

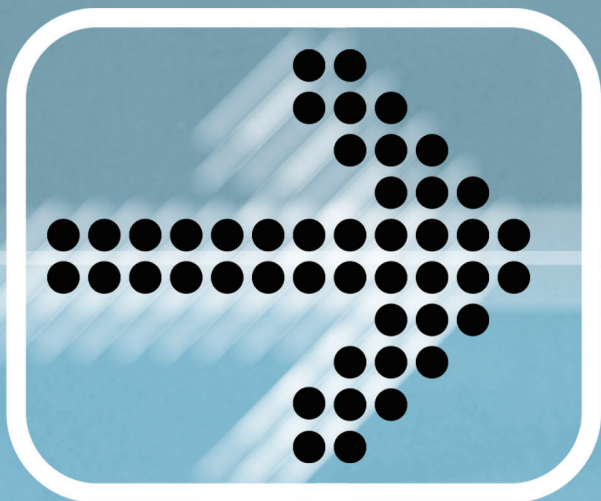
差異化國民中學數學教材 一元一次方程式的應用

教師手冊



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組



單元

一元一次方程式應用問題

教師手冊

單元 目標

1. 能由具體情境中列出一元一次方程式並解題
2. 能檢驗所求得之解是否合乎題意

對照 學習內容

A-7-3 等量公理；移項法則；驗算；應用問題。(a-IV-2)

教材 設計理念

核心想法在於提供所有學生公平學習的機會，讓每一位學生都容易理解和給予充分的機會主動參與。教學設計兼顧多元活動與多元表徵的靈活運用，其中多元活動包含觀察、操作、分組討論、小試身手等，而多元表徵則包含圖像、表格、符號等。差異化任務包括「開放性問題」、「平行任務」、「數學擬題」。「開放性問題」具備多樣解答或多種解題路徑；「平行任務」具備不同難易程度或是學習鷹架的有無，學生可依學習能力的不同，選擇較難或較易的任務，獨立完成任務或是依循學習鷹架引導完成任務。自我評量以難易分類，鼓勵學生可選擇適合自己能力的題型練習。

數學擬題出現在單元概念學習後，讓學生自行設計數學問題，可請他們上台分享、討論自己所設計的數學題目，增進同儕互動。當每個小單元結束時，教師可使用IRS即時反饋系統，以有效進行形成性評量來掌握學生課堂學習狀況。再者，形成性評量是差異化教學的關鍵，本教材的任務具備形成性評量的功能，教師可以從學生的回答，蒐集相關的學習證據，從而採取相應的教學活動，回應學生的學習需求與個別差異，有效進行差異化教學。

建議教師適時運用分組活動，讓同學能有交流、互動討論的環境，「老師講解」的題目由教師帶領學生學習，「學習任務」則由學生自行解題，教師從旁適時引導，並鼓勵同學發表自己的解題想法，供同儕參考。最後的自我評量部分，多數同學會習慣從頭

開始寫，教師可運用訂定時間(約5分鐘內)，或鼓勵程度較佳的同學，直接從進階題或是神的境界開始做，以達到差異化的學習。

教材架構

本教材構架如下：

1. 一元一次方程式的列式：

希望同學能從教材中的任務練習，藉由發表、討論，連結舊經驗，歸納出一元一次方程式的列式，教材中並提供多重表徵呈現方式輔助同學能從不同面向思考、解題。

2. 一元一次方程式的應用問題：

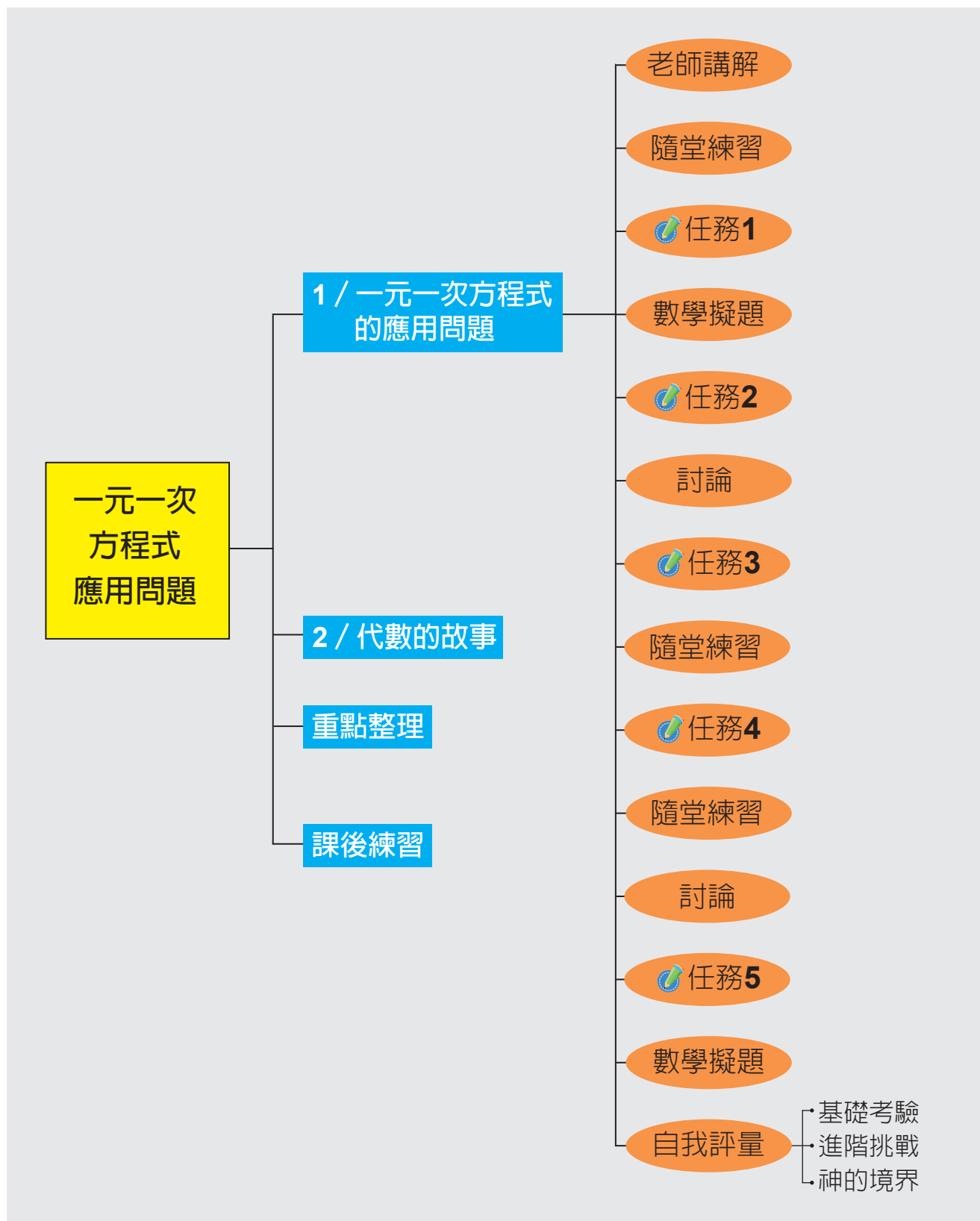
各式題型依脈絡，結合章節的核心概念，讓同學能容易理解。

3. 一元一次方程式的數學擬題：

數學擬題是自己出題考其他同學，瞭解此階段的數學概念形成與否或是產生哪些迷思概念。

4. 自我評量與課後練習：

參考近幾年基測、會考試題改編為合適的題型，讓同學統整或應用本單元所學。





數-J-A2

具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。

數-J-B1

具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

數-C2 (C2人際關係與團隊合作)

具備和他人合作解決問題的素養，並能尊重多元的問題解法，建立良好的互動關係。

數-J-C3

具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養。

一元一次方程式應用問題 學習單

1 一元一次方程式的應用問題

老師講解：

小明帶50元到書店買彩色筆後只剩1元。每枝彩色筆售價為7元，購買後只剩1元。
請問小明總共買了幾枝彩色筆？

如何解決上面的問題呢？必須由題目中逐句找出已知條件及數量關係，根據題目敘述列出方程式；以下步驟可以幫助我們來求解！

提醒同學一定要有「設……為 x 」，
即第一步是假設誰為 x

步驟一、確認「未知數」是甚麼？

買了幾枝彩色筆。所以，假設買了 x 枝彩色筆

步驟二、找到「已知數」和「條件」是甚麼？（可在題目上劃線標記代替寫出）

帶50元、只剩1元、每枝彩色筆售價7元。

步驟三、將各數量的關係列出一元一次方程式：

一枝彩色筆 7×1 元，二枝彩色筆 7×2 元，三枝彩色筆 7×3 元，

 x 枝彩色筆 $7x$ ，...

所以買了 x 枝彩色筆共花了 $7x$ 元；

根據題意列出方程式：（請寫下答案） $7x + 1 = 50$

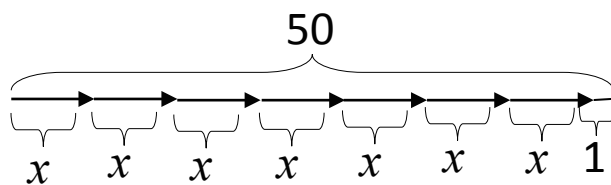
有列出正確、符合題意的方程式嗎？如果有，太棒了！

步驟四、解方程式（解出「未知數」）：

$$7x + 1 = 50$$

$$\Rightarrow 7x = 49$$

$$\Rightarrow 7x = 49$$



步驟五、驗算，將方程式的解代回原問題中依題意檢驗：

原有50元，買七枝筆共需49元，最後剩1元。符合題意

隨堂練習

小軒帶200元到書局，買了2B鉛筆3枝，1本32元的記事本和1個70元的修正帶，付完錢後剩53元，則1枝鉛筆多少元？

步驟一、確認「未知數」是甚麼？

設鉛筆1枝 x 元

老師講解完後，由同學自行練習「隨堂練習」，巡視同學作答情形，進行形成性評量，請同學上台分享個人解題想法。

步驟二、找到「已知數」和「條件」是甚麼？（可在題目上劃線標記代替寫出）

已知有200元，買了3枝鉛筆，32元的記事本和70元的修正帶

步驟三、將各數量的關係列出一元一次方程式：

$$200 - (3x + 32 + 70) = 53$$

此列式非唯一，可以請同學分享自己不同的列式想法。

步驟四、解方程式（解出「未知數」）：

$$200 - (3x + 32 + 70) = 53$$

$$200 - 3x - 32 - 70 = 53$$

$$-3x = 53 - 200 + 32 + 70$$

$$-3x = -45$$

$$x = 15$$

強調並提醒同學，應用題的驗算，是把解的值代回題目計算，代回自己列的方程式只能檢驗計算過程無誤；應代回原題目中的數量關係是否符合。

步驟五、驗算，將方程式的解代回原問題中依題意檢驗

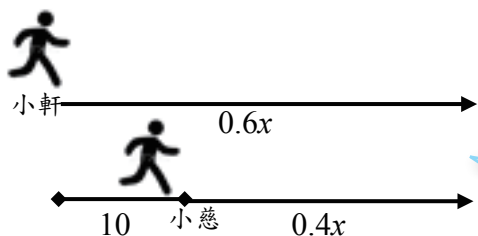
$$3 \times 15 + 32 + 70 + 53 = 200$$

任務 1

小軒和小慈在操場的跑道上同方向前進，若小軒走一步約0.6公尺，小慈走一步約0.4公尺，若兩人一開始相距10公尺，請問同時走了幾步後，小軒能追到小慈？

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
(1) 確認「未知數」是甚麼？ 設同時走了 x 步 (2) 找到「已知數」和「條件」是什麼？ (可在題目上劃線標記代替寫出) 已知：小軒走一步0.6公尺 小慈走一步0.4公尺 兩人一開始相距10公尺	鼓勵同學挑戰直接作答

(3) 請依據題目條件列出一元一次方程式



由不同表徵(圖形表徵)，讓同學理解題意，可請同學分享看此圖所表示的意義為何，提醒同學可利用圖形列出方程式。

① 請問圖中「 x 」代表什麼意義？

走了 x 步

② 列出一元一次方程式：

$$0.6x = 10 + 0.4x$$

(4) 解方程式(解出「未知數」)：

$$0.6x = 10 + 0.4x$$

$$0.6x - 0.4x = 10$$

$$x = 50$$

(5) 驗算(將方程式的解代回原問題檢驗)：

$$0.6 \times 50 = 30$$

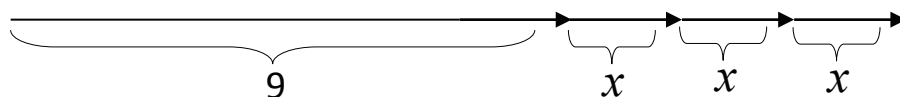
$$10 + 0.4 \times 50 = 30 \quad \text{符合}$$

再次強調，應用題的驗算，是把解的值代回題目計算，不能只代回自己列的方程式。

數學擬題

請同學依照下列的圖形，寫出一題符合以下圖形的一元一次方程式應用問題。

(可參考老師講解1或自行設計；數線總長度由同學自己訂)



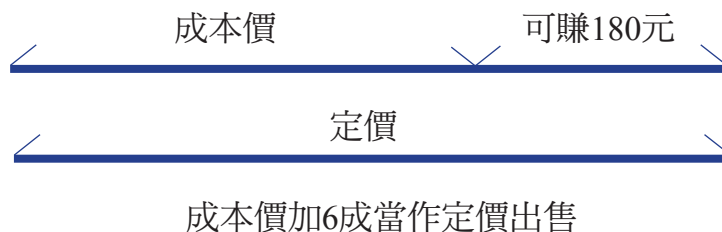
任務 2

週六小軒和朋友相約逛街，在享玩玩具店裡，看到一個熊玩偶，價格標籤上的原定價已經模糊不清，但知道定價打七五折後的售價為150元，則原本定價是多少元？

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1) 確認「未知數」是甚麼？ 設原本定價 x 元</p> <p>(2) 找到「已知數」和「條件」是甚麼？ (可在題目上劃線標記代替寫出) 定價打七五折後的售價為150元</p> <p>(3) 將數量的關係列成一元一次方程式</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="margin-right: 10px;">定價</div> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 15px; background-color: #0056b3; position: relative;"> <div style="position: absolute; top: 5px; left: 5px; width: 25px; height: 10px; background-color: #0056b3;"></div> <div style="position: absolute; top: 5px; left: 30px; width: 25px; height: 10px; background-color: #0056b3;"></div> <div style="position: absolute; top: 5px; left: 55px; width: 25px; height: 10px; background-color: #0056b3;"></div> <div style="position: absolute; top: 5px; left: 80px; width: 25px; height: 10px; background-color: #0056b3;"></div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;"> <div style="margin-right: 10px;">售價</div> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 15px; background-color: #0056b3; position: relative;"> <div style="position: absolute; top: 5px; left: 5px; width: 80px; height: 10px; background-color: white; color: black; font-size: 8px;">150元</div> </div> </div> <p>$x \times 0.75 = 150$</p> <p>(4) 解方程式(解出「未知數」):</p> <p>$x \times 0.75 = 150$</p> <p>$x = 150 \div 0.75$</p> <p>$x = 150 \div \frac{3}{4}$</p> <p>$x = 150 \times \frac{4}{3}$</p> <p>$x = 200$</p> <p>(5) 驗算(將方程式的解代回原問題檢驗):</p> <p>$200 \times 0.75 = 150$ 符合</p>	<p>進行任務2時，教師可先複習或釐清觀念，折扣和加幾成的概念。 如：100元打8折，就是100×0.8或$100 \times \frac{80}{100}$；100元加2成，就是$100 + 100 \times \frac{20}{100}$。</p> <p>由不同表徵(圖形表徵)，讓同學理解題意，可請同學分享看此圖所表示的意義為何，提醒同學可利用圖形列出方程式。</p>

討論： (可自行選擇一題討論)

1. 若享玩玩具店老闆將北極熊玩偶以成本價加6成當作定價賣出，可以賺180元，請問北極熊玩偶成本價為多少元？



設成本為 x 元

$$x + 0.6x - x = 180$$

$$x = 300$$

2. 如果防寒風衣照定價八五折出售，價格是6375元，若照定價八折出售應賣多少元？



設定價為 x 元

$$x \times 0.85 = 6375$$

$$x = 7500$$

照定價八折出售應賣 $7500 \times 0.8 = 6000$ 元

任務 3

週日小軒和家人去爬山，上山每小時走3公里，下山每小時走5公里，若來回一趟共需4小時，則山路長多少公里？（速率 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ ）

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1) 確認「未知數」是甚麼？ 設山路長 x 公里</p> <p>(2) 將數量的關係列成方程式並解出「未知數」 利用速率 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ 的公式 得到：時間 = $\frac{\text{距離}}{\text{速率}}$</p> <p>① 上山所花的時間為 $\frac{x}{3}$ 小時</p> <p>② 下山所花的時間為 $\frac{x}{5}$ 小時：</p> <p>③ 依題意，來回一趟共需4小時，列出方程式： $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 4$ $5x + 3x = 60$ $x = \frac{15}{2}$</p> <p>(3) 驗算(將方程式的解代回原問題檢驗)： 上山花了：$\frac{15}{2} \div 3 = \frac{5}{2}$ 下山花了：$\frac{15}{2} \div 5 = \frac{3}{2}$ 上、下山總共花了：$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ 符合</p>	<p>提醒同學，上山、下山的山路長是相同的。 速度、距離、時間的關係，需提醒同學。</p> <p>這題需利用上山、下山所花的時間就是來回一趟共需4小時的關係來列式，對一般同學而言是較難理解的，需花較多時間說明。</p>

隨堂練習

週末小軒和家人騎腳踏車去逛夜市，去程每小時騎30公里，回程每小時騎20公里，若來回一趟共需半小時，則小軒家和夜市距離多少公里？（速率 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ ）

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1) 確認「未知數」是甚麼？ 設<u>小軒</u>家和夜市距離 x 公里</p> <p>(2) 將數量的關係列成方程式並解出「未知數」</p> <p>① 從家到夜市所花的時間： $\frac{x}{30}$</p> <p>② 從夜市回家所花的時間： $\frac{x}{20}$</p> <p>③ 依題意，來回一趟需半小時，列出方程式： $\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = \frac{1}{2}$ $x = 6$</p> <p>(3) 驗算</p> <p>從家到夜市所花的時間：$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$</p> <p>從夜市回家所花的時間：$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$</p> <p>來回夜市總共花了：$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ 符合</p>	

任務 4

第二次的段考，小軒的數學成績為 x 分，如果國文成績是數學成績的2倍少40分，而且這兩科的成績合計為170分。則小文的國文成績與數學成績各是多少分？

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1) 確認「未知數」是甚麼？ 依題意：數學成績為 x 分 且國文成績是數學成績的2倍少40分， 則國文成績為 $2x-40$ 分</p> <p>(2) 將數量的關係列成方程式並解出「未知數」</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{c} \text{數學分數} \\ \hline \text{國文分數} \\ \hline \end{array}$ $x + (2x - 40) = 170$ $x = 70$ </div> <p>(3) 驗算(將方程式的解代回原問題檢驗):</p> <p>數學成績：70分 國文成績：$70 \times 2 - 40 = 100$ 合計：170 符合</p>	<div style="border: 1px solid blue; padding: 5px; background-color: #e0f0ff;"> <p>可教同學先用中文敘述列式： 國文 = 數學 $\times 2 - 40$。 就可以很容易知道若數學成績為x，則國文成績就是$2x - 40$</p> </div>

隨堂練習

小軒在檢討第二次段考的考題時，發現有一題還是不會做，題目是「有大、小兩個數，兩數相差為14，且小數比大數的多6。請問大、小兩數分別是多少？」

請你幫他完成這一題。

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1) 確認「未知數」是甚麼？ 設大數為 x 則小數為 $\frac{1}{5}x + 6$</p> <p>(2) 將數量的關係列成方程式並解出「未知數」 $x - (\frac{1}{5}x + 6) = 14$ $x = 25$</p> <p>(3) 驗算： 設大數為25，則小數為 $\frac{1}{5}x \times 25 + 6 = 11$ $25 - 11 = 14$ 符合</p>	<p>可請同學回答，假設大數為 x，或小數為 x，較佳？原因為何？</p>

討論：

甲比乙重2倍還多5公斤，兩人合計125公斤，求甲、乙兩人體重是多少公斤？

1. 當設甲為 x

(1) 依題意「甲比乙重2倍還多5公斤」

則乙是 $\frac{1}{5}(x-5)$ 分公斤

由 $甲 = 乙 \times 2 + 5$ ，可以很容易看出假設乙為未知數會比較容易列式，利用1、2兩題讓同學感受，不論設誰為未知數都能解出，但若能假設乙為未知數，更能省時省力。

(2) 「甲、乙兩人合計125公斤」，將數量關係列成一元一次方程式：

$$x + \frac{1}{5}(x-5) = 125$$

(3)解方程式：

$$x=85$$

(4)驗算：

甲體重：85公斤

乙體重：40公斤

總重：125公斤 符合

2. 當設乙為 x

(1)依題意「甲比乙重2倍還多5公斤」

則甲是 $2x+5$ 公斤

(2)「甲、乙兩人合計125公斤」，將數量關係列成一元一次方程式：

$$(2x+5)+x=125$$

(3)解方程式：

$$x=40$$

(4)驗算：

甲體重：85公斤

乙體重：40公斤

總重：125公斤 符合

你認為假設甲為 x 或假設乙為 x 哪一種比較容易列式，請寫出你的想法！

很多同學有自己的見解，請幾位同學發表自己的想法，並請其他同學給予評論或建議。

2 / 代數的故事

花拉子米全名是阿布·阿卜杜拉·穆罕默德·伊本·穆薩·花拉子米(*Ab Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*，約780年—約850年)，他是一位波斯數學家、天文學家及地理學家，也是巴格達智慧之家的學者。



他的《代數學》(*Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala*)是第一本解決一次方程及一元二次方程的系統著作，他因而被稱為代數的創造者，與丟番圖享名。十二世紀，花拉子米在印度數字方面的著作被翻譯成拉丁文，十進制因此傳入西方世界。此外，他修訂了托勒密的《地理》，並著有天文學及占星學方面的書籍。

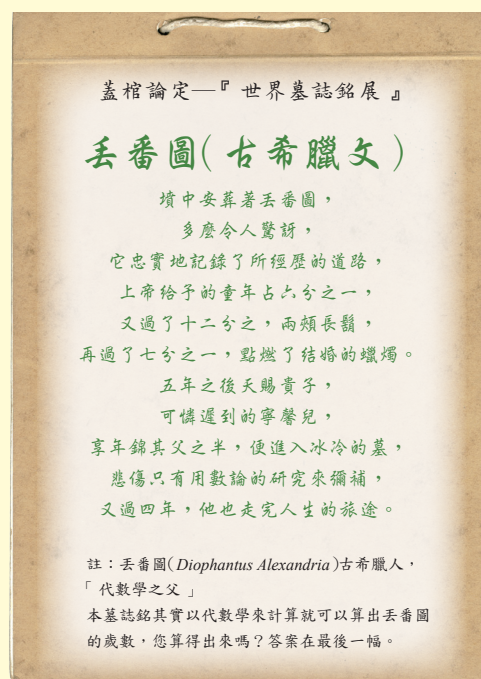
從一些詞就可以看出他對數學的重要貢獻，「代數」(*algebra*)一詞出自阿拉伯文拉丁轉寫「*al-jabr*」，「*al-jabr*」是用以解決一元二次方程的兩個辦法之一。算法(*Algorism*、*Algorithm*)出自「*Algoritmi*」，這是花拉子米(*al-Khwarizmi*)的拉丁文譯名，而西班牙語「*guarismo*」及葡萄牙語「*algarismo*」亦是由此名字而來，這兩個詞語都解作數字。

(取自維基百科<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%8A%B1%E6%8B%89%E5%AD%90%E7%B1%B3>)

丟番圖是希臘數學家，在二次方程式有傑出的貢獻，並將希臘人已完成的代數

成果加以匯集編目，被譽為代數學的鼻祖。希臘數學自畢達哥拉斯學派後，數學重心就在幾何，他們認為只有經過幾何論證的命題才是可靠的。

為了邏輯的嚴密性，代數也披上了幾何的外衣。一切代數問題，甚至簡單的一次方程的求解，也都納入了幾何的模式之中。直到丟番圖，才把代數解放出來，擺脫了幾何的羈絆。他認為代數方法比幾何的演繹陳述更適合於解決問題，而在解題的過程中顯示出的高度的巧思和獨創性，在希臘數學中獨樹一幟。被後人稱為『代數學的鼻祖』實至名歸。



任務 5

賴家三兄妹，每個月的零用錢總和是6400元，已知大哥的零用錢是二姊零用錢的3倍少200元，小妹零用錢是二姊零用錢的一半多300元，請問三兄妹的零用錢各是多少元？

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<p>(1)你認為以誰的錢作為「未知數」比較容易解題?說說你的理由。</p> <p>設二姊有 x 元， 則大哥 $3x - 200$ 元， 小妹有 $0.5x + 300$</p> <p>(2)將數量的關係列成方程式並解出「未知數」</p> <p>零用錢總和是6400，列出 $(3x - 200) + x + (0.5x + 300) = 6400$ $x = 1400$</p> <p>(3)驗算</p> <p>二姊有1400元， 則大哥4000元， 小妹有1000元 符合</p>	<p>建議請同學列出關係式： 大哥 = 二姊 $\times 3 - 200$； 小妹 = 二姊 $\times 0.5 + 300$， 再決定要假設誰為未知數 x</p>

數學擬題

請同學在擬一道一元一次方程式的應用問題，按題目條件列出的方程式為：

自我評量

自我評量部分，多數同學會習慣從頭開始寫，教師可運用訂定時間(約5分鐘內)，或鼓勵程度較佳的同學，直接從進階題或是神的境界開始做，以達到差異化的學習。

勾選 你要解決的題目。

● 基礎考驗：

1. 某班級40人，某次班級點心費共1400元，請問每人需付 35 元。

2. 已知 x 與 $2x$ 兩式都減去7後，再相加得到的和是37，則 $x =$ 6

● 進階挑戰

3. 小英清點撲滿內的硬幣，共有伍元及拾元的硬幣共60個，合計為415元。則撲滿內伍元硬幣有 37 個。

4. 小明的年齡是媽媽年齡的一半再減10，兩人年齡之和為59，問兩人年齡各為多少？
媽媽46歲，小明13歲

● 神的境界：

5. 阿美的年紀比老師小20歲，6年後老師的年齡是阿美年齡的2倍，試求阿美今年 14 歲。

6. 阿貴參加太魯閣山路健走活動上山每小時走3公里，下山每小時走5公里，共花了8小時，請問山路全長 15 公里。

7. 某國中的學生人數是1372人，若全校男生人數是七年級學生人數的4倍少43人，全校女生人數是七年級學生人數的3倍多15人，則全校男、女學生人數相差多少人？

142

1. 應用問題常見題型有「折扣」、「速率」、「分配」、「倍數」等問題類型。

(1) 折扣問題：(可參考  任務 2)

原價打八折 = 原價 × 0.8 = 原價

原價的七成 = 原價 × 0.7 = 原價

原價加七成 = 原價 + 原價 × 0.7 = 原價

(2) 速率問題：(可參考  任務 3)

(速率 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$)，若是上山、下山的問題，注意距離是相同的

(3) 總量問題：

注意一種事物的總數量必定相等去列式

(4) 倍數問題：(可參考  任務 4、5)

可先將題目的敘述用數學式子表示，再決定假設哪個當未知數。

例如：甲是乙的2倍少40；

⇒ 甲 = 2 × 乙 - 40，則假設乙為未知數會較方便

自我挑戰題

1. 某台電腦若以定價75折出售，會賠2000元；若以定價9折出售，可賺100元，則此台電腦定價為多少元？

10500元

2. 某二位數，其數字和為15，而其個位數字與十位數字互調後之新數比原數還要多9，試求原數為？

原數為78

3. 某人騎腳踏車爬坡，上坡每分鐘10公尺，下坡每分鐘15公尺，上下坡共費45分鐘，則此斜坡長為何？

270公尺

4. 某國中一年級新生報到後開始編班，如果一班編38人，則多出6人；如每班編40人，則少4人，試問學校準備編多少班？又新生共多少人？

共5班，196人

5. 媽媽買 子與蘋果 種水果平分給全家人。 子的個 是蘋果個 的3 倍，蘋果每人分到2 個，還剩3 個， 子每人分9 個，則 夠3 個。請問 子與蘋果各有多少個？

梨子33個；蘋果11個

6. 已知甲、乙、丙三人各有一些錢，其中甲的錢是乙的兩倍，乙比丙多1元，丙比甲少11元，求三人的錢共有多少元？

甲有20元、乙有10元、丙有9元

差異化數學教材 / 鄭章華 主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2016.12

1. 數學教育
2. 中學教育
3. 教材與教法

主編者：鄭章華

作者：林成財、賴彥男

(依姓氏筆畫順序排列)

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

編輯小組：余采玲、林成財、潘金龍、賴彥男

(依姓氏筆畫順序排列)

出版年月：105 年 12 月

版次：初版

