

差異化國民中學數學教材

平行四邊形與特殊四邊形

教師手冊



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組

單元目標

1. 能理解特殊四邊形（如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形）的幾何性質。
2. 能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。

對照學習內容

九年一貫

1. 8-s-13 能理解平行四邊形及其性質。
2. 8-s-14 能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。
3. 8-s-15 能理解梯形及其性質。
4. 8-s-18 能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。

十二年國教

1. S-8-9 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。(s-IV-8)
2. S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質：長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線，其逆命題亦成立。(s-IV-8)
3. S-8-11 梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形。(s-IV-8)

教材架構

一、教學模組架構概述

1. 引入「視錯覺」的圖像，引發學生的學習動機，了解如何運用平行四邊形的定義進行判斷，而非僅用肉眼猜測。
2. 教材介紹生活中的各種特殊四邊形的運用，讓學生從生活經驗走進數學，進而讓學生自主提出關於這些四邊形的數學問題。

二、課程前後安排的銜接說明，與相關之學習重點分年細目

1. 先備經驗
S-4-8四邊形；S-7-5線對稱的基本圖形
2. 後續概念
S-9-12證明的意義

教材設計理念

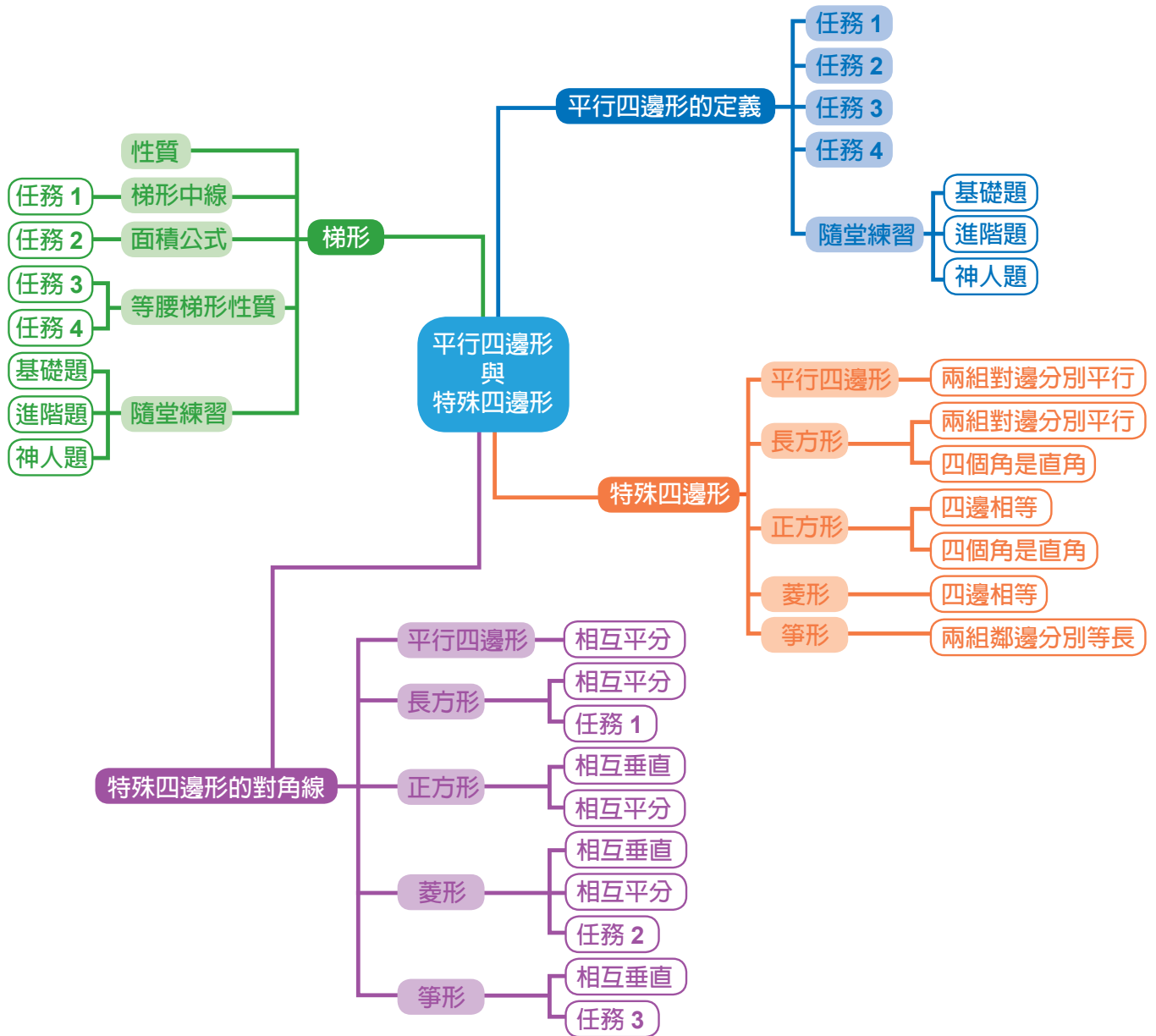
核心想法在於提供所有學生公平學習的機會，讓每一位學生都容易理解和給予充分的機會主動參與。教學設計兼顧多元活動與多元表徵的靈活運用，其中多元活動包含觀察、操作、分組討論、小試身手等，而多元表徵則包含圖像、表格、代數等。差異化任務包括「開放性問題」、「類似任務」、「數學擬題」。「開放性問題」具備多樣解答或多種解題路徑；「類似任務」具備不同難易程度或是學習鷹架的有無，學生可依學習能力的不同，選擇較難或較易的任務，獨立完成任務或是依循學習鷹架引導完成任務。自我評量以難易分類，鼓勵學生選擇適合自己能力的題型練習。

每個小單元結束時的小試身手，可以有效進行形成性評量來掌握學生課堂學習狀況。再者，形成性評量是差異化教學的關鍵，本教材的任務具備形成性評量的功能，教師可以從學生的回答，蒐集相關的學習證據，從而採取相對應的教學活動，回應學生的學習需求與個別差異，有效進行差異化教學。

建議教師適時運用分組活動，讓同學能有交流、互動討論的環境，老師講解的題目由教師帶領學生學習，任務題則由學生自行解題，教師適時引導，並鼓勵同學發表自己的解題想法，供同學參考。最後的自我評量部分，多數同學會習慣從頭開始寫，教師可運用訂定時間（約5分鐘內），或鼓勵程度較佳的同學，直接從「進階題」或是「神的境界」開始做，以達到差異化的學習。

在平行四邊形性質單元中，希望能由學生動手操作，察覺相關性質，非以往教科書中的數學證明，讓所有同學都有學習動力。四個任務是關於平行四邊形性質的逆敘述，藉由找到反例以及討論在怎樣的條件下，可判斷某個四邊形必為平行四邊形。下一頁呈現教材的架構圖。

教材架構心智圖



核心素養指標

數-J-B1 (B1符號運用與溝通表達)

具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

數-J-B3 (B3藝術涵養與美感素養)

具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。

數-J-C1 (C1道德實踐與公民意識)

具備從證據討論與反思事情的態度，提出合理的論述，並能和他人進行理性溝通與合作。

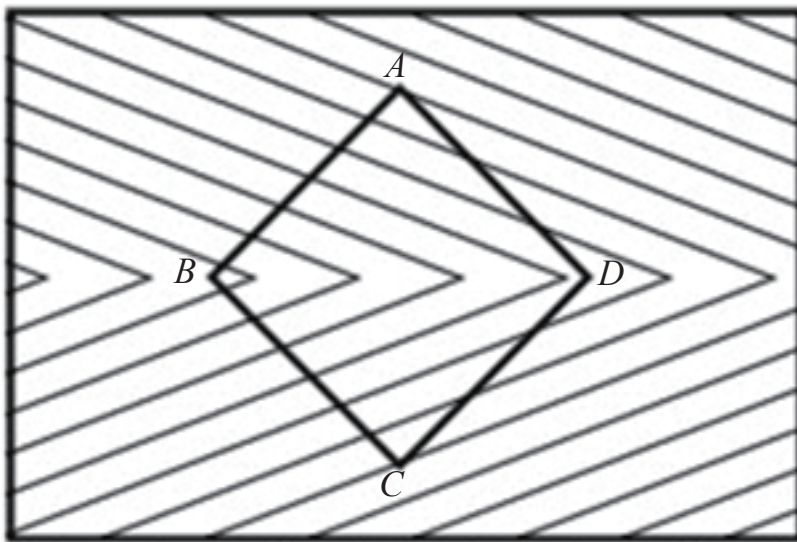
數-J-C2 (C2人際關係與團隊合作)

樂於與他人良好互動與溝通以解決問題，並欣賞問題的多元解法。

平行四邊形與特殊四邊形

1 平行四邊形

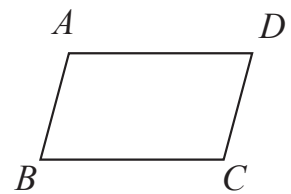
- 請問下圖的四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形嗎？請說說你的理由。



答案是平行四邊形，大家答對了嗎？可以利用以下方法找出答案：

1. 用尺量四個邊長。
2. 用量角器量四個角的度數。
3. 用圓規測量。
4. 測量一組對邊是否平行且相等。
5. 畫出兩條對角線，測量是否互相平分。

前一個單元已經學了平行線的性質：「由兩雙平行線構成的四邊形，稱為平行四邊形」。可以記作「 $\square ABCD$ 」，讀作「平行四邊形 $ABCD$ 」。



註：「 $\square ABCD$ 」與「 $\square ADCB$ 」代表的是同一個平行四邊形。在描述一個多邊形時，習慣以頂點代號順時針或逆時鐘寫出。

在日常生活中，我們都可以發現許許多多由平行四邊形所構成的建築物及遊戲（七巧板），如下圖所呈現。



平行四邊形的應用很廣泛，而平行四邊形有哪些性質，接下來的任務及例題將引導你來發現。

2 平行四邊形的性質

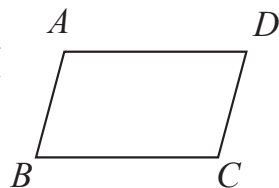
探索與發現

1. 如右圖，已知 $\square ABCD$ 為平行四邊形，請觀察它並提出數學問題

教師應給學生充份的觀察時間，並鼓勵學生提出數學問題

例如：角 A 等於角 B 嗎？兩雙對邊必定相等嗎？……

可做為探索平行四邊形的重要經驗。



學生筆記

平行四邊形性質：兩雙對邊分別相等，對角相等，鄰角互補，對角線互相平分。
這部分是請同學用觀察或操作的方式去找出平行四邊形的性質。教師在同學討論後應作總結，並請學生寫在「學生筆記」處。程度較好的同學，可另要求他們證明平行四邊形的相關性質。以下是一些證明的例子。

數學證明：

(1) $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$ (同側內角互補)

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ$ (同側內角互補)

$\Rightarrow \angle A = \angle C$ ，同理 $\angle B = \angle D$

(2) 連 \overline{BD}

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中

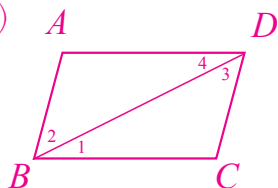
$\because \overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \angle 1 = \angle 4$ (內錯角相等)；

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$ (內錯角相等)

$\overline{BD} = \overline{BD}$ ，(共用邊)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (ASA全等)

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$



(3) 再連 \overline{AC}

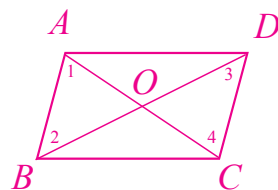
在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 中

$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 3$

又 $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDO$ (ASA全等)

$\Rightarrow \overline{AO} = \overline{CO}$ ， $\overline{BO} = \overline{DO}$



小試身手

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = 45^\circ$ ，

則 $\angle B =$ 135°，

$\angle C =$ 45°，

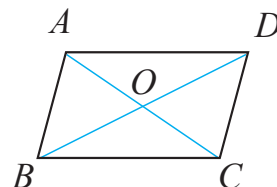
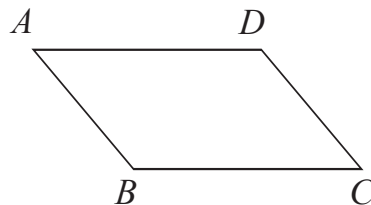
$\angle D =$ 135°。

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AD} = 20$ ，

則 $\overline{CD} =$ 10，

$\overline{BC} =$ 20。

3. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BO} = 7$ ，則 $\overline{BD} =$ 14。



以上的形成性評量可以確認學生是否掌握平行四邊形的基本性質。

◀ 任務1 ▶

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

否，試想邊長依序為5、4、5、6的四邊形。

(利用SSS全等性質)

(1)加入 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 之條件

(2)連接 \overline{BD} ，在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle CBD$ 中，

$$\overline{AD} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{CD},$$

$$\overline{BD} = \overline{BD}, (\text{共用邊})$$

則 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS全等性質)

$$(3) \because \angle ADB = \angle DBC \text{ (內錯角相等)}$$

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$(4) \because \angle ABD = \angle BDC \text{ (內錯角相等)}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

(5)由(3)、(4)得到四邊形 $ABCD$ 為平行

四邊形老師可在黑板上提示

任務1後老師要作個總結，此為兩雙對邊相等性質的逆命題。

學生筆記

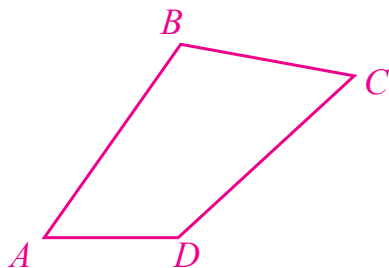
在任務1中，我們發現，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則四邊形必為平行四邊形。(亦即兩雙對邊分別相等的四邊形，必為平行四邊形)

◀ 任務2 ▶

在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

(1)否，想想箏形的形狀和性質。或請

同學將反例的圖形畫出



(利用同側內角互補)

(2)加入 $\angle B = \angle D$

(3)因為 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

$$\text{又 } \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$$

$$\text{所以 } 2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$$

$$\rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

故 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

同理， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

(4)得到四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

任務2後老師要作個總結，此為對角分別相等性質的逆命題。

學生筆記

在任務2中，我們發現，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = \angle C$ 且 $\angle B = \angle D$ ，則四邊形必為平行四邊形。

隨堂練習

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\angle B = \angle D$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

(1)是。連接 \overline{AC} ，在 $\triangle ADC$ 及 $\triangle CBA$ 中， $\angle B = \angle D$ ， $\angle CAD = \angle ACB$ ，(內錯角相等)
 $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊)，則 $\triangle ADC \cong \triangle CBA$ (AAS全等性質)。

(2) $\because \angle BAC = \angle DCA$ (內錯角相等) $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 又 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
 得到四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

老師可延伸問題，若拿掉其中一個條件時，是否為平行四邊形，若不是，請舉反例。

任務3

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，請問要再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形？請說明之。

反例：等腰梯形

(1)加入 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

(2)連接 \overline{BD} ，在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle CBD$ 中，

$$\overline{AD} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{CD},$$

$$\overline{BD} = \overline{BD} \text{ (共用邊),}$$

則 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS全等性質)

(3) $\because \angle ADB = \angle DBC$ (內錯角相等)

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

(4) $\because \angle ABD = \angle BDC$ (內錯角相等)

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

由(3)、(4)得到四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

同學可能會發現，任務3跟任務1很類似，請提醒同學用有別於任務1的條件思考。

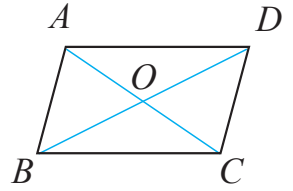
任務3後老師要作個總結，此為一組對邊平行且相等性質的逆命題。

學生筆記

在任務3中，我們發現，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，則四邊形必為平行四邊形。

◀ 任務4 ▶

在四邊形 $ABCD$ 中， \overline{AC} 與 \overline{BD} 兩對角線交於 O 點，已知 $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，請問要再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 成為平行四邊形。



不是。可能為箏形

(1) 加入 $\overline{BO} = \overline{OD}$

(2) (利用SAS全等性質)

在 $\triangle AOB$ 及 $\triangle COD$ 中，

$$\overline{AO} = \overline{OC},$$

$$\angle AOB = \angle COD \text{ (對頂角相等)},$$

$$\overline{BO} = \overline{OD},$$

則 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (SAS全等性質)

同理， $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (SAS全等性質)

$$(3) \because \angle BAC = \angle DCA \text{ (內錯角相等)}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

同理， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

(4) 得到四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

任務4後老師要作個總結，此為對角線互相平分性質的逆命題。

學生筆記

在任務4中，我們發現，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AO} = \overline{OC}$ 且 $\overline{BO} = \overline{OD}$ ，則四邊形必為平行四邊形。

隨堂練習

(同學可自行選擇題目作答)

(老師多鼓勵程度較好的同學直接挑戰進階或神人題)

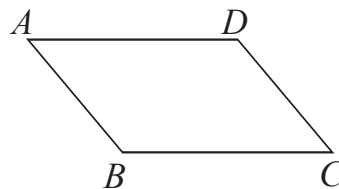
■ 基礎題：

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = 35^\circ$ ，

則 $\angle B = \underline{145^\circ}$ ，

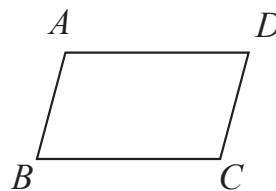
$\angle C = \underline{35^\circ}$ ，

$\angle D = \underline{145^\circ}$ 。



2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

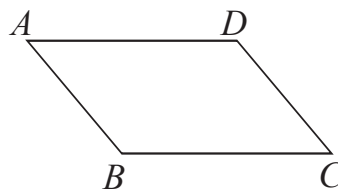
則此四邊形的周長= 40。



■ 進階題：

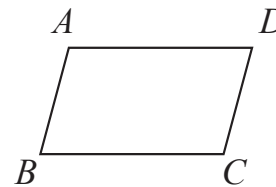
1. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，

若 $\angle A + 3\angle C = 120^\circ$ ，則 $\angle B = \underline{150^\circ}$ 。



2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 3x + 10$ ， $\overline{CD} = 4x - 10$ ，

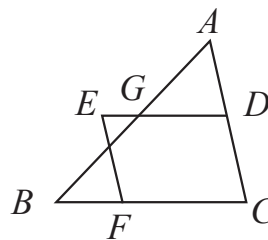
則 $\overline{AB} = \underline{70}$ 。



■ 神人題：

1. 如右圖，四邊形 $CDEF$ 為平行四邊形，若 $\angle A = 55^\circ$ 、

$\angle C = 75^\circ$ ，則 $\angle BGD = \underline{130^\circ}$ 。

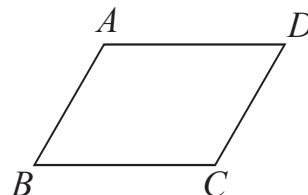


2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 2x - 4$ ，

$\overline{BC} = 4y - 15$ ， $\overline{CD} = 16 - 2x$ ， $\overline{AD} = y + 3$ ，則：

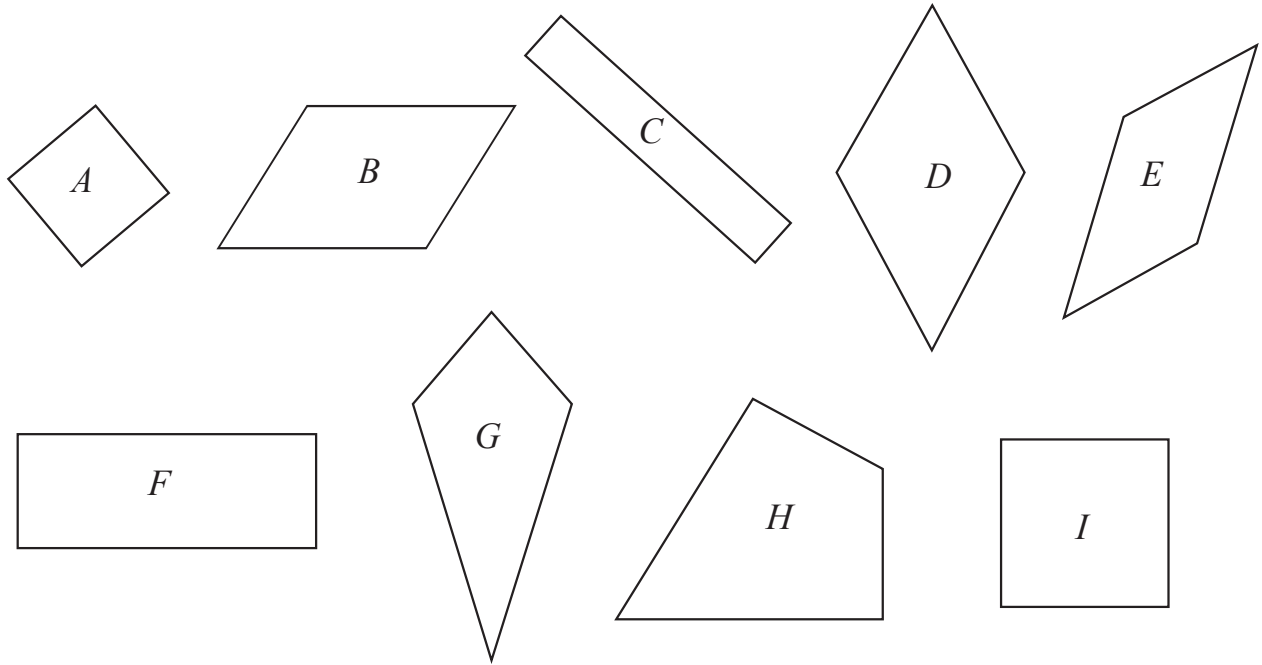
(1) $x = \underline{5}$ 。

(2) $y = \underline{6}$ 。



3 四邊形的關係

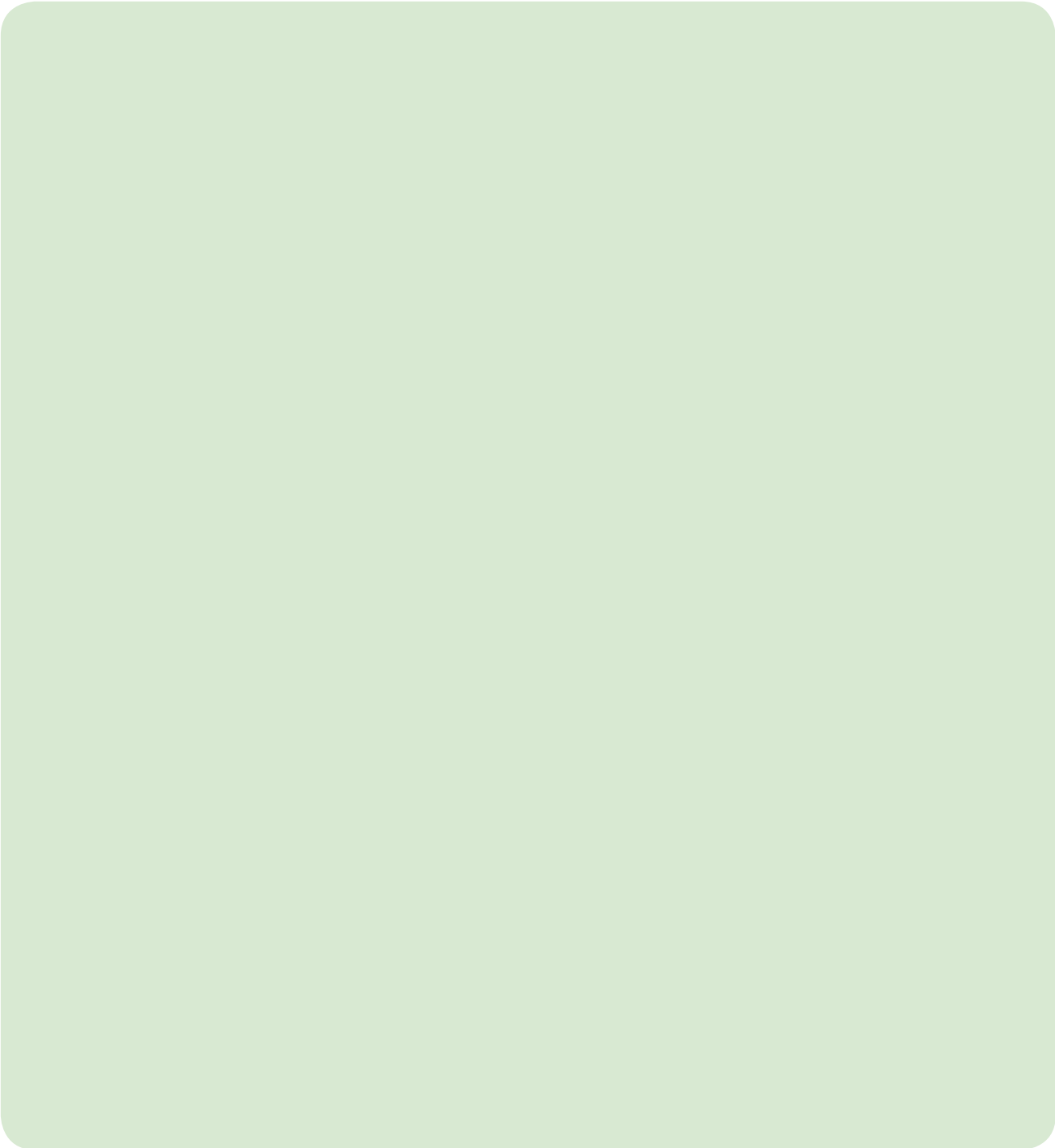
- 觀察下列的四邊形，請依照該四邊形的特性將它們歸類。



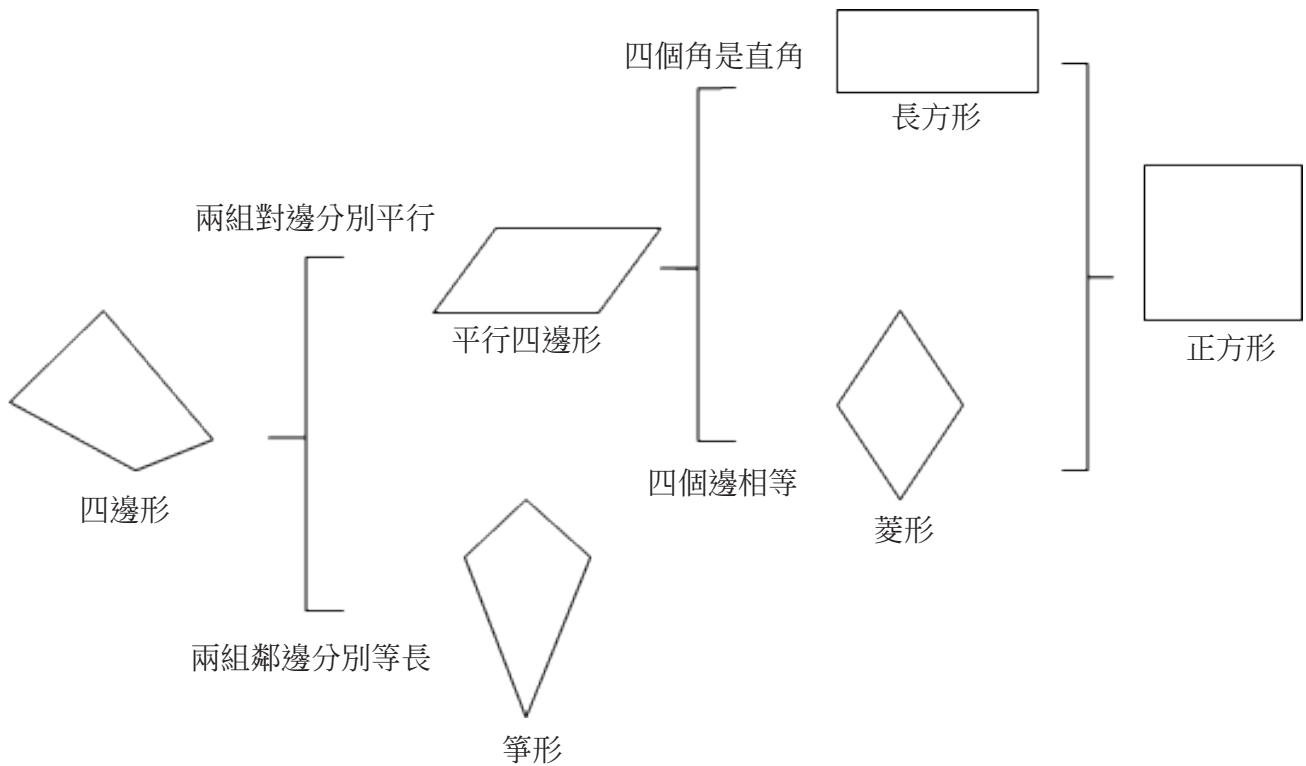
1. 請找出符合箏形特性的編號： D、G、H 。
2. 請找出符合正方形特性的編號： A、I 。
3. 請找出符合長方形特性的編號： A、C、F、I 。
4. 請找出符合菱形特性的編號： A、D、I 。
5. 請找出符合平行四邊形特性的編號： A、B、C、D、E、F、I 。

◀ 小組任務 ▶

- 請各小組討論前面出現的四邊形特性，如果現在要將這五種四邊形分類，你會想將哪些四邊形合併成一類呢？分類的依據是什麼？
- 那有沒有辦法分成更少類呢？分類的依據是什麼？



- 我們根據不同四邊形的特性，將原本的五種四邊形，按特性相同的四邊形歸類在一起，進而分類成兩種四邊形，分類方式如下：



隨堂練習 (同學可自行選擇題目作答)

■ 基礎題：

請判斷下列敘述的正確性：

1. (否) 四邊形如果四個邊等長就是正方形。
2. (否) 長方形是正方形的一種。

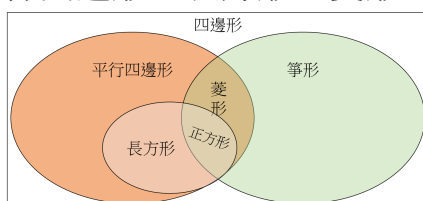
■ 進階題：

1. 正方形是不是菱形的一種？試說明。
是，因為正方形四邊等長，故正方形是菱形的一種。
2. 菱形是不是箏形的一種？試說明。
是，因為菱形的兩組鄰邊都相等，故菱形是箏形的一種。

■ 神人題：

試著找出平行四邊形、長方形、菱形、正方形及箏形的關聯性，並說明之。

作答區▼

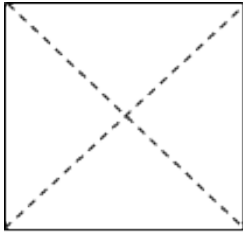


註：文氏圖的說明對國中階段的學生來說會比較困難理解，故教師可以視自己班級學生程度而定，此作為補充說明。

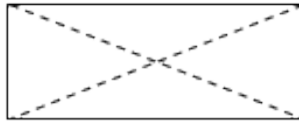
4 平行四邊形與特殊四邊形的對角線

- 下列圖中的虛線皆為對角線，請觀察下列各四邊形的對角線。

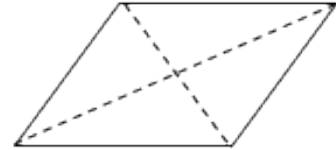
你想要問什麼數學問題？當學生問完數學問題之後，教師可鼓勵其他學生或小組來回答同儕所提出的數學問題。



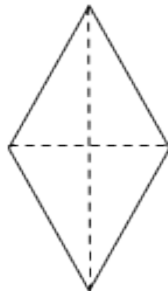
正方形



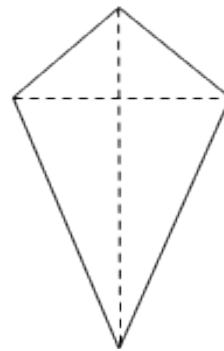
長方形



平行四邊形



菱形



箏形

寫下想問的數學問題：

例如：正方形的對角線是否必垂直？菱形的對角線會互相平分嗎？長方形的對角線必互相平分且等長嗎？……

小試身手▶▶

依據上述的圖形，試著回答下列問題。

請問對角線有互相平分的四邊形有：

正方形、長方形、平行四邊形、菱形。

請問對角線有互相垂直的四邊形有：

正方形、菱形、箏形。

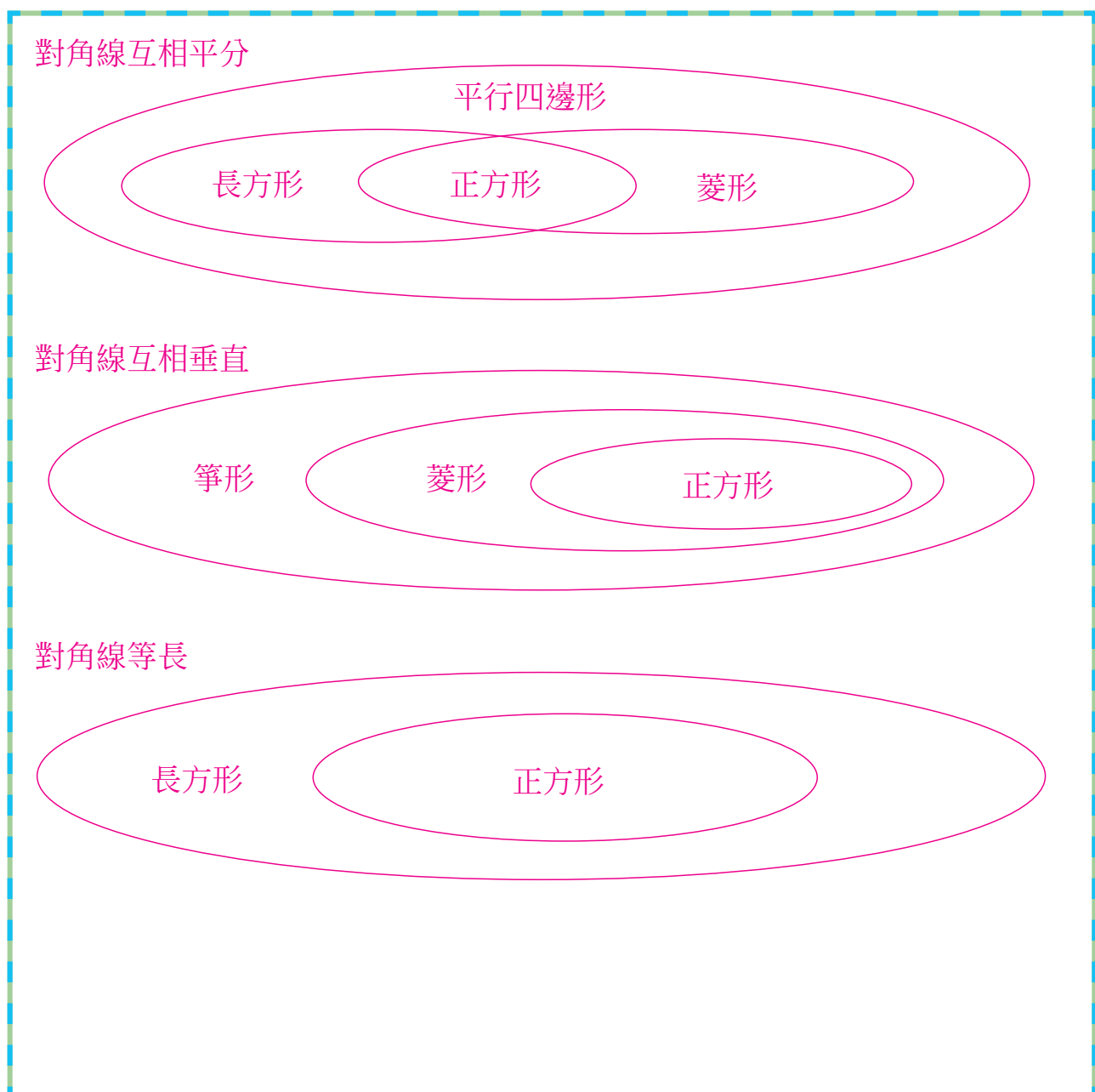
請問對角線等長的四邊形有：

正方形、長方形。

- 利用四邊形對角線的特性，我們可以透過畫對角線，辨別出該四邊形是屬於哪種特殊四邊形。

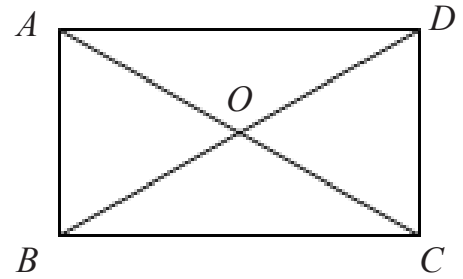
四邊形 \ 性質	對角線互相平分	對角線互相垂直	對角線等長
平行四邊形	✓		
長方形	✓		✓
菱形	✓	✓	
箏形		✓	
正方形	✓	✓	✓

- **挑戰題：**觀察上表，請利用四邊形的對角線來進行來分類。



◆ 任務1 ◆

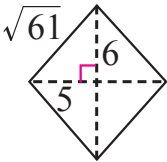
如圖，長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{OB} = 13$ ， $\overline{BC} = 24$ ，則長方形 $ABCD$ 的面積為何？



依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
<p>長方形$ABCD$中，由對角線互相平分得$\overline{OD} = \overline{OB} = 13$</p> <p>又$\triangle BCD$為直角三角形，依據<u>勾股（畢氏）</u>定理，</p> $\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2$ $\overline{CD}^2 = 26^2 - 24^2$ $\overline{CD}^2 = 100$ $\overline{CD} = 10$ <p>則長方形$ABCD$的面積 = $\underline{10} \times \underline{24}$ = $\underline{240}$</p>	

◆ 任務2 ◆

菱形的兩對角線長分別為10公分與12公分，求此菱形的面積與周長。

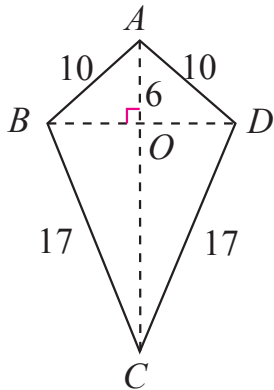
依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
 <p>(1) 菱形的面積 = $\underline{10} \times \underline{12}$ = $\underline{120}$</p> <p>(2) 邊長 = $\sqrt{5^2 + 6^2}$（依據<u>勾股（畢氏）</u>定理） = $\sqrt{61}$</p> <p>菱形的周長 = $4 \times \sqrt{61}$ = $4\sqrt{61}$</p>	

任務3

已知箏形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AD} = 10$ ， $\overline{CB} = \overline{CD} = 17$ ， $\overline{AO} = 6$ ，且 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點，求箏形 $ABCD$ 的面積為多少？

依提示作答

自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）



箏形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，

依據勾股定理，

$$\overline{BO} = \underline{8}，$$

同理， $\overline{CO} = \underline{15}$ ，

$$\begin{aligned} \text{則箏形 } ABCD \text{ 的面積} &= \underline{(8+8)} \times \underline{(6+15)} \div 2 \\ &= \underline{168} \end{aligned}$$

隨堂練習

(同學可自行選擇題目作答)

(老師多鼓勵程度較好的同學直接挑戰進階或神人題)

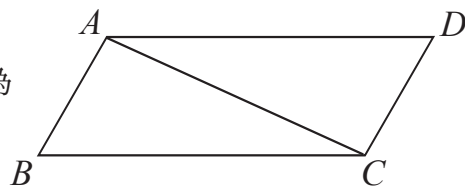
■ 基礎題：

1. 菱形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AC} = 6$ 公分， $\overline{BD} = 8$ 公分，則此菱形 $ABCD$ 的周長為多少？

《答案》20公分

2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ ，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 17$ ，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

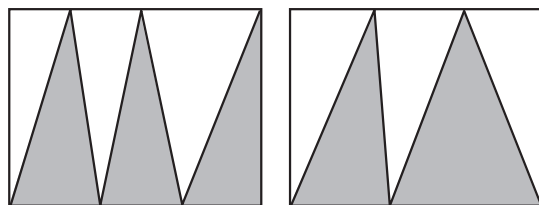
《答案》120 (平方單位)



■ 進階題：

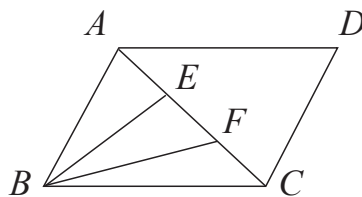
1. 如下圖，兩矩形是全等的，則左邊矩形中灰色部分的面積與右邊矩形中灰色部分的面積何者較大？

《答案》一樣大，皆為矩形面積的一半，而兩矩形是全等。



2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 為對角線 \overline{AC} 的三等分點，若 $\triangle BEF$ 面積為6，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積是多少？

《答案》36 (平方單位)



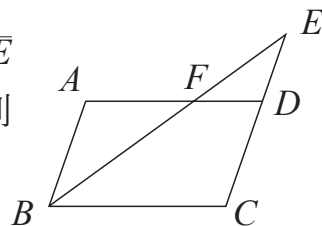
■ 神人題：

1. 設 $A(-6, 5)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(8, 5)$ 、 $D(1, 9)$ 為坐標平面上的四個點，則連接 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 後，所得的四邊形 $ABCD$ 面積為多少？

《答案》56

2. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 之角平分線 \overline{BE} 交 \overline{CD} 延長線於 E 點，交 \overline{AD} 於 F 點，若 $\overline{BC} = 20$ ，則 $\overline{FD} + \overline{CD} = ?$

《答案》20



5 梯形

全球最受矚目的運動比賽—世界盃足球賽，在比賽中，大家總會盯著球門，等待著足球踢進球門的剎那。請各位同學觀察足球門是由甚麼形狀組成的呢？不難發現到，從正面看的時候，就是我們上一小節討論過的長方形！那請問側面的部分是甚麼形狀呢？（梯形）



在生活中，許多不同的四邊形環繞在我們身邊，接下來就要介紹，除了前面出現的四邊形之外，還存在另一個特別的四邊形—梯形。小學我們曾經學過這個圖形：一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱作梯形。就如同下列這些傢俱，就是由梯形經創意組合得到的特色傢俱喔！

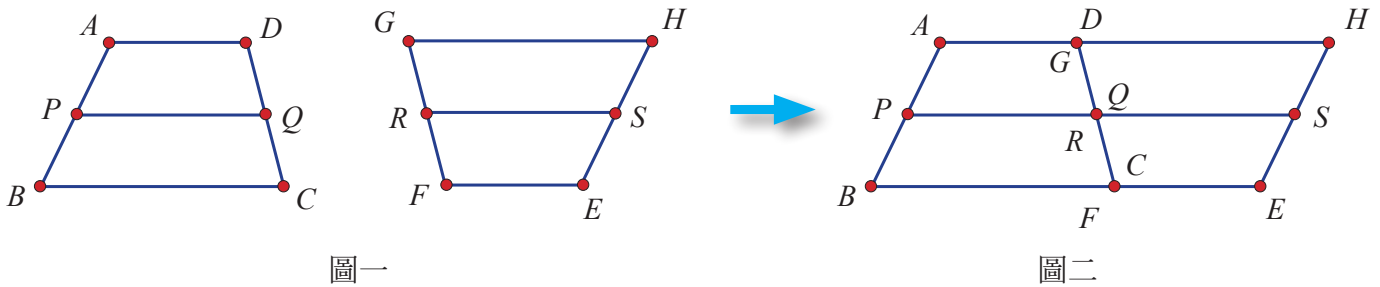


學生筆記

小學我們曾經學過梯形，請你試著畫出一個梯形，並且說明是如何畫出這個梯形的，以及說說看梯形有哪些性質呢？

認識了梯形之後，讓我們一起來觀察看看梯形有哪些特別的性質吧！

如下圖，梯形 $ABCD$ 經由旋轉得到一個全等的梯形 $EFGH$ （如圖一），且 PQ 、 RS 為梯形中線，經由合併得到四邊形 $ABEH$ （如圖二），請說明看看此為甚麼形狀呢？
（平行四邊形）



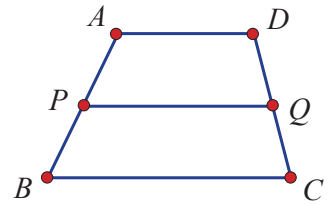
從四邊形 $ABEH$ 的特性中，請觀察 AD 、 BC 與 PQ 的關聯是甚麼呢？

請教師再度回到各個線段所代表的意義，進而引導出梯形中線就是上底加下底的一半長

$$(PQ = \frac{\text{上底} + \text{下底}}{2})$$

學生筆記

梯形的兩腰中點連線段稱為梯形的中線。如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， P 、 Q 兩點分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 的中點，則 \overline{PQ} 稱為梯形中線。且梯形中線 = $\frac{\text{上底} + \text{下底}}{2}$ 。

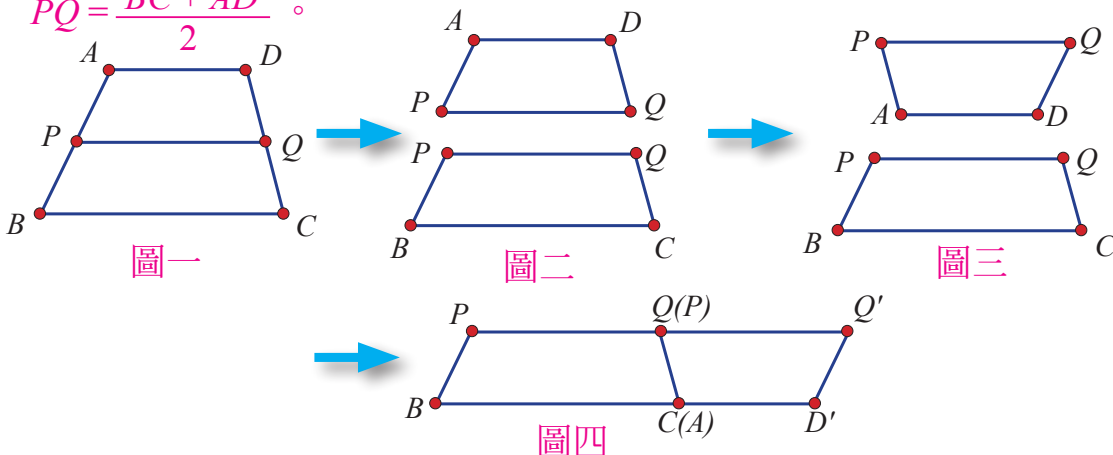


想想看，關於梯形中線 = $\frac{\text{上底} + \text{下底}}{2}$ ，有沒有其他的證明方式呢？

如果教師課堂有足夠的時間，建議可以設計教學活動讓學生具體運用兩個相同的梯形進行操作，利用實作評量的方式，一方面可以確認學生的學習成效，另一方面也兼具技能層次的教學。

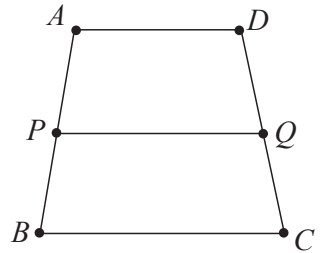
以下提供另一種證明方式：

梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， P 、 Q 兩點分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 的中點（如圖一）。現在，沿著 P 、 Q 兩點剪開後（如圖二），將其中一塊旋轉180度（如圖三），並將兩塊圖拼在一起（如圖四），圖四的四邊形即為平行四邊形，而依據平行四邊形性質，可得到對邊等長，也就是說， $\overline{PQ'} = \overline{BD'}$ ，又因為 $\overline{BD'} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ，其中 \overline{AD} 為上底、 \overline{BC} 為下底，且 $\overline{PQ'} = \overline{PQ} + \overline{PQ}$ ，其中 \overline{PQ} 為梯形中線，因此得到 $2\overline{PQ} = \overline{BC} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$ 。

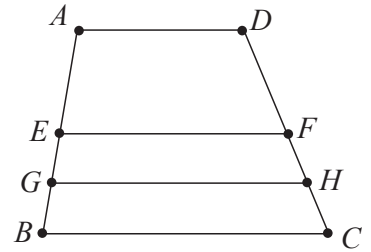


小試身手▶▶

1. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{PQ} 為梯形中線， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{PQ} =$ 10。



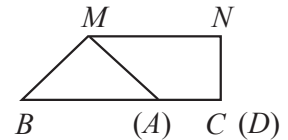
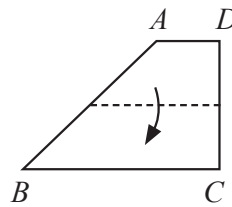
2. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的中點， G 、 H 分別為 \overline{BE} 、 \overline{CF} 的中點，若 $\overline{AD} = 7$ ， $\overline{BC} = 11$ ，求 $\overline{GH} =$ 10。



3. 圖(甲)為一梯形 $ABCD$ ，其中 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} = 6$ ，

$\overline{BC} = 18$ ， $\overline{CD} = 12$ 。若將 \overline{AD} 疊合在 \overline{BC} 上，出現摺線 \overline{MN} ，如圖(乙)所示，則 \overline{MN} 的長度為何？

《答案》 $\overline{MN} = 12$



圖(甲)

圖(乙)

◆ 任務1 ◆

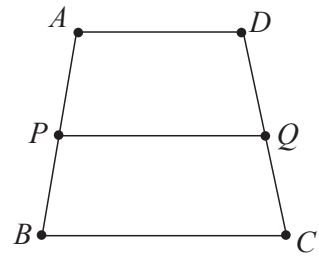
請利用梯形中線，試著改寫國小所學的梯形面積公式

$$\left(\text{梯形面積} = \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2} \right)。$$

依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2 = <u>(上底+下底) ÷ 2</u> × 高 = <u>梯形中線</u> × 高	

小試身手 ▶▶

如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{PQ} 為梯形中線， $PQ=10$ ，梯形的高為10，則梯形面積 = 100。



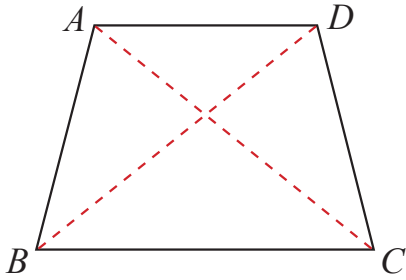
◆ 任務2 ◆

試說明等腰梯形的兩底角相等。

直觀或操作說明	自我挑戰區（用數學方式證明）
<p>用畫的或操作皆可</p>	<p>在等腰梯形$ABCD$中，分別作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$，$\overline{DF} \perp \overline{BC}$ 在$\triangle AEB$和$\triangle CFD$中， $\because \overline{AB} = \overline{CD}$， $\overline{AE} = \overline{DF}$，（平行線距離處處相等） $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ \therefore依據 <u>RHS</u>，$\triangle AEB \cong \triangle CFD$ 故 <u>$\angle B = \angle C$</u>（對應角相等）</p>

任務3

試說明等腰梯形的兩對角線相等。

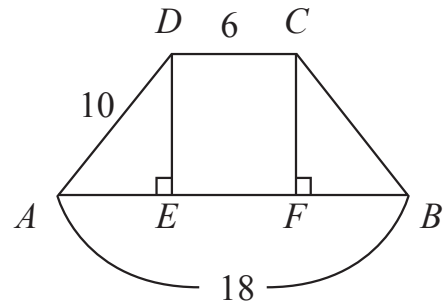
直觀或操作說明	自我挑戰區（用數學方式證明）
 <p>用畫的或操作皆可</p>	<p>在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，</p> <p>$\because \overline{AB} = \overline{CD}$， $\overline{BC} = \overline{BC}$， $\underline{\angle ABC = \angle DCB}$</p> <p>$\therefore$ 依據 <u>SAS</u>，$\triangle ABC \cong \triangle DCB$</p> <p>故 $\underline{\overline{AC} = \overline{BD}}$（對應邊相等）</p>

小試身手

1. 如圖， $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 於 E ， $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ 於 F ，

$\triangle ADE$ 與 $\triangle BCF$ 全等。求：

- (1) $\overline{EF} = ?$ 6
- (2) $\overline{AE} = ?$ 6
- (3) 梯形的高 $\overline{DE} = ?$ 8
- (4) 梯形的面積 = ? 96



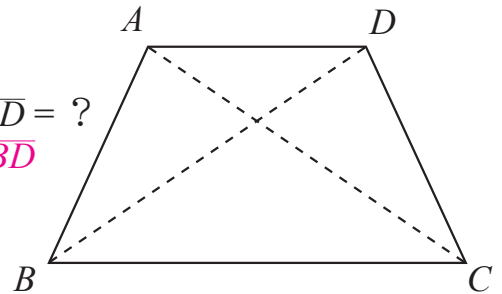
2. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- (1) 當 $\overline{CD} = 8$ ， $\overline{BC} = 17$ ，且 $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ ，求 $\overline{AC} = ?$ $\overline{BD} = ?$

$$\overline{AC} = 15 = \overline{BD}$$

- (2) 當 $\angle BAD = 120^\circ$ ，求 $\angle ABC = ?$ $\angle DCB = ?$

$$\angle ABC = 60^\circ = \angle DCB$$



學生練習題目後，請教師再次複習讓學生知道等腰梯形的對角線相等且兩底角相等

隨堂練習

(同學可自行選擇題目作答)

(老師多鼓勵程度較好的同學直接挑戰進階或神人題)

■ 基礎題：

1. 已知梯形 $ABCD$ 面積為72平方公分，且梯形的高為9公分，則此梯形的中線長為多少公分？

《答案》8 公分

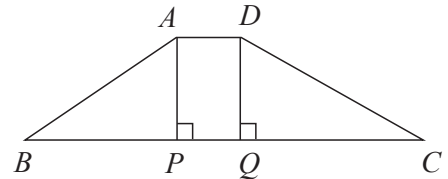
2. 等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 9$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則此梯形面積為何？

《答案》24

■ 進階題：

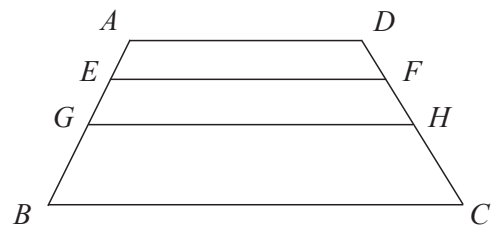
1. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 15$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 24$ ，且其中兩高 \overline{AP} 、 \overline{DQ} 分別與 \overline{BC} 相交於 P 、 Q 兩點，求此梯形 $ABCD$ 面積為何？

《答案》180 (平方單位)



2. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， G 、 H 為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 中點， E 、 F 為 \overline{AG} 、 \overline{DH} 中點，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{EF} = ?$

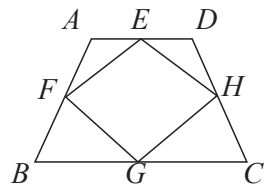
《答案》7.5



■ 神人題：

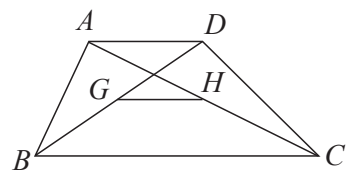
1. 已知 $ABCD$ 為等腰梯形，其中 E 、 F 、 G 、 H 分別為各邊之中點，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則四邊形 $EFGH$ 的面積為多少？

《答案》18 (平方單位)



2. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{GH} 為兩對角線的中線連線段。若 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{GH} = ?$

《答案》3



差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2018.11

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發行人：郭工賓

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

作者：賴彥男、黃基肇、鄧汶

出版年月：107年11月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助
(歡迎使用，請註明出處)