

平面上的線性變換與二階方陣

The Linear Transformations and 2-by-2 Matrix in Coordinate Plane

洪瑞英 吳汀菱

台北市立中山女子高級中學數學科教師

摘要

平面上的線性變換與二階方陣為目前高二下學期自然組的課程內容，因為非學測考試內容，且課本引入的方向不盡相同、課程時間很短，學生學習方式流於記憶與計算。為了因應107課綱精神，使高中教材能與大學課程良好銜接，筆者試著以『基底變換』與『線性組合』為概念核心來設計本課程。

本教材設計以學生為本位，透過分組討論，教師提問的模式，循序漸進建立學生將學生概念從『變換』到『線性變換』，並透過活動建立線性組合觀點，輔以圖像協助建立心像。接著，與一般教科書不同，讓學生以『基底變換到基底』的觀念，自行推導出四個常見的變換矩陣，並以GGB軟體設計圖像隨著輸入的變換矩陣呈現，最後談及線性變換面積比與基底面積比有關。

教學模組亮點

- 一、以探索式活動引導學生將操作矩陣乘法的動作與圖形變換做連結。
- 二、教案中設計許多討論，提問或製造認知衝突的問題幫助概念的釐清與建立。
- 三、強化幾何圖形與代數式的結合，以此核心概念設計教學活動。
- 四、以基底變換到基底，連結線性組合概念，建立變換矩陣的核心概念。
- 五、讓學生利用已習得的概念，自行推導線性變換特殊矩陣。
- 六、每一個教學活動主題明確，彼此緊扣，猶如台階般讓學生拾級而上，累積基本概念，最後越來越熟悉並同時順利發展新概念。

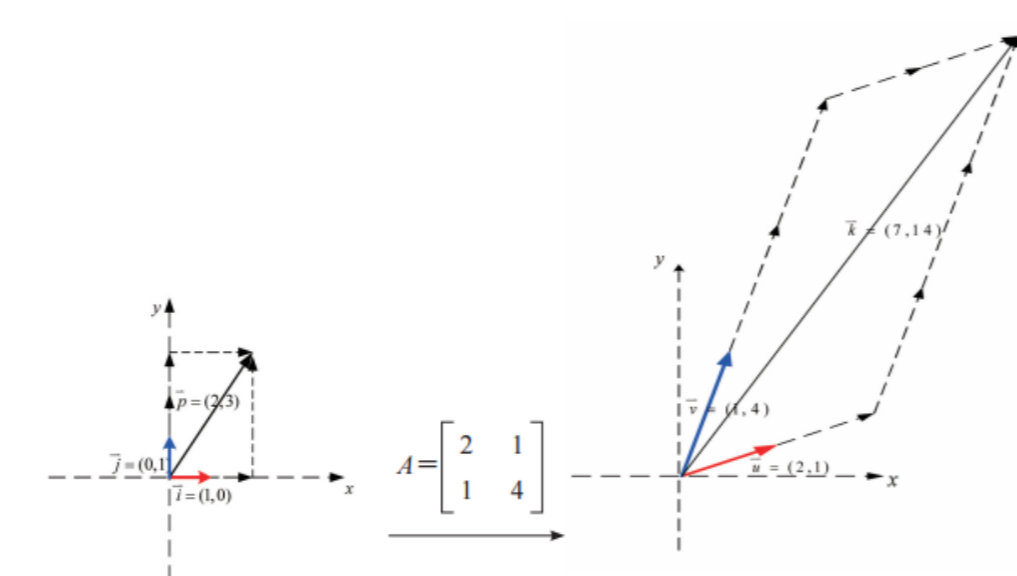
教學模組架構

平面上的線性變換

變換矩陣

線性組合觀點看線性變換

點到點、函數對應到變換矩陣建立
猜測、討論活動與認知衝突
向量到向量、直線到直線
運算式與圖形的連結

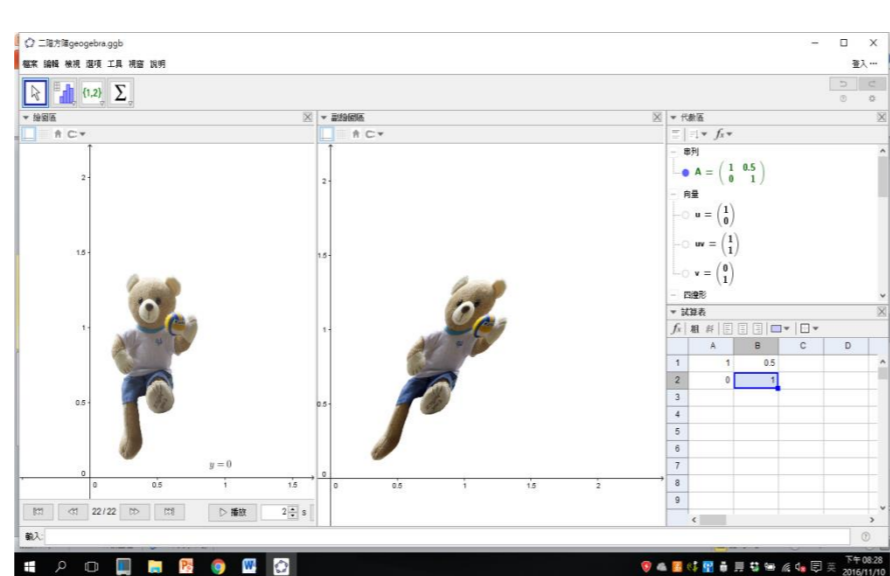


平面上特殊的線性變換

學生自行推導伸縮、
旋轉、鏡射、推移矩陣

利用軟體GeoGebra操作

鏡射矩陣
• 利用將 $\vec{i}=(1,0)$ 與 $\vec{j}=(0,1)$ 對直線 $y=\tan\theta x$ 鏡射:
 $\vec{i}=(1,0)$ 鏡射到 $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$
 $\vec{j}=(0,1)$ 鏡射到 $(-\sin 2\theta, \cos 2\theta)$
鏡射矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$
• 旋轉矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
• 伸縮矩陣 $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$
• 推移矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$



線性變換面積比

基底張成的 \square 面積比為 1: $|\det A|$
兩個經基底變換後的向量張成的 \square 面積比
仍為 1: $|\det A|$?

利用線性組合的性質與行列式的運算性質可以輕易推得

教學模組試教過程

觀課

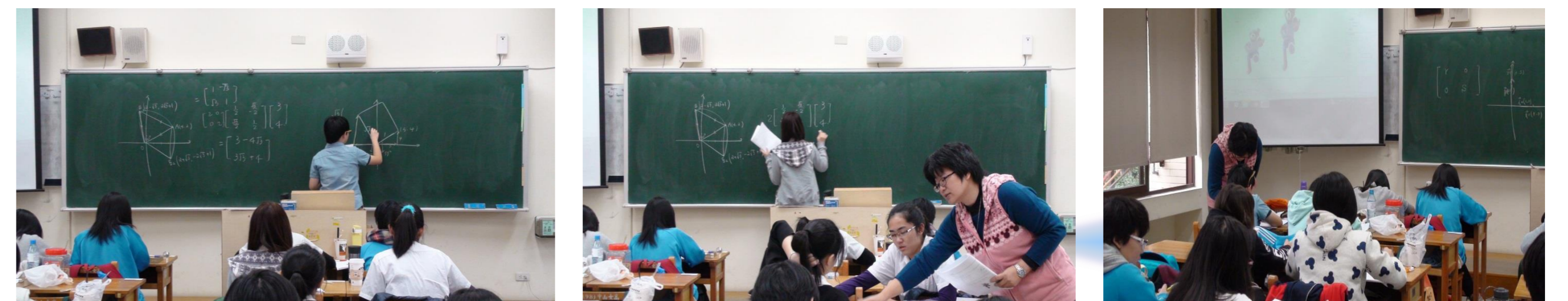
- 進行教學流程檢核。
- 關注學生動機與學習投入情形與成效。
- 觀察者填寫「教學觀察回饋表」。

議課

- 討論對於學生學習情況的觀察。
- 針對教學內容先後順序是否需要調整或修正進行討論。
- 分享教學觀察中的收穫。

反思

- 針對教材內容有誤部分進行勘誤，修訂
- 修正教材內用詞與文字流暢度。
- 針對教師意見及建議評估與修訂教材。
- 蒐集學生反饋資料作為參考。



上課剪影

教學模組開發困難及突破

一、困難之處：

1. 對數學素養意涵不易了解。
2. 所開發的數學模組是否為數學素養導向的教材。
3. 所開發的數學教學模組要培養什麼樣的數學素養。
4. 討論導向的數學模組如何掌握學生反應，讓教學脈動流暢。

二、突破之處：

1. 教材設計合宜，以基底觀念引入矩陣的轉換機制，配合圖形繪製與說明是相當好的安排。
2. 提供引導學生思考的參考方式，是很好的教師參考手冊。
3. 教師手冊說明詳盡，將學生可能的反應做出說明 (以上為審查委員所給予的肯定)

結語

對於數學素養導向的教學模組，許多老師包括筆者，都還不甚理解，本教材主要目的為教法的改進，提升教學的流暢度與效率。期盼各位教授專家與先進前輩多多指導、批評、指教。