

差異化國民中學數學教材

正比與反比

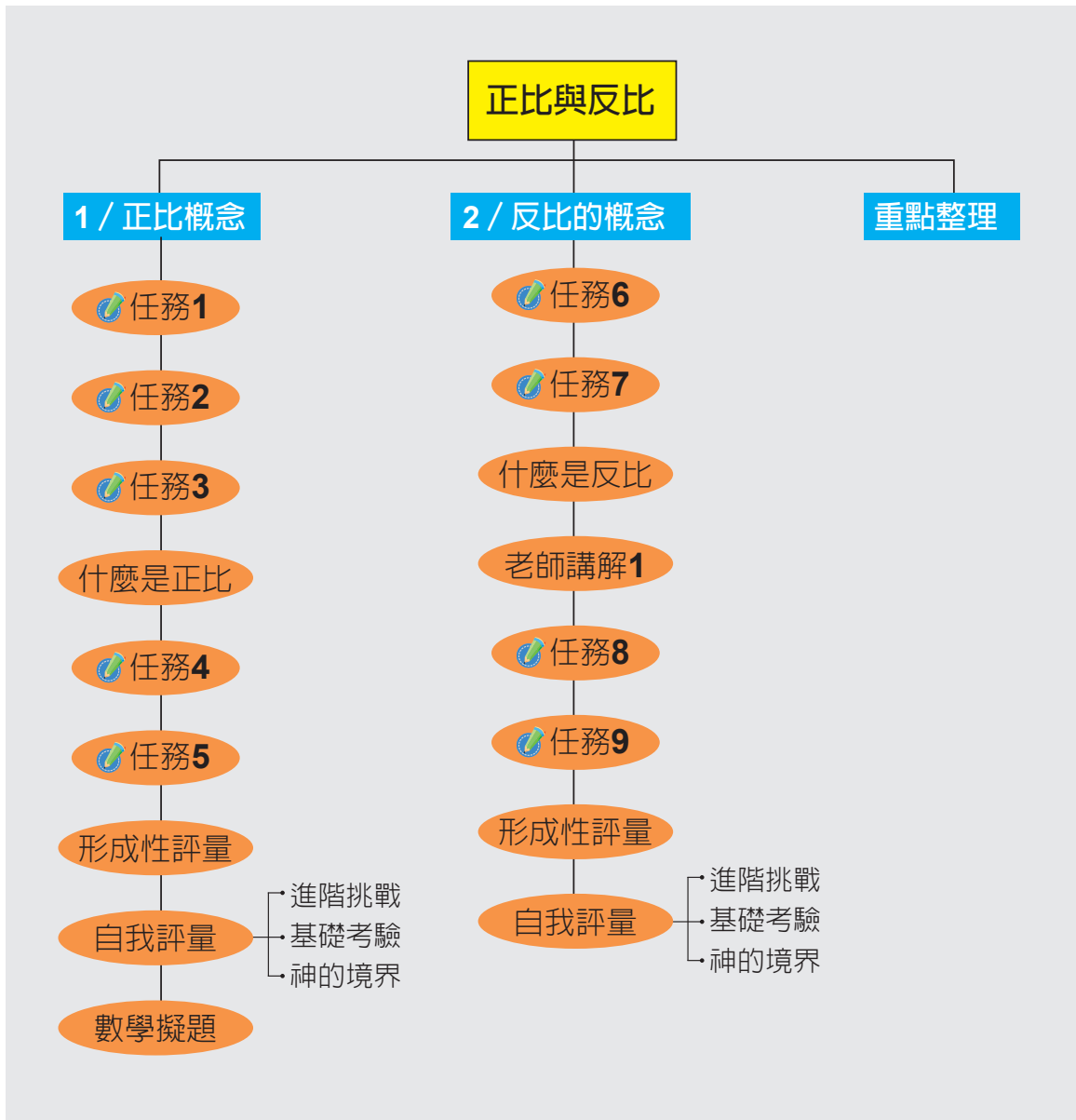


datgyagyfuhy



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組



請問以下三種生活情境例子，哪一種符合「正比關係」？哪一種符合「反比關係」？



圖一 說明：大明身上帶著200元去水果店買水果，見到橘子攤位有三種價位：每斤40元、25元及20元，請問大明全花掉可以買到多少斤的水果？



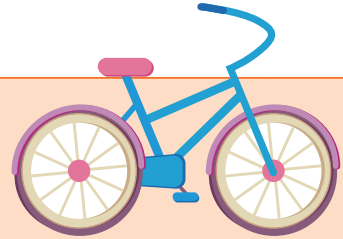
圖二 說明：阿芳運動完後，順道去買飲料，她喝的飲料每1瓶25元，請問她買8瓶飲料多少元？



圖三 說明：阿龍週末和家人去逛夜市，看見衣攤正在大拍賣，老闆大聲叫賣著：衣服1件159元，2件259元，3件359元…

1 / 正比的概念

學校第一次段考後的週末，小明計畫和朋友去騎腳踏車運動。他上網查尋「各類運動消耗熱量表」得到下面表格。以小明50公斤的體重來看，當他騎車的時速為20公里時，每30分鐘就會消耗約210大卡的熱量。

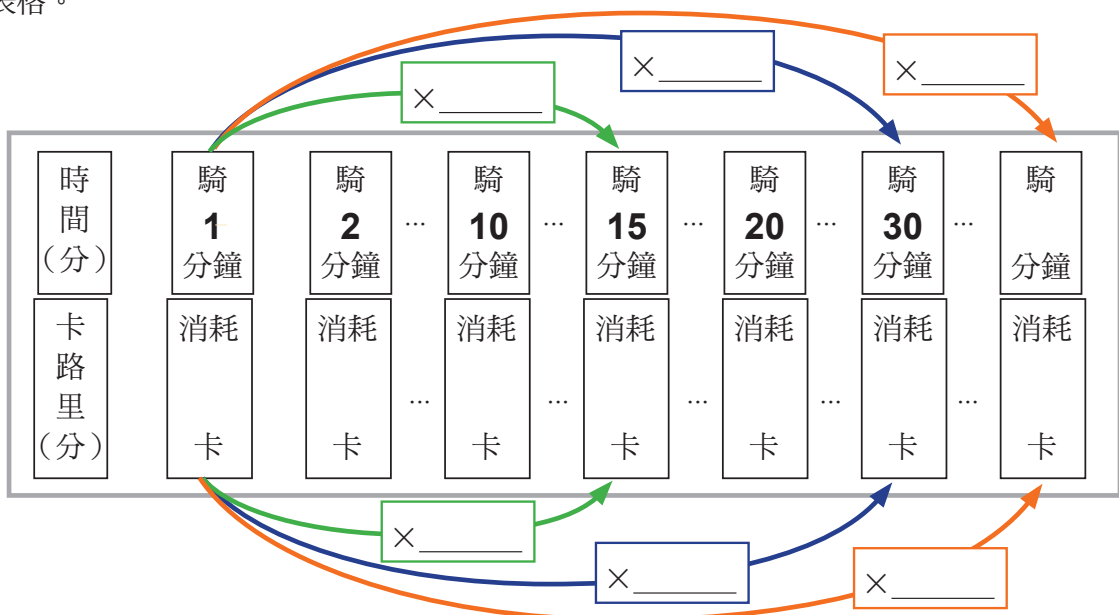


各類運動消耗熱量表 運動30分鐘消耗的熱量（大卡）

本表係因每個人身體狀況及基礎代謝率不同而訂出熱量消耗量，僅供參考。

體 重	40公斤	50公斤	60公斤	70公斤
騎腳踏車（一般速度，10公里/小時）	80	100	120	140
騎腳踏車（快，20公里/小時）	168	210	252	294
騎腳踏車（很快，30公里/小時）	252	315	378	441
慢走（4公里/小時）	70	87.5	105	122.5
快走、健走（6.0公里/小時）	110	137.5	165	192.5
慢跑（8公里/小時）	164	205	246	287
排球	72	90	108	126
跳繩（慢）	168	210	252	294

也就是說，騎單車每1分鐘小明會消耗約 _____ 大卡的熱量，請同學幫忙小明完成表格。



請根據前面的「卡路里表」，完成下面的任務。

營養標示	
每100毫升	
熱量	48大卡
蛋白質	0公克
脂肪	0公克
飽和脂肪	0公克
反式脂肪	0公克
碳水化合物	12公克
鈉	9毫克
鉀	115毫克

任務 1

- 若小明單車騎了55分鐘，則他卡路里消耗了 _____ 大卡。
- 若小明消耗卡路里469大卡，則他單車騎了 _____ 分鐘。

任務 2

若小明在騎車開始前喝了一杯300毫升的飲料，包裝上營養的標示如右圖，則小明至少要騎幾分鐘才能把喝飲料所攝取的熱量消耗掉呢？

依下列提示依序作答	不需提示，直接作答
(1) 小明喝了多少大卡的熱量呢？	
(2) 由(1)所算出來的熱量，小明要騎幾分鐘？	
(3) 小明至少要騎幾分鐘？請說明你的理由。	

任務 3

若小明騎單車 x 分鐘，消耗了卡路里 y 大卡，請寫出一個能表示「時間 x 」與「卡路里 y 」的關係式，並提出你的理由說明關係式是對的。

依下列提示依序作答	不需提示，直接作答												
(1) 請完成表格空白處 <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>時間(分)</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>8</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>卡路里(大卡)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	時間(分)	1	5	3	8	x	卡路里(大卡)						
時間(分)	1	5	3	8	x								
卡路里(大卡)													
(2) 觀察(1)的表格後，請說明「時間」與「卡路里」之間有什麼關係？													
(3) 從(2)的觀察，寫出一個能表示「時間 x 」與「卡路里 y 」的關係式。													

從完成的表格可以觀察出：


- 騎1分鐘後消耗卡路里7大卡
- 騎2分鐘後消耗卡路里14大卡
- 騎10分鐘後消耗卡路里70大卡
-

也就是「時間 x 」乘上7倍就會等於所消耗的「卡路里 y 」熱量，其數量關係式如下式

$$y = 7x$$

代表 y 值始終為 x 值的7倍（固定倍數關係），此時我們說

「 y 與 x 的關係是成正比」（消耗卡路里 y 與騎單車時間 x 成正比）。

因此，當我們討論的兩個項目數量間成固定倍數關係時，則我們稱此兩項目之間是正比關係，可以寫成關係式 $y = kx$ ，其中固定倍數 k 不一定只限於是正整數，也可以是負數、小數或分數等（但不等於0）。另外， **任務 3** 表格答案如下（多了比值欄位）

時間(分)	1	5	3	8	11
卡路里(大卡)	7	35	21	56	77
比值					

可以觀察到，卡路里與時間的**比值相同**（皆為7），時間 x 分，卡路里 y 大卡，則

$$\frac{y}{x} = 7$$

經由移項法則，我們可得 $y = 7x$ ，也就是 y 值始終為 x 值的7倍（有固定倍數關係）。

牛刀小試

下列哪些是「正比的關係式」，請於

$y = 3x$ 、 $y = 0.3x$ 、 $y = -2x$ 、 $y = \frac{1}{2}x$ 、 $y = \frac{1}{2x}$ 、 $xy = 2$

任務 4

下表為等一個人的咖啡店的鮮奶茶的配方

紅茶 y 毫升	30	60	120	150	480
鮮奶 x 毫升	20	40	80	100	320

已知紅茶量 y 與鮮奶量 x 為**正比關係**，請寫出紅茶量 y 與鮮奶量 x 的關係式為何？

 任務 5

請問下列兩組題目裡，何者為「正比關係」？為什麼？請說明理由。

(A) 小明與阿芳點燃了一支蠟燭，觀察燃燒時間與燒掉長度並記錄於下表：

燃燒3分鐘燒掉4公分，燃燒6分鐘燒掉8公分，燃燒9分鐘燒掉12公分……。

燃燒時間 x (分鐘)	3	6	9	12	15
蠟燭燃燒的長度 y (公分)	4	8	12	16	20

依下列提示依序作答		不需提示，直接作答																			
(1) 完成表格空白處 <table border="1"> <tr> <td>x (分鐘)</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>y (公分)</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>$y : x$ 的比值</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		x (分鐘)	3	6	9	12	15	y (公分)	4	8	12	16	20	$y : x$ 的比值							
x (分鐘)	3	6	9	12	15																
y (公分)	4	8	12	16	20																
$y : x$ 的比值																					
(2) 觀察上表，長度 y 與時間 x 之間是否為正比關係？你的理由為何？																					

(B) 歷維與小英打開了水龍頭並用水桶裝水，觀察水流時間與水高度並記錄於下表：

水流3分鐘後水高9公分，水流6分鐘後水高17公分……。

燃燒時間 x (分鐘)	3	6	9	12	15
水筒裡水的高度 y (公分)	9	17	25	33	41

依下列提示依序作答		不需提示，直接作答																			
(1) 完成表格空白處 <table border="1"> <tr> <td>x (分鐘)</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>y (公分)</td> <td>9</td> <td>17</td> <td>25</td> <td>33</td> <td>41</td> </tr> <tr> <td>$y : x$ 的比值</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>		x (分鐘)	3	6	9	12	15	y (公分)	9	17	25	33	41	$y : x$ 的比值							
x (分鐘)	3	6	9	12	15																
y (公分)	9	17	25	33	41																
$y : x$ 的比值																					
(2) 觀察上表，長度 y 與時間 x 之間是否為正比關係？你的理由為何？																					

形成性評量

1. 歷維與小英打開了水龍頭並用水桶裝水，觀察水流時間 x 分鐘與水高度 y 公分記錄於下表：

x 分鐘	3	4	5	11	12
y 公分	6	8	10	22	24

請問時間 x 與水高度 y 是正比關係嗎？是 不是（請於，並說明理由。）

2. 歷維與小英打開了水龍頭並用水桶裝水，觀察水流時間 x 分鐘與水高度 y 公分記錄於下表：

x 分鐘	9	15	16	27	28
y 公分	4.5	7.5	8	13.5	14

請問時間 x 與水高度 y 是正比關係嗎？是 不是（請於，並說明理由。）

自我評量

請同學選擇你要解決的題目，並在題號前空格內打勾 。

一、基礎考驗：

1. 已知水滴入桶子時間 x 分鐘與桶子內水高度 y 公分為正比關係，請完成下表空白處，

時間 x	3	6	9	12	15	18	21
水高 y	1						

並寫出 x 與 y 的關係式。

2. 已知水龍頭流水時間 x 分鐘與桶子內水高度 y 公分為正比關係，請完成下表空白處

時間 x	2	4	6	8	10	12	15
水高 y	5						

並寫出 x 與 y 的關係式。

二、進階挑戰：

3. 已知打排球 x 分鐘與消耗熱量 y 大卡為正比關係，請完成下表空白處，

時間 x	15	21	24	30	33	39	120
熱量 y				160			

並寫出 x 與 y 的關係式。

4. 已知 x 與 y 為正比關係，且 $x = 8$ 時， $y = 20$ 。則

① x 與 y 的數量關係式為何？

② 當 $x = 12$ 時， y 的值是多少？

三、神的境界：

5. 小英有一天早上將她慢跑時間與所跑距離依序記錄於下表，

時間 x 分鐘	5	10	12	15	16	20
距離 y 公尺	625	1250	1575	1875	1975	2500

請問時間 x 分鐘與距離 y 公尺是否為正比關係嗎？若是，提出的理由說明；若否，其原因何在？

6. 若已知 $(x+3y)$ 與 $(x-4)$ 此兩項目間為正比關係，且當 $x=3$ 時，則 $y=1$ 。請問

①寫出 x 與 y 的數量關係式。

②當 $x=6$ 時，則 y 的值是多少？

數學擬題

請在下表寫出一個具有「正比關係」的數學題目。

依下列提示依序作答	不需提示，直接作答，並分享所提例子的關係式來驗證你的答案。														
<p>(1) 搜尋生活中例子（例如買物品的花費與數量、運動的時間與距離、飲料的配方……等等），請你寫一個題目：</p>															
<p>(2) 從題目中挑選兩個項目，分別寫在下表最左邊 x 格與 y 格內，並於下表完成這兩個項目成正比的數字：</p> <table border="1" data-bbox="196 1074 813 1189"><tbody><tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table> <p>(3) 由上表，請寫出 $y : x$ 的比值為多少？</p> <p>(4) 請列出題目裡 x 與 y 的關係式。</p>	x							y							
x															
y															

2 / 反比的概念

花媽想在一塊大花布剪出不同長寬、面積為64平方公分的「長方形」花布作拼貼用，請你幫花媽完成下面空格，好讓花媽方便對照使用。

64×1



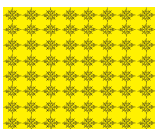
32×2



16×4



8×8



長 (公分)	乘	長 64 (公分)	長 32 (公分)	長 16 (公分)	長 (公分)	長 (公分)	長 (公分)	長 10 (公分)	長 (公分)
寬 (公分)		寬 1 (公分)	寬 (公分)	寬 (公分)	寬 8 (公分)	寬 16 (公分)	寬 32 (公分)	寬 64 (公分)	寬 (公分)
面積 (平方公分)	等於	64	64	64	64	64	64	64	64

根據上表，請你完成下面的兩個任務。

任務 6

請問「長」、「寬」及「面積」這三個項目，哪個項目的數量不變？請打勾 。

長

寬

面積

任務 7

若大花布長為 x 公分，寬為 y 公分，面積為64平方公分，請寫出一個能表示「長 x 」、「寬 y 」及「面積」的數量關係式，並提出你的理由說明關係式是對。

依下列提示依序作答						不需提示，直接作答
(1)完成表格空白處						
長 x	64	8	4	16	32	
寬 y	1					
x 與 y 的乘積						
(2)觀察上表，說明「長」、「寬」與「面積」之間有什麼關係？						
(3)觀察上述，寫出一個能表示「長 x 」、「寬 y 」及「面積」的數量關係式。						

從幫花媽完成的表格中可以觀察出：

當長為64公分時，則寬為1公分。(64×1=面積64)

當長為32公分時，則寬為2公分。(32×2=面積64)

當長為16公分時，則寬為4公分。(16×4=面積64)

.....

也就是說「長 x 公分」乘以「寬為 y 公分」，等於「固定面積64」，其數量關係如下

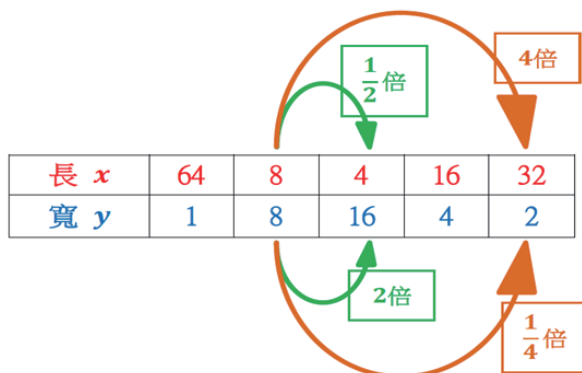
$$x \times y = 64$$

代表 x 和 y 的數量乘積為一個固定值64，此時我們說：

「 x 與 y 關係是**反比關係**」(在固定面積下，長與寬是**反比關係**)。

因此，當我們討論的兩個項目其**數量乘積**成固定值時，則稱此兩項目是**反比關係**，可以寫成關係式 $x \times y = k$ ，簡記為 $xy = k$ ，其中**固定值** k 不一定只能是正整數，也可以是負數、小數或分數等(但不等於0)。

另外， **任務 7** 所完成的表格如下，當長 x 與寬 y 有反比關係時，我們可發現：



長 x	64	8	4	16	32
寬 y	1	8	16	4	2

當長從8公分變成4公分(變 $\frac{1}{2}$ 倍)，則寬從8公分變成16公分(變2倍)，當長從8公分變成32公分(變4倍)，則寬從8公分變成2公分(變 $\frac{1}{4}$ 倍)，因此，我們可觀察到：

當一個項目呈**倍數**變換時，另外一個項目就會以其**倒數**呈現。

牛刀小試

下列哪些是「反比的關係式」，請於括號內打勾 。

$y = 3x$ 、 $y = -0.3x$ 、 $y = \frac{1}{2}x$ 、 $xy = 2$ 、

$xy = -0.2$ 、 $y = \frac{1}{2x}$

老師講解1

小旻預定在暑假設計一趟單車之旅，其中一個休息站設定在距離120公里外的露營區。下表是小旻行駛速率與時間的預估數，請協助完成下表，好讓小旻能順利旅行！

速率(公里/小時) x	10	12	15	20	30
時間(小時) y	12				

其實，小學已經學過「速率＝距離÷時間」，經移項後，可知「速率×時間＝距離」

所以小旻的表格中，「速率 x 」乘上「時間 y 」等於120公里(固定值)，也就是說速率與時間的關係式如下

$$x \times y = 120$$

因為速率與時間的**數量乘積**固定等於120(固定值關係)，所以速率與時間是「反比關係」。

另外，完成表格後，可以觀察到：

當速率從10變成20時(變2倍)，則時間從12變成6(變 $\frac{1}{2}$ 倍)

當速率從10變成15時(變 $\frac{3}{2}$ 倍)，則時間從12變成8(變 $\frac{2}{3}$ 倍)

.....

當速率呈**倍數改變**時，時間以其**倒數改變**，這個現象符合「反比關係」。

任務 8

科技老師阿昌準備在這學期介紹有關3D列印的課程，並進行實作練習。為了在課堂上製作長方體模型，阿昌老師先設定長方體的體積為100立方公分，並請學生討論底面積與高的關係。下表為學生討論完成後，長方體的底面積與高的關係表：

底面積(平方公分) x	5	10	20	25	50
高(公分) y	20	10	5	4	2

請問底面積與高是何種關係？並說出你的理由。

任務 9

請問下列兩組題目，何者為「反比關係」嗎？為什麼？請說明理由。

(A) 花媽希望把每個星期的加油費用控制在240元，她把每公升的油價與可加的油量簡記如下表。

油價 x (元/公升)	40	30	24	20	10
油量 y (公升)	6	8	10	12	24

依下列提示依序作答		不需提示，直接作答																			
(1) 完成表格空白處 <table border="1"> <tbody> <tr> <td>油價 x</td> <td>40</td> <td>30</td> <td>24</td> <td>20</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>油量 y</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> <td>12</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td>乘積</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		油價 x	40	30	24	20	10	油量 y	6	8	10	12	24	乘積							
油價 x	40	30	24	20	10																
油量 y	6	8	10	12	24																
乘積																					
(2) 由(1)來看，油價 x 與油量 y 的乘積成固定值嗎？ 是反比關係嗎？																					

(B) 小明用了一支線香，記錄燃燒香的「時間」與線香的「剩下長度」如下表。

燃燒時間 (分鐘) x	1	4	7	10	13
線香燃燒的剩下的長度 (公分) y	19	15	11	7	3

依下列提示依序作答		不需提示，直接作答																			
(1) 完成表格空白處 <table border="1"> <tbody> <tr> <td>時間 x</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>7</td> <td>10</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>長度 y</td> <td>19</td> <td>15</td> <td>11</td> <td>7</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>乘積</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		時間 x	1	4	7	10	13	長度 y	19	15	11	7	3	乘積							
時間 x	1	4	7	10	13																
長度 y	19	15	11	7	3																
乘積																					
(2) 由(1)來看，時間 x 與長度 y 的乘積成固定值嗎？ 是反比關係嗎？																					

形成性評量

1. 有兩個項目分別是 x 與 y ，它們變化的數量關係如下表，

項目 x	50	25	20	15	25
項目 y	6	12	15	20	12

請問這兩項目是反比關係嗎？ 是 否

2. 小袖將一壺熱水放在室溫下讓它自然冷卻，它們的時間與水溫數量紀錄如下表，

時間(分) x	5	10	15	20	25
水溫(攝氏) y	70	54	46	42	40

請問此時間 x 與水溫 y 是反比關係嗎？ 是 否

請同學選擇你要解決的題目，並在題號前空格內打勾 。

一、基礎考驗

1. 已知 x 與 y 是反比關係，請完成下表空白處，並寫出 x 與 y 的關係式。

x 項	10	20	30
y 項	30		

2. 已知 x 與 y 是反比關係，請完成下表空白處，並寫出 x 與 y 的關係式。

x 項	10	15	20
y 項	45		

二、進階挑戰

3. 已知 x 與 y 是反比關係，請完成下表空白處，並寫出 x 與 y 的關係式。

x 項	12	9	-1
y 項	-4.5		

4. 已知 x 與 y 是反比關係，且 $x=8$ 時， $y=20$ 。則

(1) x 與 y 的關係式為何？

(1) 當 $x=10$ 時， y 的值是多少？

三、神的境界

5. 有一件工程，每天12個工人一起合作，需要25天才可以完工，現在想要20天完工，則每天需要多少工人一起合作呢？

6. 若已知 $(x+3)$ 與 $(y-4)$ 是反比關係，且若 $x=3$ 時，則 $y=1$ 。則

(1) 寫出 x 與 y 的關係式為何？

(2) 當 $x=6$ 時， y 的值是多少？

7. 已知 x 與 y 符合某種數量關係，其數量如下表。

x	2	3	6	9	18
y	9	6	3	2	1

小章看到題目後，說「 x 與 y 為反比關係」

小華聽見後，說「嗯！若 x 與 y 為反比關係，則 x 與 $\frac{1}{y}$ 就會是正比關係」
請問(1)誰的答案才對？

(2)為什麼？

正比

當兩個項目的數量間成**固定倍數關係**時，我們稱這兩個項目是**正比關係**，可以寫成關係式 $y=k \times x$ ，簡記 $y=kx$ ，其中的**固定倍數** k 不一定是正整數，也可以是負數、小數或分數等（**但不等於0**）。

下列哪個式子表示 x 與 y 是正比關係？（是正比關係的打勾 ）

$y=4x-2$

$x=-9y$

$x=\frac{2}{y}$

反比

當兩個項目的數量間**乘積成固定值**時，我們稱這兩個項目是**反比關係**，可以寫成關係式 $x \times y=k$ ，簡記 $xy=k$ ，其中的**固定值** k 不一定是正整數，也可以是負數、小數或分數等（**但不等於0**）。

下列哪個式子表示 x 與 y 是反比關係？（是反比關係的打勾 ）

$y=3x+1$

$\frac{y}{x}=-0.5$

$x=\frac{6}{y}$

差異化數學教材 / 鄭章華 主編

-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2016.12

1. 數學教育
2. 中學教育
3. 教材與教法

主編者：鄭章華

作者：余采玲、潘金龍

(依姓氏筆畫順序排列)

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

編輯小組：余采玲、林成財、潘金龍、賴彥男

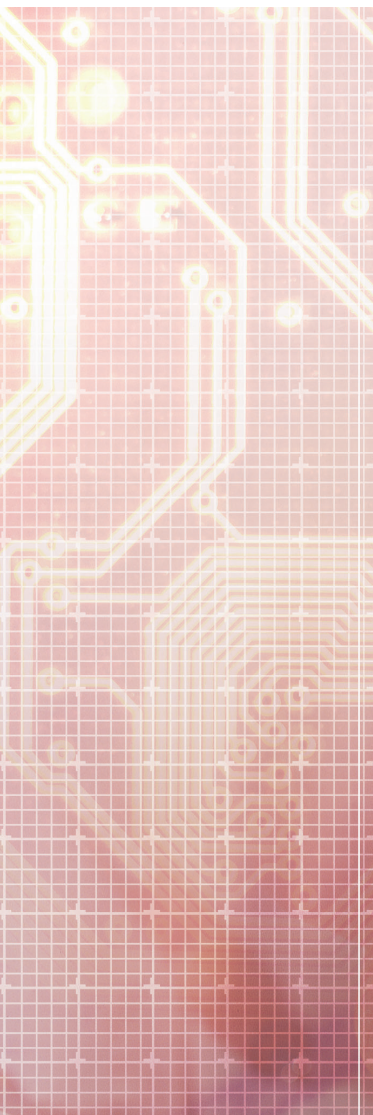
(依姓氏筆畫順序排列)

出版年月：106年12月

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

(歡迎使用，請註明出處)



UU4

datgyagyfuhy