

差異化國民中學數學教材

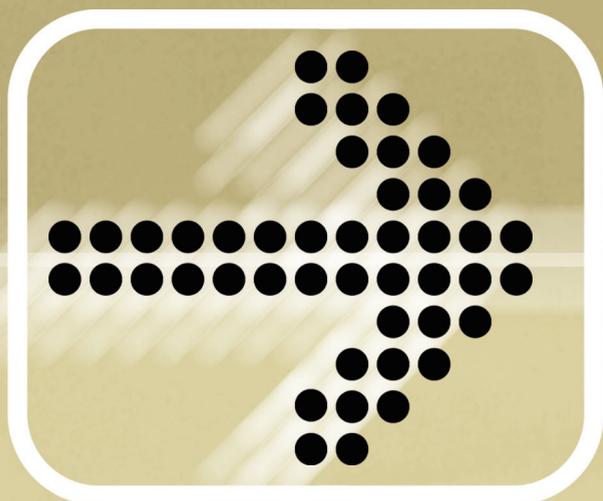
解一元一次方程式

教師手冊



國家教育研究院

數學差異化教材研發編輯小組



單元

解一元一次方程式

教師手冊

單元目標

1. 能由具體情境中列出一元一次方程式。
2. 能理解一元一次方程式解的意義。
3. 能以等量公理(或移項法則)解一元一次方程式，並作驗算。

對照學習內容

A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。(a-IV-2)

教材設計理念

核心想法在於提供所有學生公平學習的機會，讓每一位學生都容易理解和給予充分的機會主動參與。教學設計兼顧多元活動與多元表徵的靈活運用，其中多元活動包含觀察、操作、分組討論、小試身手等，而多元表徵則包含圖像、表格、符號等。差異化任務包括「開放性問題」、「平行任務」、「數學擬題」。「開放性問題」具備多樣解答或多種解題路徑；「平行任務」具備不同難易程度或是學習鷹架的有無，學生可依學習能力的不同，選擇較難或較易的任務，獨立完成任務或是依循學習鷹架引導完成任務。自我評量以難易分類，鼓勵學生可選擇适合自己能力的題型練習。

數學擬題出現在單元概念學習後，讓學生自行設計數學問題，可請他們上台分享、討論自己所設計的數學題目，增進同儕互動。當每個小單元結束時，教師可使用IRS即時反饋系統，以有效進行形成性評量來掌握學生課堂學習狀況。再者，形成性評量是差異化教學的關鍵，本教材的任務具備形成性評量的功能，教師可以從學生的回答，蒐集相關的學習證據，從而採取相應的教學活動，回應學生的學習需求與個別差異，有效進行差異化教學。

建議教師適時運用分組活動，讓同學能有交流、互動討論的環境。「老師講解」的題目由教師帶領學生學習，「學習任務」則由學生自行解題，教師從旁適時引導，並鼓勵同學發表自己的解題想法，供同學參考。最後的自我評量部分，多數同學會習慣從頭開始寫，教師可運用訂定時間(約5分鐘內)，或提醒程度較佳的同學，直接從進階題或是神的境界開始做，以達到差異化的學習。

教材 架構

本教材架構如下：

1. 一元一次方程式的運算規則：

希望同學能從教材中的任務練習，觀察出某些規律並藉由發表、討論，連結小學教材中等量公理的舊經驗，歸納出一元一次方程式的解題策略，教材中並提供多重表徵輔助同學能從不同面向思考、解題。

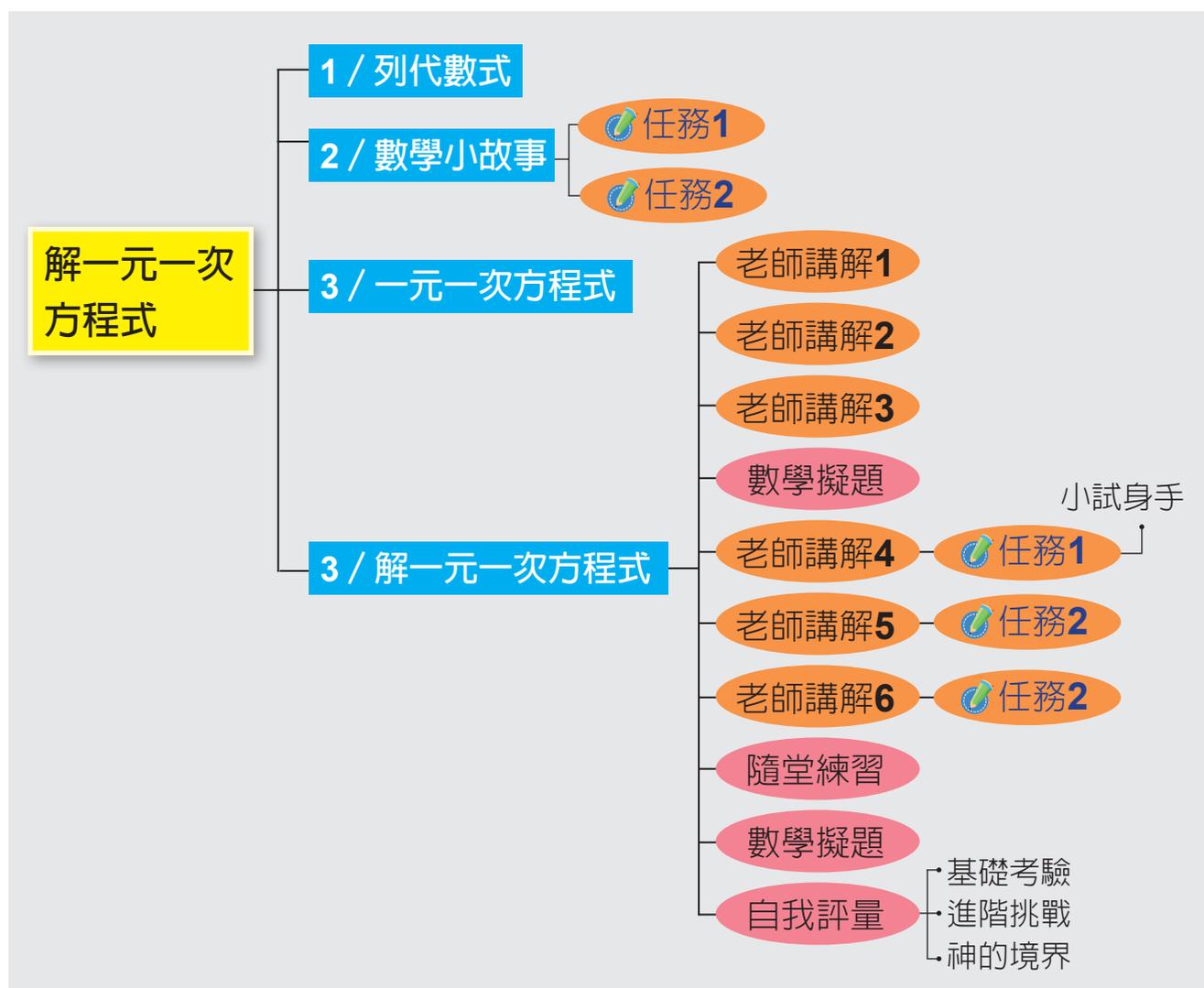
2. 一元一次方程式的數學擬題：

數學擬題是自己出題考其他同學，瞭解此階段的數學概念形成與否或是產生哪些迷思概念。

3. 自我評量：

參考近幾年基測、會考試題改編為合適的題型，讓同學統整或應用本單元所學。

教材 架構心智圖



數-J-A2

具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。

數-J-B1

具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

數-C2

具備和他人合作解決問題的素養，並能尊重多元的問題解法，建立良好的互動關係

數-J- C3

具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養

解一元一次方程式

1 / 實作體驗

讀心術：吉普塞人祖傳的神奇讀心術，它能算出你的內心感應

註：可上網找關鍵字“水晶球讀心術”

或到 <http://msn.o-pass.com/ohmygod.php>

1. 任意選擇一個兩位數(從10~99之間任意選擇一個數)，把這個數的十位數與個位數相加，再把任意選擇的數減去這個和。

例如：你選的數是23，然後 $2+3=5$ ，然後 $23-5=18$

2. 在圖表中找出與最後得出的數所對應的圖形，並把這個圖型牢記心中，然後點水晶球。妳會發現，水晶球所顯示出來的圖形就是剛剛心裡記下的那個圖形。



請寫下你選擇的數：

$$74 \Rightarrow 74 - (7 + 4) = 63$$

配合附件的excel檔案，老師先講解完提示1的規則後，請同學選定自己的2位數字後依規則計算，接著再開啟檔案，可避免有學生發現圖形的規律，建議試玩2~3次後再討論。

討論

這是魔術還是數學？你的理由是？

這只是數的障眼法，將任何2位數字用十進制表示， $xy = 10x + y$ ； $(10x + y) - (x + y) = 9x$ ，都是9的倍數；仔細看水晶球裡的圖案，只要是9的倍數的圖，都是一樣的。

只要學會如何列式和解方程式，再加上利用生活週遭中與數字有關係的人、事、物來描述，列出的數永遠都會是你設計好的答案。

例如：請將年齡乘以67(例：年齡是40， $40 * 67 = 2680$)，只取結果的最後兩個數字(即：80)，再將這兩位數乘以3，最後兩位數就會是一開始的數字(年齡)。

年齡乘67即 $\rightarrow x +$ ，再乘以3

此為代數式的應用，銜接上一單元所學，應用在生活的例子，引起學生學習動機。

2 / 數學小故事



益古集

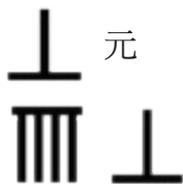


測圓海鏡

中國古代對於代數學也有相當的研究，金代數學家李冶在其著作《測圓海鏡》、《益古演段》，以及元代數學家朱世傑的《算學啟蒙下卷》《四元玉鑒》，都系統地介紹了用天元術建立二次方程；元代數學家王恂也廣泛使用天元術解高次方程。在中國數學史上最早創立天元概念的是北宋 蔣周所著的《益古集》，其中「元」代表代數符號，「次」為代數符號的次方數，這個單元的「解一元一次方程式」表示解決只有一個未知數的問題。

在天元術中，一次項係數旁記一「元」字(或在常數項旁記一「太」字)。「元」以上的係數表示各正次冪，「元」以下的係數表示常數項和各負次冪。例：李冶《測圓海鏡》第二卷第十四問方程中： $6x+96=0$ 以下圖表示

資料來源：維基百科<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/天元術>



上面式子中只有一種未知數，且未知數最高的次方數為一次的等式，稱為一元一次方程式。

3 一元一次方程式

在日常生活中，常遇到數與量的問題，都可以用數學式子來表示；在上一個單元已經學過如何將文字敘述改寫成代數式，只要再根據題意就可以列出方程式。

例如：阿男到超商買了一杯29元的飲料，和一個25元的麵包，付完錢後皮包裡還剩150元，則阿男原本有多少錢？

(1) 以 \square 代替阿男原本有的錢，可表示為 $\square - 29 - 25 = 150$

(2) 以 x 代替阿男原本有的錢，可表示為 $x - 29 - 25 = 150$

(3) 以 y 代替阿男原本有的錢，可表示為 $y - 29 - 25 = 150$

上述的3個式子中，各自都只有一種未知數，且未知數最高的次方數為1次的等式，稱為「一元一次方程式」。

任務 1

一元一次方程式的列式

文字敘述	列成一元一次方程式
比 x 大 7 的數是 12	$x + 7 = 12$
比 y 小 2 的數是 -5	
a 的 4 倍等於 28	
比 b 的 2 倍多 12 的數是 18	
比 c 的一半少 6 的數是 27	

任務 2

阿忠買了5杯珍珠奶茶，付了1000元，找回875元，假設珍珠奶茶每杯 x 元，請依題意可列出一元一次方程式。

依提示作答	直接作答
(1) 珍珠奶茶每杯 x 元， 則5杯共 <u>5x</u> 元(以 x 表示)	
(2) 共花費多少元？ (付出的錢扣掉找回的錢，只需列式，不必算出) 1000 - 875	
(3) 列出方程式？(珍珠奶茶5杯的錢等於所花費的錢) 5x = 1000 - 875	

4 / 解一元一次方程式

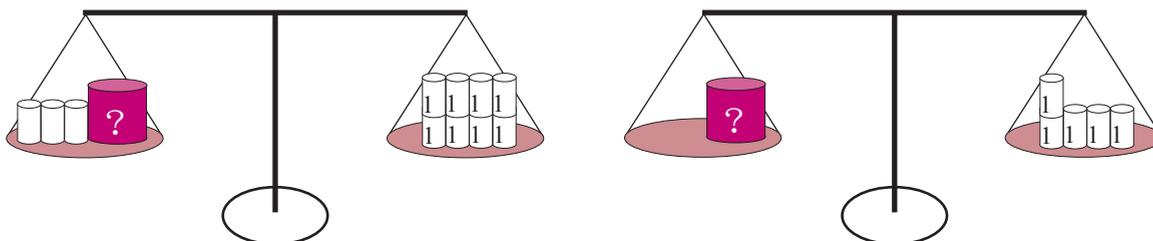
在小學已經學過「等量公理」，等號兩側同加、同減、同乘或同除一個非零的數，最後的結果會是一樣的。在國中階段我們將應用等量公理解方程式。如下列式子所示：

老師講解1：

$$x+3=8$$

$$\rightarrow x+3-3=8-3$$

$$\rightarrow x=5$$



老師 **講解1**：解一元一次方程式 $2y=y+16$

$$2y=y+16$$

$$\Rightarrow 2y-y=y+16-y \text{ (同減未知數)}$$

$$\Rightarrow y=16$$

透過等量公理我們可以順利解出 x 的值為 5 以及 y 的值為 16。

老師 **講解2**：解一元一次方程式 $5a-3=a+13$

此為同減未知數的題目

等量公理	移項法則
$5a-3=a+13$	$5a-3=a+13$
$\Rightarrow 5a-3+3=a+13+3$ 等號兩邊同時+3	$\Rightarrow 5a-a=13+3$
$\Rightarrow 5a=a+16$	把-3移項到另一邊變成+3
$\Rightarrow 5a-a=a+16-a$ 等號兩邊同時減 a	$\Rightarrow 4a=16$ 把 a 移項到另一邊變成 $-a$
$\Rightarrow 4a=16$	$\Rightarrow a=4$ 等號兩邊同除以4
$\Rightarrow a=4$ 等號兩邊同除4	代回原式驗算：
代回原式驗算：左式 $5 \times 4 - 3 = 17$	提醒同學要驗算
右式 $4 + 13 = 17$ 符合	左式 $5 \times 4 - 3 = 17$
	右式 $4 + 13 = 17$ 符合

數學擬題 請你發揮創意，設計一元一次方程式的解為 $x=3$ 的數學題，來考考同學，並請提供答案。

老師 **講解3**：解一元一次方程式 $-5z+5=-z+16$

此為同加未知數的題目，計算後會得到 $-z=11$ 的結果，無法用天秤砝碼這樣具體的實物來聯想，教師可在這說明，讓同學知道無法用具體物展示所有題目，需有抽象化的觀念。

等量公理	移項法則
$-2z+5=-z+16$	$-2z+5=-z+16$
$\Rightarrow -2z+5-5=-z+16-5$ 等號兩邊同時 -5	$\Rightarrow -2z+z=16-5$
$\Rightarrow -2z=-z+11$	把 $+5$ 移項到另一邊變成 -5
$\Rightarrow -2z+z=-z+11+z$ 等號兩邊同時 $+z$	$\Rightarrow -z=11$
$\Rightarrow -z=11$	把 $-z$ 移項到另一邊變成 $+z$
$\Rightarrow z=-11$ 等號兩邊同乘 -1	$\Rightarrow z=-11$ 等號兩邊同乘 -1
代回原式驗算：左式 $(-2)\times(-11)+5=27$ 右式 $-(-11)+16=27$ 符合	

提醒同學要驗算

到此步驟時，可以請同學想想如何解出 z 的值？會有同學用相反數的觀念， $-z$ 的相反數為 z ， 11 的相反數為 -11 ，來解出 $z=-11$

教學提醒：當全班同學程度普遍不錯，可教導、加強移項法則，並以此方法解方程式；反之，則不教，並提醒同學沒有一定要學移項法則。

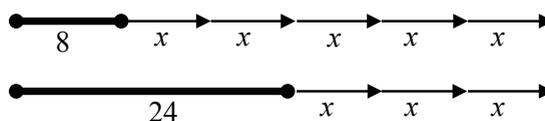
由上面可以觀察出：

歸納並提醒同學，移項法則即等量公理的延伸，而非多學一種新的解題方法

移項法則是等量公理的延伸，「移項法則」只是簡化「等量公理」的步驟，可以更快速的解出未知數，移項法則跟等量公理皆可用來解決一元一次方程式的題目。

任務 1

解一元一次方程式 $5x + 8 = 3x + 24$



依提示作答	直接作答
<p>(1) 已知圖1的兩條數線等長，請在框框中寫出圖1所表示的方程式：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $8 + 5x = 8 + 16 + 3x$ </div> <p>(2) 請在框框中寫出圖2所表示的方程式：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $5x = 16 + 3x$ </div> <p>(3) 請在框框中寫出圖3所表示的方程式：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $2x = 16$ </div> <p>(4) 請在框框中寫出圖4所表示的方程式：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $x = 8$ </div> <p>(5) 將解出的答案代回方程式驗算</p> <p>左式：$5 \times 8 + 8 = 48$</p> <p>右式：$3 \times 8 + 24 = 48$ 符合</p>	<p>任務1為同學第一次自己解方程式，在提示作答中用數線表徵來協助同學理解，有助於同學將來在應用問題中用來。</p> <p>這裡請老師帶著同學完成，能把圖示轉換成數學方程式；請同學解釋圖1到圖2發生了什麼事？並對照框框中的方程式。最後聯結等量公理。</p> <p style="text-align: center;">提醒同學要驗算</p>

數學擬題

請你發揮創意，設計一元一次方程式的解為 的數學題目來考考同學，並請提供答案。

小試身手

- (1) x 加7等於13，列出方程式？ (1) $x+7=13$ (2) $x=13+7$ (3) $7x=13$
- (2) x 加7等於13，則 $x=?$ (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8
- (3) $x=3$ 是下列哪一個一元一次方程式的解？
(1) $2x+3=3$ (2) $3x+3=9$ (3) $2x+3=9$ (4) $2x+1=5$
- (3) x 的7倍等於28，則 $x=?$ (1) $-\frac{14}{3}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) 4 (4) 196
- (4) x 的6倍加3等於45，則 $x=?$ (1) $\frac{27}{2}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) 6 (4) 7

老師 **講解4**：解一元一次方程式 $3(x-5)=2(x+2)$

$\Rightarrow 3x - 15 = 2x + 4$	將方程式展開
$\Rightarrow 3x - 15 + 15 = 2x + 4 + 15$	等號兩邊同加15
$\Rightarrow 3x = 2x + 19$	化簡
$\Rightarrow 3x - 2x = 2x + 19 - 2x$	等號兩邊同減 $2x$
$\Rightarrow x = 19$	化簡

老師講解4是先用乘法分配律後再化簡的題目

任務 2

解一元一次方程式 $4(x-1)=4-3(x-2)$

依提示作答	直接作答
<p>(1) 展開並將方程式化簡</p> $4(x-1)=4-3(x-2)$ $\Rightarrow 4x-4=4-3x+6$ $\Rightarrow 4x-4=-3x+10$	<p>鼓勵同學，在此區作答以移項法則試試。</p> <p>提醒同學要驗算</p>
<p>(2) 在等號兩邊同加4，並將方程式化簡</p> $\Rightarrow (4x-4)+4=(-3x+10)+4$ $\Rightarrow 4x=-3x+14$	
<p>(3) 在等號兩邊同加3x，並將方程式化簡</p> $\Rightarrow 7x=14$ $\Rightarrow x=2$	
<p>(4) 將解出的解代入方程式驗算</p> <p>等號左邊：$4 \times (2-1)=4$</p> <p>等號右邊：$4-3 \times (2-2)=4$ 符合</p>	

老師 **講解5**：解一元一次方程式 $3x = \frac{2}{3}x - 16$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 6x &= 2x - 48 && \text{兩邊同乘3} \\ \Rightarrow 6x - 2x &= 2x - 48 - 2x && \text{兩邊同減}2x \\ \Rightarrow 4x &= -48 && \text{化簡(兩邊同除以4)} \\ \Rightarrow x &= -12\end{aligned}$$

老師講解5是分式型的題目，建議先乘分母的最小公倍數，化為整數來計算

任務 3

解一元一次方程式 $\frac{1}{3}x - 3 = \frac{1}{4}x$

依提示作答	直接作答
<p>(1) 在等號兩邊同乘12(分母的最小公倍數)，並將方程式化簡</p> $\left(\frac{1}{3}x - 3\right) \times 12 = \left(\frac{1}{4}x\right) \times 12$ $\Rightarrow 4x - 36 = 3x$	<p>鼓勵同學，在此區作答以移項法則試試。</p> <p>提醒同學要驗算</p>
<p>(2) 在等號兩邊同加36，並將方程式化簡</p> $\Rightarrow 4x - 36 + 36 = 3x + 36$ $\Rightarrow 4x = 3x + 36$	
<p>(3) 在等號兩邊同減3x，並將方程式化簡</p> $\Rightarrow 4x - 3x = 3x + 36 - 3x$ $\Rightarrow x = 36$	
<p>(4) 將解出的解代入方程式驗算</p> <p>等號左邊：$\frac{1}{3} \times 36 - 3 = 9$</p> <p>等號右邊：$\frac{1}{4} \times 36 = 9$ 符合</p>	

小試身手

求方程式中 x 的解 $\circ 2(x-3) = -4x, x = ?$

$x = 1$

數學擬題

請你發揮創意，設計一元一次方程式的題目，愈難愈好！並請提供答案。

自我評量

請同學選擇你要解決的題目並在題號前空格內打勾 。

● 基礎考驗：解下列一元一次方程式

1. $x - 17 = 25$ 則 $x = ?$ (1) 8 (2) -8 (3) 42 (4) -42 (3)

2. $2y + 6 = -6 + y$ 則 $y = ?$ (1) -12 (2) -4 (3) 0 (4) 12 (1)

3. $-9x = 63$ 則 $x = ?$ (1) 9 (2) -9 (3) 7 (4) -7 (4)

● 進階挑戰：解下列一元一次方程式

4. $2x + 18 = 10$ $x = -4$

5. $5 - 3y = 20$ $y = -5$

6. $12 + 3z = 60 - 9z$ $z = 4$

● 神的境界：解下列一元一次方程式

7. $2(x - 4) - (3x + 4) = -20 + 7x$ $x = 1$

8. $2(x - 4) - (x - 4) = -22 + 7x$ $x = 3$

9. $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ $x = \frac{9}{5}$

差異化數學教材 / 鄭章華 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2016.12

1. 數學教育
2. 中學教育
3. 教材與教法

主編者：鄭章華

作者：林成財、賴彥男

（依姓氏筆畫順序排列）

出版者：國家教育研究院

編審者：數學差異化教材研發編輯小組

召集人：鄭章華

編輯小組：余采玲、林成財、潘金龍、賴彥男

（依姓氏筆畫順序排列）

出版年月：105 年 12 月

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

（歡迎使用，請註明出處）

