

差異化國民中學數學教材 平行



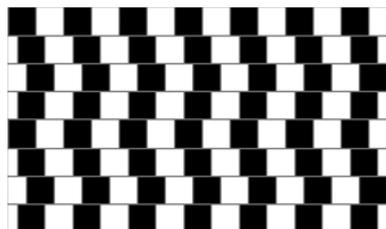
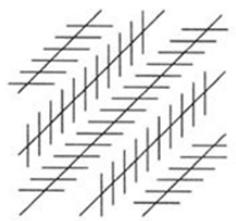
國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組

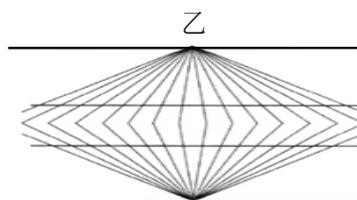
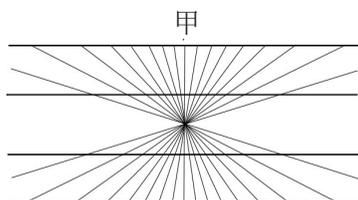
平行

1 導入活動

1. 平行線的視錯覺：生活中許多的平面設計，會利用平行線來呈現立體感，你看出下圖中的平行線嗎？



2. 請觀察下列甲、乙圖形中的兩條直線是否平行？你如何判斷的？



●「平行」這名詞經常出現在生活中，請就你的學習經驗，自己（或分組）試著在下面表格內，畫出兩條平行的線，並說明這兩條線平行的理由。

(1)畫圖區：

(2)理由：

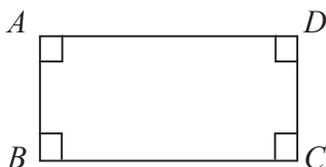
學生筆記

平行的意義：

1. 同一平面上兩條永不相交的直線。
2. 同一平面上，兩條直線如果可以找到一條_____，就稱這兩條直線平行。

2 兩平行線的距離

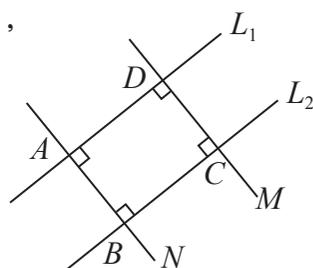
回想一下，長方形的內角都是90度，而且對邊互相平行且相等；



因此，如果 $L_1 \parallel L_2$ ，分別作兩條直線 M 、 N 同時垂直 L_1 、 L_2 ，如圖一，則四邊形 $ABCD$ 為矩形，同時 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，

再多作幾條同時垂直 L_1 、 L_2 的直線，都有相同的結果， \overline{AB} 或 \overline{CD} 都可視為 L_1 、 L_2 之間的距離。

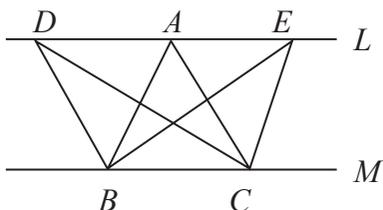
換句話說，兩條平行線之間的距離相等。



圖一

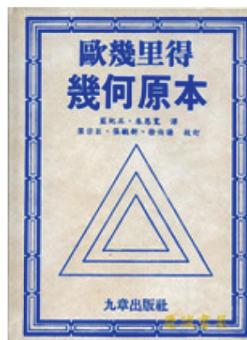
註：當兩條直線 L_1 、 L_2 平行，我們可以用「 $L_1 \parallel L_2$ 」的符號表示。

討論：已知 $L \parallel M$ ，如下圖所示，請找出 $\triangle ABC$ 面積、 $\triangle DBC$ 面積、 $\triangle EBC$ 面積的關係。



數學小知識

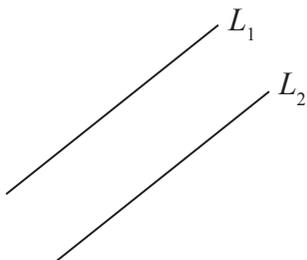
平行公設 (Parallel postulate)，也稱為歐幾里得第五公設，出處在《幾何原本》五條公設的第五條。內容為：同一平面內，如果一條直線與兩條直線相交，若在某一側的內角和小於兩直角和，那麼這兩條直線在不斷延伸後，會在內角和小於兩直角和的一側相交。由於平行公設的文字不像前面四個公設那樣簡潔，後世的數學家想證明第五公設可以由前面四個公設推導而得，雖然他們的努力沒有成功，但是開創出幾何學的不同道路出來，大大豐富幾何學的內容。



參考：維基百科、幾何原本。

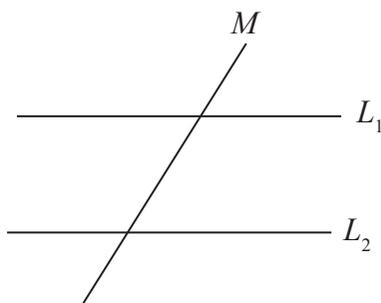
3 截線與截角

回想國小的學習經驗中，如果要判斷兩條直線是否平行，就得找出是否有一條共同的垂直線通過該兩條直線。接下來，請大家試著畫垂直線來判斷圖二中的 L_1 與 L_2 是否平行？



圖二

從剛剛的練習，我們會發現到在過往經驗中，要判斷的直線都是水平的，畫垂直線相對來說比較容易。但要畫圖二中的 L_1 與 L_2 之共同垂直線不容易馬上完成。請想一想，如果我們不一定要畫到垂直線才可以判斷兩條直線是否平行，只要任意的畫一條直線同時通過 L_1 與 L_2 (如圖三所示)，這時候，會發生甚麼事呢？是否仍可處理我們想判斷的問題？

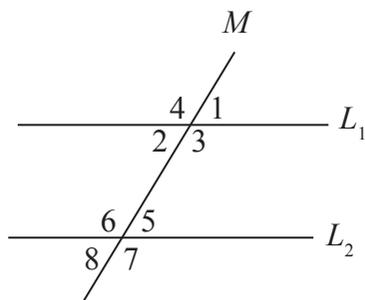


圖三

學生筆記

在一個平面上，如圖三，直線 M 同時與另外兩條直線 L_1 、 L_2 交於不同的兩點，則稱直線 M 為 L_1 、 L_2 的_____。而截線 M 與 L_1 、 L_2 形成的八個交角，稱為_____。

- 已知圖三的 L_1 與 L_2 為平行線，請觀察圖三的所有截角，關於這些截角，你想問甚麼數學問題呢？



圖四

學生筆記

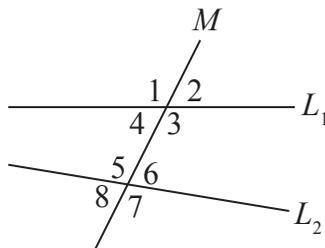
截角與截角間，隨著彼此位置關係的不同，會有不同的名稱：

- **同位角**：參見圖四， $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 分別在 L_1 與 L_2 的上方，且都在截線 M 的右方，像這樣位置對應相同的一組角稱為同位角。同樣地， $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 、 $\angle 2$ 與 $\angle 8$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 也是同位角。
- **內錯角**：參見圖四， $\angle 2$ 與 $\angle 5$ 在 L_1 與 L_2 的內側，且交錯出現在截線 M 的兩側，像這樣的一組角稱為內錯角。同樣地， $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也是內錯角。
- **同側內角**：參見圖四， $\angle 3$ 與 $\angle 5$ 在 L_1 與 L_2 的內側，且都在截線 M 的兩側，像這樣的一組角稱為同側內角。同樣地， $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 也是同側內角。

小試身手▶▶

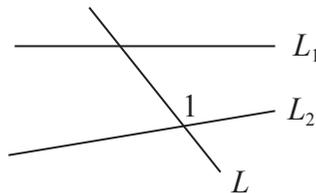
1. 如右圖，在 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、……、 $\angle 8$ 中，

- (1) $\angle 4$ 的同位角為_____，
 $\angle 2$ 的同位角為_____。
- (2) $\angle 5$ 的同側內角為_____，
 $\angle 3$ 的同側內角為_____。
- (3) $\angle 5$ 的內錯角為_____，
 $\angle 6$ 的內錯角為_____。



2. 如右圖， L 是 L_1 與 L_2 的截線。請試著找出

- (1) $\angle 1$ 的同位角，標上 $\angle 2$ ，
- (2) $\angle 1$ 的同側內角，標上 $\angle 3$ 。

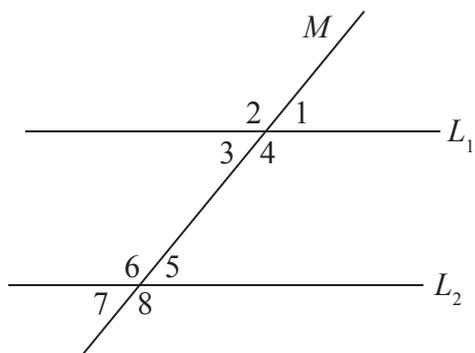


當我們了解到這些截角的名稱後，如何利用截角間的關係來判斷兩條直線是否平行呢？

4 兩平行線的截角

已知 $L_1 \parallel L_2$ ，如右圖所示，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，試著使用量角器量出 $\angle 2 \sim \angle 8$ 的度數。

- (1) $\angle 2 =$ _____ 度
- (2) $\angle 3 =$ _____ 度
- (3) $\angle 4 =$ _____ 度
- (4) $\angle 5 =$ _____ 度
- (5) $\angle 6 =$ _____ 度
- (6) $\angle 7 =$ _____ 度
- (7) $\angle 8 =$ _____ 度



請用以上 $\angle 1 \sim \angle 8$ 的度數和位置關係來完成下面的表格：

同位角 (4組)	內錯角 (2組)	同側內角 (2組)
$\angle 1 =$ _____ 度與 \angle _____ = _____ 度	\angle _____ = _____ 度與 \angle _____ = _____ 度	\angle _____ = _____ 度與 \angle _____ = _____ 度
$\angle 2 =$ _____ 度與 \angle _____ = _____ 度	\angle _____ = _____ 度與 \angle _____ = _____ 度	\angle _____ = _____ 度與 \angle _____ = _____ 度
$\angle 3 =$ _____ 度與 \angle _____ = _____ 度		
$\angle 4 =$ _____ 度與 \angle _____ = _____ 度		
觀察並說出每組同位角角度的關係。	觀察並說出每組內錯角角度的關係。	觀察並說出每組同側內角角度的關係。

學生筆記

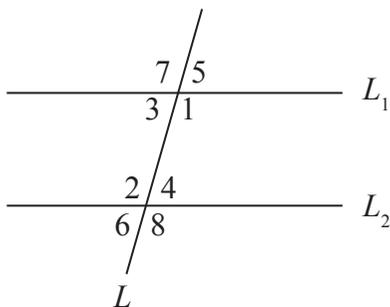
平行線的截線性質

兩條平行線被一直線所截的 _____、_____、_____。
而且只要其中一個成立，則可確定該兩條直線就會平行。

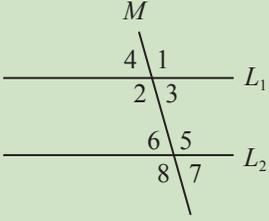
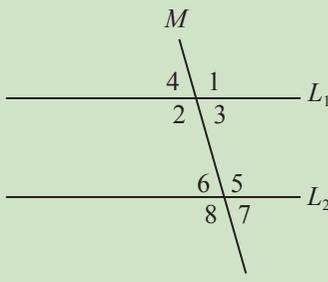
小試身手 ▶▶

如右圖，有直線 L 截過兩直線 L_1 、 L_2 後所形成的八個角。由下列哪一個選項中的條件可判斷 $L_1 \parallel L_2$ ？【98年第一次基測】

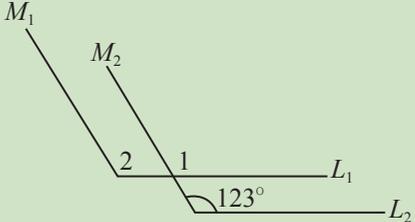
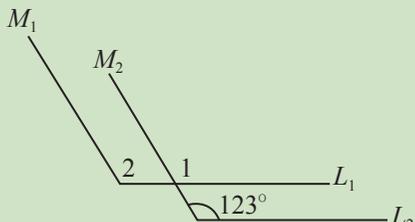
- (A) $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
- (B) $\angle 3 + \angle 8 = 180^\circ$
- (C) $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$
- (D) $\angle 7 + \angle 8 = 180^\circ$



◆ **任務1** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $\angle 1 = 105^\circ$ ，求 $\angle 2$ 、 $\angle 5$ 、 $\angle 6$ 的度數。(平行線截線性質：同位角相等)

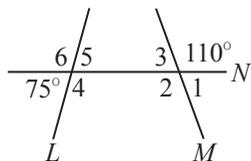
依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<div style="text-align: center;">  </div> <p>因為 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 為 _____ 所以 $\angle 2 =$ _____ (_____ 相等) 因為 $L_1 \parallel L_2$ 所以 $\angle 5 =$ _____ (_____ 相等) 又因為 $\angle 6 +$ _____ $= 180^\circ$ 所以 $\angle 6 =$ _____ 因此 $\angle 2 =$ _____ $\angle 5 =$ _____ $\angle 6 =$ _____</p>	<div style="text-align: center;">  </div>

◆ **任務2** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $M_1 \parallel M_2$ ，求 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度數。(平行線截線性質：同位角相等)

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
<div style="text-align: center;">  </div> <p>因為 $L_1 \parallel L_2$ 所以 $\angle 1 =$ _____ (同位角 _____) 又因為 $M_1 \parallel M_2$ 所以 $\angle 2 =$ _____ (同位角 _____) 因此 $\angle 1 =$ _____ $\angle 2 =$ _____</p>	<div style="text-align: center;">  </div>

小試身手▶▶

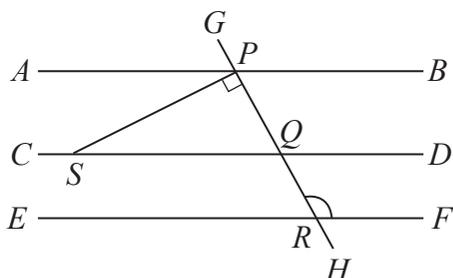
1. 如圖，直線 N 是 L 、 M 的截線，請依序回答下列問題：



(1) $\angle 1$ 的同位角是_____，角度是_____度。

(2) $\angle 4$ 的對頂角是_____，角度是_____度。

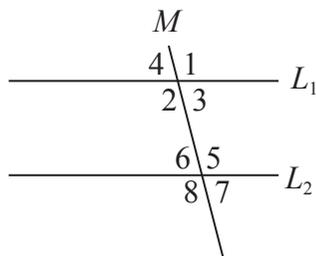
2. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{PS} \perp \overline{GH}$ 於 P ，當 $\angle FRG = 110^\circ$ ，求 $\angle PSQ$ 的度數=_____度。



◆ **任務3** ◆ 如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，直線 M 為截線，

試說明 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$

(平行線截線性質：同側內角互補)

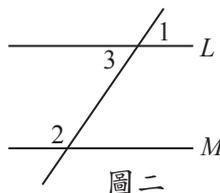
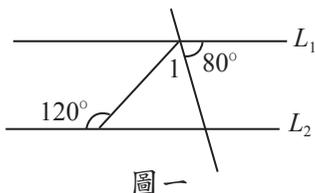


依提示作答	自我挑戰區（不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答）
因為 $L_1 \parallel L_2$ 所以 $\angle 1 = \angle 5$ （同位角_____） 又因為 $\angle 1 + \underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ$ 所以 $\angle 5 + \underline{\hspace{2cm}} = 180^\circ$ （同側內角_____）	

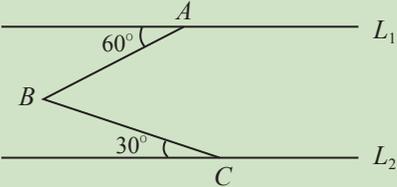
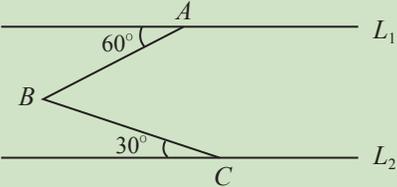
小試身手▶▶

1. 如圖一，已知 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 =$ _____度。

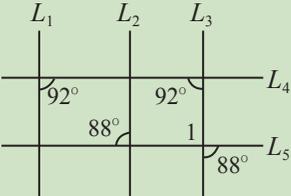
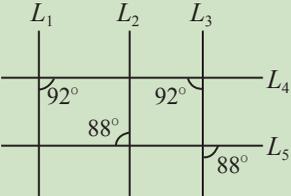
2. 如圖二，已知 $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = (x - 40)^\circ$ ， $\angle 2 = (x + 30)^\circ$ ，則 $\angle 3 =$ _____度。



◆ **任務4** ◆ 如圖，已知 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle ABC =$ _____ 度。(平行線截線性質：內錯角相等)

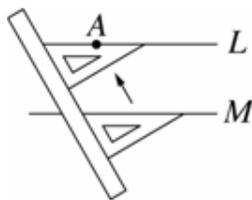
依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
 <p>過 B 作 $L_3 \parallel L_1$，因為 $L_1 \parallel L_2$ 所以 $L_3 \parallel L_2$ 在 B 點右側、L_3 上找一點 D 則 $\angle ABD =$ _____ 度 (_____ 相等) $\angle CBD =$ _____ 度 (_____ 相等) 所以 $\angle ABC =$ _____ 度</p>	

◆ **任務5** ◆ 如圖，平面上五條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 相交的情形。根據圖中標示的角度，判斷(1) L_4 、 L_5 是否平行？(2) L_2 、 L_3 是否平行？(3) L_1 、 L_3 是否平行？(參考106年會考題)

依提示作答	自我挑戰區 (不需要作答引導的同學，可在這個欄位直接作答)
 <p>(1) $\angle 1 =$ _____ 度，觀察 L_4、L_5 與 L_3 截角中的同側內角關係。 L_4、L_5 是否平行？ _____ (原因： _____)</p> <p>(2) 觀察 L_2、L_3 與 L_5 截角中的同位角關係。 L_2、L_3 是否平行？ _____ (原因： _____)</p> <p>(3) 觀察 L_1、L_3 與 L_4 截角中的同側內角關係。 L_1、L_3 是否平行？ _____ (原因： _____)</p>	

小試身手▶▶ (同學可自行選擇題目作答)：

1. 如下圖，經過已知直線 M 外一點 A ，利用一把直尺、一塊三角板作一直線 L 與 M 平行，此種畫法是用到了平行線的哪一個判別性質？答：_____。



2. 請利用尺規作圖，完成通過 P 點且與直線 L 平行的直線，並利用不同的平行性質完成此題。

方法一（內錯角相等）

P

•

_____ L

方法二（同位角相等）

P

•

_____ L

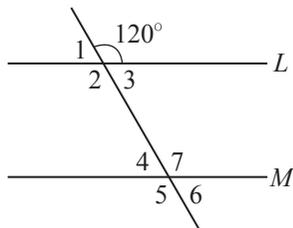
數學擬題：請你出一題跟平行有關的題目，來考考同學；題目完成後，須提供解答或解法。

自我評量 (同學可自行選擇題目作答)

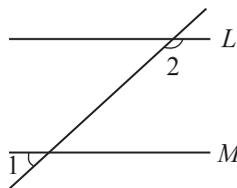
►► 基礎題

1. 如右圖，直線 L 、 M 互相平行，試依圖回答下列問題：

- (1) $\angle 1$ 的同位角是_____，且 $\angle 1$ 的度數為_____度。
- (2) $\angle 2$ 的內錯角是_____，且 $\angle 2$ 的度數為_____度。
- (3) $\angle 4$ 的同側內角是_____，且 $\angle 4$ 的度數為_____度。

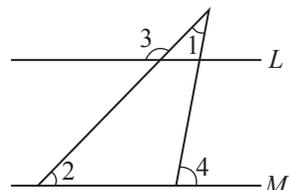


2. 如右圖， $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，則 $\angle 2 =$ _____。

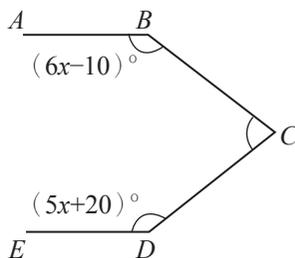


►► 進階題

1. 如圖，直線 $L \parallel M$ ，若 $\angle 3 = 135^\circ$ ， $\angle 4 = 80^\circ$ ，則 $\angle 1 =$ _____度， $\angle 2 =$ _____度。



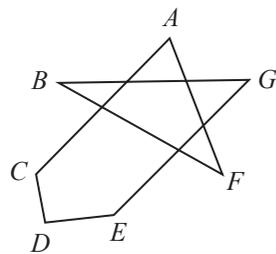
2. 如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle B = (6x - 10)^\circ$ ， $\angle C = 3x^\circ$ ， $\angle D = (5x + 20)^\circ$ ，則 $\angle C =$ _____度。



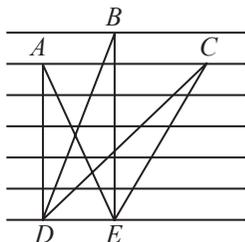
►► 神人題

1. 如圖，已知 $\overline{AC} \parallel \overline{GE}$ ，求：

- (1) $\angle A + \angle B + \angle F + \angle G =$ _____度。
- (2) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G =$ _____度。



2. 如圖，大雄在線條紙上畫了3個不同的三角形，此線條紙的線條互相平行且各相距5公分，請問 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDE$ 的面積比為多少？



差異化國民中學數學教材：平行一學生手冊

差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2018.11

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發行人：郭工賓

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

作者：賴彥男、黃基肇、鄧汶

出版年月：107年11月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助
(歡迎使用，請註明出處)