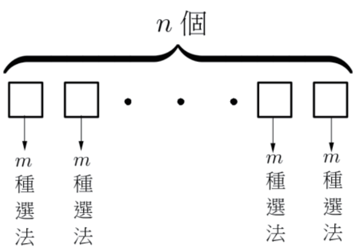
資料來源：*http://baike.baidu.com/view/18536.htm*

學生手冊 P5

教學補充・搭配學生手冊 P5

[推廣問題解答]

如右圖，



從 m 種不同的物件中，可以重複的取 n 個來排列時，

第一個物件，第二個物件，……，第 n 個物件都有 m 種取法；

所以依乘法原理可得排列總數為 $m\times m\times m\times\cdots\times m=m^n$ 種。

▶ 任務 1

[教學活動安排]

教師請學生回顧前面的歷史與生活中的相關說明，從歷史引入題目。

[教學注意事項]

若學生對「卦」不了解，教師可解釋：

利用「--」與「—」兩種符號，排成上中下三列（例如：☵），稱為一卦。

請先注意學生是否明瞭題意。

[任務 1 解答]

<u>伏羲氏</u>以陰「--」，陽「—」兩種符號，喻示大自然的相對現象。

⑴利用「--」與「—」兩種符號，排成上中下三列（例如：☵），

可排成 $2\times2\times2=8$ 個不同的圖象，稱為八卦。

⑵將⑴中圖象視為一體，並任選其中二卦，可重複選取，排成上下卦（例如：䷊），

則可排成 $8\times8=64$ 或 $2\times2\times2\times2\times2\times2=64$ 種可能的圖象，稱為六十四卦。

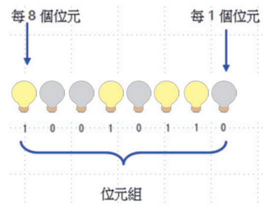
[教學活動安排]

老師可說明「八卦」的八卦：

中國古代陰陽八卦和由 17 世紀德國數學家萊布尼茲發明的二進位據說有密切的源流關係以增加趣味性與連結！

任務 2　現代的「0」、「1」與電腦位元（*bits*）、位元組（*Byte*）

電腦紀錄資料的最小單位稱為「位元（*bit*）」，每 1 個位元就是一個 0 或一個 1 的訊息，它可表示的資料量是 2 個。而我們將八個位元（*bits*）定義為一個「位元組（*Byte*）」。則



(1)一個位元組（*Byte*），即 8 位元，可以表示幾個不同的資料量？

(2)於 1984 由臺灣資策會工業局和 13 家業者所共同制定的編碼系統稱為「*Big*5 碼」，其中包含 5401 個常用字、7652 個次常用字及 408 個符號（含標點符號、注音符號、單位符號……），共 13461 個字，則需用幾個位元組（*Byte*）來表示才夠？(1)$2^8=256$（個）

(2)一個位元組可以表示 $2^8=256$ 個不同的資料量。

兩個位元組是 16 個位元，可以表示 $2^{16}=65536$ 個不同的資料量。

$2^8=256<13461<2^{16}=65536$，

因此以 2 個位元組（*Byte*）來表示就足夠。

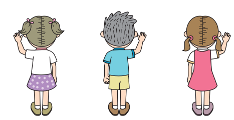
任務 3　平行差異化任務與數學擬題

1. 自動販賣機有 5 種飲料可供選擇（假設每一種的數量都超過 3 瓶），若甲、乙、丙三人欲各購買一罐飲料，則選購的方法有幾種？
2. 請以「甲、乙、丙三位學生及 5 罐飲料」為情境敘述，設計出答案為 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$ 的問題。

1. 設 5 種飲料代號分別為 a，b，c，d，e，如右圖

因為甲、乙、丙三人，每一個人都有 5 種飲料 a，b，c，d，e 可選擇，

所以有 $5\times5\times5=5^3=125$ 種選購的方法。



2. 參考範例：

將 5 罐不同的飲料，全部任意分給甲、乙、丙三位小朋友，則分法有 3^5 種。

【解法】

因為 5 罐飲料 a，b，c，d，e

每一罐都有 3 種分法（甲、乙、丙），

所以有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$ 種分法。

教學補充．搭配學生手冊 P6

▶任務 2

[教學活動安排]

1. 老師可說明：
   (1)當鍵盤輸入英文字母「A」時，電腦輸入系統即將「A」所代表的內碼（*ASCII* 碼是 01000001）輸入給儲存裝置，電腦內部的記錄是 0 與 1 的組合，即 01000001，此可符合電子元件的運作方式。
   (2)當電腦要輸出「A」時，同理輸出系統即將「A」所代表的內碼（*ASCII* 碼是 01000001）輸出給輸出裝置，輸出裝置再將 01000001 轉換成「A」，符合人類的運作方式。
2. 老師可補充介紹說明：記憶體的容量單位：

英文單位	中文名稱	容量(大小)
bit	位元	0或1(最小單位)
Byte	位元組	1Byte=8bits
KB(Kilo Byte)	千個位元組	1KB=1024Bytes
MB(Mega Byte)	百萬個位元組	1MB=1024KBytes
GB(Giga Byte)	十億個位元組	1GB=1024MBytes
TB(Tera Byte)	一兆個位元組	1TB=1024GBytes

【註】若為小寫的b則是bit的意思，而Byte的縮寫為大寫的B。

[教學注意事項]

1. 請先注意學生是否明瞭題意。
2. 若學生對「位元組」不了解，教師可利用右圖，每一個位元填入 0 或 1，引導學生思考。

↓ 每一個位元
□□□□□□□□
位元組

▶任務 3

[教學活動安排]

1. 第 1. 題教師可演示給學生觀看。
2. 第 2. 題為開放性問題，啟發思考增加趣味性，鼓勵分組討論或個人發表問題設計，並互相檢核答案是否正確。
3. 請學生畫出答案對應的樹狀圖。

[教學注意事項]

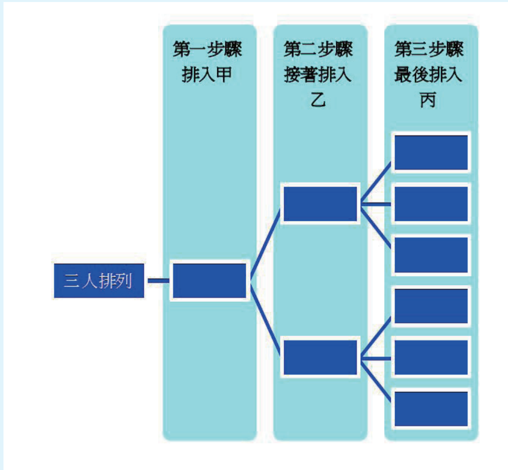
1. 若學生一時沒有方向，老師可提示往「人選物」或「物分人」去思考，這也是排列組合問題的重要解題思路。
2. 老師可提問 5 瓶飲料是否須完全相異或是可相同？並分析其中差異。
   (1)老師可提問每人是否可兼得？並分析其中差異。
   (2)老師可以輔助兩種對應圖示（樹狀圖），請學生比較說明，釐清答案是 3^5 或 5^3。
   (3)並讓學生了解當遇到實際問題分不清楚哪個為底數，哪個為指數時，可通過建立對應圖示來思考。

2 直線全取排列

活動 2 三人與四人排列的情形

1.【三人排列的情形】

三位總統候選人甲、乙、丙於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？

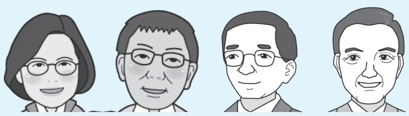


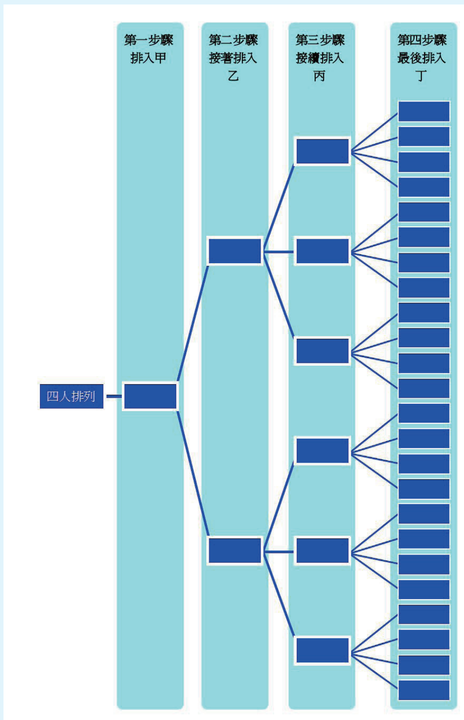
答：6 種。

詳細解答參見教師手冊 *P*16。

2.【四人排列的情形】

若有四位總統候選人甲、乙、丙、丁，於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？





答：24 種。

詳細解答參見教師手冊 *P*17。

教學補充・搭配學生手冊 P7

❖ 活動 2（第 1 題）

[教學活動安排]

1. 教師要引導學生把可能的情形填入樹狀圖中。
2. 教師要引導學生把自己融入活動的情境中。
3. 鼓勵學生提出不同解法。

[教學注意事項]

1. 若有缺少的同學請他再檢查一次，看看是否漏列了哪一組？
2. 若各步驟不是按照甲乙丙的順序，在更多人排列時是否能有系統的討論完成？
3. 特別採用「排入」的方式來引入 n ! 的原因有二：
   (1)對學生而言不一定剛開始就有「位置」的概念。
   (2)希望提供老師不同教法。

※ 詳細解答參見教師手冊 *P*16。

❖ 活動 2（第 2 題）

[教學活動安排]

1. 教師要引導學生把可能的情形填入樹狀圖中。
2. 教師要引導學生把自己融入活動的情境中。
3. 鼓勵學生提出不同解法。

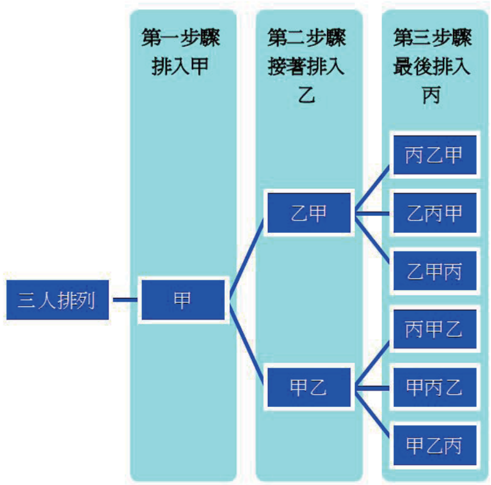
[教學注意事項]

1. 若有缺少的同學請他再檢查一次，看看是否漏列了哪一組？
2. 若各步驟不是按照甲乙丙丁的順序，在排列時是否能有系統的討論完成？

※ 詳細解答參見教師手冊 *P*17。

教學補充・搭配學生手冊 P7

❖ 活動 2 第 1 題解答



觀察上面的樹狀圖，我們也可以將它分成以下三個步驟來討論：

第 1 步驟：甲先出列站定位，有 1 種方法。

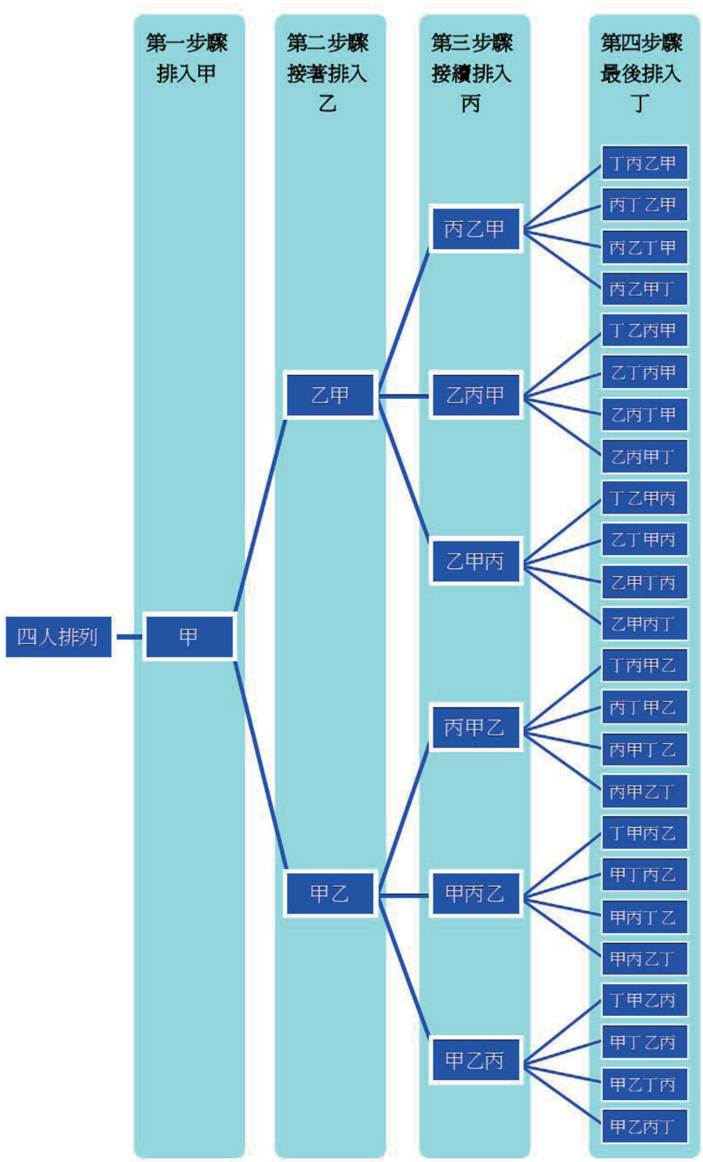
第 2 步驟：接著排入乙，乙可以排在甲的左邊或右邊，有 2 種方法。

第 3 步驟：最後排入丙，丙可以排在最左邊或右最邊或甲、乙中間，共有 3 種方法。

由乘法原理可得三人排成一列的方法共有 $1\times2\times3=6$ 種。

教學補充・搭配學生手冊 P7

❖ 活動 2 第 2 題解答



觀察上面的樹狀圖，我們也可以將它分成以下四個步驟來討論：

第 1 步驟：甲先出列站定位，有 1 種方法。

第 2 步驟：接著排入乙，有 2 種方法。

第 3 步驟：接續排入丙，共有 3 種方法。

第 4 步驟：最後排入丁，共有 4 種方法。

由乘法原理可得四人排成一列的方法共有 $1\times2\times3\times4=24$ 種。

推廣問題

將 n 個不同的物件排成一列，共有多少種排列法？ 答：n！種。

詳細解答參見右頁。

說明

當 n 是正整數時，為了方便，我們用符號 n！ 表示 $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$，讀做「$n$ 的階乘」，即

$n! = 1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$。

例如：

$1!=1$，$2!=1\times2=2$，$3!=1\times2\times3=6$，$4!=1\times2\times3\times4=24$。

另外，我們規定 $0!=1$。並且由定義我們可以看出：

當 n 是大於 1 的整數時，$n! = n\times[(n-1)!]$。

【直線全取排列】

將 n 個不同的物件排成一列，共有 n！種排法。

任務 4 熟悉符號 n！平行差異化任務

1. (1) 試求 $(3+4)!$ 之值
   (2) 試求 $3!+4!$ 之值
   (3) 請問 $(3+4)!$ 與 $(3!+4!)$ 相等嗎？
2. (1) 試求 $\dfrac{12!}{10!}$ 之值。
   (2) 設 n 為正整數，若 $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$，求 n 之值。

1. (1) $(3+4)!=5040$
   (2) $3!+4!=6+24=30$
   (3) $(3+4)!\neq 3!+4!$
2. (1) $\dfrac{12!}{10!}=12\times11=132$
   (2) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$
   $=(n+2)(n+1)$
   即 $(n+2)(n+1)=72$
   $n^2+3n-70=0$
   $(n-7)(n+10)=0$
   $\because n$ 為正整數，故 $n=7$。

學生手冊 P8

教學補充・搭配學生手冊 P8

推廣問題

[教學活動安排]

教師要鼓勵學生提出不同解法。

[教學注意事項]

請同學注意多增加一物件排列，則間隔數亦增加一個，可供下一物件選擇置入。

[推廣問題解答]

設 n 個不同的物件分別為 a_1，a_2，a_3，⋯，a_{n-2}，a_{n-1}，a_n

仿照前面的方式，我們也可以將它分成以下 n 個步驟來討論：

第 1 步驟：a_1 先出列站定位，有 1 種方法。

第 2 步驟：接著排入 a_2，有 2 種方法。

第 3 步驟：接續排入 a_3，共有 3 種方法。

………

第 $n-1$ 步驟：最後排入 a_{n-1}，共有 $n-1$ 種方法。

第 n 步驟：最後排入 a_n，共有 n 種方法。

由乘法原理可得 n 個不同的物件排成一列的方法共有

$1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n=n!$ 種。

▶任務 4

[教學活動安排]

1. 請學生根據階乘定義寫出答案。
2. 可依學生程度由學生自選題目作答。

[教學注意事項]

1. 提醒學生注意 $(3+4)!\neq3!+4!$，有學生會誤解階乘有分配律，需釐清。
2. 提醒學生 $(n+2)!=(n+2)\times(n+1)\times(n!)$
3. 複習因式分解。

任務 5 古代的排列遊戲問題

請你算算看，清代數學家陳厚耀〈錯綜法義〉的文章中的「串名」問題：

『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

例如：張李王，王李張等就是串姓所得之名。

$3\times2\times1=6$，

如下所列：

張李王，張王李，李王張，李張王，王張李，王李張，共 6 種。

任務 6 跨領域，現代 n 的階乘與程式設計

在程式設計上，常用以下的一階遞迴關係設計「n 的階乘」的演算法。

設 $\begin{cases} a_n=n\times a_{n-1}，n\geq1 \\ a_0=1 \end{cases}$，$n$ 為正整數。

(1) 求 a_1、a_2、a_3 的值。

(2) 試證明：$a_n=n\,!$，$n\geq1$。

(1) $a_1=1\times a_0=1\times1=1$

$a_2=2\times a_1=2\times1=2$

$a_3=3\times a_2=3\times2\times1=6$

(2)

$$\left.\begin{aligned} a_1&=1\times a_0 \\ a_2&=2\times a_1 \\ a_3&=3\times a_2 \\ a_4&=4\times a_3 \\ &\vdots \\ \times)\ a_n&=n\times a_{n-1} \end{aligned}\right\}\text{累乘}$$

得 $a_n=a_0\times1\times2\times3\times\cdots\times n=n\,!$

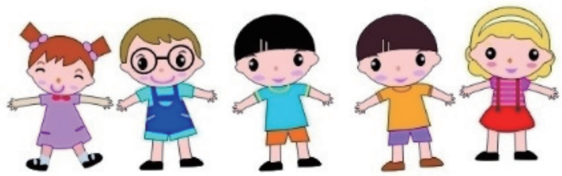
任務 7 多重表徵與開放問題

某日，大雄與柯南一同作下列的數學問題：

「求甲、乙、丙、丁、戊五人排成一列拍照，其中甲不排第一位的方法數。」

大雄說：答案為$(5\,!-4\,!)$種。

柯南說：答案為 $4\times4\,!$ 種。



請判斷兩位的答案是否正確？

並評析大雄與柯南的解題思路。

$5\,!-4\,!=5\times4\,!-4\,!=(5-1)4\,!=4\times4\,!$

大雄的解題思路：（全部排法數）－（甲排第一位的排法數）$=5\,!-4\,!=96$（種）。

柯南的解題思路：①首先甲選位置的方法有 4 種（因不能排第一位）

②其次乙、丙、丁、戊四人入列的方法有 $4\,!$，由乘法原理知方法數有 $4\times4\,!=4\times24=96$ 種方法。

所以兩位的答案皆為正確。

學生手冊 P9

教學補充・搭配學生手冊 P9

▶ 任務 5

[教學活動安排]

1. 若學生不明瞭題意，老師可先解釋何謂「串名」，並舉例說明。
2. 請學生列出所有可能。
3. 請學生寫出計算式子，並說明原由。

[教學注意事項]

1. 學生是否了解題意。
2. 呼應第一節的歷史與生活，期能貫古通今。

▶ 任務 6

[教學活動安排]

老師可引導學生依遞迴關係，列出 a_1，a_2，…，a_n，再利用累乘法求證。

[教學注意事項]

1. 提醒初始值若不是 $a_0=1$，則結果將會不同。
2. 呼應第一節的歷史與生活，期能貫古通今。

▶ 任務 7

[教學活動安排]

1. 請學生說明 $5!-4!$ 與 $4\times4!$ 是否相等。
2. 請學生判斷兩位的答案是否正確？
3. 請學生解釋大雄答案的解題思路。
4. 請學生解釋柯南答案的解題思路。
5. 請學生評析大雄與柯南的解法，並說明比較喜歡哪一位的做法。

[教學活動安排]

1. 每一個數學式，都可以有其對應的故事！以開放性問題，啟發思考增加趣味性！
2. 鼓勵分組或個人發表問題設計，並互相檢核答案是否正確。
3. 讓每位學生選取適合他們的問題作答，並能共同參與團體的討論。
4. 說明 $5!-4!$ 與 $4\times4!$ 相等時，可請同學回顧「n 的階乘」的遞迴關係。

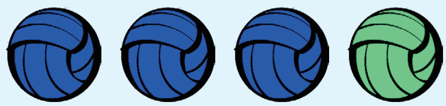
[教學注意事項]

1. 請同學以答案「$5!-4!$」而非「96」設計題目。
2. 提示學生思考（$5!-4!$）中，「減法」所代表的意義是扣掉「不合」的情形。
3. 提示學生 $4\times4!$ 中「乘法」的意義是將完成此問題的過程分步驟，再利用乘法原理求解。
4. 此任務為開放性問題，答案不是唯一。

3 有相同物的排列

活動 3 有相同物的排列

1.【有相同物的排列(一)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 1 個綠色躲避球分給四組使用，每組一個，則共有多少種分法？



答：4 種
詳細解答參見教師手冊 *P*24

2.【有相同物的排列(二)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 2 個綠色躲避球分給五組使用，每組一個，則共有多少種分法？

答：10 種
詳細解答參見教師手冊 *P*25

推廣問題

k 種相同物件的排列

設 n 個物件共分成 k 組，其中第一組由 m_1 個相同物件組成，第二組由 m_2 個相同物件組成，…，第 k 組由 m_k 個相同物件組成，且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，若組與組間的物件皆不相同，則這 n 個物件排成一列的方法共有幾種？

答：$\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 種。詳細解答參見右頁。

【有相同物的排列】
設有 k 種不同種類的物件(同類中的物件視為相同)，第 1 類有 m_1 個，第 2 類有 m_2 個，…，第 k 類有 m_k 個，共計 n 個，即 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$。
將此 n 個物件排成一列，共有 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 種排法。

學生手冊 P10

教學補充・搭配學生手冊 P10

❖ 活動 3 第 1 題

[教學活動安排]顏色規定

1. 將全班分為 4 組，以 3 個相同的藍球，1 個綠球實際排列操作。
2. 教師要引導學生把 3 個相同的藍球視為一樣。
3. 教師要引導學生把 3 個相同的藍球及 1 個綠球各別編號。

[教學注意事項]

1. 藍球與綠球上的編號擦掉時，先擦掉其中一種顏色球上的編號，再擦掉另一種顏色球上的編號，可讓學生知道 4！種排法中的每 3！（種）排法只能算是一種分法。
2. 擦掉編號後，再一次強調只有兩種顏色。

※ 詳細解答參見教師手冊 *P*24。

❖ 活動 3 第 2 題

[教學活動安排]

1. 將全班分為 5 組，以 3 個相同的藍球，2 個相同的綠球實際排列操作。
2. 教師要引導學生把 3 個相同的藍球及 2 個相同的綠球各別視為一樣。
3. 教師要引導學生把 3 個相同的藍球及 2 個相同的綠球各別編號。

[教學注意事項]

1. 藍球與綠球上的編號擦掉時，先擦掉其中一種顏色球上的編號，再擦掉另一種顏色球上的編號，讓學生可以知道 5！種排法中的每 3！× 2！（種）排法只能算是一種分法。
2. 擦掉編號後，再一次強調只有兩種顏色。

※ 詳細解答參見教師手冊 *P*25。

▨推廣問題答案

仿活動 3，將 m_1 個相同物件依序編號，m_2 個相同物件也依序編號，…，最後 m_k 個相同物件亦編號，則共有 n！種排法，接著將編號擦掉，於是這 n！種排法中的每 $m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!$ 種排法只能算是一種排法，則這 n 個物件排成一列的方法共有 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 種。

教學補充．搭配學生手冊 P10

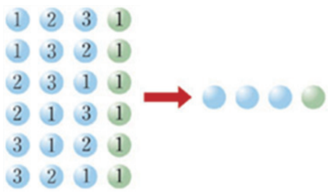
❖ 活動 3 第 1 題詳解

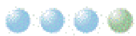
[解法一] 除法

先把 3 個藍球看成不同，將它們分別編號為 1，2，3，把 1 個綠球編號為 1，

則 3 個不同的藍球與 1 個綠球排成一列的方法共有 4！＝24（種）。

但是對於下列 3！（種）排法



去掉編號後，實際上只是同一種排法，

於是這 4！種排法中，每 3！種排法只能算是一種分法，故所求為 $\dfrac{4!}{3!}=4$ 種。

[解法二] 乘法

假設總共有 x 種分法。

因「藍綠藍藍」為其中一種分法，對此種分法而言，若將三個藍色球看成不同的球，分別以 $\boxed{藍1}$，$\boxed{藍2}$，$\boxed{藍3}$ 表示，則有 3！＝6 種不同的排列。（如右圖）

$\boxed{藍綠藍藍}$ →

藍1	綠	藍2	藍3
藍1	綠	藍3	藍2
藍2	綠	藍1	藍3
藍2	綠	藍3	藍1
藍3	綠	藍1	藍2
藍3	綠	藍2	藍1

也就是說，對每一種分法而言，若將藍色球看成不同再進行排列，均有 3！＝6 種不同的排列，由乘法原理得 $x\times3!$ 種不同的排列，

這就相當於是 $\boxed{藍1}$，$\boxed{藍2}$，$\boxed{藍3}$，$\boxed{綠}$，共 3＋1＝4 個相異物的排列總數。因此 $x\times3!=4!$，得 $x=\dfrac{4!}{3!}=4$ 種。

教學補充・搭配學生手冊 P10

❖ 活動 3 第 2 題詳解

[解法一] 除法

先把 3 個藍球看成不同，將它們分別編號為 1，2，3，把 2 個綠球也看成不同，將它們分別編號 1，2，則 3 個不同的藍球，2 個不同的綠球排成一列的方法共有 $5!=120$（種）。

其次再將上述每種排法中，藍球與綠球上的編號擦掉，於是這 $5!$ 種排法中的每 $3!\times 2!$（種）排法只能算是一種排法，如下圖所示：

因此將 3 個相同的藍球，2 個相同的綠球排成一列，其排法共有 $\dfrac{5!}{3!\times 2!}=\dfrac{120}{12}=10$（種）。

[解法二] 乘法

假設總共有 x 種排法。

因「藍綠藍藍綠」為其中一種分法，對此種分法而言：

1. 將三個藍球看成不同的球，分別以 藍1，藍2，藍3 表示，再進行排列，
   則有 $3!=6$ 種不同的排列。
2. 再將二個綠球看成不同的球，分別以 綠1，綠2 表示，再進行排列，
   則有 $2!=2$ 種不同的排列。
3. 對每一種分法而言，若分別將藍、綠球看成不同再進行排列，
   可得 $3!\times 2!=12$ 種不同的排列。
4. 由乘法原理得 $x\times 3!\times 2!$ 種不同的排列，這就相當於是
   藍1，藍2，藍3，綠1，綠2 共 $3+2=5$ 個相異物的排列總數。
   因此有 $x\times 3!\times 2!=5!$，所以 $x=\dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$ 種。

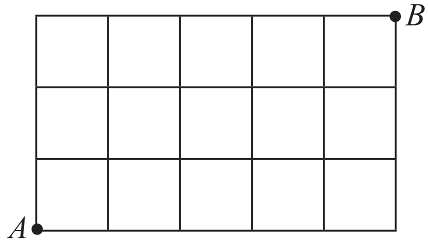
藍綠藍藍綠 →

藍1	綠1	藍2	藍3	綠2
藍1	綠1	藍3	藍2	綠2
藍2	綠1	藍1	藍3	綠2
藍2	綠1	藍3	藍1	綠2
藍3	綠1	藍1	藍2	綠2
藍3	綠1	藍2	藍1	綠2

藍1	綠2	藍2	藍3	綠1
藍1	綠2	藍3	藍2	綠1
藍2	綠2	藍1	藍3	綠1
藍2	綠2	藍3	藍1	綠1
藍3	綠2	藍1	藍2	綠1
藍3	綠2	藍2	藍1	綠1

任務 8 節能減碳，步行上班的路線有幾條？

大雄住在具有棋盤式道路系統的城市，如下圖所示方格的邊線，皆為可行走道路，A 點為住家位置，而向東 5 個街區（*blocks*），再往北 3 個街區的 B 點為上班處所，為了落實節能減碳，每天步行 8 個街區上班（即是以走捷徑方式，「不繞遠路」從 A 走到 B），請問大雄總共有幾條路線可以選擇？

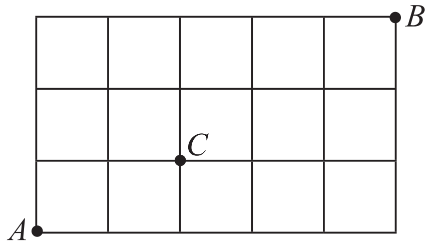


答：56 種。

詳細解答參見右頁

補充練習

承【任務 8】，若 C 點為一公園，則從 A 走捷徑到 B，而且必須經過 C 的走法有幾種？



A 經過 C 走捷徑至 B，可分成兩步驟：

①先從 A 走捷徑至 C，走法有 $\frac{3!}{2!\times1!}=3$ 種

②再從 C 走捷徑至 B，走法有 $\frac{5!}{3!\times2!}=10$ 種

故由乘法原理，A 經 C 至 B 之捷徑走法有 $3\times10=30$ 種。

任務 9 數學擬題，開放問題

設計答案為 $\frac{(1+2+3)!}{1!\times2!\times3!}$ 種方法的問題。

（參考答案，解法不唯一）

考慮將 1 個藍球，2 個相同的綠球，3 個相同的紅球，排成一列，

共有 $\frac{(1+2+3)!}{1!\times2!\times3!}$ 種排列法。

教學補充・搭配學生手冊 P11

▶任務 8

[教學活動安排]

老師可舉捷徑路線例子，請同學回答與「5 個→與 3 個↑排列」的對應關係！

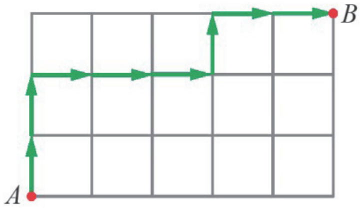
[教學注意事項]

每一條捷徑的走法都是由 5 個向東符號「→」與 3 個往北符號「↑」排列而成。因此，根據一一對應原理，「捷徑的走法數」就等於「5 個→與 3 個↑的排列數」。

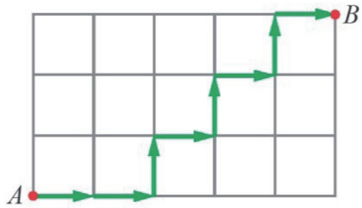
[參考解答]

從 A 到 B 的捷徑走法，每次都只能向東或往北走。為了方便表示起見，我們將向右走一個街區（*block*）用符號「→」表示，往上走一個街區（*block*）用符號「↑」表示。因此圖一的捷徑路線可用「↑↑→→→↑→→」表示。

圖二的捷徑路線可用「→→↑→↑→↑→」表示。



圖一



圖二

由上述可知，在 5×3 的棋盤街道中，每一條捷徑的走法都是由 5 個向右符號「→」與 3 個往上符號「↑」排列而成。因此，根據一一對應原理，「捷徑的走法數」就等於「5 個→與 3 個↑的排列數」。所以由「有相同物的排列」公式，得捷徑走法共有 $\frac{8!}{5!\times 3!}=56$ 種。

▶任務 9

[教學活動安排]

1. 每一個數學式，都可以有其對應的故事！以開放性問題，啟發思考增加趣味性！
2. 鼓勵分組或個人發表問題設計與解題，並互相檢核答案是否正確。

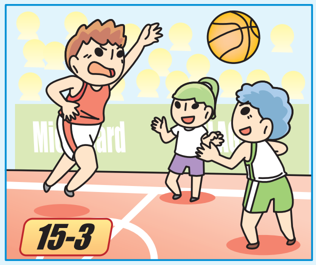
[教學注意事項]

提示學生思考「$\frac{(1+2+3)!}{1!\times 2!\times 3!}$」中，「除法」所代表的意義。

4 組合與排列：n 人取 k 人的組合與排列

活動 4 教練的選擇與安排（5人選 3人的組合與排列）

1. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出三位上場參加三對三籃球賽，則選擇的方案共有多少種？
2. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出一位後衛，一位前鋒和一位中鋒，參加三對三籃球賽，則安排的方案共有多少種？



1. 答：10 種。詳細解答參見右頁
2. 答：60 種。詳細解答參見右頁

說明

由【活動 4】中，我們可以知道：

①第 1. 題中，教練選出選手而不給予分配職位，像這樣只選取而不考慮同一組內組成份子次序的方式，我們稱之為**組合**，而所有組合總數稱為組合數。

我們以符號 C^n_k 表示從 n 個不同的物件中取出 k 個為一組的組合數，其中 C 是組合（*Combination*）的第一個字母。

例如：第 1. 題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人為一組的組合數」，就可以符號 C^5_3 表示。

②與第 1. 題對照，第 2. 題中教練將選出的選手給予分配不同的職位，不同的安排視為相異的結果，是一種**排列**問題。

我們以符號 P^n_k 表示從 n 個不同的物中取出 k 個排成一列的方法數，其中 P 是排列（*Permutation*）的第一個字母。

例如：第 2. 題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人排成一列的方法數」，就可以符號 P^5_3 表示。

學生手冊 P12

教學補充．搭配學生手冊 P12

❖ 活動 4 第 1 題

[教學活動安排]

1. 教師準備五張卡片，上面分別寫著 ○，○，○，×，×，在班上找出五位配合的學生，固定學生的順序，並分幾種方法給學生看，且把題意對照到 ○○○×× 的排列。
2. 分好卡片後，請學生依照分到的卡片進行移動，對應到「○」的人就代表被選中，請站著對應到「×」的人就代表沒有被選中，請蹲下。

[教學注意事項]

1. 固定學生的順序，不然卡片與人皆變動不好討論。
2. 學生可以了解，分到 × 表示不用出場。

[活動解答]

現在先固定甲、乙、丙、丁、戊五人的順序，另外用三個「○」與二個「×」在甲、乙、丙、丁、戊之前排列，對應到「○」的人就代表被選中，對應到「×」的人就代表沒有被選中。

因此，選取的方案與「○○○○××」的直線排列可以建立起一一對應的關係，根據一一對應原理，選取的方法數就等於「○○○××」的直線排列數。例如：

(1)

甲 乙 丙 丁 戊
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
○ × ○ ○ ×

相當於從五人中選出甲、丙、丁三位參加籃球比賽。

(2)

甲 乙 丙 丁 戊
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
× ○ × ○ ○

相當於從五人中選出乙、丁、戊三位參加籃球比賽。

利用「有相同物的排列」公式，得選取的方案共有 $\dfrac{5!}{3!\times 2!}=10$ 種。

❖ 活動 4 第 2 題

[教學活動安排]

1. 教師準備五張卡片上面分別寫著 1、2、3、×、×，在班上找出五位配合的學生，固定學生的順序，並分幾種方法給學生看，且把題意對照到 123×× 的排列。
2. 分好卡片後，請學生依照分到的卡片進行移動，即卡片上的數字 1， 2， 3 各別表示被選為後衛、前鋒與中鋒，且 × 表示不用出場。

[活動解答]

五人取三人排列，每一種排法勢必有兩個人不用排到，現以 1，2，3 各別表示第 1，2，3 位出場的順序，並以 × 表示不用出場，現在先固定五人的順序，則「123××」的每一種排列就相當於一種被指派任務的方案。例如：

(1)

甲 乙 丙 丁 戊
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 × 1 × 3

相當於從五位選手中選出三位的表演順序為：丙、甲、戊，且依照順序，丙為後衛，甲為前鋒，戊為中鋒。。

(2)

甲 乙 丙 丁 戊
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
3 1 × 2 ×

相當於從五位選手中選出三位的表演順序為：乙、丁、甲，且依照順序，乙為後衛，丁為前鋒，甲為中鋒。。

利用「有相同物的排列」公式，得安排的方案有 $\dfrac{5!}{2!}=60$ 種

③組合數 C_3^5 與排列數 P_3^5 的關係：

【第一種解法】乘法

考慮活動 4 中，我們可以先從這 5 位選手中任選 3 個為一組合的選法有 C_3^5 種，這 C_3^5 種組合中，每一組合內的 3 位選手任意排成一列，就對應有 $3!=6$（種）排列。由乘法原理，可得 C_3^5 與 P_3^5 有下列的關係式：

$P_3^5=C_3^5\times 3!=60$，即排列數 P_3^5 是組合數 C_3^5 的 $3!$ 倍。

【第二種解法】除法

考慮活動四中，從 5 個人中選取 3 人出來排列的方法為 P_3^5，而所選出來的 3 人的排列數 $3!$ 種只能對應 1 種組合數，因此 5 人中選取 3 人為一組合的方法數有 $\dfrac{P_3^5}{3!}=10$ 種。

例如：5 個人中選取 3 人出來排列的情況中，甲丙丁、甲丁丙、丙甲丁、丙丁甲、丁甲丙、丁丙甲，這 6 種情形若不考慮順序，則視為相同選法。

推廣問題

1. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1\leq k\leq n$）為一組的組合數 C_k^n 為何？
2. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1\leq k\leq n$）任意排列的排列數 P_k^n 為何？
3. C_k^n 與 P_k^n 的關係為何？

1. 答：$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$。

   詳細解答參見右頁

2. 答：$P_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!}$。

   詳細解答參見教師手冊 P32。

3. 答：$P_k^n=C_k^n\cdot k!=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ 或 $C_k^n=\dfrac{P_k^n}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

   詳細解答參見教師手冊 P33。

教學補充・搭配學生手冊 P13

▨推廣問題第 1 題詳解

從 n 個不同的物件中取出 k 個為一組的每一種組合，一一對應於「k 個『○』與（$n-k$）個『×』」的一種排列，其中對應到「○」的物件就代表被選中，對應到「×」的物件就代表沒有被選中。

如下圖：

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \end{array}}_{k\text{ 個}}\quad\underbrace{\begin{array}{cccc} a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \times & \times & \cdots & \times \end{array}}_{(n-k)\text{ 個}}$$

表示從 n 個不同的物件 a_1，a_2，⋯，a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，⋯，a_n 中取到 a_1，a_2，⋯，a_k 的情形。

所以從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1 \leq k \leq n$）的組合數等於「k 個『 』與（$n-k$）個『×』」的排列數。

故由「有相同物的排列」公式知：

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}。$$

教學補充・搭配學生手冊 P13

推廣問題第 2 題詳解

P_k^n 等於「k 個相異項物與（$n-k$）個『×』的排列數」，等於 $\dfrac{n!}{(n-k)!}$。

【解法一】

從 n 個不同的物件中取出 k 個排成一列的方法，一一對應於「連續 k 個自然數字『1，2，3，…，k』與（$n-k$）個『×』的排列」，其中對應到數字 1，2，3，…，k 的物件就代表被選中，且依數字大小表示其位置的先後順序；而對應到「×」的物件就代表沒有被選中。如下圖：

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \cdots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \end{array}$$
$$\underbrace{1 \quad 2 \quad \cdots \quad k}_{k\text{ 個}} \quad \underbrace{\times \quad \times \quad \cdots \quad \times}_{(n-k)\text{ 個}}$$

表示從 n 個不同的物件 a_1，a_2，…，a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，…，a_n 中

取到 a_1，a_2，…，a_k 並將其排列為 a_1，a_2，…，a_k 的順序。

所以從 n 個不同的物件中取出 k 個排成一列的方法數等於

「連續 k 個自然數字『1，2，3，…，k』與（$n-k$）個『×』的排列數」。

故由「有相同物的排列」公式，得 $P_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!}$。

【解法二】

從 n 個不同的色球中任選 k 個（$1\leq k\leq n$）來排列，如圖所示：

第一位置	第二位置	第三位置	…	第（$k-1$）位置	第 k 位置
↓	↓	↓		↓	↓
n 種	（$n-1$）種	（$n-2$）種	…	（$n-k+2$）種	（$n-k+1$）種

根據乘法原理可知：從 n 個不同的色球中任選 k 個（$1\leq k\leq n$）的排列數

$$\begin{aligned} P_k^n &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1) \\ &= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)\times\cdots\times2\times1}{(n-k)\times(n-k-1)\times2\times1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\text{（種）} \end{aligned}$$

教學補充・搭配學生手冊 P13

▨推廣問題第 3 題詳解

由上面的例子知，n 中取 k 的排列數 P_k^n ，可分解成下面兩個步驟：

第一步驟：先自 n 個物件選出 k 個物件為一個組合，組合數為 C_k^n 。

第二步驟：再把每一個組合中的 k 個物件任意排列，排列數是 $k!$ 。

由乘法原理知 $P_k^n = C_k^n \times k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ 或 $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ 。

【組合 C_k^n 與排列 P_k^n 】

1. 從 n 個不同物件中任選 k 個 $(1\le k\le n)$ 為一組的組合數，以符號 C_k^n 表示。

(1) $C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\times 1}$。

(2) 當 $k=n$ 時，$C_n^n=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!0!}=1$，

又 $k=0$ 時，$C_0^n=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{0!n!}=1$。

2. 從 n 個不同物件中任選 k 個 $(1\le k\le n)$ 排成一列的方法數，以符號 P_k^n 表示。

(1) $P_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots 2\times 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\times 2\times 1}$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)$。

(2) 當 $k=n$ 時，$P_n^n=n!$，又 $k=0$ 時，$P_0^n=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$。

任務 10

請討論：為何規定 $0!=1$。

1. 才能使從 n 個不同物件中任選 n 個的組合數是 1 與 C_n^n 的記法公式前後呼應。
2. 才能使從 n 個不同物件中全取排列的排列數 $n!$ 與 P_n^n 的記法公式前後呼應。
3. 由 n 的階乘的遞迴關係 $n!=n\times(n-1)!$，當 $n=1$ 時，$1!=1\times 0!$，所以規定 0 的階乘等於 1，即 $0!=1$ 而不是 0，可讓階乘定義延拓與完備。

任務 11 熟悉符號 C_k^n 與檢驗古印度組合問題的答案

1. 試求下列各數：

(1) C_0^5 (2) C_1^5 (3) C_2^5 (4) C_3^5 (5) C_4^5 (6) C_5^5

(1) $C_0^5=1$ (2) $C_1^5=5$ (3) $C_2^5=10$
(4) $C_3^5=10$ (5) $C_4^5=5$ (6) $C_5^5=1$

2. 西元前 600 年左右，據說在印度 *Susrute* 的醫學著作中提到：以甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出 15 種「雙味」的味道，與 20 種「三味」的味道。請檢驗答案的正確性。

「雙味」的味道的情形有 $C_2^6=\dfrac{6!}{2!\times 4!}=15$（種），「三味」的味道的情形有 $C_3^6=\dfrac{6!}{3!\times 3!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$（種），所以書中所言的數據答案正確！

學生手冊 P14

教學補充・搭配學生手冊 P14

▶任務 10

[教學活動安排]

請學生從 $C_n^n=\dfrac{n!}{n!\times(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!0!}=1$ 及 $P_n^n=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}=n!$ 甚至從 n 的階乘的遞迴關係 $n!=n\times(n-1)!$ 討論。

[教學注意事項]

階乘是定義在自然數範圍裡的，而沒有小數階乘，例如：0.5！、0.65！、0.777！等。

補充練習

1. 承【任務 11】，西元前 600 年左右，據說在印度 *Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？請解釋他們的答案為何是單味 6 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

單味 $C_1^6=6$ 種，四味 $C_4^6=15$ 種，五味 $C_5^6=6$ 種，六味 $C_6^6=1$ 種。

2. 請舉生活上的例子，說明 $C_0^n=1$。

例如：「洋基隊整個賽季中零敗（相當於每場皆贏）的方法只有一種。」或是「班上體育課留守零人（相當於全部去上體育課）的方法只有一種。」

說明

①從【任務 11】的第 1 題，我們發現 $C_0^5=C_5^5$，$C_1^5=C_4^5$，$C_2^5=C_3^5$。即

C_0^5 C_1^5 C_2^5 C_3^5 C_4^5 C_5^5

相等

相等

相等

這個現象，我們可以這樣解釋：

因為從 5 個之中取走 k 個（$k=0$，1，2，3，4，5）的方法數，相當於從 5 個之中留下（$5-k$）個的方法數。

②這樣的性質可推廣至一般情形：從 n 個不同的物件中取走 k 個的方法數，相當於從這 n 個物件中留下（$n-k$）個的方法數。

因此 $C_k^n=C_{n-k}^n$。這個等式依它所表現的上述性質，常被稱為**餘組合公式**，或是**組合對稱公式**。

【餘組合公式（組合對稱公式）】

設 n、k 為整數，且 $0\le k\le n$，則 $C_k^n=C_{n-k}^n$。

學生手冊 P15

教學補充・搭配學生手冊 P15

任務 12 熟悉符號 P_k^n 與古代的排列遊戲問題

1. 試求下列各數：

(1)P_3^5 (2)P_6^6 (3)P_4^{10}

(1)$P_3^5=5\times4\times3=60$

(2)$P_6^6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(3)$P_4^{10}=10\times9\times8\times7=5040$

2. 請你再算算看，清代數學家陳厚耀的數學〈錯綜法義〉文章中的另一個「串名」問題：

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

$P_3^8=8\times7\times6=336$（種）

任務 13 開放問題（組合與排列關係連結）

1. (1)設計答案為 C_4^6 種方法的問題。

(2)承(1)的題幹，繼續設計使答案成為 P_4^6。

(1)教練想從甲、乙、丙、丁、戊、己 6 位選手中，選出 4 位參加四百公尺接力賽，則共有 $C_4^6=\dfrac{6!}{4!\times2!}=15$ 種選法。

(2)教練想從甲、乙、丙、丁、戊、己 6 位選手中，選出 4 位參加四百公尺接力賽，並排定第一到第四棒順序，且棒次不同，表示排法也不同，則安排的方案共有 $P_4^6=\dfrac{6!}{(6-4)!}=\dfrac{6!}{2!}=360$ 種。

2. 請依上述問題說明 $P_4^6=C_4^6\times4!$。

由上面的例子知，6 位選手中選出 4 位的排列棒次的方法數 P_4^6，可分解成下面兩個步驟：

①先自 6 位選手中選出 4 位為一個組合的組合數為 C_4^6。

②再把每一個組合中的 4 選手分配棒次，排列數是 $4!$。

由乘法原理知 $P_4^6=C_4^6\times4!$。

任務 14 巴斯卡性質

從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛 8 人中，任選 3 人為一組。

(1)試問有幾種可能的組合？

(2)所有可能的組合中，含甲的組合有幾種？不含甲的組合有幾種？

(3)試討論(1)與(2)兩者之間的關係。

詳細解答參見右頁。

學生手冊 P16

教學補充．搭配學生手冊 P16

▶任務 12

[教學活動安排]

1. 若學生不明瞭題意，老師可先解釋，並舉例說明。
2. 請學生寫出計算式子，並說明原由。

[教學注意事項]

1. 學生是否了解題意
2. 呼應第一節的歷史與生活，期能貫古通今。

▶任務 13

[教學活動安排]

1. 說明：每一個數學式，都可以有其對應的故事！
2. 以開放性問題，啟發思考增加趣味性！
3. 鼓勵分組討論或個人發表問題設計，並互相檢核答案是否正確。

[教學注意事項]

1. 請同學以答案「C^6_4」而非「15」設計題目。
2. 請同學以答案「P^6_4」而非「360」設計題目。
3. 提示學生 $P^6_4=C^6_4\times4!$ 中的「乘法」的意義是將完成此問題的過程分步驟，再利用乘法原理求解。
4. 此為開放性問題，答案不是唯一。

▶任務 14 參考解答

(1)$C^8_3=\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56$（種）

(2)含甲的組合，即從另 7 人中，選 2人與甲一組，所以有 $C^7_2=\dfrac{7\times6}{1\times2}=21$（種）。

不含甲的組合，即從另 7 人中，選 3 人為一組，所以有 $C^7_3=\dfrac{7\times6\times5}{1\times2\times3}=35$（種）。

(3)八人選 3 人的組合數 C^8_3，可分成互斥的兩類計算：

「含特定人（甲）的組合數 C^7_2」與「不含特定人（甲）的組合數 C^7_3」，

所以依加法原理，可知 $C^8_3=C^7_2+C^7_3$。

可將上述任務中的情形一般化：

設 n 個人中有一特定人物甲，則 n 中取 m 的組合中，可分成兩類：

①含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m-1} 種方法。

②不含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m} 種方法。

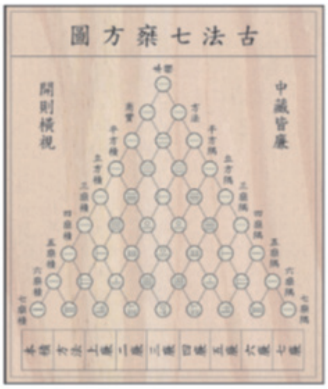
由加法原理得 $C^n_m = C^{n-1}_m + C^{n-1}_{m-1}(1 \leq m \leq n-1)$，

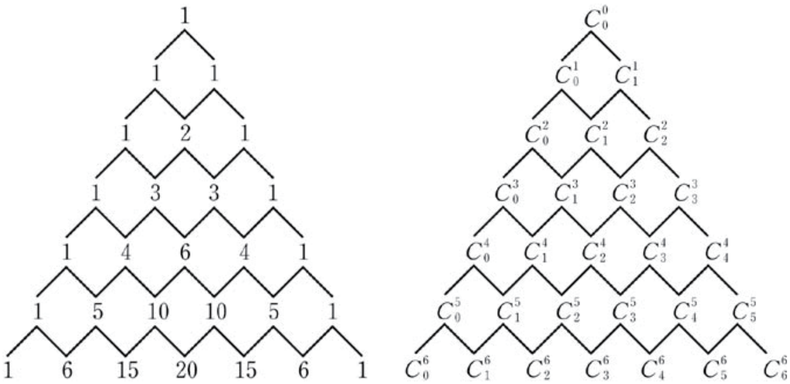
這個性質就是表現巴斯卡三角形（或**楊輝三角形**）上下兩層的關係式，

所以將它稱為巴斯卡性質。

【巴斯卡性質】

設 m，n 為自然數，且 $1 \leq m \leq n-1$，則 $C^n_m = C^{n-1}_m + C^{n-1}_{m-1}$。





巴斯卡三角形(楊輝三角形)

任務 15 巴斯卡性質的應用

某民宿有 10 間房間，第 1 間住有 1 人，第 2 間住有 2 人，第 3 間住有 3 人，第 4 間住有 4 人，第 5 間住有 5 人，第 6 間住有 6 人，第 7 間住有 7 人，第 8 間住有 8 人，第 9 間住有 9 人，第 10 間住有 10 人。當晚進行抽獎活動，特獎有 2 位，民宿主人想知道這 2 位不在同一房間的情形有多少種？我們來幫他算一算！

共有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$（人）

【方法一】

（任意選）－（2人在同一房間）

$=C^{55}_2-(C^2_2+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{10}_2)$（$\because C^2_2=C^3_3$）

$=C^{55}_2-(C^3_3+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{10}_2)$（利用巴斯卡公式：$C^3_3+C^3_2=C^4_3$）

$=C^{55}_2-(C^4_3+C^4_2+\cdots+C^{10}_2)$（利用巴斯卡公式：$C^4_3+C^4_2=C^5_3$）

$=\cdots$（重複使用 $C^n_r+C^n_{r-1}=C^{n+1}_r$）$=C^{55}_2-C^{11}_3=1485-165=1320$（種）

學生手冊 P17

教學補充・搭配學生手冊 P17

▶任務 15

[教學活動安排]

1. 若學生不明瞭題意，老師可先解釋，並舉例說明。
2. 請學生列出本列的式子。
3. 導引學生用巴斯卡性質來解題。

[教學注意事項]

1. 學生是否了解題意。
2. 能否重複使用巴斯卡性質來解題。

▶任務 15 參考解答【方法二】

【方法二】（級數）

若抽中第 1 間的 1 人，則方法有 $2+3+4+5+6+7+8+9+10$（種），

若抽中第 2 間的其中 1 人，則方法有 $2\times(3+4+5+6+7+8+9+10)$（種），

$\vdots$

若抽中第 9 間的其中 1 人，則方法有 9×10（種），

共有 $\sum_{k=1}^{9} k\left[(k+1)+(k+2)+\cdots+10\right]$

$$=\sum_{k=1}^{9}\left[k\times\frac{(k+1)+10}{2}\times(10-k)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}k(k+11)(10-k)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sum_{k=1}^{9}k^3-\sum_{k=1}^{9}k^2+110\sum_{k=1}^{9}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1+9}{2}\times 9\right)^2-\frac{9\times 10\times 19}{6}+110\left(\frac{1+9}{2}\times 9\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-2025-285+4950)$$

$=1320$（種）

評 量

1. $69\times68\times67\times66$ 之值等於下列哪一個選項？

(A) $\dfrac{69!}{66!}$ (B) $\dfrac{69\times(68!)}{65!}$ (C) $\dfrac{69!}{(4!)(65!)}$ (D) $\dfrac{69!\times68\times67}{65!}$

$69\times68\times67\times66=\dfrac{69\times68\times67\times66\times(65)!}{65!}=\dfrac{69\times(68)!}{65!}$

故選(B)

2. (1)若 $C_2^n=45$，求 n 之值。

(2)已知 $C_8^n=C_6^n$，求 n 之值。

(1) $C_2^n=\dfrac{n(n-1)}{1\times2}=45$

$\rightarrow n(n-1)=90$

$\rightarrow n=10$ 或 -9（不合）$\therefore n=10$

(2) $\because C_8^n=C_6^n$

$\therefore n=8+6=14$

3. 試以 A、B、C、D 四個相異物件進行分組，並說明 $C_3^4=C_1^4$。

A、B、C、D 四個相異物中取出 3 個為一組的組合數等於留下一個的組合數。

C_3^4		C_1^4
ABC	$\leftrightarrow$	D
ABD	$\leftrightarrow$	C
ACD	$\leftrightarrow$	B
BCD	$\leftrightarrow$	A

4. 請問「$P_k^n=P_{n-k}^n$」是否恆成立？若認為正確，請證明；若認為錯誤，請舉一反例說明。

否。

例如：$P_3^5=5\times4\times3=60$，而 $P_2^5=5\times4=20$，因此 $P_3^5\neq P_2^5$。

5. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有七節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則七節車廂一共有多少種畫法？

中間三節車廂必須有企鵝、無尾熊與貓熊，畫法有 $3!=6$（種）。

剩下的四節車廂，有兩節車廂畫上貓熊，一節車廂畫上企鵝，一節車廂畫上無尾熊，畫法有 $\dfrac{4!}{2!}=12$（種），由乘法原理知，共有 $6\times12=72$（種）畫法。

6. 大樂透彩券簽注規則是從 1～49 中任選 6 個號碼進行投注，每注(6 個號碼)費用 50 元。開獎時，開獎單位將隨機開出 6 個號碼加 1 個特別號，而開出的 6 個號碼(不含特別號)，就是該期大樂透的頭獎號碼，試問：

(1)開獎前，頭獎號碼的可能情形有多少種？

(2)為確保中頭獎，須投注每一種可能情形，則需花費多少金額?

(3)若阿九想在他看好的 8 個數字中選 6 個號碼簽注，則他需花費多少金額，才不致遺漏任何一種可能情形?

(1)頭獎號碼可能有 $C^{49}_{6}=\dfrac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=13983816$ 種情形。

(2)投注所有可能情形，則需花費 $50\times13983816=699190800$ 元。

（即陸億玖仟玖佰壹拾玖萬零捌佰元整）

(3)所求為 $50\times C^{8}_{6}=50\times C^{8}_{2}=50\times\dfrac{8\times7}{1\times2}=50\times28=1440$ 元。

7. 有 1 枝原子筆，2 枝相同的鉛筆與 3 枝相同的鋼筆。

(1)全部分給 6 個人，每人恰得 1 枝，共有多少種分法？

(2)全部分給 8 個人，每人最多分得 1 枝，共有多少種分法？

(1)若 1 枝原子筆用 a 表示，2 枝相同的鉛筆用 bb 表示，3枝相同的鋼筆用 ccc 表示，將 6 個人固定好順序，則 $abbccc$ 的每一種排列，就相當於一種分法，於是共有 $\frac{6!}{1!2!3!}=60$（種）分法。

(2)將 6 枝筆分給 8 個人，每人最多分得一枝，勢必有 2 個人沒有分到，以 x 表示，將 8 個人固定好順序，則 $abbcccxx$ 的每一種排列就相當於一種分法，於是共有 $\frac{8!}{1!2!3!2!}=420$（種）分法。

8. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人，某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種不同的組隊方法？

（2 男 6 女）或（3 男 5 女）或（4 男 4 女）

$C^4_2 \times C^7_6 \quad + \quad C^4_3 \times C^7_5 \quad + \quad C^4_4 \times C^7_4$

$=161$（種）

9. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法共有多少種？

$C^5_2 \times 3! \times 2! =120$（種）

挑戰題

1. 請求出下列 A，B，C，D 四個集合的元素個數：

$A=\{(x，y，z)\mid 1\leq x，y，z\leq 9，x，y，z$ 為整數，且 $x，y，z$ 互異$\}$。

$B=\{(x，y，z)\mid 1\leq x，y，z\leq 9，x，y，z$ 為整數$\}$。

$C=\{(x，y，z)\mid 1\leq x<y<z\leq 9，x，y，z$ 為整數$\}$。

$D=\{(x，y，z)\mid 1\leq x\leq y\leq z\leq 9，x，y，z$ 為整數$\}$。

$n(A)=P^9_3=504$

$n(B)=9^3=729$

$n(C)=C^9_3=84$

設 $x'=x，y'=y+1，z'=z+2$，則 $1\leq x'<y'<z'\leq 11$，

令 $D'=\{(x', y', z')\mid 1\leq x'<y'<z'\leq 11，x'=x，y'=y+1，z'=z+2，$
$x，y，z$ 為整數$\}$

因為 $x'=x，y'=y+1，z'=z+2$

則 D 中的元素與 D' 中的元素有一一對應關係，所以

$n(D)=n(D')=C^{11}_3=165$

2. 在第一節的歷史與生活中提到：

大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，… 等，這樣總共有多少種不同的組合方法？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

而又 $255=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$，請就上述問題，分別以不同解題思路說明為什麼？

$$8+28+56+70+56+28+8+1=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$$

(1)從加法原理觀點：

使得 1 到 8 個門的開門的組合數分別為

$C^8_1=8$，$C^8_2=28$，$C^8_3=56$，$C^8_4=70$，$C^8_5=56$，$C^8_6=28$，$C^8_7=8$，$C^8_8=1$

所以所有開門的組合總數為 $8+28+56+70+56+28+8+1=255$。

（$C^8_0=1$ 表示全部門關著的方法數為 1，不列入計算）

(2)從乘法原理觀點：

第 1 到第 8 個門，每一個門或開或關有兩種選擇，依乘法原理共有

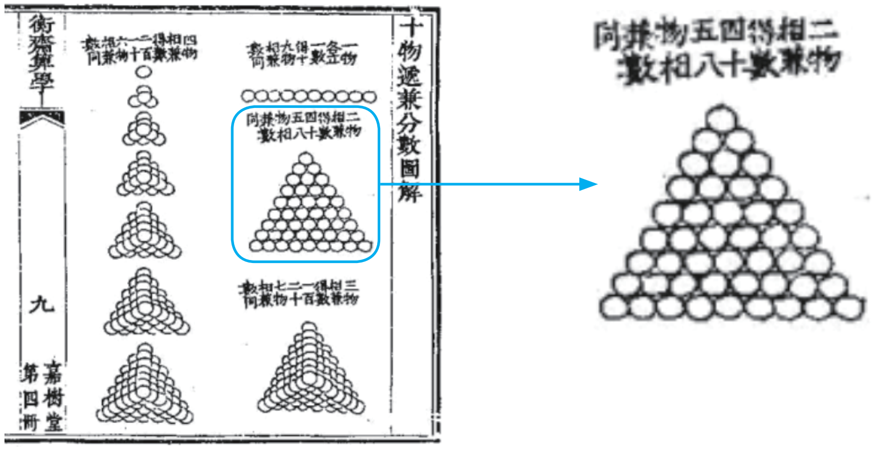
$\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8個2}$ 再扣掉全部門關著不算，減去 1。

所以有$\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8個2}-1$ 開門的組合總數。

經由(1)、(2)兩種觀點求解，得

$$8+28+56+70+56+28+8+1=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8個2}-1$$

3. 探究古人計算組合數的方法！



清代數學家汪萊在著作《衡齋算學四》的〈遞兼數理〉中提出「十物遞兼分數圖解」，利用各種三角堆的和求出相對應的組合數 C_k^{10}。其中組合數 C_2^{10} 的求法是利用與平三角堆總和的對應規律，導出 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$，如上圖，進而求得 $C_2^{10}=\dfrac{9\times 10}{2}=45$。請解釋 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$ 為何成立。

考慮從 a，b，c，d，e，f，g，h，i，j 十個英文母中任取兩個相異的字母的組合數求法，藉由對物件選取配對的方式，先選一物為主與他物進行配對。

a 與 b，c，d，e，f，g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 9 種。

b 與 c，d，e，f，g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 8 種。

c 與 d，e，f，g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 7 種。

d 與 e，f，g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 6 種。

e 與 f，g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 5 種。

f 與 g，h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 4 種。

g 與 h，i，j 中取一個配對為一組，方法數為 3 種。

h 與 i，j 中取一個配對為一組，方法數為 2 種。

i 與 j 中取一個配對為一組，方法數為 1 種。

所以由加法原理得 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1=\dfrac{9\times 10}{2}=45$。

4.(1)設 n，k 都是正整數，且 $2 \leq k \leq n$，
試證明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$。
(2)設計一個情境式的敘述，說明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$。

(1)證明：
由巴斯卡性質 $C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$………(1)
可得 $C_k^{n-1} = C_k^{n-2} + C_{k-1}^{n-2}$………(2)
$C_{k-1}^{n-1} = C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$………(3)
將(2)、(3)兩式代入(1)，可得 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$。

(2)將班上討論選中與不被選中出公差的對象，從巴斯卡公式中的一位變成兩位。
假設 A、B 是班上 n 個人其中之二，想從中選出 k 個人出公差，依 A、B 被選中或不被選中的情況可分為四種，選中（以 ○ 表示）或不被選中（以 × 表示）。

A	B	方法數	說明
○	○	C_{k-2}^{n-2}	若 A、B 被選中，則其他的 $n-2$ 個人中選出 $k-2$ 個人的方法有 C_{k-2}^{n-2} 種
○	×	C_{k-1}^{n-2}	若 A 被選中、B 沒被選中，則其他的 $n-2$ 個人中選出 $k-1$ 個人的方法有 C_{k-1}^{n-2} 種
×	○	C_{k-1}^{n-2}	若 B 被選中、A 沒被選中，則其他的 $n-2$ 個人中選出 $k-1$ 個人的方法有 C_{k-1}^{n-2} 種
×	×	C_k^{n-2}	若 A、B 都沒被選中，則其他的 $n-2$ 個人中選出 k 個人的方法有 C_k^{n-2} 種

根據加法原理，便可得
$C_k^n = C_k^{n-2} + C_{k-1}^{n-2} + C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2} = 1 \times C_k^{n-2} + 2 \times C_{k-1}^{n-2} + 1 \times C_{k-2}^{n-2}$

學生手冊 P24