

數學素養教學模組：直角三角比

鄧家駿

台北市立景興國中

曾明德

台北市立南門國中

摘要

本教學模組的目的是為新課綱中直角三角比單元發展實驗教材，從生活中的案例出發，透過自行車社群網站上對於險升坡標示的討論引入坡度的計算方式與正切概念(tangent)的關係；運用方格紙繪圖來討論比較75%、7.5%、75度等對坡度不同的描述並幫助學生察覺角度與坡度的對應。接著讓學生觀察兩個大小不同，但是坡度相同(75%)的直角三角形，來發現其間的不變性。讓學生利用三角形相似性質來指出兩股間的比值相等，最後才正式引入tan A符號來表示坡度，並做相關的應用與討論。

在學習sin A與cos A概念時，透過特定邊長或角度的直角三角形來計算直角三角比，熟悉tan A、sin A與cos A的算法。最後，使用計算機計算直角三角比的值，並提供適當的任務讓學生透過直角三角比來解決生活的真實問題(油漆工與溜滑梯問題)。

教學模組亮點

一、以具體的生活情境引發學生的主動思考

- (一)透過險升坡，介紹坡度的計算方式
- (二)設計生活中的情境問題，增進學生的學習需求與問題解決能力



任務 11

考慮油漆工人在放置樓梯的安全，如果一座樓梯長為 8 公尺，靠著牆面與地面接合角度為 65°，這樣的斜坡地比較穩固的。

(1) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子底部離牆面有多遠呢？

(2) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子頂部離地有多高呢？

解答：
(1) $\cos 65^\circ = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{x}{8}$ ， $x = 8 \times \cos 65^\circ \approx 3.384$ (公尺)
(2) $\sin 65^\circ = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{y}{8}$ ， $y = 8 \times \sin 65^\circ \approx 7.240$ (公尺)

任務 12

校園運動場跑道 5 公尺的高度下，依規定跑道的坡度不可以超過 40 度。

(1) 請問跑道的水平距離要保留多少公尺的水平距離來完成這道橋？

(2) 這道橋的長度是多少公尺？

解答：
(1) $\tan 40^\circ = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{5}{x}$ ， $x = \frac{5}{\tan 40^\circ} \approx 6.109$ (公尺)
(2) $\sec 40^\circ = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{y}{x}$ ， $y = x \times \sec 40^\circ \approx 7.776$ (公尺)

二、以具體的工具操作協助學生建立抽象的概念

- (一)運用各種工具協助學生從具體到抽象經歷各種表徵，建立利於後繼學習的經驗
- (二)教材中安排學生使用量角器、直尺、方格紙、計算機等工具來完成任務

任務 3

請在附帶的方格紙(單位長 1 公分)中，繪製一個 $\angle A = 75^\circ$ 的直角三角形，請問你可以利用哪些數據，來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？

先按 \square ，打開螢幕，並輸入要算左邊上方數出現 DEG，表示 degree 度數。

若左邊螢幕上方沒出現 DEG，而顯示 RAD，或 GRADE，可以按 \square 數次，來切換到 DEG 模式。

輸入要算 $\angle A$ 的度數，例如 45 (指的是 45°)，再按 \square ，就會得到 1 (即 $\tan 45^\circ$ 的值)。

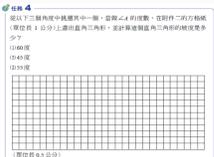
若要算 \sin 或 \cos 的，也可以按同樣的方式操作。

三、以適切的任務內容協助學生連結相關的數學知識

- (一)以任務鋪陳數學學習脈絡，並以開放的問題引導學生勇於表達想法
- (二)設計平行任務提供學生有選擇與自主練習的機會，以促進數學學習的效果

任務 1

請畫出險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。

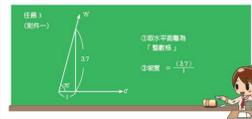
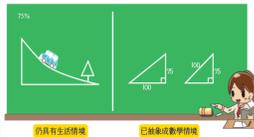


教學模組架構

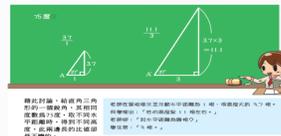
- 一、**情境化的學習**:利用道路上的險升坡標誌介紹坡度的意義，希望培養學生從生活中觀察數學的例子，提升素養。
- 二、**造例、觀察與探索**:設計活動，透過方格紙繪圖來討論 75%、7.5%、75 度等不同的坡度描述，並比較不同的直角三角形有多陡。提供任務讓學生練習畫直角三角形去估算坡度，和固定坡度的直角三角形來測量斜邊上升的角度，讓學生從中察覺角度與坡度的對應，增加學生實作及測量的能力。
- 三、**一般化**:透過兩個大小不同，但是某一銳角相同(75 度)的直角三角形，來發現其間的關係，讓學生利用三角形相似性質來指出兩股間的比值不變，使用 tanA 來表示此比值，並做相關的應用與討論。
- 四、**形成性評量**:透過特定邊長的直角三角形來練習 tanA、並使用斜邊、對邊、鄰邊來引入 tanA、sinA、cosA 的意義。
- 五、**使用數學的機會**:學習使用計算機，解決直角三角形給定其一邊長與一銳角，求出其他兩個邊長的生活應用問題。

試教課堂的學生反應

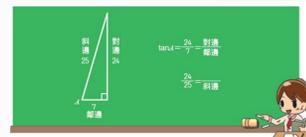
一、畫出險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息



二、實作有一銳角為 75 度的直角三角形 三、從 75 度收集畫出不同大小的直角三角形 藉此討論邊長比值，並正式介紹 tanA



四、藉由實際數字的例子(兩股為 7、24 的直角三角形)，練習 tanA 並介紹 sinA、cosA



五、計算機的使用與生活應用問題。



開發困難及突破

一、為何要在國中階段進行直角三角比單元呢？

- (一)學習成效上的考量
- (二)學習需要時間以待學生的成熟

二、直角三角比要從哪一個三角比切入呢？

本教學模組(素養教材)既打算從現實情境、寓言故事或數學史引入教材，我們就得從結合本單元的三個數學主要概念tan, sin, cos思考之。

結果發現似乎只有tan的特定生活情境，例如坡度、竿影與竿長等案例比較貼近國中生的生活，至於有關sin、cos的生活情境，一方面均比較屬於應用層面，也就是在學過數學概念之後，才運用相關數學知識與能力來解決特定的生活情境問題，例如：力與力矩、拖行李等案例。另一方面，這些案例似乎屬於高中範疇。

最後，預估未來正式教科書應會從sin著手，因此，本教學模組從tan著手，也可提供給教師另外一種選擇。

三、實作活動的時間管理與學習工具的開發

教學時數的多寡一直是學習成效一個重要的因素。而像方格紙、計算機等工具的實作活動不但設計不易(適切性、靈感等困難)，很花時間。同時，需要有極大的熱忱與創意。

本教學模組的編寫在國教院教授的規劃下，讓高中、國中小教師可以一起創作。有效地解決了這個困境，也希望你，可以加入我們。

數學素養導向教材設計的6個原則

- (一)透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求
- (二)以明確主軸的任務來鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念
- (三)讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通
- (四)教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會
- (五)教材設計具備多重表徵
- (六)學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習