

# 差異化國民中學數學教材

## 平行四邊形與特殊四邊形



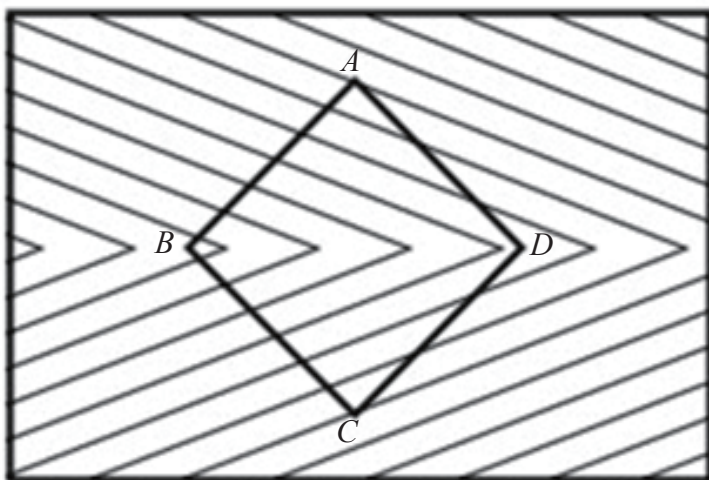
國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組

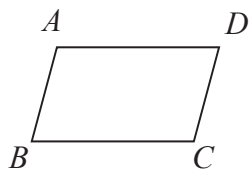
# 平行四邊形與特殊四邊形

## 1 平行四邊形

- 請問下圖的四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形嗎？請說說你的理由。



前一個單元已經學了平行線的性質：「由兩雙平行線構成的四邊形，稱為平行四邊形」。可以記作「 $\square ABCD$ 」，讀作「平行四邊形 $ABCD$ 」。



註：「 $\square ABCD$ 」與「 $\square ADCB$ 」代表的是同一個平行四邊形。在描述一個多邊形時，習慣以頂點代號順時針或逆時鐘寫出。

在日常生活中，我們都可以發現許許多多由平行四邊形所構成的建築物及遊戲（七巧板），如下圖所呈現。

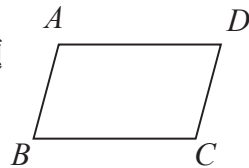


平行四邊形的應用很廣泛，而平行四邊形有哪些性質，接下來的任務及例題將引導你來發現。

## 2 平行四邊形的性質

### 探索與發現

1. 如右圖，已知  $\square ABCD$  為平行四邊形，請觀察它並提出數學問題



### 學生筆記

### 小試身手 ▶▶

1. 平行四邊形  $ABCD$  中，若  $\angle A = 45^\circ$ ，

則  $\angle B =$  \_\_\_\_\_，

$\angle C =$  \_\_\_\_\_，

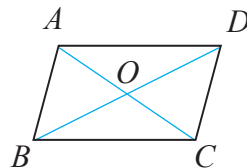
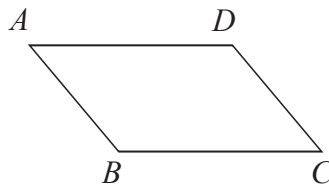
$\angle D =$  \_\_\_\_\_。

2. 平行四邊形  $ABCD$  中，若  $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AD} = 20$ ，

則  $\overline{CD} =$  \_\_\_\_\_，

$\overline{BC} =$  \_\_\_\_\_。

3. 如右圖，平行四邊形  $ABCD$  中， $\overline{BO} = 7$ ，則  $\overline{BD} =$  \_\_\_\_\_。



 任務1 

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

 學生筆記  任務2 

在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

 學生筆記 

**隨堂練習**

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\angle B = \angle D$ ，請判斷四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

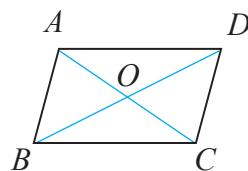
**◆ 任務3 ◆**

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，請問要再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形？請說明之。

**學生筆記**

**任務4**

在四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  兩對角線交於  $O$  點，已知  $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，請問要再加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形？如果是，請說明；如果不是，請舉一個反例，並且說明加入什麼條件可以使四邊形 $ABCD$ 成為平行四邊形。

**學生筆記**

### 隨堂練習 (同學可自行選擇題目作答)

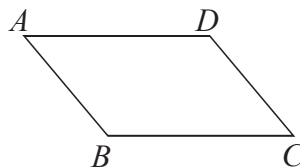
#### ■ 基礎題：

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = 35^\circ$ ，

則 $\angle B =$ \_\_\_\_\_，

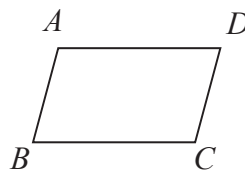
$\angle C =$ \_\_\_\_\_，

$\angle D =$ \_\_\_\_\_。



2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

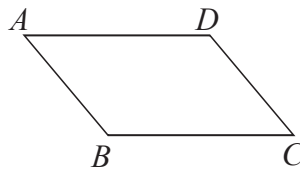
則此四邊形的周長=\_\_\_\_\_。



#### ■ 進階題：

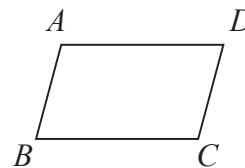
1. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，

若 $\angle A + 3\angle C = 120^\circ$ ，則 $\angle B =$ \_\_\_\_\_。



2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 3x + 10$ ， $\overline{CD} = 4x - 10$ ，

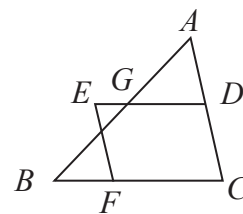
則 $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_。



#### ■ 神人題：

1. 如右圖，四邊形 $CDEF$ 為平行四邊形，若 $\angle A = 55^\circ$ 、

$\angle C = 75^\circ$ ，則 $\angle BGD =$ \_\_\_\_\_。

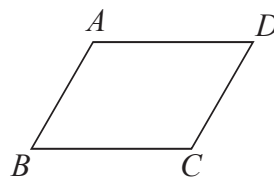


2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 2x - 4$ ，

$\overline{BC} = 4y - 15$ ， $\overline{CD} = 16 - 2x$ ， $\overline{AD} = y + 3$ ，則：

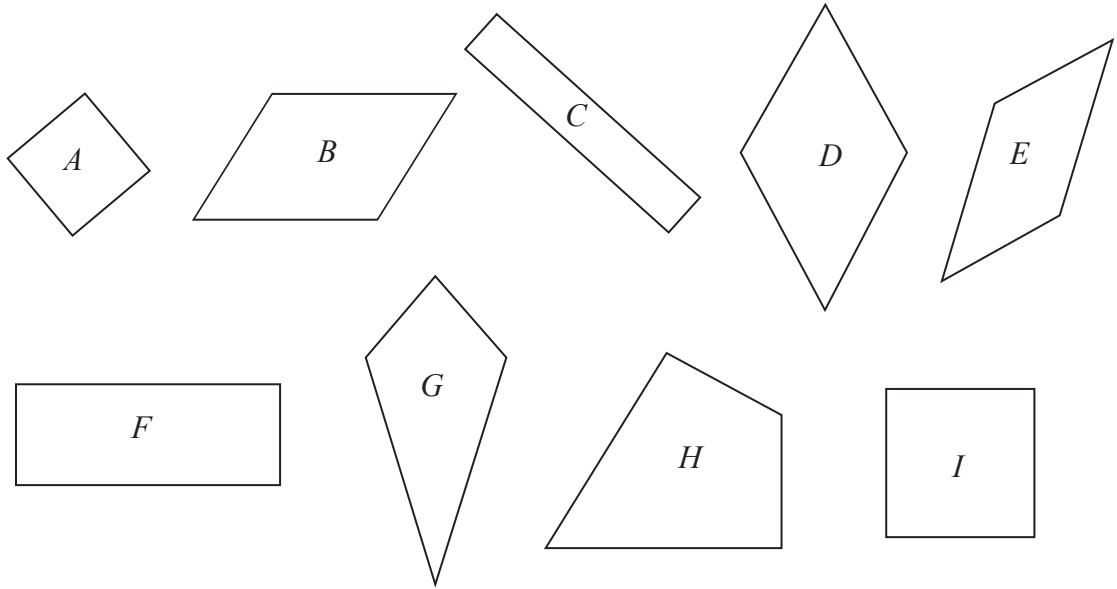
(1)  $x =$ \_\_\_\_\_。

(2)  $y =$ \_\_\_\_\_。



### 3 四邊形的關係

- 觀察下列的四邊形，請依照該四邊形的特性將它們歸類。



1. 請找出符合箏形特性的編號：\_\_\_\_\_。
2. 請找出符合正方形特性的編號：\_\_\_\_\_。
3. 請找出符合長方形特性的編號：\_\_\_\_\_。
4. 請找出符合菱形特性的編號：\_\_\_\_\_。
5. 請找出符合平行四邊形特性的編號：\_\_\_\_\_。

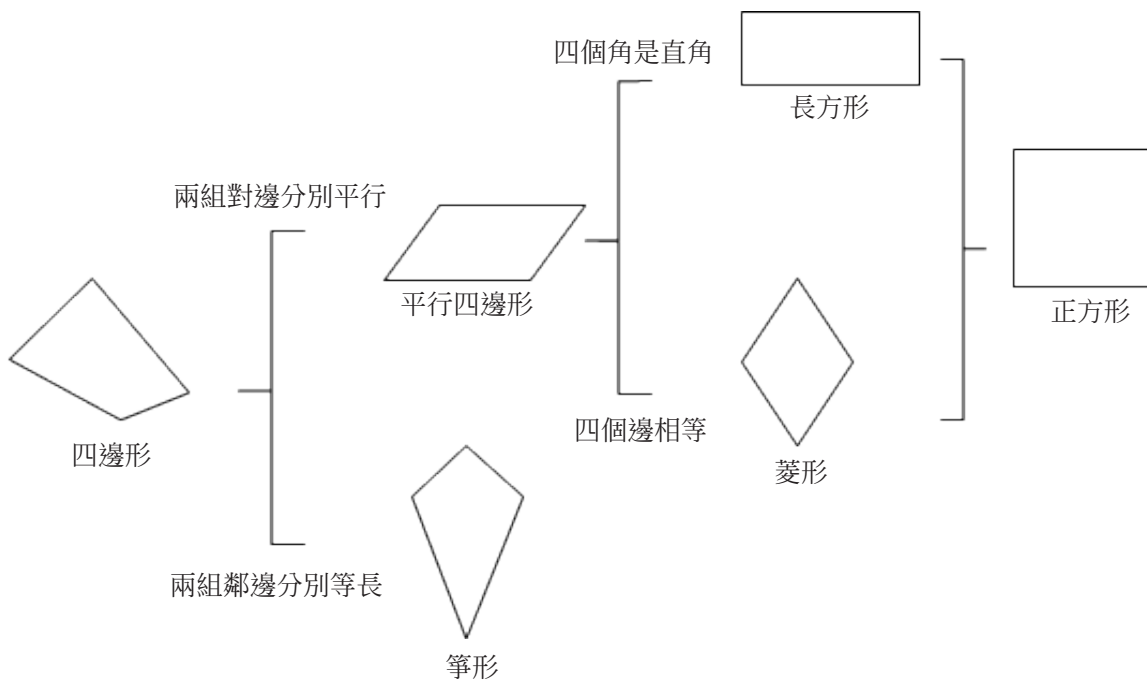


## ◀ 小組任務 ▶

- 請各小組討論前面出現的四邊形特性，如果現在要將這五種四邊形分類，你會想將哪些四邊形合併成一類呢？分類的依據是什麼？
- 那有沒有辦法分成更少類呢？分類的依據是什麼？



- 我們根據不同四邊形的特性，將原本的五種四邊形，按特性相同的四邊形歸類在一起，進而分類成兩種四邊形，分類方式如下：



### 隨堂練習 (同學可自行選擇題目作答)

#### ■ 基礎題：

請判斷下列敘述的正確性：

1. ( ) 四邊形如果四個邊等長就是正方形。
2. ( ) 長方形是正方形的一種。

#### ■ 進階題：

1. 正方形是不是菱形的一種？試說明。
2. 菱形是不是箏形的一種？試說明。

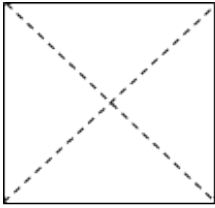
#### ■ 神人題：

試著找出平行四邊形、長方形、菱形、正方形及箏形的關聯性，並說明之。

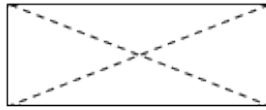
作答區▼

## 4 平行四邊形與特殊四邊形的對角線

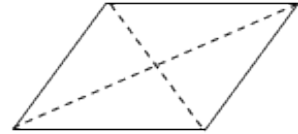
- 下列圖中的虛線皆為對角線，請觀察下列各四邊形的對角線。  
你想要問什麼數學問題？



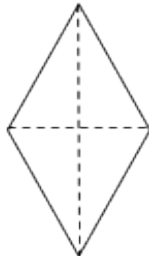
正方形



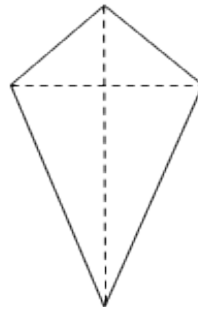
長方形



平行四邊形



菱形



箏形

寫下想問的數學問題：

### 小試身手▶▶

依據上述的圖形，試著回答下列問題。

請問對角線有互相平分的四邊形有：

\_\_\_\_\_。

請問對角線有互相垂直的四邊形有：

\_\_\_\_\_。

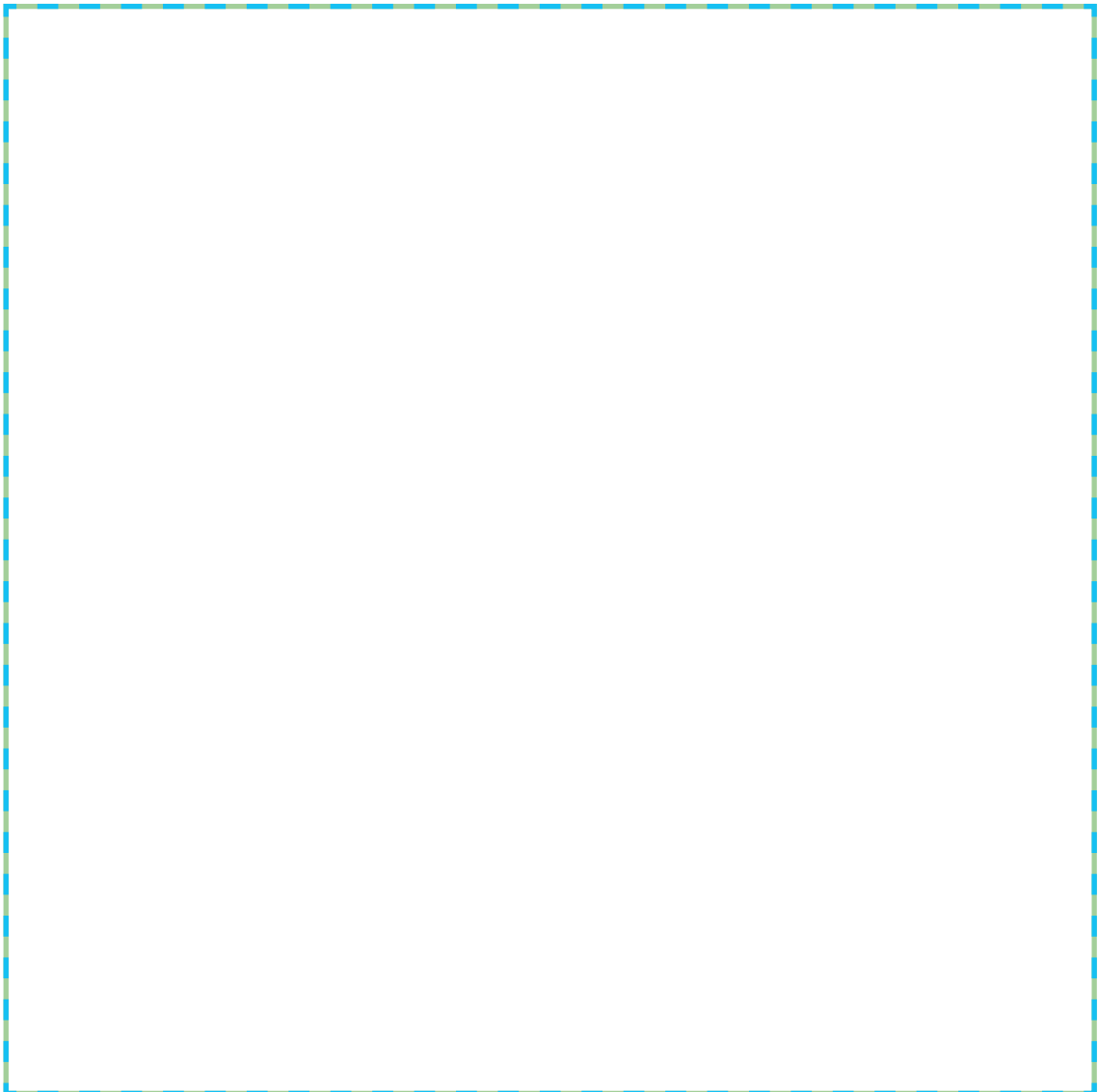
請問對角線等長的四邊形有：

\_\_\_\_\_。

- 利用四邊形對角線的特性，我們可以透過畫對角線，辨別出該四邊形是屬於哪種特殊四邊形。

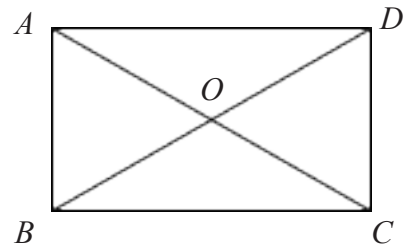
四邊形 \ 性質	對角線互相平分	對角線互相垂直	對角線等長
平行四邊形			
長方形			
菱形			
箏形			
正方形			

- **挑戰題：**觀察上表，請利用四邊形的對角線來進行來分類。



### ◆ 任務1 ◆

如圖，長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{OB} = 13$ ， $\overline{BC} = 24$ ，則長方形 $ABCD$ 的面積為何？



依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
<p>長方形 <math>ABCD</math> 中，由對角線互相平分得 <math>\underline{\hspace{2cm}} = \overline{OB} = 13</math></p> <p>又 <math>\triangle BCD</math> 為直角三角形，</p> <p>依據 <math>\underline{\hspace{2cm}}</math> 定理，</p> $\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2$ $\overline{CD}^2 = 26^2 - 24^2$ $\overline{CD}^2 = 100$ $\overline{CD} = 10$ <p>則長方形 <math>ABCD</math> 的面積 = <math>\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}</math></p> <p style="text-align: center;">= <math>\underline{\hspace{2cm}}</math></p>	

### ◆ 任務2 ◆

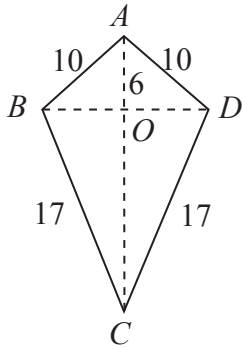
菱形的兩對角線長分別為10公分與12公分，求此菱形的面積與周長。

依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
<div style="text-align: center;"> </div> <p>(1) 菱形的面積 = <math>\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}</math></p> <p style="text-align: center;">= <math>\underline{\hspace{2cm}}</math></p> <p>(2) 邊長 = <math>\sqrt{5^2 + 6^2}</math> (依據 <math>\underline{\hspace{2cm}}</math> 定理)</p> <p style="text-align: center;">= <math>\sqrt{61}</math></p> <p>菱形的周長 = <math>4 \times \sqrt{61}</math></p> <p style="text-align: center;">= <math>4\sqrt{61}</math></p>	

### 任務3

已知箏形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AD} = 10$ ， $\overline{CB} = \overline{CD} = 17$ ， $\overline{AO} = 6$ ，且 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 $O$ 點，求箏形 $ABCD$ 的面積為多少？

依提示作答



箏形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，

依據勾股定理，

$$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}},$$

同理， $\overline{CO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

則箏形 $ABCD$ 的面積 =  $\underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} \div 2$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

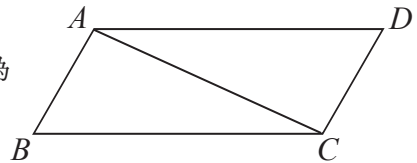
自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）

### 隨堂練習 (同學可自行選擇題目作答)

#### ■ 基礎題：

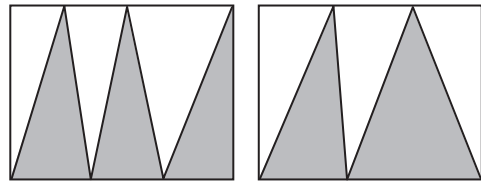
1. 菱形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AC} = 6$ 公分， $\overline{BD} = 8$ 公分，則此菱形 $ABCD$ 的周長為多少？

2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ ，若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 17$ ，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

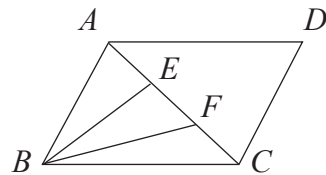


#### ■ 進階題：

1. 如下圖，兩矩形是全等的，則左邊矩形中灰色部分的面積與右邊矩形中灰色部分的面積何者較大？



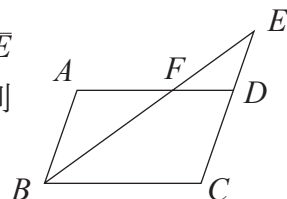
2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $E$ 、 $F$ 為對角線 $\overline{AC}$ 的三等分點，若 $\triangle BEF$ 面積為6，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積是多少？



#### ■ 神人題：

1. 設 $A(-6, 5)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(8, 5)$ 、 $D(1, 9)$ 為坐標平面上的四個點，則連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 後，所得的四邊形 $ABCD$ 面積為多少？

2. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 之角平分線 $\overline{BE}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 $E$ 點，交 $\overline{AD}$ 於 $F$ 點，若 $\overline{BC} = 20$ ，則 $\overline{FD} + \overline{CD} = ?$



## 5 梯形

全球最受矚目的運動比賽—世界盃足球賽，在比賽中，大家總會盯著球門，等待著足球踢進球門的剎那。請各位同學觀察足球門是由甚麼形狀組成的呢？不難發現到，從正面看的時候，就是我們上一小節討論過的長方形！那請問側面的部分是甚麼形狀呢？



在生活中，許多不同的四邊形環繞在我們身邊，接下來就要介紹，除了前面出現的四邊形之外，還存在另一個特別的四邊形—梯形。小學我們曾經學過這個圖形：一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱作梯形。就如同下列這些傢俱，就是由梯形經創意組合得到的特色傢俱喔！



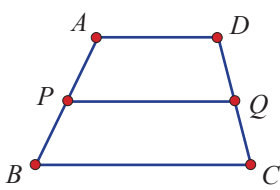
### 學生筆記

小學我們曾經學過梯形，請你試著畫出一個梯形，並且說明是如何畫出這個梯形的，以及說說看梯形有哪些性質呢？

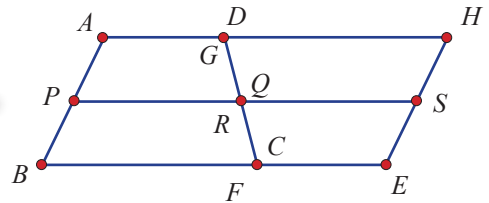
認識了梯形之後，讓我們一起來觀察看看梯形有哪些特別的性質吧！



如下圖，梯形 $ABCD$ 經由旋轉得到一個全等的梯形 $EFGH$ （如圖一），且 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{RS}$ 為梯形中線，經由合併得到四邊形 $ABEH$ （如圖二），請說明看看此為甚麼形狀呢？



圖一

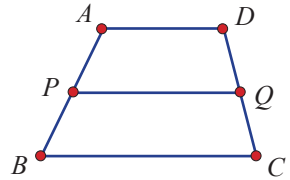


圖二

從四邊形 $ABEH$ 的特性中，請觀察 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 與 $\overline{PQ}$ 的關聯是甚麼呢？

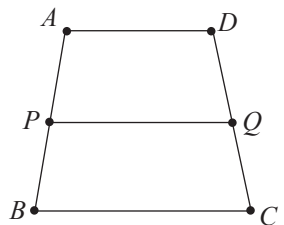
### 學生筆記

梯形的兩腰中點連線段稱為梯形的中線。如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $P$ 、 $Q$ 兩點分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{PQ}$ 稱為梯形中線。且梯形中線 =  $\frac{\text{上底} + \text{下底}}{2}$ 。

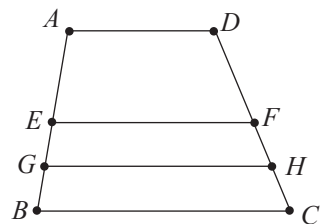


### 小試身手

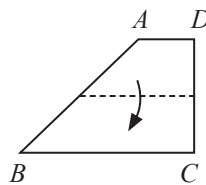
1. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{PQ}$ 為梯形中線， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{PQ} =$ \_\_\_\_\_。



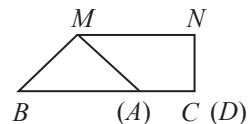
2. 如下圖，梯形 $ABCD$ 中， $E$ 、 $F$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點， $G$ 、 $H$ 分別為 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 的中點，若 $\overline{AD} = 7$ ， $\overline{BC} = 11$ ，求 $\overline{GH} =$ \_\_\_\_\_。



3. 圖(甲)為一梯形 $ABCD$ ，其中 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{CD} = 12$ 。若將 $\overline{AD}$ 疊合在 $\overline{BC}$ 上，出現摺線 $\overline{MN}$ ，如圖(乙)所示，則 $\overline{MN}$ 的長度為何？



圖(甲)



圖(乙)

### 任務1

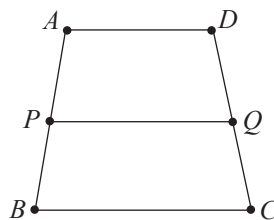
請利用梯形中線，試著改寫國小所學的梯形面積公式

(梯形面積 =  $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$ )。

依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2 = _____ × 高 = _____ × 高	

### 小試身手

如圖，梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $PQ$  為梯形中線， $PQ = 10$ ，梯形的高為 10，則梯形面積 = \_\_\_\_\_。



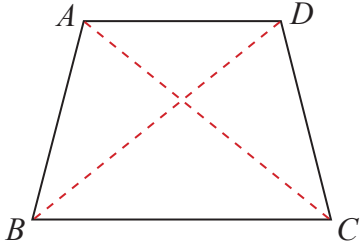
### 任務2

試說明等腰梯形的兩底角相等。

直觀或操作說明	自我挑戰區（用數學方式證明）

### 任務3

試說明等腰梯形的兩對角線相等。

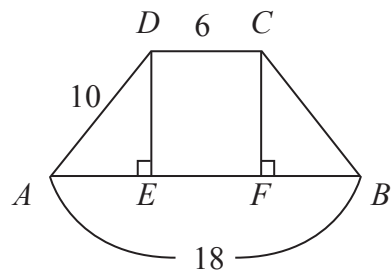
直觀或操作說明	自我挑戰區（用數學方式證明）
	

### 小試身手

1. 如圖， $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 於 $E$ ， $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ 於 $F$ ，

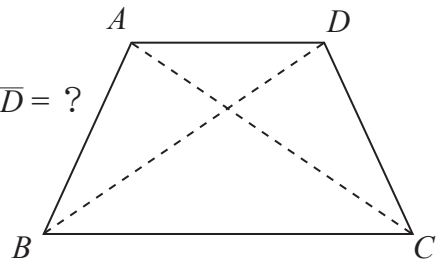
$\triangle ADE$ 與 $\triangle BCF$ 全等。求：

- (1)  $\overline{EF} = ?$
- (2)  $\overline{AE} = ?$
- (3) 梯形的高  $\overline{DE} = ?$
- (4) 梯形的面積 = ?



2. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，則：

- (1) 當 $\overline{CD} = 8$ ， $\overline{BC} = 17$ ，且 $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ ，求 $\overline{AC} = ?$   $\overline{BD} = ?$
- (2) 當 $\angle BAD = 120^\circ$ ，求 $\angle ABC = ?$   $\angle DCB = ?$



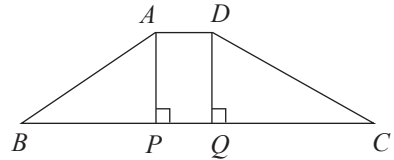
### 隨堂練習 (同學可自行選擇題目作答)

#### ■ 基礎題：

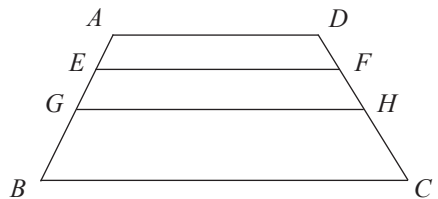
1. 已知梯形 $ABCD$ 面積為72平方公分，且梯形的高為9公分，則此梯形的中線長為多少公分？
2. 等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 9$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則此梯形面積為何？

#### ■ 進階題：

1. 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 15$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 24$ ，且其中兩高 $\overline{AP}$ 、 $\overline{DQ}$ 分別與 $\overline{BC}$ 相交於 $P$ 、 $Q$ 兩點，求此梯形 $ABCD$ 面積為何？

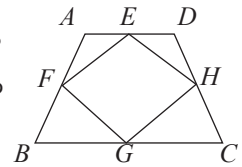


2. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $G$ 、 $H$ 為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 中點， $E$ 、 $F$ 為 $\overline{AG}$ 、 $\overline{DH}$ 中點，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{EF} = ?$

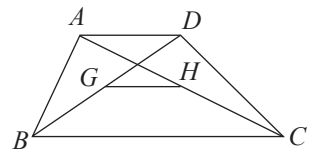


#### ■ 神人題：

1. 已知 $ABCD$ 為等腰梯形，其中 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 分別為各邊之中點，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則四邊形 $EFGH$ 的面積為多少？



2. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{GH}$ 為兩對角線的中線連線段。若 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求 $\overline{GH} = ?$



# 差異化國民中學數學教材：平行四邊形與特殊四邊形—學生手冊

差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編  
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2018.11

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發行人：郭工賓

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

作者：賴彥男、黃基肇、鄧汶

出版年月：107年11月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助  
(歡迎使用，請註明出處)