

差異化國民中學數學教材

認識一元一次不等式



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組



認識一元一次不等式

1 / 不等式概念

阿忠今天在早餐店用餐，他點了一個漢堡及一杯紅茶。在用餐時，陸續來了幾位同學，他們也點了一些「漢堡與紅茶」並和阿忠一起用餐。用完餐後，大家一起結帳。



晚上阿忠在寫日記時，回想起早上在早餐店結帳過程：「他和同學總共點了兩杯紅茶，但忘了總共點了幾個漢堡。不過，他還記得紅茶一杯是10元、漢堡一個是30元，結帳時他們付了200元，老闆還有找一些零錢回來。」

任務 1

請問阿忠和同學們可能吃了多少個漢堡？

| 依提示作答 | | | | 直接作答 |
|-------------------------------------|---------------|----------------|-------|--------------------|
| 1. 請完成下表格： | | | | 請問阿忠和同學們可能吃了多少個漢堡？ |
| 紅茶 | 漢堡 | 金額 | 是否成立？ | |
| 10×2 | 30×2 | $60 + 20 = 80$ | 是 | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 2. 判斷「可能吃了多少個漢堡」的依據是： | | | | |
| (1) 早餐的金額必須 _____ 200元(填小於、等於還是大於)。 | | | | |
| 還有其它判斷依據嗎？請說明你的理由。 | | | | |
| (2) _____ | | | | |
| 3. 歸納以上內容可知，阿忠與同學們可能買了多少份漢堡呢？ | | | | |
| _____ | | | | |

 任務 2

隔天早上，小芳幫同學買一個雙層肉漢堡及數杯的玉米濃湯，已知花費超過115元；若雙層肉漢堡一個是40元，玉米濃湯一杯是20元，請問小芳至少買了幾杯的玉米濃湯？

| 依提示作答 | | | | 直接作答 |
|-------------------------|---------------|----------------|-------|------------------|
| 1. 請完成下表格： | | | | 請問小芳至少買了幾杯的玉米濃湯？ |
| 漢堡金額 | 玉米濃湯金額 | 總金額 | 是否成立？ | |
| 40 | 20×1 | $20 + 40 = 60$ | 否 | |
| | | | | |
| | | | | |
| 2. 判斷「至少要買幾杯的玉米濃湯」的依據是： | | | | |
| (1) 總金額必須 _____ 115元 | | | | |
| (小於、等於還是大於)。 | | | | |
| (2) 還有其它判斷依據嗎？請說明你的理由。 | | | | |
| _____ | | | | |
| _____ | | | | |
| 3. 歸納以上內容可知，至少要買幾杯玉米濃湯？ | | | | |
| _____ | | | | |

數學小故事

現在常用的不等號 (*Sign of inequality*) 有下列三種：

\neq (不等於)、 $>$ (大於) 以及 $<$ (小於)

這些不等號用以表示兩個數量的大小關係，另外還有以下兩種不等號：

\geq (或 \geq) (讀作大於或等於)、 \leq (或 \leq) (讀作小於或等於)。



托馬斯·哈里奧特
Thomas Harriot



弗朗索瓦·韋達
François Viète

大於及小於的符號首次出現於英國著名的數學家——托馬斯·哈里奧特 (*Thomas Harriot*, 1560–1621) 的數學著作《使用分析學》(*Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas*) 中，此書主要的內容是方程式理論，也就是求解相關的內容，包括處理一次、二次、三次和四次方程式。

哈里奧特是第一位用大於和小於的符號的人，只是沒有立即被其他人所接受。此外，哈里奧特在書中改進了法國數學家韋達 (*François Viète*, 1540–1603) 對未知數乘冪的記錄方式，例如把未知數相乘 aa 用 a^2 表示， aaa 用 a^3 表示等等，讓未知數符號的表示方式更簡潔。不過哈里奧特最偉大的數學成就，是在數學史上第一次使用因式分解。因式分解能把複雜的多項式子，化為簡單算式的乘積，這讓原本的解題方式，從尋找方程式的答案，變成因式分解，為方程式解題方法帶來很大的進步，有關因式分解內容在八年級課程會介紹。

哈里奧特是最早導入不等號和因式分解，並繪製月球地圖，在數學和天文都留下很大的貢獻，可惜的是，大家比較記得的是同個年代的數學家笛卡兒。

(參考資料：一生一定要認識的數學家50人、維基百科)

2/ 什麼是不等號

以下是常見的習慣用語和不等號的關係：

| 習慣用語 | 符號 |
|--|--------------------|
| (1)大於、超過(逾)、高於 | $>$ |
| (2)小於、未滿(未達)、低於、不到、不夠、不足 | $<$ |
| (3)不小於、大於等於、大於或等於、滿(達)、不低於、至少、以上(含) | \geq (或 \geq) |
| (4)不大於、小於等於、小於或等於、不超過(不逾)、不高於、至多、以下(含) | \leq (或 \leq) |
| (5)不等於、不為 | \neq |

今天早上，小芳翻閱報紙讀到有關交通事故的一則新聞，文字旁有張圖(如右圖所示)，她很好奇圖中的交通標誌，問了爸爸，爸爸就和女兒討論交通標誌的意義。



任務 1 (請完成任務 3 ~ 5)

首先，第一個紅色標誌：

1. 請用文字描述標誌所代表的意義。
2. 假設 x 為車輛行駛的時速，請列出式子表示標誌代表的意義。



| 依提示作答 | 直接作答 |
|---|------|
| 1. 用文字描述標誌所代表的意義： 車輛行駛此路段時，時速 _____ 110公里。 (填入習慣用語)(也就是代表最高速限為每小時110公里) | 1. |
| 2. 用未知數 x 描述標誌所代表的意義： (1)假設 x 為車輛行駛的時速，則 x _____ 110公里。 (填入習慣用語)(也就是代表最高速限為每小時110公里) | 2. |
| (2)假設 x 為車輛行駛的時速， 則 x _____ 110公里。(填入不等號) (也就是代表最高速限為每小時110公里) | |

任務 2

再來，第二個藍色標誌：

1. 請用文字描述標誌所代表的意義。
2. 假設 x 為車輛行駛的時速，請列出式子。表示標誌代表的意義。



| 依提示作答 | 直接作答 |
|---|------|
| 1. 用文字描述標示所代表的意義： 車輛行駛此路段時， 時速 _____ 60 公里。(填入習慣用語) (也就是代表最低速限為每小時 60 公里) | 1. |
| 2. 用未知數 x 描述標誌所代表的意義： 假設 x 為車輛行駛的時速， 則 x _____ 60 公里。(填入不等號) | 2. |

任務 3

在高速公路常常同時出現前述兩個交通標誌，如右圖。

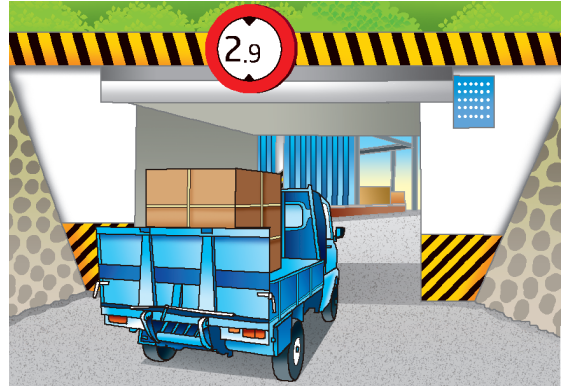
1. 請用文字描述兩標誌所代表的意義。
2. 假設 x 為車輛行駛的時速，
請列出式子表示標誌代表的意義。



| 依提示作答 | 直接作答 |
|---|------|
| 1. 用文字描述兩標誌所代表的意義： 表示車輛行駛此路段時， 時速 _____ 110 公里，而且 時速 _____ 60 公里。(填入習慣用語) | 1. |
| 2. 用未知數符號描述兩標誌所代表的意義： (1) 假設 x 為車輛行駛的時速， x _____ 110 公里，而且 x _____ 60 公里。(填入不等號) (2) 承上題，請在空格內填入不等號。 60 _____ x _____ 110 | 2. |

星期六下午，小芳陪同爸媽去送貨，從貨物抬上車，至送達商家，一路上爸爸工作的辛苦小芳都看在眼裡，心中默默地下定決心，自己一定要好好念書，為美好的未來努力。

小芳路上見到一個如上圖照片裡的交通標誌，不明白它的意思，在工作完成後，小芳上網查尋相關交通標誌，整理如下。



車輛裝載
高度限制

← 限制高度標誌

表示禁止裝載高度超過標誌所示數值的車輛通行。此圖表示裝載高度超過 2.9 公尺的車輛禁止進入。



車輛寬度
裝載限制

← 限制寬度標誌

表示禁止裝載寬度超過標誌所示數值的車輛通行。此圖表示裝載寬度超過 2 公尺的車輛禁止進入。

 任務 4

請依據小芳所查到相關交通標誌的說明，回答小芳的疑問：

1. 請用文字描述上圖照片裡的標誌所代表的意義。
2. 假設 H 為車輛裝載高度(公尺)，請列出式子表示標誌代表的意義。

※使用 H 作為假設符號是因為高度的英文單字為 *Height*，所以取單字第一個字母，當然也可繼續用未知數符號 x 。

| 依提示作答 | 直接作答 |
|---|---------------------|
| <p>1. 用文字描述上圖標誌代表的意義： 車輛行駛此路段時，車輛裝載高度 _____ 2.9 公尺，也就是說，裝載高度超過 2.9 公尺的車輛禁止進入。 (填入習慣用語)</p> <p>2. 用未知數符號描述標誌所代表的意義： 假設 H 為車輛裝載高度(公尺)， 則 H _____ 2.9 公尺。(填入不等號)</p> | <p>1.</p> <p>2.</p> |

小試身手

1. 阿班叔叔在高速公路上行車速度超過 80 公里，若車速為 x 公里，則不等式為何？

- (A) $x > 80$ 公里 (B) $x < 80$ 公里
(C) $x \geq 80$ 公里 (D) $x \leq 80$ 公里

2. 爸爸的大卡車車身高度低於 3.5 公尺，若車身高度為 h 公尺，則不等式為何？

- (A) $h > 3.5$ 公尺 (B) $h < 3.5$ 公尺
(C) $h \geq 3.5$ 公尺 (D) $h \leq 3.5$ 公尺

3. 這次小芳段考的總平均不小於 85 分，若總平均為 x 分，則不等式為何？

- (A) $x > 85$ 分 (B) $x < 85$ 分
(C) $x \geq 85$ 分 (D) $x \leq 85$ 分

4. 媽媽點了兩份早餐的金額不超過 200 元，已知金額為 x 元，則不等式為何？

- (A) $2x > 200$ 元 (B) $2x < 200$ 元
(C) $2x \geq 200$ 元 (D) $2x \leq 200$ 元

4/ 自我評量

請同學選擇你要解決的題目並在題號前空格內打勾 。

● 基礎考驗

1. 根據左欄的文字情境描述，於右欄列出不等式。

小孟的體重超過 60 公斤。

2. 根據右欄的不等式，於左欄填入適當的文字情境描述。

$$x \leq 80$$

● 進階挑戰

1. 根據左欄的文字情境描述，於右欄列出不等式。

阿里這學期所量的身高為 x 公分，其身高的一半再加 15 公分不少於 100 公分。

2. 根據右欄的不等式，於左欄填入適當的文字情境描述。

$$x - 10 \leq 80$$

$$x - 10 \leq 80$$

● 神的境界

1. 小桑將 350 毫升的水裝進一個容量為 500 毫升的馬克杯裡，再將三顆彈珠放入杯中，結果發現水還沒有滿；若一顆彈珠的體積為 x 立方公分，請依題目列出不等式。

2. 小艾在暑假參加了登山社，他們上山時速為每小時 3 公里，而沿同一山路下山之時速為每小時 5 公里；已知小艾來回一趟花費時間不超過 12 小時，假設山路長 x 公里，請依題目列出不等式。

5/ 一元一次不等式的解

前面問題與討論中，阿忠與同學買了 2 杯 10 元的紅茶和 x 個 30 元漢堡(至少 2 個以上)，最後付了 200 元之後還有找一些零錢。我們可以由問題情境列出以下的不等式 $30x + 20 < 200$ 。

由表格知道，他們可能買的漢堡數量為 2 個、3 個、4 個或 5 個。

| 紅茶(元) | 漢堡(元) | 總金額(元) | 是否成立 |
|---------------|---------------|--------|------|
| 10×2 | 30×2 | 80 | 是 |
| 10×2 | 30×3 | 110 | 是 |
| 10×2 | | | |
| 10×2 | | | |
| 10×2 | | | |
| 10×2 | | | |

也就是說 $x=2$ 、 $x=3$ 、 $x=4$ 或 $x=5$ ，都能讓不等式「成立」，此時，我們稱 $x=2$ 、 $x=3$ 、 $x=4$ 或 $x=5$ 為不等式 $30x + 20 < 200$ 的解。

所以，在一元一次不等式中：能使一元一次不等式成立的值，稱為該不等式的解。

小試身手

1. 下列哪個是不等式 $5x < 9$ 的解？

(A) $x = 1$

(B) $x = 2$

(C) $x = 3$

(D) $x = \frac{9}{5}$

2. 下列哪個是不等式 $5x > 12$ 的解？

(A) $x = 1$

(B) $x = 2$

(C) $x = 3$

(D) $x = \frac{12}{5}$

3. 下列哪個是不等式 $7 + 3x \leq 14$ 的解？

(A) $x = 4$

(B) $x = \frac{10}{3}$

(C) $x = 3$

(D) $x = \frac{7}{3}$

4. 下列哪個不是不等式 $7 + 3x \geq 14$ 的解？

(A) $x = 3.5$

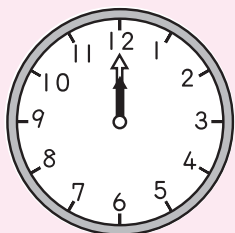
(B) $x = 3$

(C) $x = 2.5$

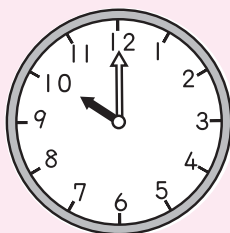
(D) $x = 2$

6 / 圖示不等式解

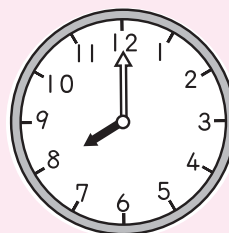
小旻和凱薩琳(來自澳洲墨爾本)經常使用網路聊天討論課業，他們必須同時間登錄網路才能開始聊天，為了能夠找到合適的聊天時間，小旻查詢世界各地的時間如下：



英國格林威治
午夜 12 點



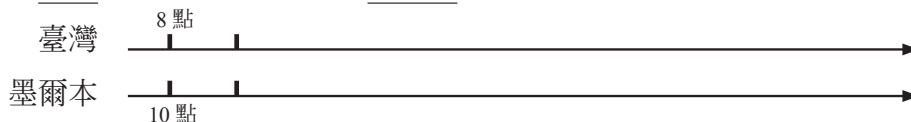
澳洲墨爾本
上午 10 點



臺灣
上午 8 點

任務 1

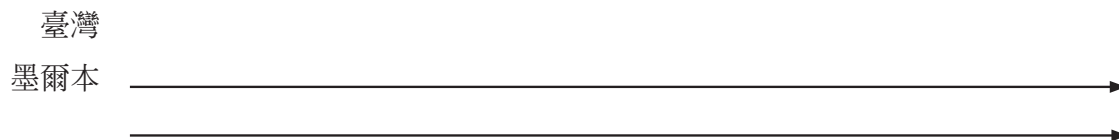
當臺灣時間是下午 5 點時，墨爾本是幾點？(可利用下圖協助解題)



任務 2

小旻和凱薩琳不能在他們各自的當地時間上午 9:00 到下午 4:00 之間聊天，因為他們必須去學校，並且當地時間下午 11:00 到上午 7:00 他們也不會聊天，因為他們在睡覺。

請問何時是他們能夠聊天的好時間？請說明你的理由。(可利用下圖協助解題)



從上一頁的問題與討論可以發現，利用數線圖示，方便我們判斷出答案(或解)的範圍落在哪裡！以下的任務，能讓我們更了解：1. 習慣用語(文字描述) 2. 不等式(一元一次不等式) 3. 圖示答案的範圍(圖示解的範圍)之間的轉換。

任務 3

請完成下表

| 例題 | 情境一 | 情境二 |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 習慣用語(文字描述) | 溫度小於 25°C | 溫度不超過 25°C |
| 不等號 一元一次不等式 (假設 x 度) | 溫度 _____ 25°C | 溫度 _____ 25°C |
| 圖示答案的範圍(圖示解的範圍) (注意圖示畫法！) | | |

圖示中，「○」是一個空心的圓圈，代表該值不為不等式的解；
「●」是一個實心的圓圈，代表該值為不等式的解。

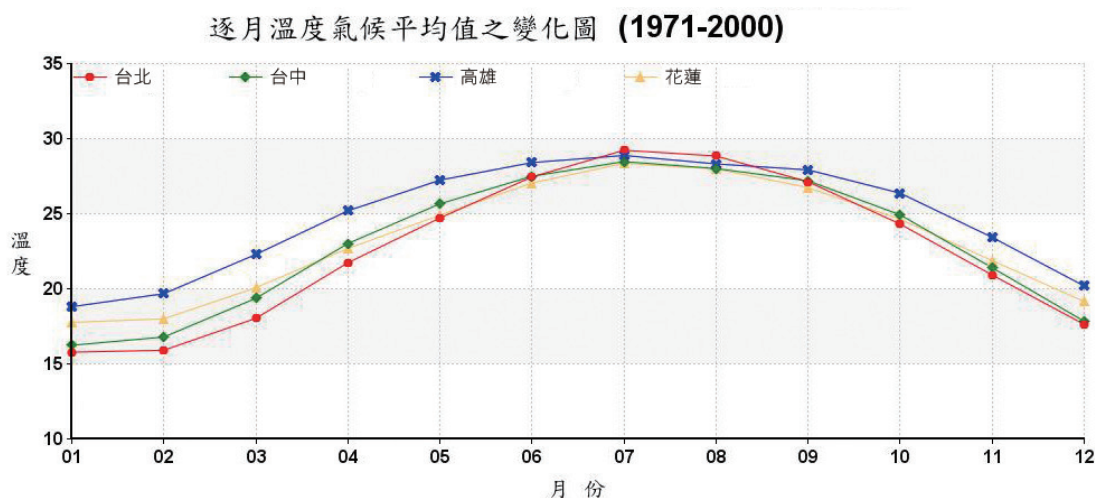
任務 4

請完成下表

| 例題 | 情境三 | 情境四 |
|---|-------------------------------|-------------------------------|
| 習慣用語(文字描述) | 溫度超過 15°C | 溫度不低於 15°C |
| 不等號 一元一次不等式 (假設 x 度) | 溫度 _____ 15°C | 溫度 _____ 15°C |
| 圖示答案的範圍 (圖示解的範圍) (注意圖示仍未完成，同學 仍需努力！) | | |

圖示中，「○」是一個空心的圓圈，代表該值不為不等式的解；
「●」是一個實心的圓圈，代表該值為不等式的解。

臺灣位於亞熱帶地區，一年四季溫度適宜，其中最冷的月份是一月與二月份，南部較接近熱帶氣候，日照充足，冬天及夏天的溫度變化比北部來得小，也就是說北部地區的最高氣溫與最低氣溫的相差比較大，南部地區一年四季氣溫的變化比較小。(資料取自交通部中央氣象局網站 <http://www.cwb.gov.tw/>)



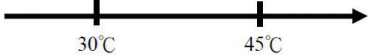
小旻住在臺北，該地夏季平均溫度都有 28°C 至 29°C ，但冬天時臺北平均溫度只有 16°C 左右。

學習筆記

| | |
|-----------------------------|--|
| 文字描述 | 臺北一月溫度氣候平均值超過 15°C ，但不超過 20°C |
| 等號 一元一次不等式 (假設 x 度) | 溫度 _____ 15°C ，但 _____ 20°C 15 _____ x _____ 20 |
| 圖示溫度的範圍 | |

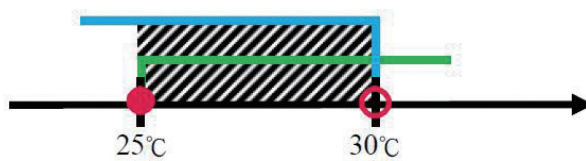
任務 5

「今天溫度已經超過 30°C ，但不超過 45°C 」，請利用數線圖示溫度的可能範圍。

| 依提示作答 | 直接作答 |
|--|------|
| <p>1. 先利用數學圖示「溫度已經超過 30°C」:</p> <p>2. 再利用數學圖示「溫度不超過 45°C」:</p> <p>3. 用圖示表示「今天溫度已經超過 30°C，但不超過 45°C」</p> <div style="text-align: center;">  </div> | |

小試身手

1. 依據下面的圖示，請用文字描述現在的溫度範圍並列出一元一次不等式。



文字描述：

列出不等式：

2. 依據下面的圖示，請寫出 x 的不等式的解。

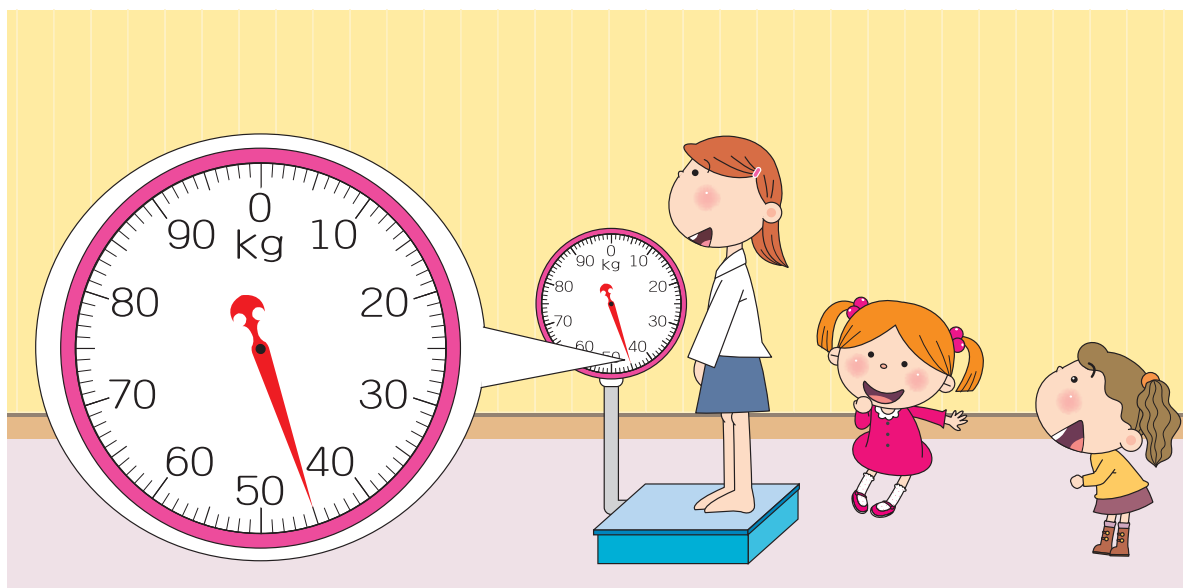


世界衛生組織建議以身體質量指數(*Body Mass Index, BMI*)來衡量肥胖程度，其計算公式是以體重(公斤)除以身高(公尺)的平方。

$$BMI = \frac{\text{體重(公斤)}}{\text{身高}^2(\text{公尺}^2)}$$

國民健康署建議我國成人 *BMI* 應維持在 $18.5(\text{kg}/\text{m}^2)$ 及 $24(\text{kg}/\text{m}^2)$ 之間，太瘦、過重或太胖皆有礙健康。研究顯示，體重過重或是肥胖($BMI \geq 24$)為糖尿病、心血管疾病、惡性腫瘤等慢性疾病的主要風險因素；而過瘦的健康問題，則會有營養不良、骨質疏鬆、猝死等健康問題。(資料取自衛生福利部國民健康署網站http://health99.hpa.gov.tw/OnlinkHealth/Onlink_BMI.aspx)

| 成人肥胖定義 | 身體質量指數(BMI) (kg/m^2) | 腰圍 (cm) |
|--------|---|--------------------------------------|
| 體重過輕 | $BMI < 18.5$ | |
| 健康體位 | $18.5 \leq BMI < 24$ | |
| 體位異常 | 過重： $24 \leq BMI < 27$ 輕度肥胖： $27 \leq BMI < 30$ 中度肥胖： $30 \leq BMI < 35$ 重度肥胖： $BMI \geq 35$ | 男性： ≥ 90 公分 女性： ≥ 80 公分 |



 任務 6

請利用公式試算你自己的 BMI (身體質量指數)是多少?

 任務 7

小芬阿姨目前身高為 160 公分， BMI 值屬於健康體位，請問她的體重範圍會是多少？請寫下你的解題過程。

任務 8

下圖是測量一物體體積的過程：



步驟一：將 450 毫升的水裝進一個容量為 500 毫升的杯子中。

步驟二：將三個體積相同的小白球放入水中，結果水沒有滿。

步驟三：同樣體積的小白球，再加入兩個放入水中，結果水滿溢出。

根據以上過程，推測一顆小白球的體積範圍？寫下你的說明過程。

(1 毫升=1 立方公分)

(94 年基本學測題目)

差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2016.12

1. 數學教育
2. 中學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

編輯小組：余采玲、林成財、潘金龍、賴彥男
(依姓氏筆畫順序排列)

作者：余采玲、潘金龍
(依姓氏筆畫順序排列)

出版年月：105年12月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助
(歡迎使用，請註明出處)