

差異化國民中學數學教材

一元一次不等式的應用



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組



一元一次不等式的 應用

1 / 一元一次不等式的運算規則

① 不等式的加法與減法

解一元一次方程式 $x+5=7$ 時，利用等量公理在等號兩邊同時減 5，得 $x=2$ ；在不等式中，是否也能用同樣的方法運算呢？

任務

請把下列表格的空格填上：

原不等式	任務	新的不等式	不等號的方向 (填「變」或「不變」)
$5 > 3$	不等號兩邊同時「加 7」	$12 > 10$	不變
$-4 > -6$	不等號兩邊同時「加 7」		
$4 \geq -6$	不等號兩邊同時「加 7」		

$3 < 5$	不等號兩邊同時「加 7」		
$-6 < -4$	不等號兩邊同時「加 7」		
$-6 \leq 4$	不等號兩邊同時「加 7」		

原不等式	任務	新的不等式	不等號的方向 (填「變」或「不變」)
$5 > 3$	不等號兩邊同時「減 2」	$3 > 1$	不變
$-4 > -6$	不等號兩邊同時「減 2」		
$4 \geq -6$	不等號兩邊同時「減 2」		

$3 < 5$	不等號兩邊同時「減 2」		
$-6 < -4$	不等號兩邊同時「減 2」		
$-6 \leq 4$	不等號兩邊同時「減 2」		

討論

1. 從上列表格，你觀察到什麼？

2. (1) 如果 $x > 3$ ，在不等號兩邊同時加一個數字 c ，則 $x + c > 3 + c$ 是對的嗎？請舉例說明。

- (2) 如果 $x < 3$ ，在不等號兩邊同時加一個數字 c ，則 $x + c < 3 + c$ 是對的嗎？請舉例說明。

- 3. (1) 如果 $x \geq 3$ ，在不等號兩邊同時加一個數字 c ，結果會如何？請舉例說明。

- (2) 如果 $x \leq 3$ ，在不等號兩邊同時加一個數字 c ，結果會如何？請舉例說明。

- 4. 如果 $a > b$ 在不等號兩邊同時減一個數字 c ，結果會如何？請舉例說明。

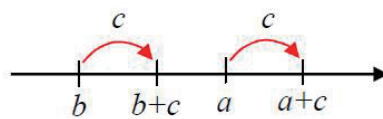
一元一次不等式的運算規則和一元一次方程式的運算規則很類似；當不等式為 $x > 3$ 時，很容易可以看出只要大於 3 的數都是 $x > 3$ 這個不等式的解；不等式的形式為 $2x+1 > 3$ 時，便不容易看出它的解，若能將 $2x+1 > 3$ 整理成 $x > a$ 的形式，就可以解決不等式的問題。

在數線上，以右為正向，則愈右邊的點代表的數就愈大，如圖一，可知 $a > b$ 。



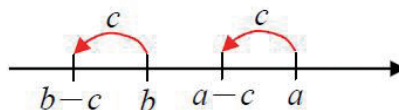
圖一

將 a 、 b 同時向右移動 c 單位長，移動後 $a+c$ 仍然在 $b+c$ 的右邊，如圖二，可知 $a+c > b+c$ 。



圖二

同理，將 a 、 b 同時向左移動 c 單位長，移動後 $a-c$ 仍然在 $b-c$ 的右邊，如圖三，可知 $a-c > b-c$ 。



圖三

例如： $7 > 5$ ，在不等式兩邊同時加 3 $\rightarrow 7+3 > 5+3 \rightarrow 10 > 8$ ；

$7 > 5$ ，在不等式兩邊同時減 3 $\rightarrow 7-3 > 5-3 \rightarrow 4 > 2$ 。

小試身手

1. 在 中填上 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 或 $\leq$ 。

(1) $3+5$ $2+5$

(2) $3+(-5)$ $2+(-5)$

2. 在 中填上 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 或 $\leq$ 。

(1) 若 $x+4 < 5$ ，則 $(x+4)-4$ $5-4$

(2) 若 $3x-2 \geq 5$ ，則 $(3x-2)+2$ $5+2$

2 不等式的乘法與除法

在解一元一次方程式 $3x=7$ 時，利用等量公理在等號兩邊同時乘 $\frac{1}{3}$ ，得到 $x=\frac{7}{3}$ ；在不等式中，是否也能用同樣的方法運算呢？

任務

請把下列表格的空格填上：

原不等式	任務	新的不等式	不等號的方向 (填「變」或「不變」)
$5 > 3$	不等號兩邊同時「乘 7」	$35 > 21$	不變
$-4 > -6$	不等號兩邊同時「乘 7」		
$4 \geq -6$	不等號兩邊同時「乘 7」		

$3 < 5$	不等號兩邊同時「乘 7」		
$-6 < -4$	不等號兩邊同時「乘 7」		
$-6 \leq 4$	不等號兩邊同時「乘 7」		

原不等式	任務	新的不等式	不等號的方向 (填「變」或「不變」)
$5 > 3$	不等號兩邊同時「乘 -3」		
$-4 > -6$	不等號兩邊同時「乘 -3」		
$4 \geq -6$	不等號兩邊同時「乘 -3」		

$3 < 5$	不等號兩邊同時「乘 -3」		
$-6 < -4$	不等號兩邊同時「乘 -3」		
$-6 \leq 4$	不等號兩邊同時「乘 -3」		

討論

1. 從上列表格，你觀察到什麼？

2. (1) 如果 $x > 3$ ，在不等號兩邊同時乘一個正數 c ，則 $x \times c > 3 \times c$ 是對的嗎？請舉例說明。

- (2) 如果 $x > 3$ ，在不等號兩邊同時乘一個負數 c ，則 $x \times c > 3 \times c$ 是對的嗎？請舉例說明。

3. (1) 如果 $x \leq 3$ ，在不等號兩邊同時乘一個正數 c ，結果會如何？請舉例說明。

- (2) 如果 $x \leq 3$ ，在不等號兩邊同時乘一個負數 c ，結果會如何？請舉例說明。

4. 如果 $a > b$ ，在不等號兩邊同時乘一個數字 c ，結果會如何？請舉例說明。

前文提過，若能將不等式整理成 $x > a$ 的形式，就很容易看出不等式的解；從完成表格過程中，知道一元一次不等式與方程式的不同在於：當不等式兩邊同時乘正數時，不等號的方向是不變的；但當**不等式兩邊同乘負數時，不等號的方向要改變**。

例如：求一元一次不等式 $3x > -9$ 的解為何？

$$\begin{aligned} &\rightarrow (3x) \times \frac{1}{3} > -9 \times \frac{1}{3} \quad \text{不等號兩邊同時乘 } \frac{1}{3} \\ &\rightarrow x > -3 \end{aligned}$$

例如：求一元一次不等式 $-\frac{1}{4}x > 9$ 的解為何？

$$\begin{aligned} &\rightarrow (-\frac{1}{4}x) \times (-4) < 9 \times (-4) \quad \text{不等式兩邊同時乘 } (-4) \\ &\hspace{15em} \text{(不等號的方向改變)} \\ &\rightarrow x < -36 \end{aligned}$$

學習筆記

小試身手

1. 在 $\square$ 中填上 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 或 $\leq$ 。

(1) $3 \times (-5) \square 2 \times (-5)$

(2) 若 $x > y$ ，則 $-3x \square -3y$

2. 不等式 $3x < 21$ 的解為何？

- (A) $x < 7$ (B) $x < -7$ (C) $x > 7$ (D) $x > -7$

3. 不等式 $-5x \geq -20$ 的解為何？

- (A) $x \geq 4$ (B) $x \geq -4$ (C) $x \leq 4$ (D) $x \leq -4$

自我評量

請同學選擇你要解決的題目並在題號前空格內打勾 ☒。

● 基礎考驗

☐ 1. 在空格填上 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 或 $\leq$ ：

(1) 2×5 ☐ 3×5

(2) 若 $x \leq y$ ，則 $-3x$ ☐ $-3y$

(3) 若 $x > y$ ，則 $\frac{x}{-20}$ ☐ $\frac{y}{-20}$

● 進階挑戰

☐ 2. 解不等式 $-3x < 21$ ，

☐ 3. 解不等式 $5y > -21$ ，

● 神的境界

☐ 4. 解不等式 $-\frac{3}{5}x \geq 21$ ，

☐ 5. 解不等式 $-\frac{3}{4}x < -0.3$ ，

3 解一元一次不等式

前面提到利用「等量公理」，可以求出一元一次不等式的解。

例如：求一元一次不等式 $3x+6<12$ 的解。

$$\rightarrow (3x+6)-6<12-6 \quad \text{兩邊同時減 6}$$

$$\rightarrow 3x<6$$

$$\rightarrow (3x)\div 3<6\div 3 \quad \text{兩邊同除以 3}$$

$$\rightarrow x<2$$

任務 1

求一元一次不等式 $5x-2<13$ 的解。

例如：求一元一次不等式 $-3x-4>12+x$ 的解。

$$\rightarrow (-3x-4)+4>(12+x)+4 \quad \text{兩邊同時加 4}$$

$$\rightarrow -3x>16+x$$

$$\rightarrow (-3x)-x>(16+x)-x \quad \text{兩邊同時減 } x$$

$$\rightarrow -4x>16$$

$$\rightarrow (-4x)\div (-4)<16\div (-4) \quad \text{兩邊同除以 } (-4) \\ \text{(不等號的方向改變)}$$

$$\rightarrow x<-4$$

任務 2

求一元一次不等式 $-(x+4)+15\geq 3x-9$ 的解。

例如：求一元一次不等式 $\frac{x-3}{5} \leq \frac{-x+3}{2}$ 的解。

→ $2(x-3) \leq 5(-x+3)$

→ $2x-6 \leq -5x+15$ 兩邊同乘以 10，並展開

→ $(2x-6)+6 \leq (-5x+15)+6$ 兩邊同時加 6

→ $2x \leq -5x+21$

→ $2x+5x \leq -5x+21+5x$ 兩邊同時加 5x

→ $7x \leq 21$ 兩邊同除以 7

→ $x \leq 3$

 任務 3

求一元一次不等式 $1-2x \leq \frac{7}{9} - \frac{2}{3}x$ 的解。

依提示作答	直接作答
1. 不等號兩邊同時乘以 9。(分母的最小公倍數)	
2. 不等號兩邊同時減 9。	
3. 不等號兩邊同時加 6x，並整理(合併)。	
4. 不等號兩邊同除以(−12)。 (不等號的 <u>方向改變</u>)	
5. 請作驗算。	

小試身手

1. 求不等式 $2x-3 < x+5$ 的解。

- (A) $x > 2$ (B) $x > 8$ (C) $x < 2$ (D) $x < 8$

2. 求不等式 $-(x-3) \geq 9$ 的解。

- (A) $x \geq -12$ (B) $x \geq -6$ (C) $x \leq -12$ (D) $x \leq -6$

3. 求不等式 $3(x-4) > 2(x+1)$ 的解。

- (A) $x > -30$ (B) $x > 14$ (C) $x > 10$ (D) $x < -5$

自我評量

請同學選擇你要解決的題目並在題號前空格內打勾 ☒。

● 基礎考驗

☐ 1. 求一元一次不等式 $5x-15 > 25$ 的解。

☐ 2. 求一元一次不等式 $-3x+9 \geq 24$ 的解。

● 進階挑戰

☐ 3. 求一元一次不等式 $3x-7 > 3-x$ 的解。

☐ 4. 求一元一次不等式 $4(x-5)-2(3x+1) > 0$ 的解。

● 神的境界

☐ 5. 求一元一次不等式 $\frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ 的解。

☐ 6. 求一元一次不等式 $2 - \frac{2x-3}{5} < \frac{x+1}{10}$ 的解。

2/ 一元一次不等式的運算數學擬題

請你發揮創意設計一元一次不等式的問題來考考同學，題目安排由易至難，並請提供答案。

1. 請設計一題不等式，不等式的解為 $x > 3$ 的題目。

2. 請設計一題不等式的解為 $x \leq -5$ 的題目。

3. 請設計一題您認為最有創意的一元一次不等式的題目，愈難愈好！

3 不等式的應用問題

「小明每一步距離約 70 公分，走完操場一圈(400公尺)，至少需走幾步？」

如何解決上面的問題呢？必須由題目中逐句找出已知條件及數量關係，再根據題目敘述列出不等式；下列步驟可以幫助我們來求解！

步驟一：確認「未知數」。

題目問「至少需走幾步？」

所以，假設至少走了 x 步。

步驟二：找到「已知數」和「條件」。(可在題目上劃線標記)

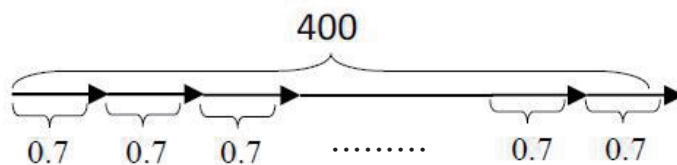
已知：操場一圈 400 公尺。

條件：每一步 70 公分，即 0.7 公尺。

步驟三：將數量關係列成一元一次不等式。

走 1 步 0.7×1 公尺，走 2 步 0.7×2 公尺，走 3 步 0.7×3 公尺；

至少走了 x 步，所以走了 $0.7 \times x$ 公尺；

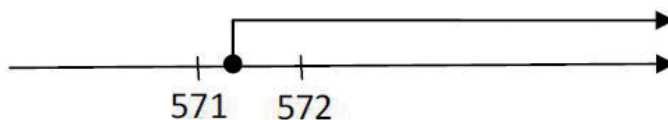


根據題意列出不等式： $0.7x \geq 400$ 且 x 是正整數。

步驟四：解不等式。

$$0.7x \geq 400 \rightarrow x \geq \frac{400}{0.7} \text{ (約 } 571.4 \text{)}$$

圖解出範圍



由圖解容易看出 x 至少要 572 才符合題意。

步驟五：題目是要求出至少需走幾步才能走完操場一圈，

所以至少需要走 572 步。



任務 1

享玩玩具店中促銷廣告：「熊玩偶按訂價打七五折後，至少讓您省下 150 元！」。
請問其原訂價範圍為多少元？



依提示作答	直接作答
1. 確認「未知數」。 2. 找到「已知數」和「條件」。 (可在題目上劃線標記) 3. 將數量的關係列成一元一次不等式。 4. 解不等式： 5. 請作驗算。	

 任務 2

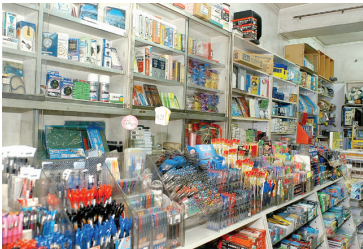
花蓮縣在地理形狀上呈現長條狀，南北長約 137.5 公里(由經緯度換算的直線距離)，其中台九線是花東縱谷主要道路。已知小華想從花蓮市出發，開車到富里鄉公所洽公，根據地圖顯示全程為 120 公里，現在時間是 14：20，鄉公所人員下班時間為 17：00，小華想在 16：50 分前到達，請問每小時速度至少要幾公里才能在時間內到達？

【提示】距離(公里)=速度×時間(小時)

依提示作答	直接作答
1. 確認「未知數」。 2. 找到「已知數」和「條件」。 (14：20~16：50 的時間換算成小時) 3. 將數量的關係列成一元一次不等式。 4. 解不等式： 5. 請作驗算。	

 任務 3

小慈帶 200 元到文具行購買每枝 17 元的鉛筆和每枝 30 元的原子筆。若小慈買的鉛筆比原子筆多 3 枝，則小慈最多可買到幾枝原子筆？



依提示作答	直接作答
1. 確認「未知數」。 2. 找到「已知數」和「條件」。 （可在題目上劃線標記） 3. 將數量的關係列成一元一次不等式。 4. 解不等式： 5. 寫出符合情境的答案： 6. 請作驗算。	

小試身手

某一間運動用品店促銷活動內容可列成關係式 $0.6(2x - 100) < 1500$ ，則下列哪個選項可能是服飾店的促銷活動內容？

- (A) 買兩件等值的商品可減 100 元，再打 6 折，最後不到 1500 元！
- (B) 買兩件等值的商品可減 100 元，再打 4 折，最後不到 1500 元！
- (C) 買兩件等值的商品可打 6 折，再減 100 元，最後不到 1500 元！
- (D) 買兩件等值的商品可打 4 折，再減 100 元，最後不到 1500 元！

自我評量

請同學選擇你要解決的題目並在題號前空格內打勾 ☒。

● 基礎考驗

- ☐ 1. 小華想買一輛價格 2500 元的自行車，已知他現在有存款 800 元，計畫這個月起每月存 250 元，則至少要存幾個月才有足夠的錢買這台自行車？

- ☐ 2. 有甲、乙兩個箱子，甲箱重 47 公斤，其重量比乙箱的 3 倍還重，且比乙箱的 4 倍還輕。若乙箱重 x 公斤，請依題意列出一元一次不等式。

● 進階挑戰

- 3. 小慈設計一個矩形的班旗，長為 28 公分，寬為 $(x-5)$ 公分，如果班旗的面積不能大於 1400 平方公分，求 x 的範圍？

- 4. 小明原有 350 元，附圖記錄了他今天所有支出，其中支出的金額被塗黑。若每杯飲料的售價為 35 元，則小明可能剩下多少元？

支出	金額(元)
早餐	60
午餐	85
晚餐	115
飲料	

● 神的境界

- 5. 某家 *KTV* 的兩種計費方案說明。

【方案一】包廂計費方案：每間每小時 900 元，每人需另付入場費 99 元。

【方案二】人數計費方案：每人歡唱 3 小時 540 元，接著續唱每人每小時 80 元。

若小慈和朋友們打算在此 *KTV* 的一間包廂裡連續歡唱 6 小時，經服務生試算後，告知他們選擇包廂計費方案會比人數計費方案便宜，則他們至少有多少人在同一間包廂裡歡唱？

練習 1

解一元一次不等式 $-(x+7) \geq 5$ ，

_____。

練習 2

解一元一次不等式 $-(x+7) < -5$ ，

_____。

練習 3

若 $-21 < \frac{1}{2}p$ ，已知 p 為整數，求 p 的最小值為

_____。

練習 4

若 $-3x \geq -21$ ，求 x 的最大值為

_____。

練習 5

已知 $3x < 21$ 且 $-2x \leq 2$ ，則 x 的整數解有哪些？

_____。

練習 6

解不等式 $-\frac{1}{5}x - 3 > 2$ ，得其解的範圍為何？

_____。

練習 7

解不等式 $\frac{2}{3}x + 1 \leq \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ ，得其解的範圍為何？

_____。

練習 8

雪山隧道全長約 12.9 公里，有一輛汽車以每小時 80 公里到 90 公里之間的速度通過該隧道。求該車通過隧道所用的時間範圍，以分鐘表示。

_____。

差異化國民中學數學教材 / 鄭章華 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2016.12

1. 數學教育
2. 中學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

編輯小組：余采玲、林成財、潘金龍、賴彥男

（依姓氏筆畫順序排列）

作者：林成財、賴彥男

（依姓氏筆畫順序排列）

出版年月：105年12月

版次：初版

本教材感謝科技部經費贊助
（歡迎使用，請註明出處）