

# 差異化國民中學數學教材 平行

教師手冊



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組

## 單元目標

能理解平面上兩平行直線的各種幾何性質。

## 對照學習內容

### 九年一貫

8-s-05能理解平行的意義，平行線截線性質，以及平行線判別性質。

### 十二年國教

S-8-3平行：平行的意義與符號；平行線截線性質；兩平行線間的距離處處相等。  
(s-IV-3)

## 教材架構

### 一、教學模組架構概述

1. 利用「視錯覺」的圖像引入，讓學生了解如何運用平行的定義判斷兩條直線是否平行，而非透過肉眼猜測。
2. 藉由斜方向的平行線導出截線段的性質運用。

### 二、課程前後安排的銜接說明，與相關之學習重點分年細目

1. 前置經驗
  - S-4-5垂直與平行
  - S-7-3垂直
2. 銜接概念
  - S-9-3平行線截比例線段。

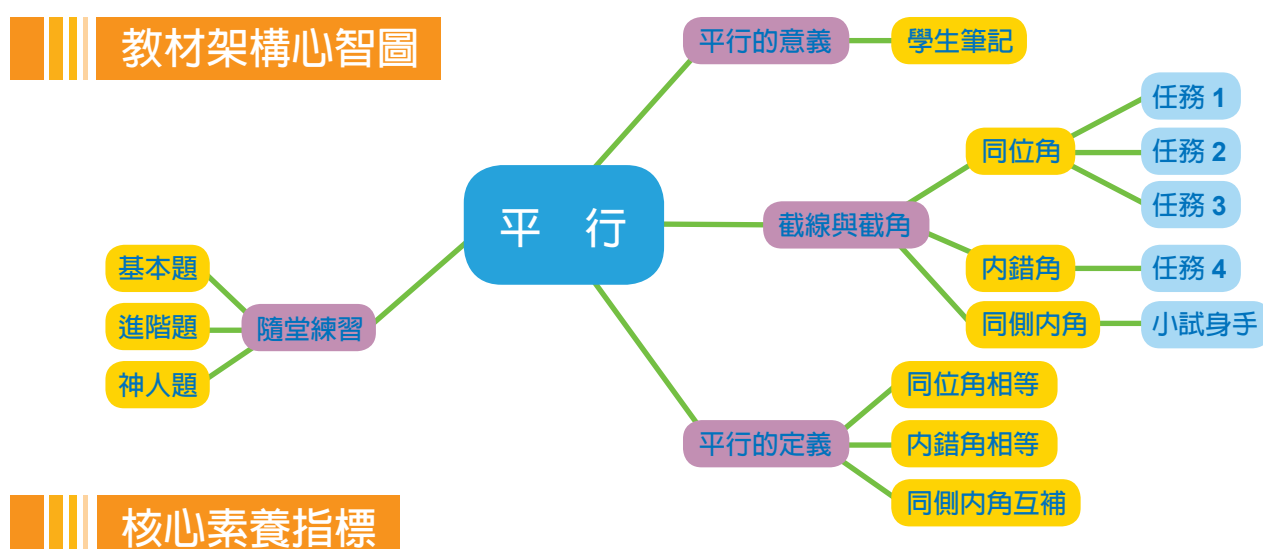
## 教材設計理念

核心想法在於提供所有學生公平學習的機會，讓每一位學生都容易理解和給予充分的機會主動參與。教學設計兼顧多元活動與多元表徵的靈活運用，其中多元活動包含觀察、操作、分組討論、小試身手等，而多元表徵則包含圖像、表格、代數等。差異化任務包括「開放性問題」、「平行任務」、「數學擬題」。「開放性問題」具備多樣解答或多種解題路徑；「平行任務」具備不同難易程度或是學習鷹架的有無，學生可依學習能力的不同，選擇較難或較易的任務，獨立完成任務或是依循學習鷹架引導完成任務。自我評量以難易分類，鼓勵學生可選擇適合自己能力的題型練習。

數學擬題出現在單元概念學習後，讓學生自行設計數學問題，可請他們上台分

享、討論自己所設計的數學題目，增進同儕互動。每個小單元結束時的小試身手，可以有效進行形成性評量來掌握學生課堂學習狀況。再者，形成性評量是差異化教學的關鍵，本教材的任務具備形成性評量的功能，教師可以從學生的回答，蒐集相關的學習證據，從而採取相對應的教學活動，回應學生的學習需求與個別差異，有效進行差異化教學。

建議教師適時運用分組活動，讓同學能有交流、互動討論的環境，老師講解的題目由教師帶領學生學習，任務題則由學生自行解題，教師適時引導，並鼓勵同學發表自己的解題想法，供同學參考。最後的自我評量部分，多數同學會習慣從頭開始寫，教師可運用訂定時間（約5分鐘內），或鼓勵程度較佳的同學，直接從「進階題」或是「神的境界」開始做，以達到差異化的學習。



#### 數-J-B1 (B1符號運用與溝通表達)

具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

#### 數-J-B3 (B3藝術涵養與美感素養)

具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。

#### 數-J-C1 (C1道德實踐與公民意識)

具備從證據討論與反思事情的態度，提出合理的論述，並能和他人進行理性溝通與合作。

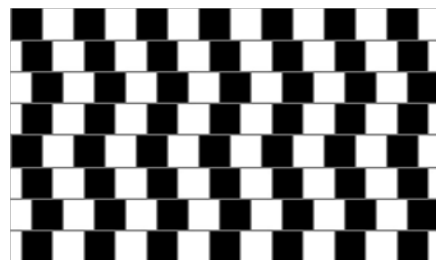
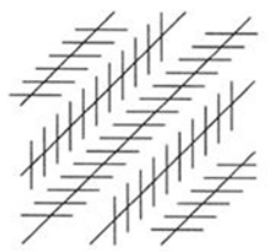
#### 數-J-C2 (C2人際關係與團隊合作)

樂於與他人良好互動與溝通以解決問題，並欣賞問題的多元解法。

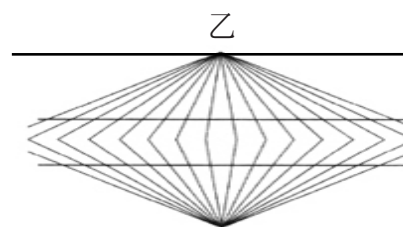
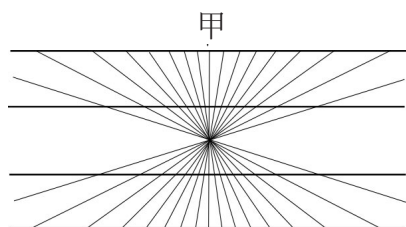
# 平行

## 1 導入活動

1. 平行線的視錯覺：生活中許多的平面設計，會利用平行線來呈現立體感，你看出下圖中的平行線嗎？



2. 請觀察下列甲、乙圖形中的兩條直線是否平行？你如何判斷的？



- 「平行」這名詞經常出現在生活中，請就你的學習經驗，自己（或分組）試著在下面表格內，畫出兩條平行的線，並說明這兩條線平行的理由。

(1)畫圖區：

(2)理由：

可能學生會說的原因: 1. 永不相交的兩條線。 2. 跟鐵軌一樣的線。

在平面上畫平行線的方法有許多（可利用三角板或尺規作圖），多鼓勵同學們思考如何畫出平行的兩條直線。

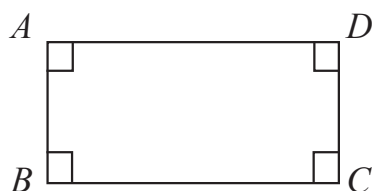
### 學生筆記

平行的意義：

1. 同一平面上兩條永不相交的直線。
2. 同一平面上，兩條直線如果可以找到一條共同的垂直線，就稱這兩條直線平行。

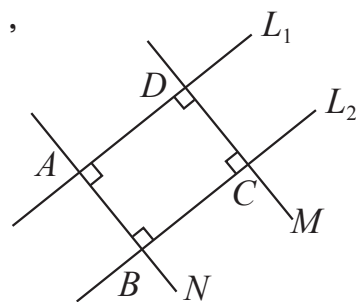
## 2 兩平行線的距離

回想一下，長方形的內角都是90度，而且對邊互相平行且相等；



因此，如果  $L_1 \parallel L_2$ ，分別作兩條直線  $M$ 、 $N$  同時垂直  $L_1$ 、 $L_2$ ，如圖一，則四邊形  $ABCD$  為矩形，同時  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，再多作幾條同時垂直  $L_1$ 、 $L_2$  的直線，都有相同的結果， $\overline{AB}$  或  $\overline{CD}$  都可視為  $L_1$ 、 $L_2$  之間的距離。

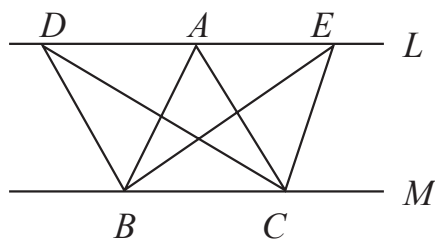
換句話說，兩條平行線之間的距離相等。



圖一

註：當兩條直線  $L_1$ 、 $L_2$  平行，我們可以用「 $L_1 \parallel L_2$ 」的符號表示。

討論：已知  $L \parallel M$ ，如下圖所示，請找出  $\triangle ABC$  面積、 $\triangle DBC$  面積、 $\triangle EBC$  面積的關係。



### 數學小知識

**平行公設** (Parallel postulate)，也稱為歐幾里得第五公設，出處在《幾何原本》五條公設的第五條。內容為：同一平面內，如果一條直線與兩條直線相交，若在某一側的內角和小於兩直角和，那麼這兩條直線在不斷延伸後，會在內角和小於兩直角和的一側相交。由於平行公設的文字不像前面四個公設那樣簡潔，後世的數學家想證明第五公設可以由前面四個公設推導而得，雖然他們的努力沒有成功，但是開創出幾何學的不同道路出來，大大豐富幾何學的內容。



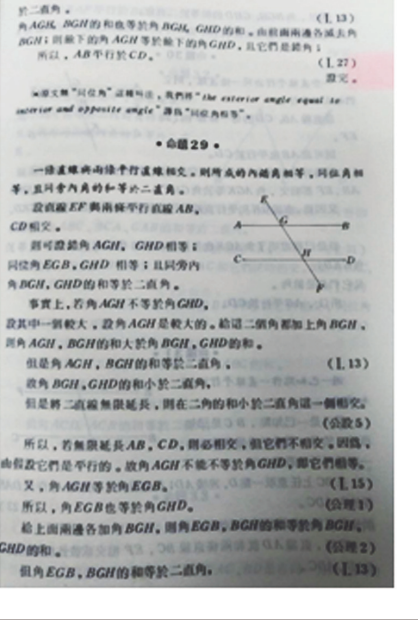
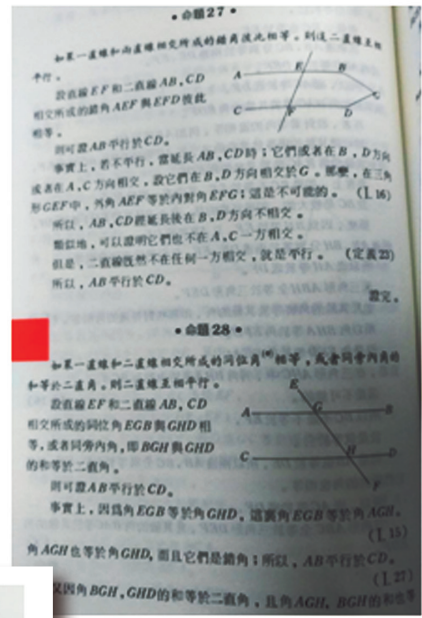
參考：維基百科、幾何原本。

註：此為《幾何原本》書籍的相關補充，如果學生有興趣詢問，教師可以提供給學生參考。

《幾何原本》對於幾何學、數學和科學的往後發展，以及對於西方人的整個思維方法都有極大的影響。雖然主要探討的對象是幾何學，但它還處理了數論、無理數理論等其他課題，歐幾里得使用了公理化的方法。公理 (Axioms) 就是確定的、不需證明的基本命題，一切定理都由此演繹而出。在這種演繹推理中，每個證明必須以公理為前提，或者以被證明了的定理為前提。這一方法後來成了建立任何知識體系的典範，在往後的二千多年間，被奉為必須遵守的嚴密思維的典範。



公元 888 年希臘文手抄本《原本》的一頁，現藏於英國牛津大學博德利 (Bodleian) 圖書館。

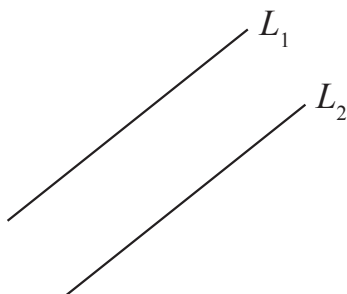


公設是對基本數系公認的假設，不證自明。

命題是對確定的對象作出判斷的陳述句，有真假可言，即需證明真或假。

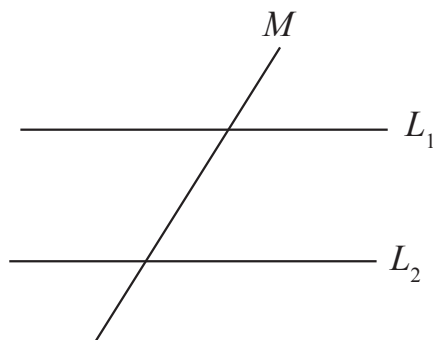
### 3 截線與截角

回想國小的學習經驗中，如果要判斷兩條直線是否平行，就得找出是否有一條共同的垂直線通過該兩條直線。接下來，請大家試著畫垂直線來判斷圖二中的  $L_1$  與  $L_2$  是否平行？



圖二

從剛剛的練習，我們會發現到在過往經驗中，要判斷的直線都是水平的，畫垂直線相對來說比較容易。但要畫圖二中的  $L_1$  與  $L_2$  之共同垂直線不容易馬上完成。請想一想，如果我們不一定要畫到垂直線才可以判斷兩條直線是否平行，只要任意的畫一條直線同時通過  $L_1$  與  $L_2$  (如圖三所示)，這時候，會發生甚麼事呢？是否仍可處理我們想判斷的問題？



圖三

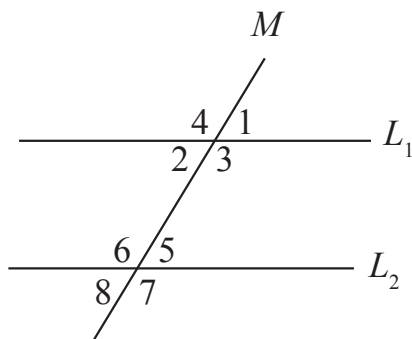
#### 學生筆記

在一個平面上，如圖三，直線  $M$  同時與另外兩條直線  $L_1$ 、 $L_2$  交於不同的兩點，則稱直線  $M$  為  $L_1$ 、 $L_2$  的 截線。而截線  $M$  與  $L_1$ 、 $L_2$  形成的八個交角，稱為 截角。

- 已知圖三的  $L_1$  與  $L_2$  為平行線，請觀察圖三的所有截角，關於這些截角，你想問甚麼數學問題呢？

教學上可引導學生感受到為截角命名的重要性與方便性，請同學上台分享他想到的數學問題。建議教師在課堂上要求學生做精確而有效的溝通，引導學生為截角做角一、角二、角三做標記等

因此把圖四放到下一頁，不要讓它過早出現。



圖四

### 學生筆記

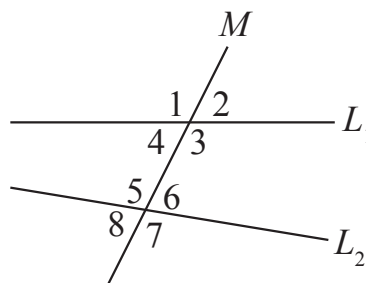
截角與截角間，隨著彼此位置關係的不同，會有不同的名稱：

- **同位角**：參見圖四， $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 分別在 $L_1$ 與 $L_2$ 的上方，且都在截線 $M$ 的右方，像這樣位置對應相同的一組角稱為同位角。同樣地， $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 、 $\angle 2$ 與 $\angle 8$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 也是同位角。
- **內錯角**：參見圖四， $\angle 2$ 與 $\angle 5$ 在 $L_1$ 與 $L_2$ 的內側，且交錯出現在截線 $M$ 的兩側，像這樣的一組角稱為內錯角。同樣地， $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也是內錯角。
- **同側內角**：參見圖四， $\angle 3$ 與 $\angle 5$ 在 $L_1$ 與 $L_2$ 的內側，且都在截線 $M$ 的兩側，像這樣的一組角稱為同側內角。同樣地， $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 也是同側內角。

### 小試身手▶▶

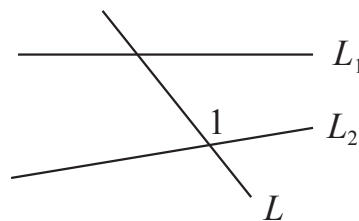
1. 如右圖，在 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、……、 $\angle 8$ 中，

- (1)  $\angle 4$  的同位角為  $\angle 8$ ，  
 $\angle 2$  的同位角為  $\angle 6$ 。
- (2)  $\angle 5$  的同側內角為  $\angle 4$ ，  
 $\angle 3$  的同側內角為  $\angle 6$ 。
- (3)  $\angle 5$  的內錯角為  $\angle 3$ ，  
 $\angle 6$  的內錯角為  $\angle 4$ 。



2. 如右圖， $L$  是  $L_1$  與  $L_2$  的截線。請試著找出

- (1)  $\angle 1$  的同位角，標上  $\angle 2$ ，
- (2)  $\angle 1$  的同側內角，標上  $\angle 3$ 。



當我們了解到這些截角的名稱後，如何利用截角間的關係來判斷兩條直線是否平行呢？

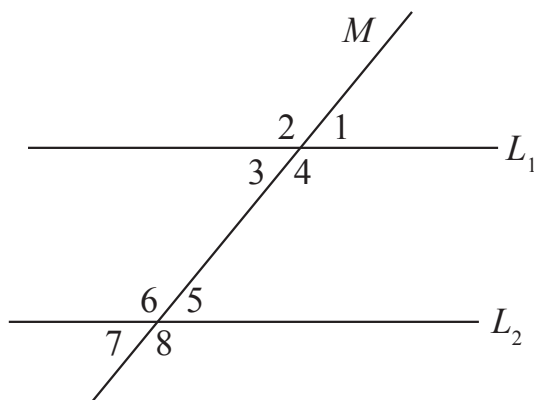
此為下個主題的引言，問問同學有沒有方法判斷。有則請同學發表；無則接續下個主題。



## 4 兩平行線的截角

已知  $L_1 \parallel L_2$ ，如右圖所示，若  $\angle 1 = 50^\circ$ ，試著使用量角器量出  $\angle 2 \sim \angle 8$  的度數。

- (1)  $\angle 2 =$  130 度
- (2)  $\angle 3 =$  50 度
- (3)  $\angle 4 =$  130 度
- (4)  $\angle 5 =$  50 度
- (5)  $\angle 6 =$  130 度
- (6)  $\angle 7 =$  50 度
- (7)  $\angle 8 =$  130 度



另解（教師可視學生能力補充）

$L_1 \parallel L_2$ ，若  $\angle 1 = 50^\circ$ ，試著寫出  $\angle 2 \sim \angle 8$  的度數。

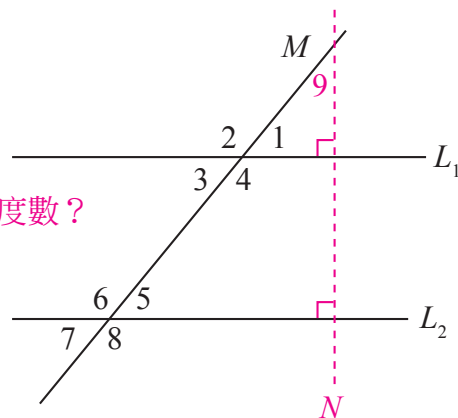
- (1)  $\angle 2 =$  \_\_\_\_\_ 度
- (2)  $\angle 3 =$  \_\_\_\_\_ 度
- (3)  $\angle 4 =$  \_\_\_\_\_ 度

相信  $\angle 2 \sim \angle 4$  的度數難不倒你，但要怎麼找出  $\angle 5 \sim \angle 8$  的度數？

因為  $L_1 \parallel L_2$ ，可以畫出一直線  $N$  同時垂直  $L_1$ 、 $L_2$ ，如右圖

此時  $\angle 9 =$  \_\_\_\_\_ 度。觀察構出的大三角形，則

- (4)  $\angle 5 =$  \_\_\_\_\_ 度
- (5)  $\angle 6 =$  \_\_\_\_\_ 度
- (6)  $\angle 7 =$  \_\_\_\_\_ 度
- (7)  $\angle 8 =$  \_\_\_\_\_ 度



請用以上  $\angle 1 \sim \angle 8$  的度數和位置關係來完成下面的表格：

同位角（4組）	內錯角（2組）	同側內角（2組）
$\angle 1 =$ <u>50</u> 度與 $\angle 5 =$ <u>50</u> 度 $\angle 2 =$ <u>130</u> 度與 $\angle 6 =$ <u>130</u> 度 $\angle 3 =$ <u>50</u> 度與 $\angle 7 =$ <u>50</u> 度 $\angle 4 =$ <u>130</u> 度與 $\angle 8 =$ <u>130</u> 度	$\angle 3 =$ <u>50</u> 度與 $\angle 5 =$ <u>50</u> 度 $\angle 4 =$ <u>130</u> 度與 $\angle 6 =$ <u>130</u> 度	$\angle 4 =$ <u>130</u> 度與 $\angle 5 =$ <u>50</u> 度 $\angle 3 =$ <u>50</u> 度與 $\angle 6 =$ <u>130</u> 度
觀察並說出每組同位角角度的關係。	觀察並說出每組內錯角角度的關係。	觀察並說出每組同側內角角度的關係。

建議老師再將  $\angle 1 = 50^\circ$  換成  $\angle 1 = x^\circ$  在黑板上引導一次，成為通式。

### 學生筆記

#### 平行線的截線性質

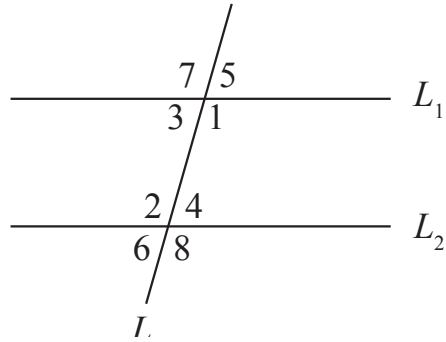
兩條平行線被一直線所截的 同位角相等、內錯角相等、同側內角互補，而且只要其中一個成立，則可確定該兩條直線就會平行。

學生習慣背誦同位角相等，內錯角相等，同側內角互補；事實上，同位角不一定相等，內錯角也不一定相等，同側內角不一定互補；前提必須是兩直線平行下才成立。

### 小試身手▶▶

如右圖，有直線  $L$  截過兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  後所形成的八個角。由下列哪一個選項中的條件可判斷  $L_1 \parallel L_2$ ？【98年第一次基測】

- (A)  $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$   
 (B)  $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$   
 (C)  $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$   
 (D)  $\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$

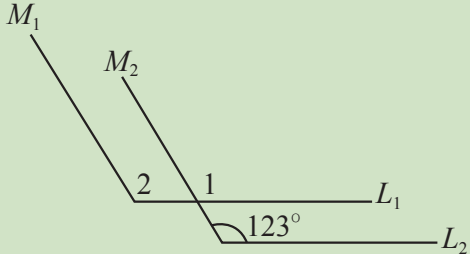
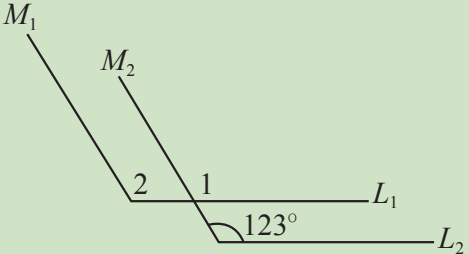


Ans:(B)

◆ **任務1** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $\angle 1 = 105^\circ$ ，求  $\angle 2$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$  的度數。(平行線截線性質：同位角相等)

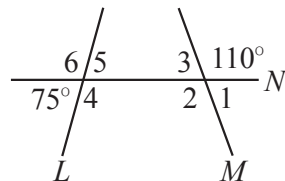
依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
<div style="text-align: center;"> </div> <p>因為 <math>\angle 1</math> 與 <math>\angle 2</math> 為 <u>對頂角</u>            所以 <math>\angle 2 =</math> <u><math>105^\circ</math></u> ( <u>對頂角</u> 相等)            因為 <math>L_1 \parallel L_2</math>            所以 <math>\angle 5 =</math> <u><math>105^\circ</math></u> ( <u>同位角</u> 相等)            又因為 <math>\angle 6 +</math> <u><math>\angle 5</math></u> <math>= 180^\circ</math>            所以 <math>\angle 6 =</math> <u><math>75^\circ</math></u>            因此 <math>\angle 2 =</math> <u><math>105^\circ</math></u>  <math>\angle 5 =</math> <u><math>105^\circ</math></u>  <math>\angle 6 =</math> <u><math>75^\circ</math></u></p>	<div style="text-align: center;"> </div>

◆ **任務2** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $M_1 \parallel M_2$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度數。(平行線截線性質：同位角相等)

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
 <p>因為 <math>L_1 \parallel L_2</math>            所以 <math>\angle 1 = \underline{123^\circ}</math> (同位角 <u>相等</u>)            又因為 <math>M_1 \parallel M_2</math>            所以 <math>\angle 2 = \underline{123^\circ}</math> (同位角 <u>相等</u>)            因此  <math>\angle 1 = \underline{123^\circ}</math> <math>\angle 2 = \underline{123^\circ}</math></p>	

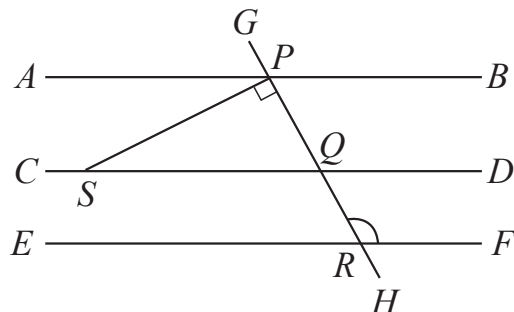
### 小試身手 ▶▶

1. 如圖，直線  $N$  是  $L$ 、 $M$  的截線，請依序回答下列問題：

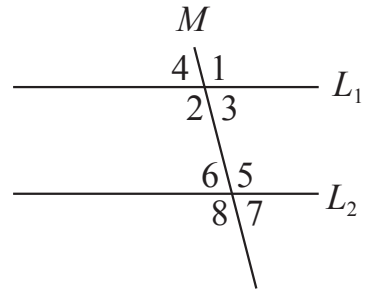


- (1)  $\angle 1$  的同位角是  $\angle 4$ ，角度是 70 度。  
 (2)  $\angle 4$  的對頂角是  $\angle 6$ ，角度是 105 度。

2. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{PS} \perp \overline{GH}$  於  $P$ ，當  $\angle FRG = 110^\circ$ ，求  $\angle PSQ$  的度數 = 20 度。



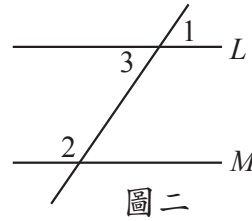
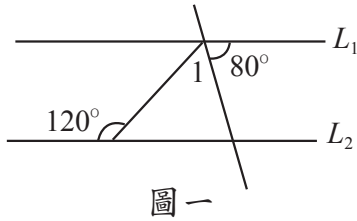
- ◆ **任務3** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，直線  $M$  為截線，  
試說明  $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$   
(平行線截線性質：同側內角互補)



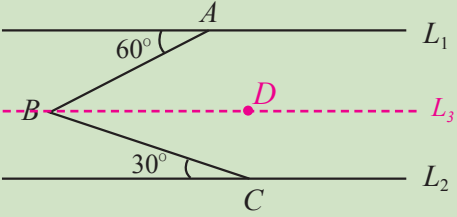
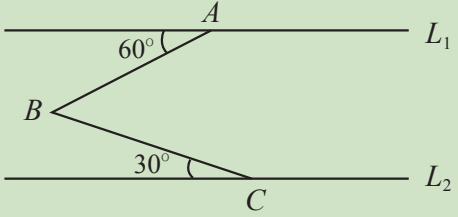
依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
因為 $L_1 \parallel L_2$ 所以 $\angle 1 = \angle 5$ (同位角 <u>相等</u> ) 又因為 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ 所以 $\angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$ (同側內角 <u>互補</u> )	

### 小試身手 ▶▶

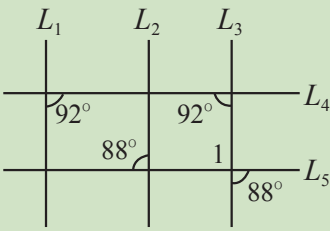
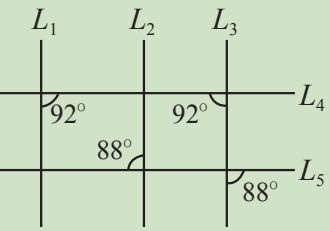
- 如圖一，已知  $L_1 \parallel L_2$ ，則  $\angle 1 = \underline{40}$  度。
- 如圖二，已知  $L \parallel M$ ，若  $\angle 1 = (x - 40)^\circ$ ， $\angle 2 = (x + 30)^\circ$ ，則  $\angle 3 = \underline{55}$  度。



◆ **任務4** ◆ 如圖，已知  $L_1 \parallel L_2$ ，則  $\angle ABC =$  \_\_\_\_\_ 度。（平行線截線性質：內錯角相等）

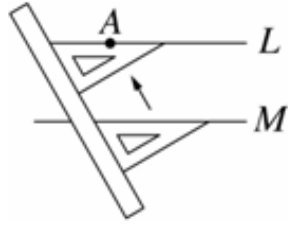
依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
 <p>過 <math>B</math> 作 <math>L_3 \parallel L_1</math>，因為 <math>L_1 \parallel L_2</math> 所以 <math>L_3 \parallel L_2</math>            在 <math>B</math> 點右側、<math>L_3</math> 上找一點 <math>D</math>            則 <math>\angle ABD =</math> <u>60</u> 度（<u>內錯角</u> 相等）  <math>\angle CBD =</math> <u>30</u> 度（<u>內錯角</u> 相等）            所以 <math>\angle ABC =</math> <u>90</u> 度</p>	

◆ **任務5** ◆ 如圖，平面上五條直線  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$  相交的情形。根據圖中標示的角度，判斷(1) $L_4$ 、 $L_5$  是否平行？(2) $L_2$ 、 $L_3$  是否平行？(3) $L_1$ 、 $L_3$  是否平行？（參考106年會考題）

依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
 <p>(1) <math>\angle 1 =</math> <u>88</u> 度，觀察 <math>L_4</math>、<math>L_5</math> 與 <math>L_3</math> 截角中的同側內角關係。  <math>L_4</math>、<math>L_5</math> 是否平行？<u>是</u>            （原因：<u>因為同側內角互補</u>）</p> <p>(2) 觀察 <math>L_2</math>、<math>L_3</math> 與 <math>L_5</math> 截角中的同位角關係。  <math>L_2</math>、<math>L_3</math> 是否平行？<u>是</u>            （原因：<u>因為同位角相等</u>）</p> <p>(3) 觀察 <math>L_1</math>、<math>L_3</math> 與 <math>L_4</math> 截角中的同側內角關係。  <math>L_1</math>、<math>L_3</math> 是否平行？<u>否</u>            （原因：<u>因為同側內角沒有互補</u>）</p>	

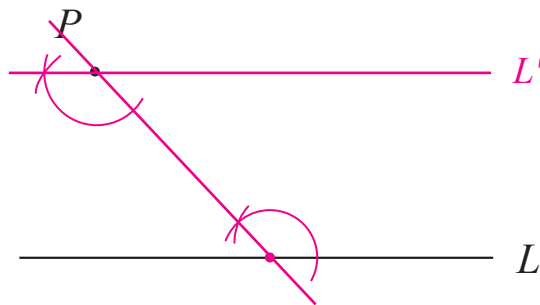
**小試身手**▶▶ (同學可自行選擇題目作答)：

1. 如下圖，經過已知直線  $M$  外一點  $A$ ，利用一把直尺、一塊三角板作一直線  $L$  與  $M$  平行，此種畫法是用到了平行線的哪一個判別性質？答：同位角相等。

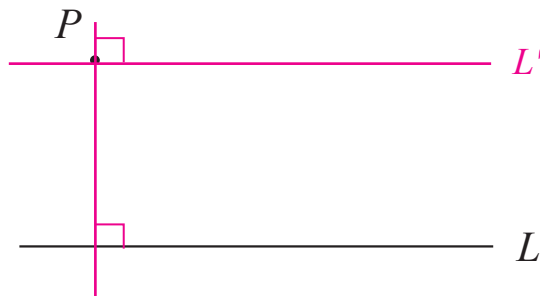


2. 請利用尺規作圖，完成通過  $P$  點且與直線  $L$  平行的直線，並利用不同的平行性質完成此題。

方法一（內錯角相等）



方法二（同位角相等）



數學擬題：請你出一題跟平行有關的題目，來考考同學；題目完成後，須提供解答或解法。

參考題目：在陽光城市內，有  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三間不同棟的住戶（此三間不共線），若要做兩條平行道路，一條通過  $AB$ ，另一條通過  $C$  點，請試著完成此任務。

$C$ •

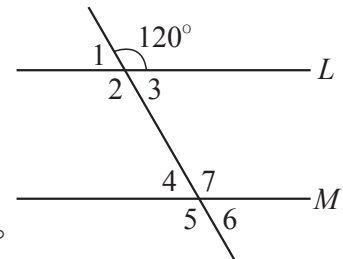


**自我評量** (同學可自行選擇題目作答)(老師多鼓勵程度較好的同學直接挑戰進階或神人題)

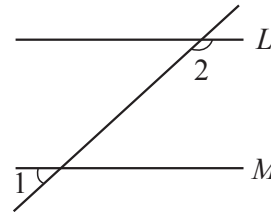
►► **基礎題**

1. 如右圖，直線  $L$ 、 $M$  互相平行，試依圖回答下列問題：

- (1)  $\angle 1$  的同位角是  $\angle 4$ ，且  $\angle 1$  的度數為  $60$  度。  
 (2)  $\angle 2$  的內錯角是  $\angle 7$ ，且  $\angle 2$  的度數為  $120$  度。  
 (3)  $\angle 4$  的同側內角是  $\angle 2$ ，且  $\angle 4$  的度數為  $60$  度。

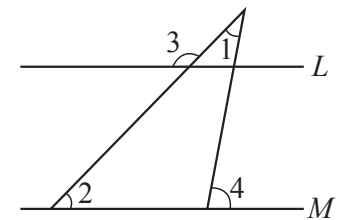


2. 如右圖， $L \parallel M$ ，若  $\angle 1 = 35^\circ$ ，則  $\angle 2 = 145^\circ$ 。

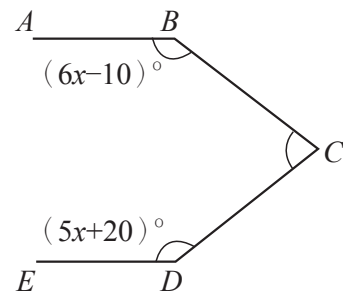


►► **進階題**

1. 如圖，直線  $L \parallel M$ ，若  $\angle 3 = 135^\circ$ ， $\angle 4 = 80^\circ$ ，  
則  $\angle 1 = 35$  度， $\angle 2 = 45$  度。



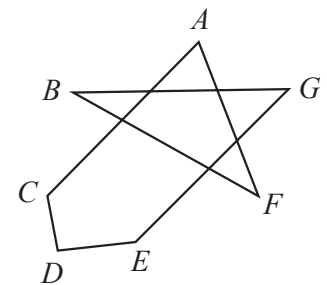
2. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若  $\angle B = (6x - 10)^\circ$ ， $\angle C = 3x^\circ$ ，  
 $\angle D = (5x + 20)^\circ$ ，則  $\angle C = 75$  度。



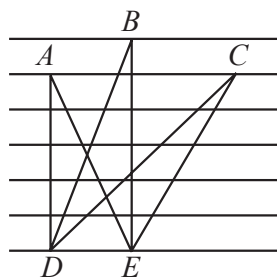
►► **神人題**

1. 如圖，已知  $\overline{AC} \parallel \overline{GE}$ ，求：

- (1)  $\angle A + \angle B + \angle F + \angle G = 180$  度。  
 (2)  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G = 540$  度。



2. 如圖，大雄在線條紙上畫了3個不同的三角形，此線條紙的線條互相平行且各相距5公分，請問  $\triangle ADE$ 、 $\triangle BDE$  和  $\triangle CDE$  的面積比為多少？  $5 : 6 : 5$



# 差異化國民中學數學教材：平行—教師手冊

差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編  
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2018.11

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發行人：郭工賓

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

作者：賴彥男、黃基肇、鄧汶

出版年月：107年11月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助  
(歡迎使用，請註明出處)