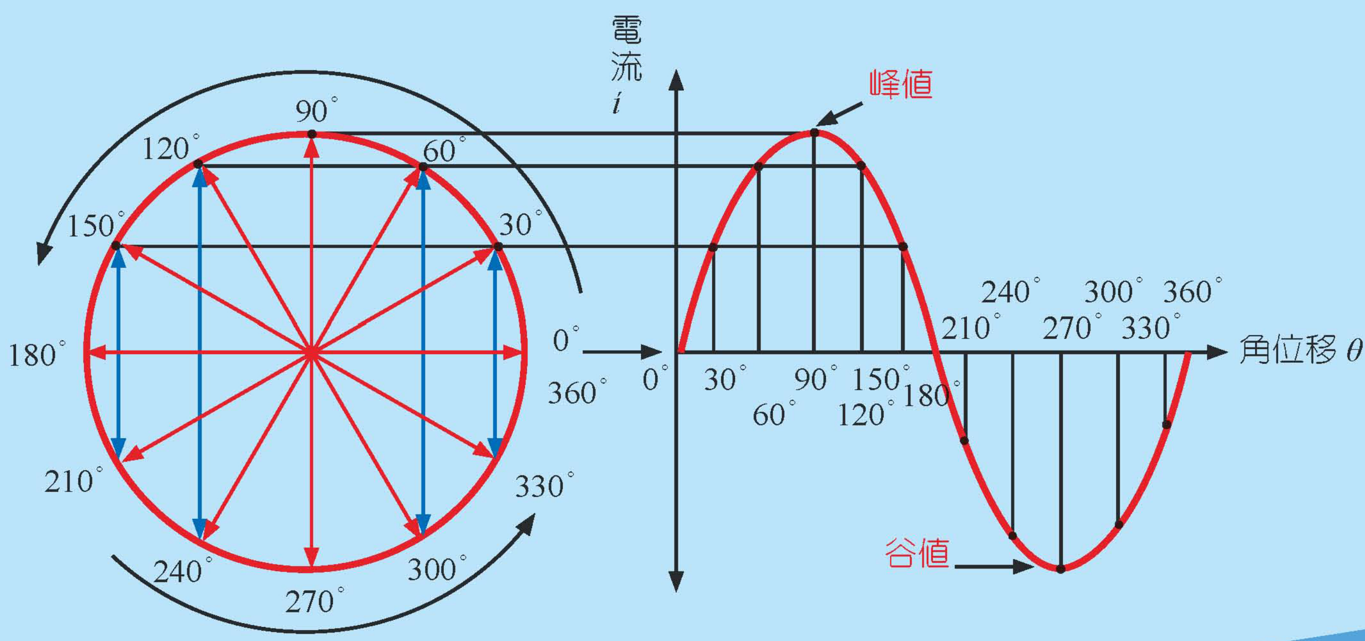
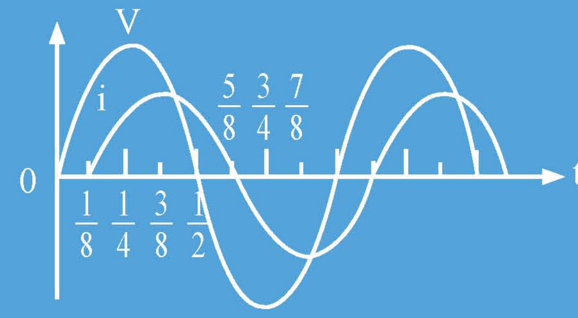
素養導向技術型高中數學教材

交流電中的數學

教師手冊





國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

◎ 壹、單元名稱

交流電與正弦波

◎ 貳、單元目標

學習基本電學及三角函數的相關知識，察覺數學與基本電學之間的連結，並且學習 Geogebra 軟體的應用。

◎ 參、教材設計理念

「學好數學有什麼用？」是現今許多中學生在研讀數學時會出現的疑問，對於追求知識與技能並重的技術型高中學生而言也是常見。技術型高中學生於專業科目（如：基本電學、測量學、工程製圖、力學等）課堂上，經常面臨「看見數學的式子，卻不知其所以然」的窘境，而專業科目教師在課程進度的壓力下也顯得愛莫能助，無法詳細並深入地解說當中的數學涵義。多數高職數學科教師雖然知道學生的學習背景，且願意爲學生解決專業科目中數學的疑惑，更期望使學生了解「數學的用處」進而欣賞數學，但因缺乏專業科目與數學之間對話的機會，亦讓數學科教師不知如何從旁協助。故編者期望藉由本教材爲高職數學科教師提供範例，以協助學生解決專業科目中數學內容的疑惑。

目前我國技術型高中依其特性共分爲十五類群科，現行數學課程綱要雖針對群科屬性分爲 A、B、C 及 S 四類，但仍苦無針對各群科「量身訂做」的數學課程或教材，導致部分群科的學生在修習專業科目時缺乏數學應有的背景知識，故編者欲藉本教材研發編輯的機會，嘗試爲學生人數占多數的電機電子群（包含電機科、電子科、資訊科、控制科、冷凍空調科、航空電子科等）設計「交流電中的數學」課程，使相關領域的學生在這門課中察覺數學與基本電學之間的連結，更不至於在學習交流電時對其內容一頭霧水。此外，編者在課程中穿插了自由軟體 Geogebra 的操作，期使學生體會資訊科技融入學習過程時的便利性與易用性。

◎ 肆、教材架構

本課程計劃提供學生使用的教材爲學生手冊，供師生於教學活動時使用，其架構及內容略述如下。

一、學生手冊內容：

本課程共設計兩個主題，其中「正弦函數的圖形與週期」安排於課程的前半段，編者期望學生經由活動連結正弦函數圖形與電學中發電機產生的交流所形成的波形，進而由正弦函數圖形的特性，了解電學中有關正弦波電壓、電流…等瞬間值之相關基礎概念。

「交流電的平均值、有效值與積分」則安排在教學活動的後半段，編者由家用電壓值及 Yahoo！奇摩知識＋網友的提問作爲鋪陳，引起學生思考「臺灣家用交流電壓爲 110 伏特」爲何與實際量測不同，以及「110 伏特」之值意義爲何，與前段所學之交流電壓的特性是否違背。接著複習基本電學第一冊的焦耳定律，以利引入本段落的重點。交流電常用的正弦波形之波形之「平均值」係以一個週期或半個週期的波形函數定積分之值求得，編者在此段落先以彌補學生尚未學習積分意義之缺憾爲旨，配合附錄三的內容，帶領學生藉 Geogebra 理解何謂積分，再行談及正弦波形之半週期定積分之值爲 2 倍峰值與平均值之由來。

在認識平均值的意義之後，「有效值」除了介紹定義之外，尚需談及三角函數的二倍角公式（或半角公式），故編者安排在本段落的最後，由教師引導學生複習二倍角公式，以利推導出電流的有效值與峰值的關係（通常基本電學教科書在此處會以近似值計算，如：0.707 乘以峰值）。

二、附錄

附錄爲提供學生在課程進行期間自行研讀，並供教師在課堂上適時配合教學活動的工具書，其內容共分爲三部分。附錄一安排 Geogebra 的簡介，其目的係使學生在本課程進行前能熟悉軟體的介面與功能，甚至能依照個人需求自行操作。但本節附錄內容不涉及過多繁複的操作，部分操作（如：數值滑桿、上和、下和、積分等）則於後續兩節再適當介紹。學生可在第一節課前研讀並自行使用電腦下載與操作，或由教師安排時間帶領學生依照內容介紹或示範。

附錄二講述正弦函數的圖形與週期，按現行課程綱要，高職學生於一年級第一學期雖已學過三角函數的圖形，但交流電的學習過程中，尚需理解補充圖形的變化，如平移、伸縮、週期的改變等，以解釋相位的超前及滯後、頻率的改變等問題，故藉由本節附錄期望學生能在修習交流電單元之前能更深入理解其意義。

由於交流電單元將提及波形常見的數值有平均值及有效值等，故附錄三安排介紹積分的意義，期使學生能清楚了解積分值的意義，並利用 Geogebra 計算定積分的近似值。但本節附錄不涉及微積分的定理介紹或運算性質，以免給予學生不必要的負擔。

搭配學生手冊 P2

P5 圖左的示波器是高職電機電子群學生實習工場必備之儀器，本段內容係嘗試以學生在生活中常見的情境、其他學科曾習得的內容，以引起學生思考動機並藉以切入本單元的主題。

正弦函數的由來

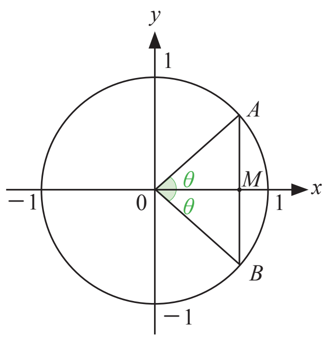
一、三角函數的源起

早在公元前300年，古埃及便有了三角學的概念，包括建築金字塔時保持金字塔每邊都有相同的斜度、重新整理尼羅河泛濫後的耕地、通商航海以及觀測天象等，都是利用三角學的粗略概念，只是當時並沒有使用餘切這個名詞而已。直至西元前150年至100年間，希臘人熱衷天文學，開始鑽研三角學，於是三角學漸漸有了雛形。

公元前2世紀希臘天文學家希帕霍斯（*Hipparchus of Nicaea*）爲了觀測天文的需要，製作了一個和現在三角函數表差不多的「弦表」，即在固定的圓內，不同圓心角所對弦長的表，他成爲西方三角學的最早奠基者。

後來印度人吸收了希臘人在三角學方面的知識，並加以改進，使三角學成爲研究天文學的重要工具，而三角學也就這樣依附著天文學發展，直到十三世紀，才自天文學中脫離成一門獨立的學問。

二、正弦函數的出現



早先三角學應用於天文觀測，古人研究三角學時，一開始有興趣的是求一大圓中角2θ 所對的弦長 $\overline{AB}$ ，後來才演變成求相應於角 θ 的 $\overline{AM}$（即 $\sin\theta = \overline{AM}$ ），只是當時的計算（弦長），隨半徑不同而有不同的結果，直到歐拉（*Euler*）時，才令圓的半徑爲1，即求單位圓中角 θ 對的弦長，亦使三角函數定義爲相應的線段與圓半徑之比。

至於三角函數「正弦」一詞，乃是傳教士鄧玉函、湯若望、徐光啓合編中國第一部三角學—大測，將拉丁文*sinus*譯爲「正半弦」或「前半弦」，簡稱爲「正弦」，這是中國「正弦」術語的由來。 而「餘弦*(cosine)*」一詞，是*complemental sine* 的簡寫，其意思是餘角的正弦。

資料來源:

對數與約翰．納皮爾 *(John Napier)*，賴漢卿 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_4_07/

數學的故事，列志佳、簡珮華、黃家鳴等主編，九章出版社，第68~70頁

相關網頁：

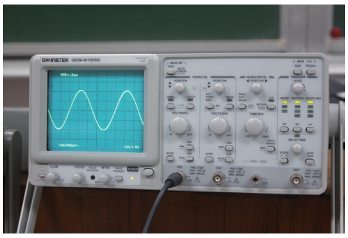
http://www.edp.ust.hk/math/history/5/5_5/5_5_27.htm

幾何發展史，王懷權 ，凡異出版社，http://wenku.baidu.com/view/a5adfe2e0066f5335a812173.html

2

一、正弦函數的圖形與週期

自然界隨處可見波動現象，例如雨水滴在湖面上產生的漣漪，撥動琴弦產生的聲音振動，以及光的雙狹縫實驗中美麗的干涉條紋…等。而在技術型高中電機電子群的專業實習課程中，正弦波形是機器最容易產生且最為基礎的波形。



法國數學家、物理學家傅立葉(Joseph Fourier，1768－1830)更進一步認為，任何一個週期函數都可以用正(餘)弦函數合成來趨近，這樣的概念被廣泛地應用於現今的電子、電路、通訊系統上，例如手機等。因此本節重點便是要探討如何繪製正弦函數圖形並了解其特性，以及它與專業科目有何關連。

回顧前面的三角函數課程中，我們曾經學習到標準位置角 θ 的六個三角函數，可由 θ 終邊上任意點 $P(x，y)$ 以及 P 點到原點的距離 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$	$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\,(x\neq0)$	$\cot\theta=\dfrac{x}{y}\,(y\neq0)$
$\sec\theta=\dfrac{r}{x}\,(x\neq0)$	$\csc\theta=\dfrac{r}{y}\,(y\neq0)$

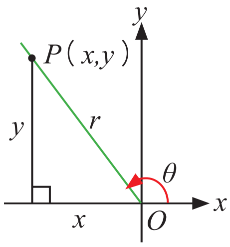


圖 1

所定義(如圖 1)如果當上面的 P 點限制在以原點為圓心，半徑為 1 的單位圓上，則我們發現 $\sin\theta=\dfrac{y}{1}=y$，$\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$。亦即 $P(x，y)=(\cos\theta，\sin\theta)$，也就是說 θ 終邊 P 點的 y 坐標即為 $\sin\theta$ 之值。

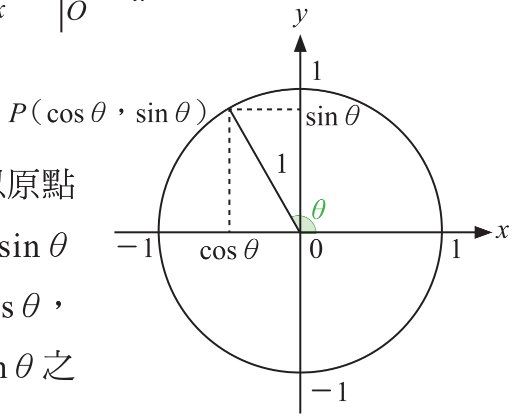


圖 2

搭配學生手冊 P3

由於技術型高中學生大多對於單位圓坐標與正餘弦函數的關係十分陌生，建議在進入【活動 1】之前，仔細複習所需之先備知識，視情況先舉幾個例子：

利用【活動 1】的圖形，在單位圓上，找出 $\sin 60^\circ$、$\sin 150^\circ$、$\sin 225^\circ$、$\sin 300^\circ$⋯在 y 軸上所對應的位置。

甚至可以視學生反應，在單位圓上對應各個象限，增加更多的正弦值，找出其在 y 軸所對應的值，等學生熟悉後再進入【活動 1】，才能使活動進行得更順暢。

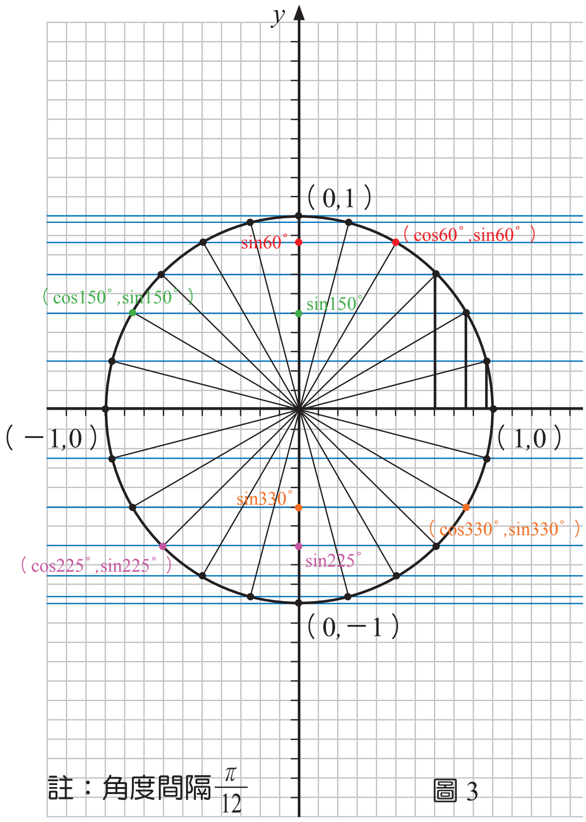


圖 3

延續前面的概念，繪製正弦函數 $y=\sin$ 的圖形時，最好準備教用大型直尺，先帶著學生找幾個點（可以利用實物投影機，或將本頁投影在白/黑板上親手畫幾個點示範給學生看）。

想想看1解答：

$P(x, y)=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

想想看2解答：

$P(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

老師的話：

本頁問題設計主要是為【活動2-1】而準備，利用圓上之點來描繪$y=a\sin x$的圖形。

活動 1　繪製正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形

請同學利用前面的結論以及第 4 頁圖 3 的單位圓，在圖 3 的坐標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形。

（配合第 4 頁）

想想看 1

如果將第 2 頁圖 2 的單位圓改為以原點為圓心，半徑為 2 的圓（圖 4），且將 θ 終邊 P 點限制在這樣的圓上，則 P 點的 x、y 坐標與 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 之值有甚麼關係呢？

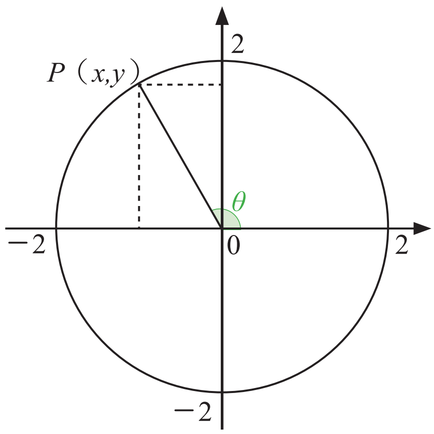


圖 4

想想看 2

如果將第 2 頁圖 2 的單位圓改為以原點為圓心，半徑為 r 的圓，且將 θ 終邊 P 點限制在這樣的圓上，則 P 點的 x、y 坐標與 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 之值有甚麼關係呢？

活動 1 解答：

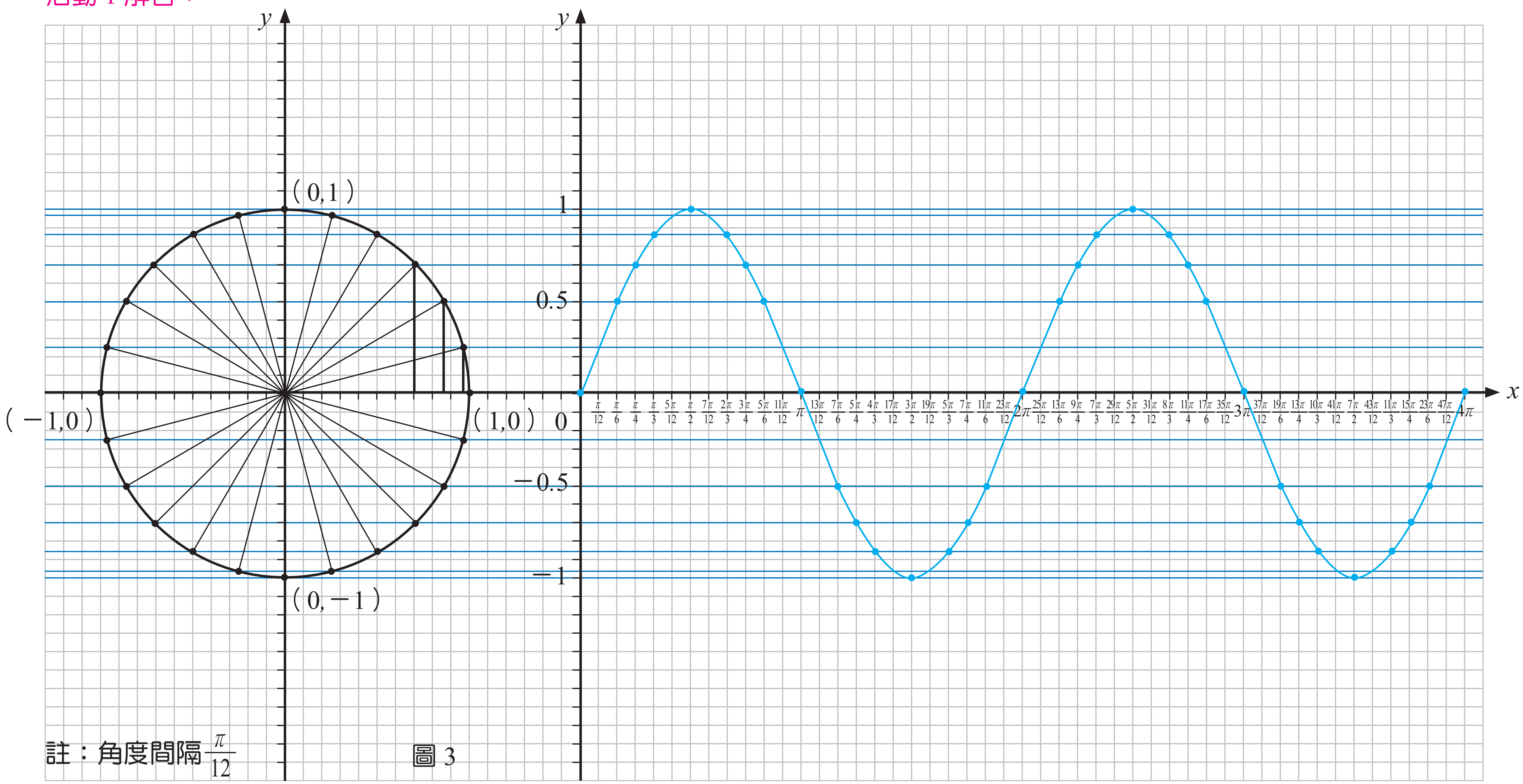


圖 3

問題：⑴正弦函數 $y=\sin x$ 的最大值為 −1 ，最小值為 1

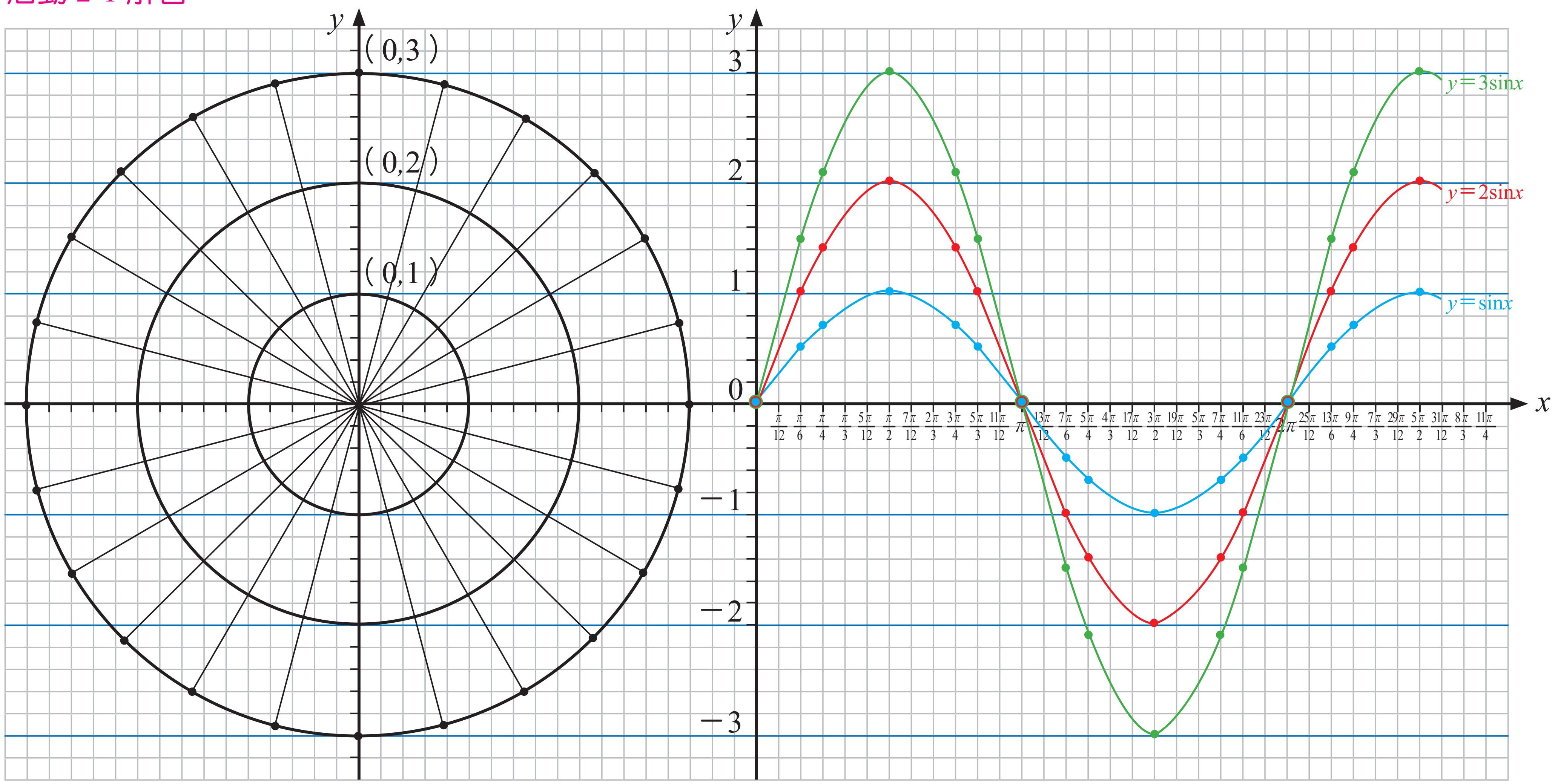
⑵當函數圖形每隔一段特定的間隔，便會重複出現時，稱這樣的間隔為函數的**週期**，請問正弦函數 $y=\sin x$ 的週期為 2π

活動 2-1 繪製正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖形

請利用圖 5 的同心圓（半徑分別為 1、2、3），在右圖的座標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　　(2) $y=2\sin x$ 的圖形。　　(3) $y=3\sin x$ 的圖形。並請回答下表的問題。

活動 2-1 解答：



註：角度間隔 $\frac{\pi}{12}$　　　　圖 5

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$	1	−1	2π
$y=2\sin x$	2	−2	2π
$y=3\sin x$	3	−3	2π

學生手冊 P5

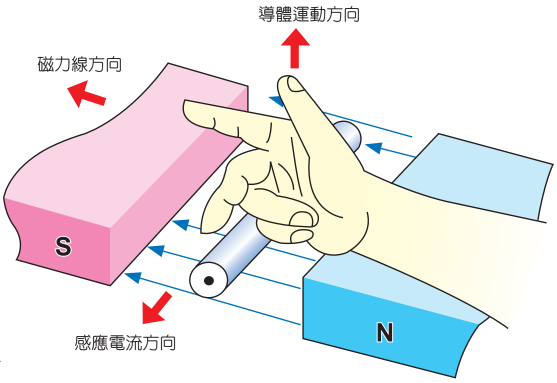


圖1

註 1：交流發電機原理

發電機是能將機械能轉換為電能的機器，通常會移動或轉動磁場中的導線，使導線與磁場發生相對運動，切割磁場而在導線中產生電動勢（電壓）或感應電流，其電動勢之方向可藉由弗來明右手定則來決定，大姆指表示導線運動方向，食指表示磁力線方向（由 N 至 S），中指表示電動勢（電壓）或感應電流方向，如圖 1 所示，若導線在與磁力線垂直方向由下往上移動，則其電流會由右向左流出。

由於單一導線在磁場中運動所產生之電流非常小，所以發電機常利用多組線圈在磁場中轉動，以產生較大的電量；線圈在磁場中旋轉所產生之電流，若經由集電環（或稱滑環）與電刷輸出，則會產生交流電，如圖 2 所示。

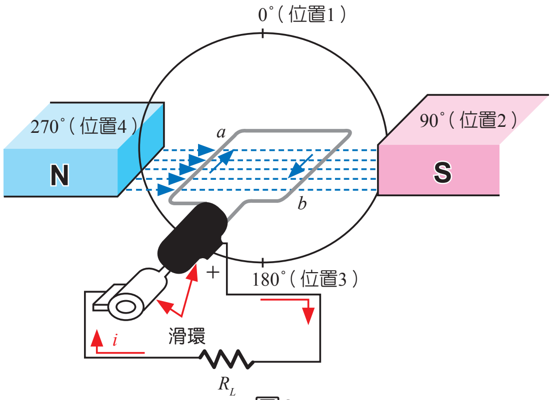


圖2

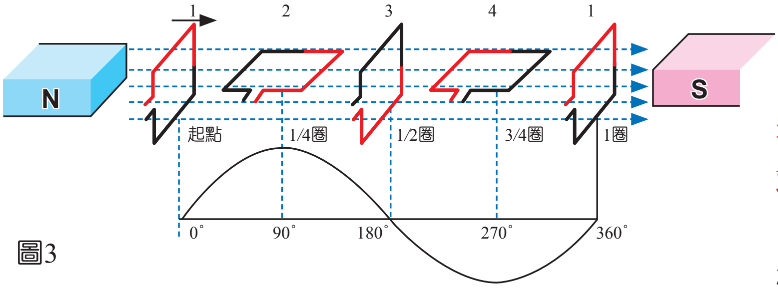


圖3

在前半圈產生的電流會由 a 端流出回到 b 端；在後半圈，電流會由 b 端流出回到 a 端。如圖 3 所示，當線圈與磁力線方向成垂直時（運動方向與磁力線平行），其電壓為零；當線圈與磁力線平行時（運動方向與磁力線垂直），其電壓最大。

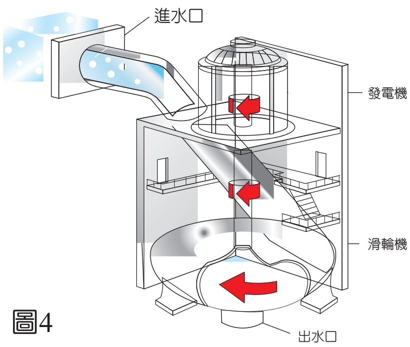


圖4

註 2：水力發電的基本原理是利用高處的水流放至低處時，高低水位的重力位能差轉換成動能，推動渦輪機，再帶動發電機發電，如圖 4。

搭配學生手冊 P7

利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數圖形，最好使用電腦教室，並且必須先行安裝免費繪圖軟體 Geogebra，學生可按參考手冊所載之步驟操作，描繪出三角函數圖形。學生對此，普遍接受度很高，甚至於無師自通，教師必須格外留心學生學習之差異。

另外 Geogebra 亦提供平板的版本，如果每位學生皆可使用 1 臺平板，亦是不錯的學習方式。

Geogebra 的詳細操作範例及各種講義可至「學習 GeoGebra- Google Sites」https://sites.google.com/a/ymsh.tp.edu.tw/geogebra/home 網站瀏覽學習。

我們也可以利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數圖形。(詳見附錄第 43~57 頁)

(1)先將 x 軸間距改為 $\frac{\pi}{2}$：

如右圖 8，將滑鼠移至「繪圖區」，按滑鼠右鍵，出現下列對話框，以滑鼠左鍵點選「繪圖區」。

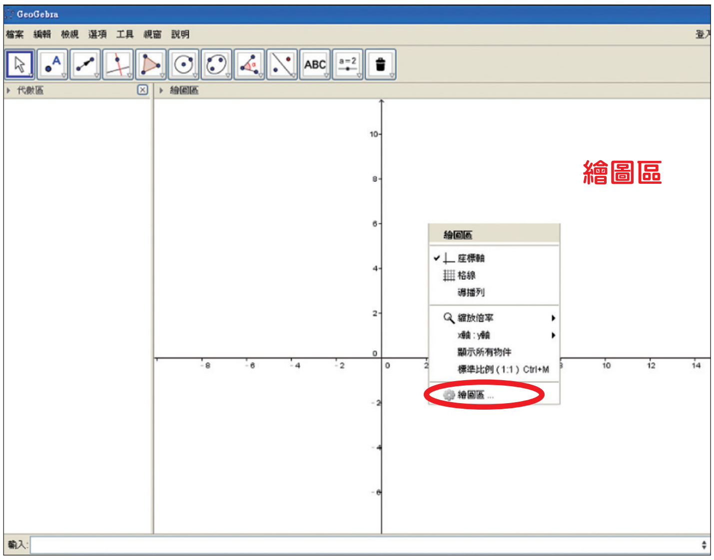


圖 8　點選繪圖區

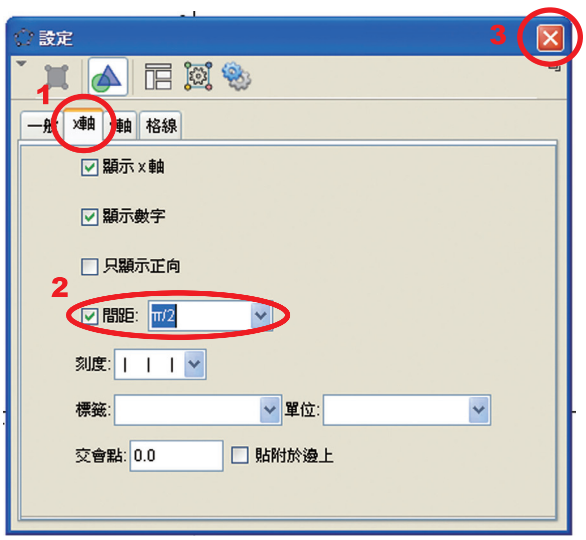


圖 9　調整 x 軸間距

出現左圖 9 之對話框，點選 x 軸，勾選間距 $\frac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\frac{\pi}{2}$。

搭配學生手冊 P8

做此說明週期函數的定義。

(2)描繪 $y=\sin x$ 的圖形：

如下圖 10，在下方指令列輸入「$y=\sin(x)$」。輸入Enter 鍵，即可得 $y=\sin x$ 的函數圖形如圖 11

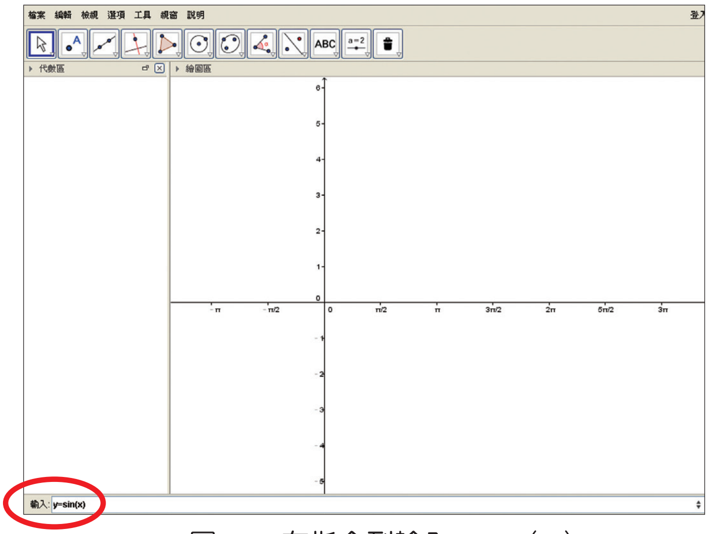


圖 10　在指令列輸入 $y=\sin(x)$

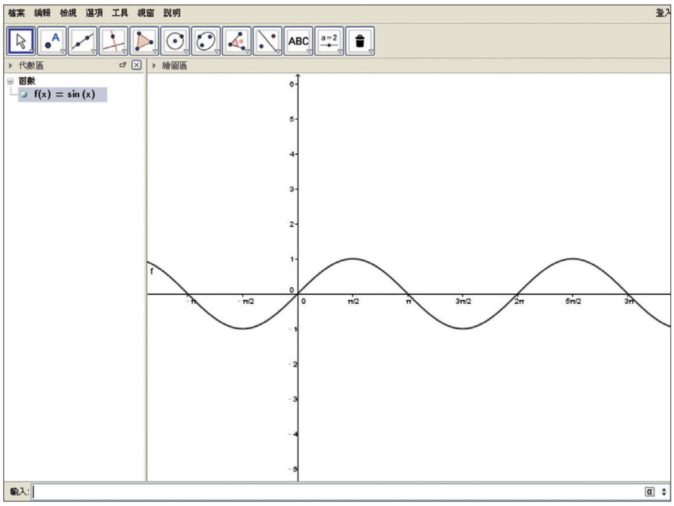


圖 11　繪圖區出現 $y=\sin x$ 的函數圖形

之前學過 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，我們發現角度相差2π時，函數值相同，也就是說函數圖形每隔 2π 會重複出現；像這樣滿足$f(p+x)=f(x)$的函數稱之為週期函數，其中滿足此式的最小正數 p 稱為此函數的週期。由此可知：正弦函數 $y=\sin x$ 為週期函數，且其週期為 2π 。

學生手冊 P8

若要改變圖形的顏色、樣式(粗細、虛線…),在所想改變的圖形上任一點,按一下右鍵,即會出現圖 12 對話框,此對話框會註明點選的物件,以滑鼠左鍵點選對話框中的「屬性」。

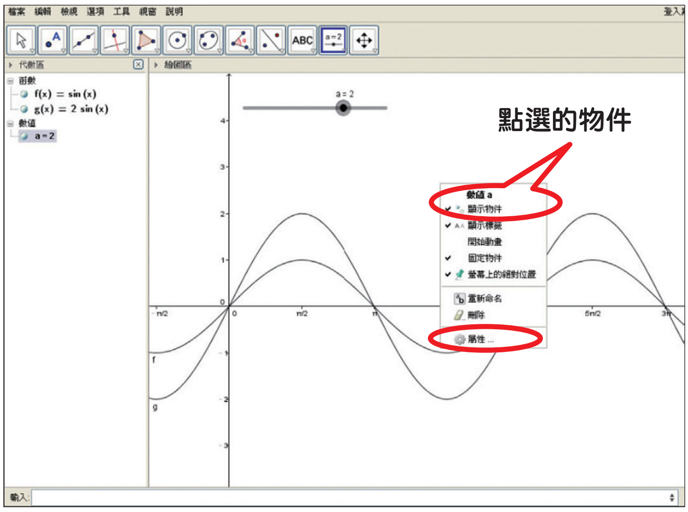


圖 12　點選物件,按滑鼠右鍵以設定屬性

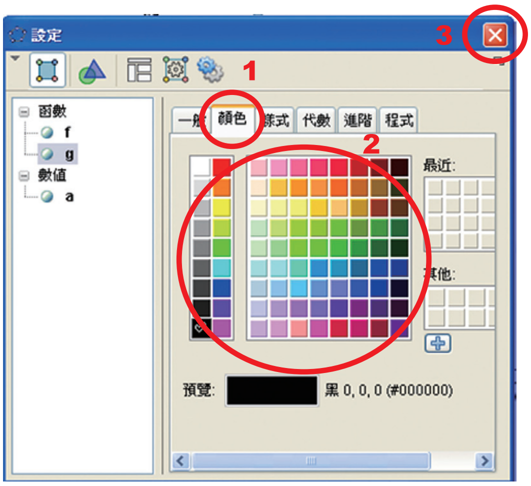


圖 13　出現屬性對話框,點選顏色,設定物件顏色,再關閉對話框

即出現如左圖 13 對話框,點選顏色。再依喜好選取想改變的顏色後,關閉對話框即可完成圖形顏色的改變。

可用相同的方式改變圖形的樣式,如圖 14,若以滑鼠左鍵點選右圖對話框中的「樣式」,即可依喜好選取想改變的線之粗細、或下拉選單選取線的樣式,最後關閉對話框即可。

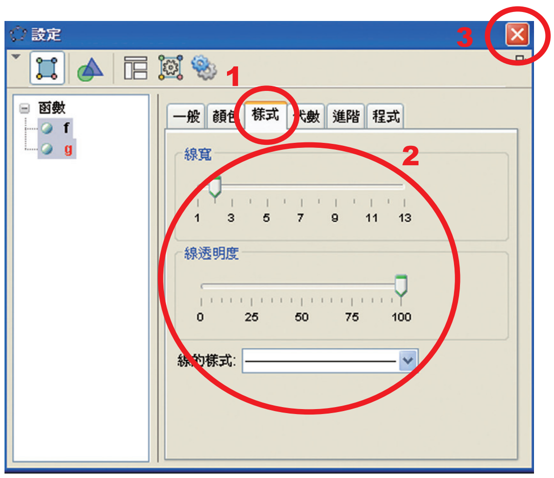


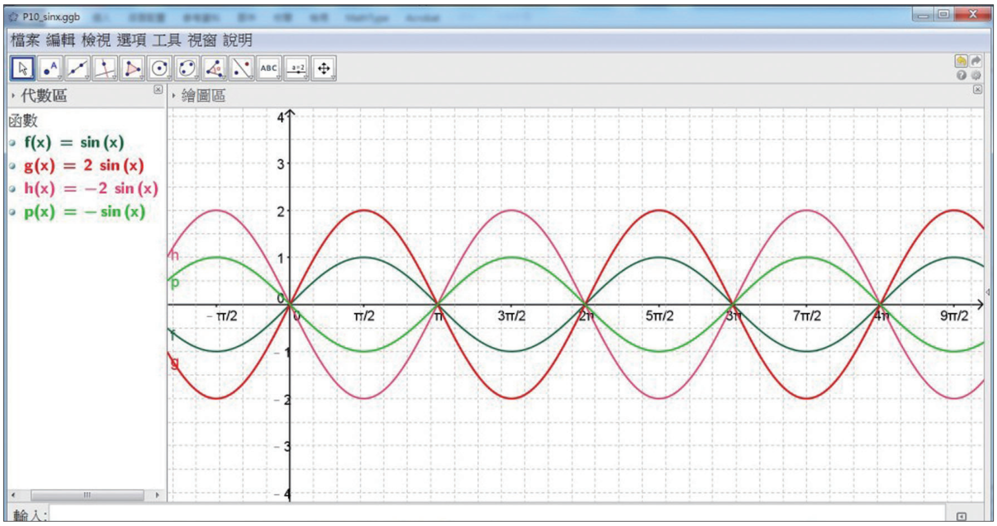
圖 14　在屬性對話框中設定物件(線)樣式,再關閉對話框

搭配學生手冊 P10

活動 2-2 解答：

1.

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$	1	-1	2π
$y=-\sin x$	1	-1	2π
$y=2\sin x$	2	-2	2π
$y=-2\sin x$	2	-2	2π



活動 2-2 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。 (2) $y=-\sin x$ 的圖形。

(3) $y=2\sin x$ 的圖形。 (4) $y=-2\sin x$ 的圖形。

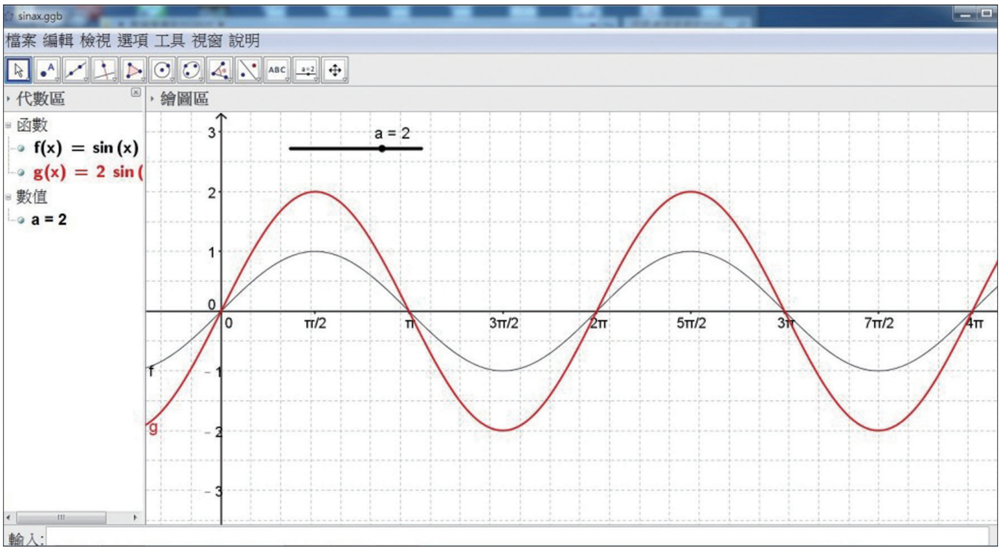
並將上述(1)(2)(3)(4)圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=-\sin x$			
$y=2\sin x$			
$y=-2\sin x$			

請將輸出列印的圖形貼於此

學生手冊 P10

搭配學生手冊 P11



活動 2-2 解答：

2.(1)a；$-a$

(2)2π

(3)圖形對稱 x 軸

(4)影響最大值與最小值（振幅）

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖

(1)製作數值滑桿：

以滑鼠左鍵點選下列對話框中的「數值滑桿」，然後在「繪圖區」上按一下，出現左圖 15 對話框，以滑鼠左鍵點選「套用」。

(2)繪製正弦函數 $y=a\sin x$的圖形：在下方指令列輸入「$y=a*\sin(x)$」。

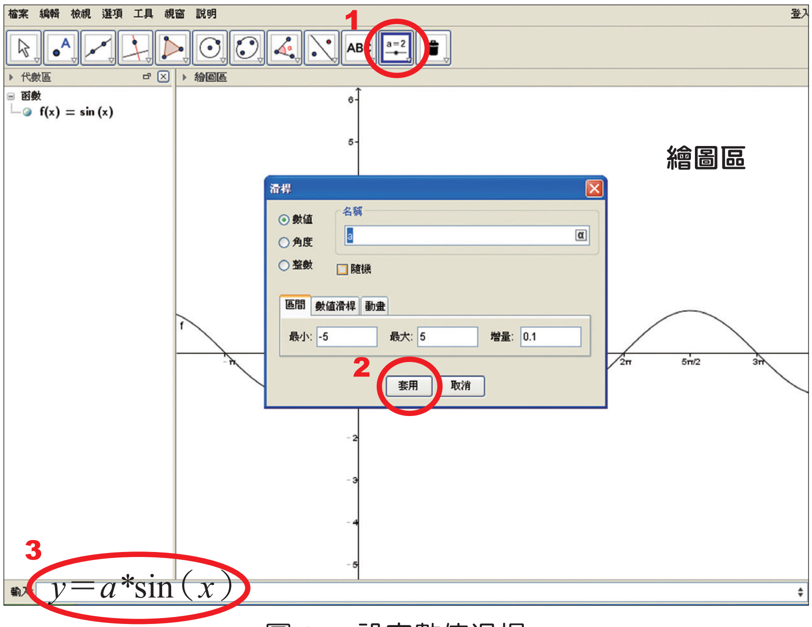


圖 15　設定數值滑桿 a

以滑鼠左鍵拉動滑桿，觀察 $y=a\sin x$ 的圖形變化。

（詳見附錄第 49~53 頁）

問題：(1)正弦函數 $y=a\sin x$ 的最大值為________，最小值為________

(2)正弦函數 $y=a\sin x$ 的週期為________

(3)正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖形與 $y=-a\sin x$ 的圖形有何關聯性？

____

(4)正弦函數 $y=a\sin x$ 關係式中的”a ”究竟影響了什麼？如何影響？

____

搭配學生手冊 P12

想想看2解答：

電流之峰值（最大值）與谷值（最小值）

想想看 1

在電學中，θ 表示線圈瞬間的角位移，某交流電發電機電流的瞬間值關係式為：電流瞬間值 $i=a\sin\theta$，請問在式子中，"a" 影響了交流電發電機電流瞬間值的哪些東西？（參考圖 16）________________

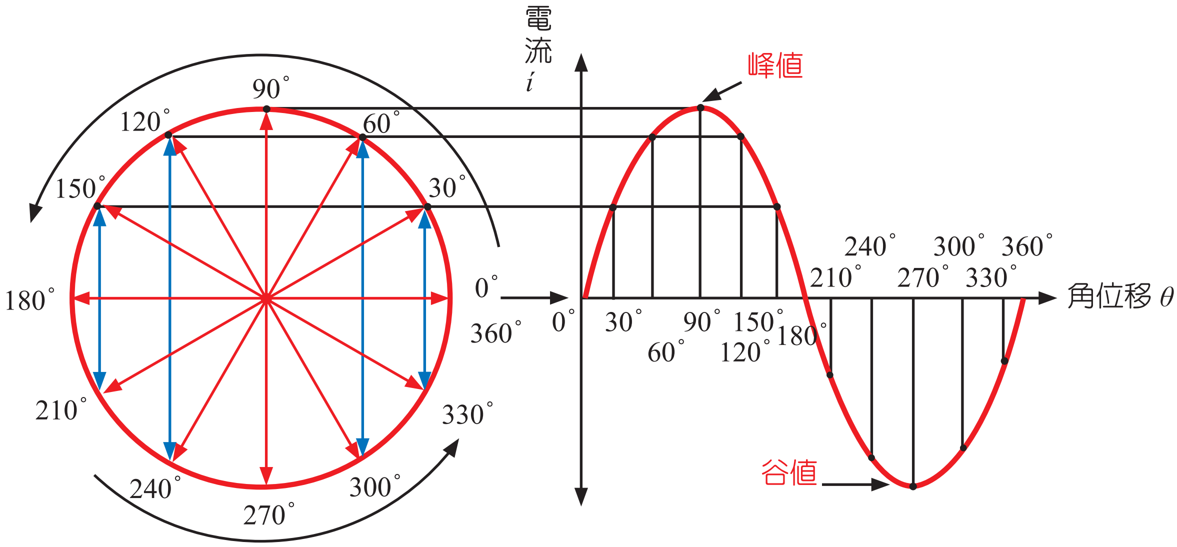


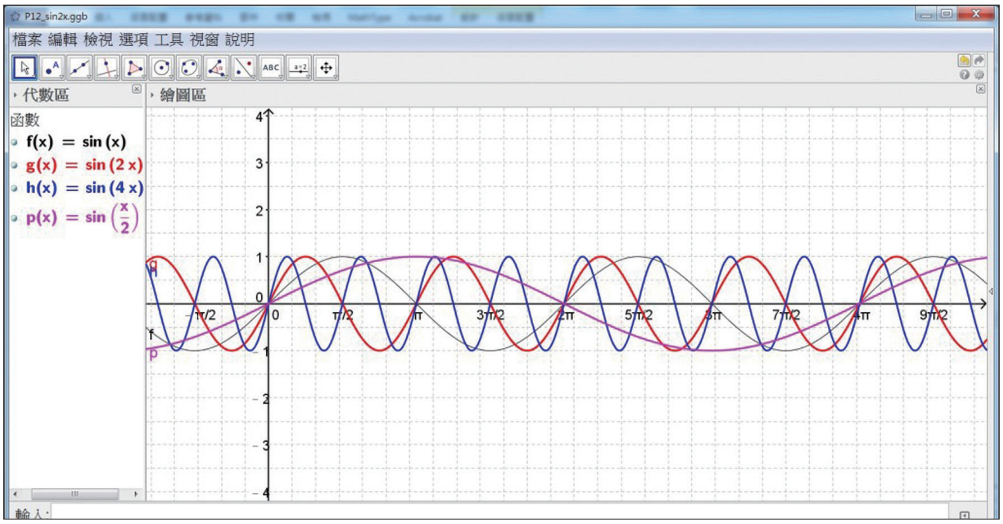
圖16　線圈角位移與電流瞬間值變化的關係

搭配學生手冊 P13

活動 3 解答：

1.

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$	1	-1	2π
$y=\sin 2x$	1	-1	π
$y=\sin 4x$	1	-1	$\frac{\pi}{2}$
$y=\sin\frac{x}{2}$	1	-1	4π



活動 3 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　(2) $y=\sin 2x$ 的圖形。

(3) $y=\sin 4x$ 的圖形。　(4) $y=\sin \dfrac{x}{2}$ 的圖形。

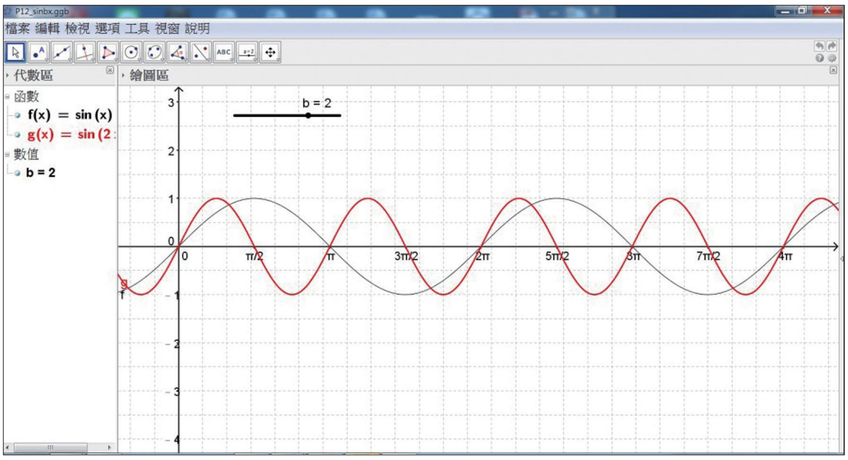
並將上述 (1)(2)(3)(4) 圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=\sin 2x$			
$y=\sin 4x$			
$y=\sin \dfrac{x}{2}$			

請將輸出列印的圖形貼於此

學生手冊 P13

搭配學生手冊 P14



2. (1) 1；－1

(2) $\dfrac{2\pi}{|b|}$

(3)圖形對稱 x 軸及 y 軸

(4)影響週期

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形

(1)製作數值滑桿 b，選取 $-8\leq b\leq 8$，

(2)繪製正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形，並以滑鼠左鍵拉動滑桿，

觀察 $y=\sin bx$ 的圖形變化。（詳見附錄第 53~54 頁）

問題：(1)正弦函數 $y=\sin bx$ 的最大值為__________，

最小值為__________

(2)正弦函數 $y=\sin bx$ 的週期為__________

(3)正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形與 $y=\sin(-bx)$的圖形有何關聯性？

____

(4)正弦函數 $y=\sin bx$ 關係式中的”b ”究竟影響了什麼？

____

搭配學生手冊 P15

想想看 1 解答：

電壓的週期 $T=\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}=0.02$（秒/次）

電壓的頻率 $f=\dfrac{1}{T}=50$（Hz，次/秒）

想想看 2 解答：

$i(t)=I_m\sin(2\pi ft+\theta_0)$

電流的週期 $T=\dfrac{2\pi}{2\pi f}=\dfrac{1}{f}$（秒/次)

電流的頻率 $=\dfrac{1}{T}=f$（Hz，次/秒）

想想看 1

在物理學中曾經學過，「頻率」指的是週期運動中，每秒出現的週期次數，其單位為赫茲（Hz：次數／秒）。由此可知，頻率與週期互為倒數。

在電學中，「相位」是描述交流電隨時間變化，線圈的不同位置（角度）；對於電流、電壓…而言，相位的變化，將導致大小和方向的不同。

例如：有一交流電，其相位角 θ 與時間 t（單位為秒）的關係式為：

相位角 $\theta = 100\pi t + 30^\circ$，而電壓的相位關係式可以寫成

$v_1(t) = 100\sin(100\pi t + 30^\circ)$ 伏特，此電壓的

週期 $T=$ ________________ 秒／次，頻率 $f=$ ______________ Hz

想想看 2

若交流電流的相位關係式可寫成：

交流電流的瞬間值 $i(t) = I_m\sin(2\pi f t + \theta_0)$ 安培

其中 t ：時間（秒）

I_m ：交流電流的最大值

θ_0 ：初相角（線圈初始的位置）；$-\pi < \theta_0 \leq \pi$

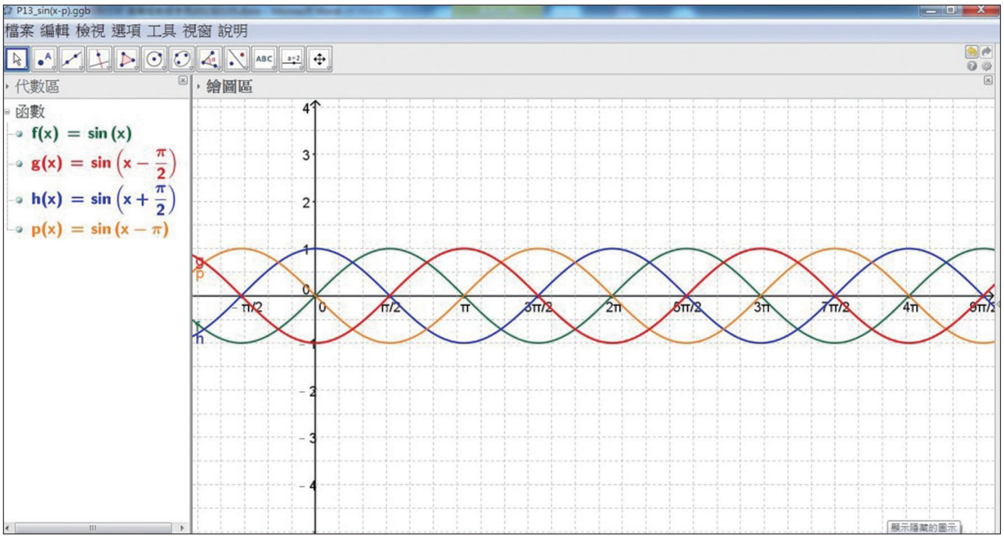
請問：此電流的週期與頻率各是多少？________________________________

搭配學生手冊 P16

活動 4 解答：

1.

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$	1	-1	2π
$y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$	1	-1	2π
$y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$	1	-1	2π
$y=\sin(x-\pi)$	1	-1	2π



活動 4 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。 (2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形。

(3) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形。 (4) $y=\sin(x-\pi)$ 的圖形。

並將上述 (1)(2)(3)(4) 圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

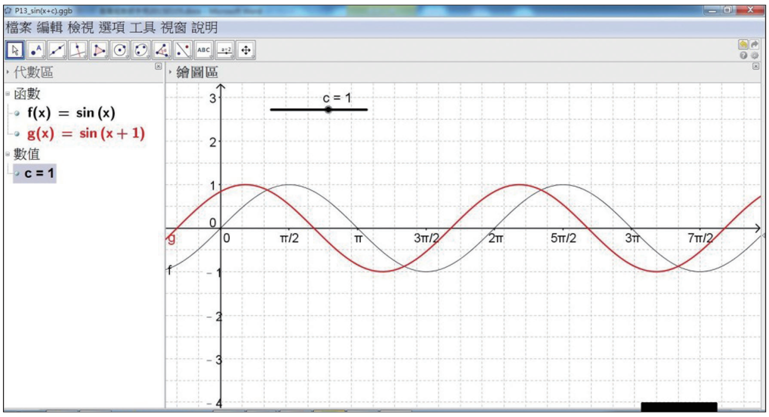
	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$			
$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$			
$y=\sin(x-\pi)$			

請將輸出列印的圖形貼於此

搭配學生手冊 P17

活動 4 解答：

2.



(1) 1；-1

(2) 2π

(3) 若 $c>0$，$y=\sin(x+c)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向左移 c 單位。

若 $c<0$，$y=\sin(x+c)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向右移 $|c|$ 單位。

(4) 圖形左右平移

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $\sin(x+c)$ 的圖形

(1) 製作數值滑桿 c，選取 $-5 \leq c \leq 5$

(2) 繪製正弦函 $y=\sin(x+c)$ 的圖形，並以滑鼠左鍵拉動滑桿，觀察 $y=\sin(x+c)$ 的圖形變化。（詳見附錄第 54~55 頁）

問題：(1) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的最大值為________，最小值為________

(2) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的週期為__________

(3) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的圖形與 $y=\sin x$ 的圖形有何關聯性？

____

(4) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 關係式中的”c ”究竟影響了什麼？

____

搭配學生手冊 P18

註 3：

角速度：發電機中線圈在磁場中旋轉，其旋轉的速度稱之爲角速度。

角速度 $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$（弧度/秒）

想想看 1 解答：

答：(A)

想想看 2 解答：

答：(C)

想想看 1

前面曾經提到，在電學中，「相位」是描述交流電隨時間變化，線圈的不同位置（角度）。對於電流、電壓⋯而言，相位的變化，將導致大小和方向的不同。

一般而言，交流電流的相位關係式可寫成：

交流電流的瞬間值 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\theta_0)$ 安培

$=I_m\sin(2\pi ft+\theta_0)$；$-\pi<\theta_0\leq\pi$

其中 I_m：交流電流的最大值　　t：時間（秒）

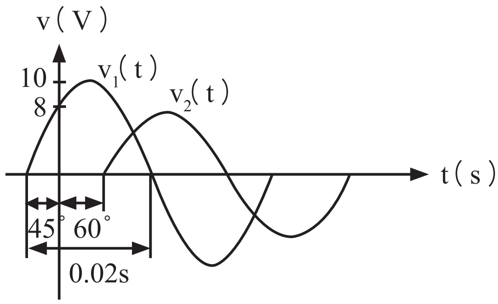
f：頻率（Hz：週期運動的次數 / 秒）　　θ_0：初相角（線圈初始的位置）

$\omega=2\pi f$：角速度（弧度 / 秒）　　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

而對於兩個週期相同的電壓或電流交流訊號，習慣上自相位角0° 開始繪圖以利觀察，則在圖形上，初始位置較左的訊號稱為相位「**領先**」或「**超前**」，否則就稱為相位「**落後**」或「**滯後**」。根據下圖，

請判斷 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 的相位關係為？

(A) $v_1(t)$ 相位領先 $v_2(t)$ 相位 105°
(B) $v_2(t)$ 相位領先 $v_1(t)$ 相位 105°
(C) $v_1(t)$ 相位落後 $v_2(t)$ 相位 105°
(D) $v_2(t)$ 相位落後 $v_1(t)$ 相位 150°



想想看 2

若有兩個交流訊號，分別為 $v(t)=60\sin(377t+30°)$ 伏特和 $i(t)=40\sin(377t-10°)$ 安培，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？

(A) v 超前 i 20°　(B) v 滯後 i 20°　(C) v 超前 i 40°　(D) v 滯後 i 40°

搭配學生手冊 P19

活動 5 解答：

(1) 1；-1；2π

(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$；左，$\frac{\pi}{2}$

想想看 3 解答：

答：(B)

因爲 $i_2=-30\cos(\omega t-30^\circ)=-30\sin[90^\circ-(\omega t-30^\circ)]$

$=-30\sin(120^\circ-\omega t)=30\sin(\omega t-120^\circ)$

故 $i_1=60\sin(\omega t-30^\circ)$ 領先 i_2 $(-30^\circ)-(-120^\circ)=90^\circ$

老師的話：

請提醒同學，由上述結論可以驗證：$y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，亦即 $y=a\cos(\omega t+\theta)$ 的圖形”領先” $y=a\sin(\omega t+\theta)$ 是 90°。

活動 5 繪製餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

1. 由第 2 頁的說明可知，在單位圓上，θ 終邊 P 點的 x 座標即為 $\cos\theta$ 之值。請你利用前面的結論以及下面圖 17 的單位圓，在右圖的座標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形。

活動 5 解答：

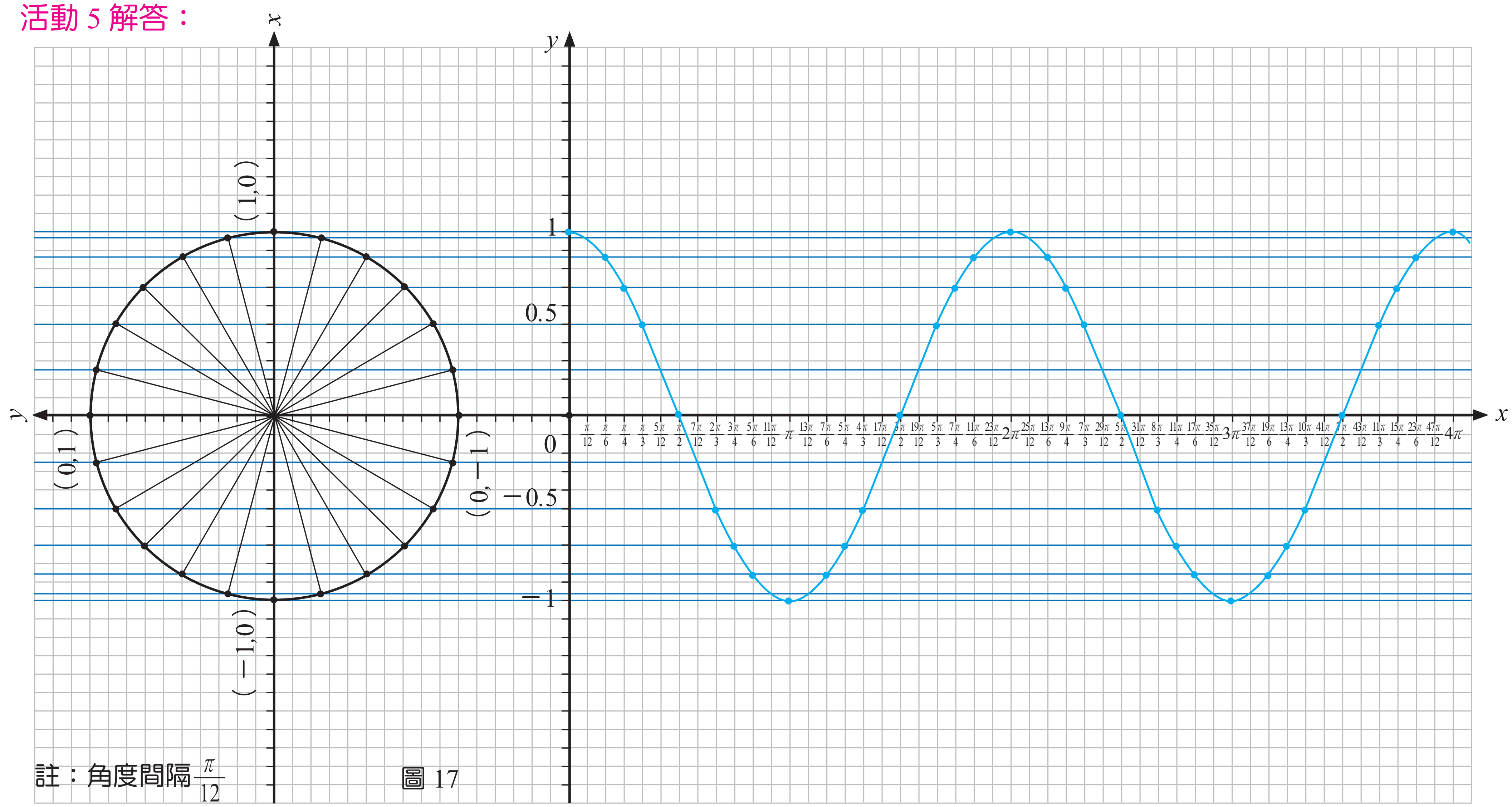


圖 17

問題：(1)餘弦函數 $y=\cos x$ 的最大值為__________，最小值為__________，週期為________

(2)請問餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形與第 16 頁【活動4】的哪一個函數圖形相同？_____，也就是 $y=\cos x$ 的圖形相當於是將 $y=\sin x$ 的圖形向_____平移_____單位

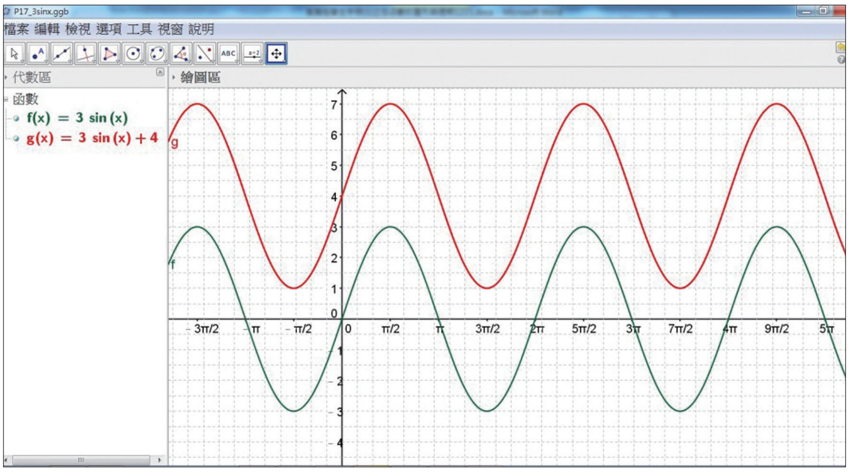
想想看 3

若 $i_1=60\sin(\omega t-30^\circ)$，$i_2=-30\cos(\omega t-30^\circ)$，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？(A) i_1 與 i_2 同相　(B) i_1 領先 i_2 90°　(C) i_1 落後 i_2 90°　(D) i_1 落後 i_2 60°

搭配學生手冊 P20

活動 6 解答：

1.



(1)3；－3；7；1

(2)2 π ；2 π

(3)y＝3sin$x$＋4 的圖形是將 y＝3sin$x$ 的圖形向上平移 4 單位

活動 6 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=a\sin bx+d$ 的圖形

1. (1)請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=3\sin x$ 的圖形，並將圖形，輸出列印。（詳見附錄第 55~56 頁）

   (2)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=3\sin x+4$ 的圖形，並將圖形， 輸出列印。

   問題：(1)正弦函數 $y=3\sin x$ 的最大值為________，最小值為________

   正弦函數 $y=3\sin x+4$ 的最大值為________，最小值為________

   (2)正弦函數 $y=3\sin x$ 的週期為________________

   正弦函數 $y=3\sin x+4$ 的週期為________________

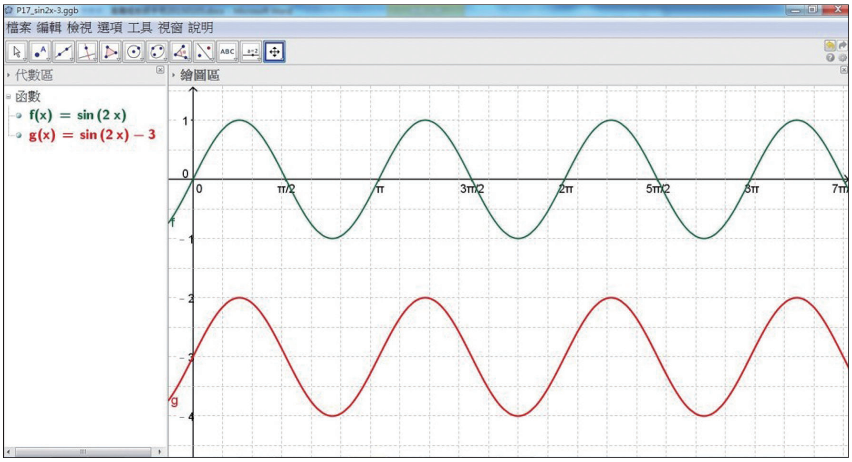
   (3)正弦函數 $y=3\sin x$ 的圖形與 $y=3\sin x+4$ 的圖形有何關聯性？

   ____

請將輸出列印的圖形貼於此

搭配學生手冊 P21

2.



(1) 1；-1；-2；-4

(2) π ；π

(3) $y=\sin 2x-3$ 的圖形是將 $y=\sin 2x$ 的圖形向下平移 3 單位

結論解答：

a 影響最大值與最小值（振幅）

b 影響週期（週期爲 $\dfrac{2\pi}{|b|}$）

c 影響圖形左右平移

d 影響圖形上下平移

2. (1)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=\sin 2x$ 的圖形，並將圖形，輸出列印。

(2)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=\sin 2x-3$ 的圖形，並將圖形， 輸出列印。

問題：(1)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的最大值為________，最小值為________

正弦函數 $y=\sin 2x-3$ 的最大值為________，最小值為________

(2)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的週期為________________

正弦函數 $y=\sin 2x-3$ 的週期為________________

(3)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的圖形與 $y=\sin 2x-3$ 的圖形有何關聯性？

____

請將輸出列印的圖形貼於此

【結論】

在正弦函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的圖形中，a、b、c、d 對於圖形分別有何影響？

____

____

____

搭配學生手冊 P22

想想看 1 解答：

由圖形可知，此函數週期爲 0.02 秒/次，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}=0.02$

$\omega=\frac{2\pi}{0.02}=100\pi\fallingdotseq 314$

又此函數最大值爲 100，最小值爲 -100，且通過原點（0,0），

故此函數關係式爲 $v(t)=100\sin(314t)$

想想看 1

前面曾經提過，在電學中，交流電的電壓、電流 … 等，常可以寫成下面的式子：

$$x(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)=A\sin(2\pi ft+\theta_0)，t\geq 0$$

其中 A ：振幅　　f：頻率（Hz：週期運動的次數 / 秒）

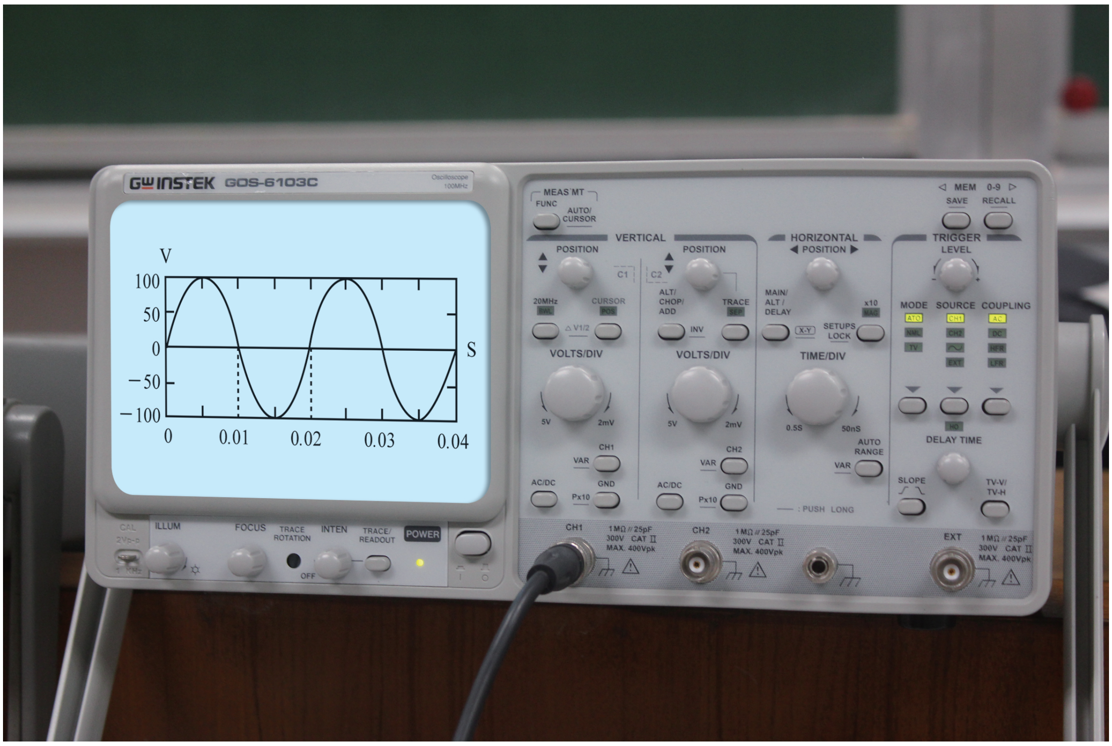
t ：時間（秒）　　$\omega=2\pi f$：角速度（弧度 / 秒）

θ_0 ：初相角（線圈初始的位置）　　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

下圖為某電壓的波形，請問以下何者近似此電壓瞬間值 $v(t)$ 的關係式？

(A) $v(t)=100\sin(377t)$　　(B) $v(t)=70.7\sin(377t)$

(C) $v(t)=100\sin(314t)$　　(D) $v(t)=100\sin(377t+60^\circ)$ 伏特。



搭配學生手冊 P23

想想看 2 解答：

$\because v(t)=100\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，當角度為 $\frac{\pi}{2}$ 時，出現第一個峰值（最大值）

此時 $10\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

$10\pi t=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$

$t=\frac{\pi}{60\pi}=\frac{1}{60}$（秒）

想想看 3 解答：

當 $v(t)=100\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=0$，此時 $10\pi t+\frac{\pi}{3}=n\pi$ $(n\in Z)$

當 $n=1$ 時，$10\pi t=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$t=\frac{2\pi}{30\pi}=\frac{1}{15}$（秒）

想想看 2

已知一電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=100\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ 伏特，若自相位角 0° 開始繪圖，則在時間為多少時，此電壓波形出現第一個峰值（最大值）？(A) $\frac{1}{60}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{\pi}{60}$ (D) $\frac{\pi}{30}$ 秒。

想想看 3

有一正弦波電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=100\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ 伏特，則在以下哪一個時間點，此電壓瞬間值為 0 伏特？

(A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{\pi}{60}$ (D) $\frac{\pi}{30}$ 秒。

課後作業

1. 試繪出 $y=f(x)=\sin(2x+\pi)$ 的圖形，並求出(1)函數的週期。(2)函數的最大值與最小值。

2. 下圖 1 是三角函數圖形的一部分，請問下列何者可能是它的關係式？
(A) $y=f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$　(B) $y=f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$
(C) $y=f(x)=2\sin(x-\pi)$　(D) $y=f(x)=2\sin(2x+\pi)$

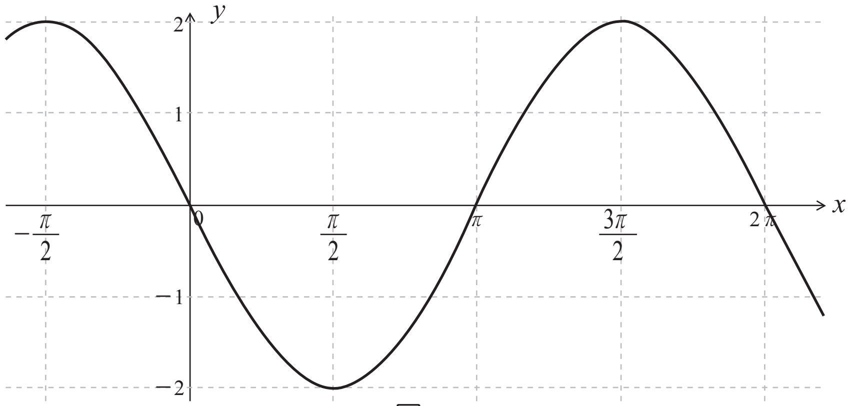


圖1

3. 若有兩個週期皆為 2π 的交流訊號 v 與 i，如圖 2(顯示的數字為週期的幾分之幾)，請判斷 v 與 i 之相位差為多少？
(A) 30°　(B) 45°
(C) 53°　(D) 60°

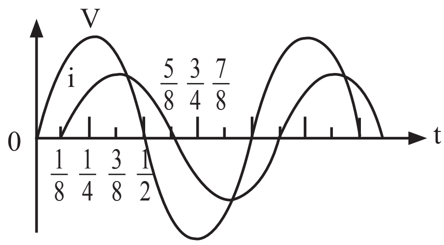


圖2

4. 承上題，若 $v(t)=10\sin(\omega t)$，則 $i(t)$ 最有可能如何表示？
(A) $i(t)=7\sin(\omega t-45^\circ)$　(B) $i(t)=7\sin(\omega t+45^\circ)$
(C) $i(t)=10\sin(\omega t+45^\circ)$　(D) $i(t)=7\sin(2\omega t+60^\circ)$。

5. 前面曾經提過，在電學中，交流電的電壓、電流 … 等，常可以寫成下面的式子：$x(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)=A\sin(2\pi ft+\theta_0)$，$t\geq 0$
其中 A：振幅　f：頻率(Hz：次數 / 秒)
t：時間(秒)　$\omega=2\pi f$：角速度(弧度 / 秒)
θ_0：初相角(線圈初始的位置)　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

圖 3 為某電壓的波形，請問以下何者為此電壓瞬間值 $v_1(t)$ 的關係式?

(A) $v_1(t)=10\sin(50\pi t-45^\circ)$
(B) $v_1(t)=10\sin(50\pi t+45^\circ)$
(C) $v_1(t)=10\sin(100\pi t-45^\circ)$
(D) $v_1(t)=10\sin(100\pi t+45^\circ)$ 伏特。

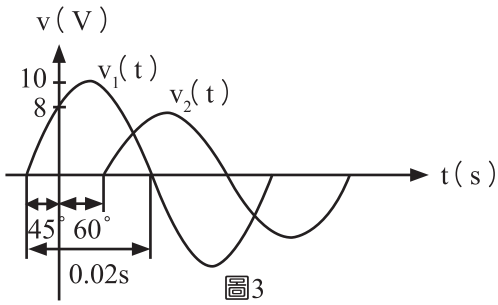


圖3

6. 已知 $e(t)=E_m\sin(\omega t+30^\circ)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t-30^\circ)$，則 e 與 i 之相位關係為？

(A) e 超前 i 60°　(B) e 超前 i 150°　(C) i 超前 e 30°　(D) i 超前 e 60°

7. 設有交流電壓 $v(t)$ 與電流 $i(t)$ 瞬間值關係式如下：
$v(t)=110\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)$ 伏特　$i(t)=10\sqrt{2}\sin(314t-80^\circ)$ 安培
請判斷電壓與電流的相位關係為何？

(A) 電壓領先電流90°　(B) 電壓領先電流30°
(C) 電壓落後電流90°　(D) 電流落後電壓110°

8. 設一交流電流瞬間值 $i(t)$ 與時間 t(秒)的關係式為 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$ 安培，若自相位角 0° 開始繪圖，則在時間為多少時，此電流波形出現第一個正峰值(最大值)？

(A) $t=\frac{\pi}{3\omega}$　(B) $t=\frac{2\pi}{3\omega}$　(C) $t=\frac{\pi}{4\omega}$　(D) $t=\frac{\pi}{\omega}$ 秒。

9. 承上題，在時間為多少時，此電流波形出現第一個負峰值(最小值)？

(A) $t=\frac{\pi}{4\omega}$　(B) $t=\frac{2\pi}{3\omega}$　(C) $t=\frac{\pi}{\omega}$　(D) $t=\frac{4\pi}{3\omega}$ 秒。

10. 圖 4 為某電壓 $e(t)$ 的波形，請問以下何者可能為此電壓瞬間值的關係式？

(A) $e(t)=E_m\sin\omega t$
(B) $e(t)=-E_m\sin\omega t$
(C) $e(t)=E_m\sin(\omega t+90^\circ)$
(D) $e(t)=E_m\sin(\omega t-90^\circ)$
(令 $\omega t=\theta$)

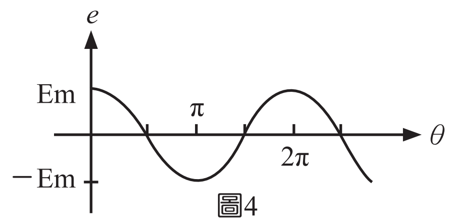


圖4

11. 已知某電路之電壓 $e=100\sin(\omega t+60^\circ)$，電流 $i=10\sin(\omega t+20^\circ)$，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？

(A) 電壓滯後電流 40°　(B) 電壓超前電流 40°
(C) 電流滯後電壓 80°　(D) 電流超前電壓 80°

12. 若有兩個交流訊號，分別為 $v(t)=100\sin(377t+30^\circ)$ 伏特和 $i(t)=5\sin(377t+60^\circ)$ 安培，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？
(A) v 超前 i 30°　(B) v 落後 i 30°　(C) v 超前 i 90°　(D) v 落後 i 90°

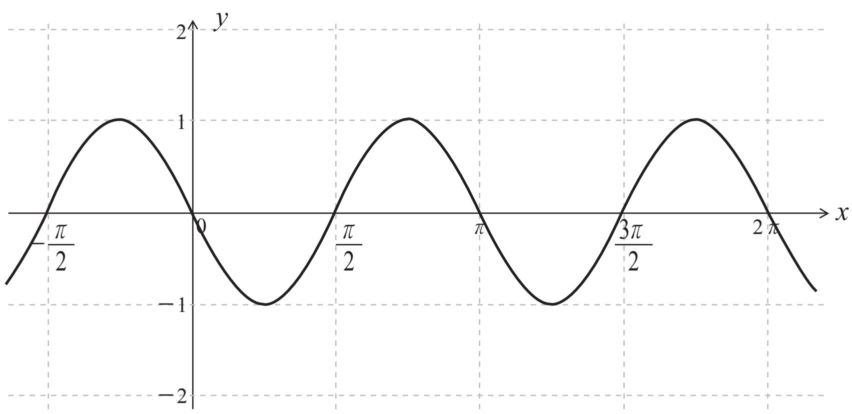
13. 若一個正弦波交流訊號瞬間值與時間 t 的關係式為 $x(t)=10\sin(10\pi t+60^\circ)$，則下列哪一個關係式也可代表此波形？
(A) $x(t)=-10\cos(10\pi t+60^\circ)$　(B) $x(t)=10\cos(10\pi t+150^\circ)$
(C) $x(t)=10\cos(10\pi t-30^\circ)$　(D) $x(t)=10\cos(10\pi t-60^\circ)$

14. 有一電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=110\sqrt{2}\sin(377t+30^\circ)$ 伏特，請問此電壓波形的頻率約為多少？(A) 60　(B) 50　(C) 314　(D) $100\sqrt{2}$ Hz。

15. 設一電流瞬間值 $i(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $i(t)=300\sin(377t-30^\circ)$，請問此電流 $i(t)$ 的週期為多少？(A) $\frac{1}{35}$　(B) $\frac{1}{50}$　(C) $\frac{1}{60}$　(D) $\frac{1}{75}$ 秒/次。

課後作業解答

1. $y=f(x)=\sin(2x+\pi)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 圖形如下。
(1) 函數的週期為 π，(2) 函數的最大值為1，最小值為 -1。



2. (C)	3. (B)	4. (A)	5. (B)
6. (C)	7. (D)	8. (A)	9. (D)
10. (C)	11. (B)	12. (B) 解析：$\theta=\theta_v-\theta_i=30^\circ-60^\circ=-30^\circ$	
13. (C)	14. (A)	15. (C)	

搭配學生手冊 P27

此頁內容係利用生活實例及情境，引起學生思考動機並藉以切入本單元的主題。

當中的 Yahoo！奇摩知識＋的問題，是期盼學生最後能夠得知所謂的「110 伏特」或「220 伏特」是指交流電電壓的「有效值」，在本段落最後的問題中會提及此常識。

爲了期盼學生能得知所謂的「110 伏特」或「220 伏特」是指交流電電壓的「有效值」，另利用圖 2 讓學生複習前段課程曾學到的正弦波波形與磁場線圈的關係。

二、交流電的平均值、有效值與積分

購買電器是平常生活中經常發生的事情，民眾在出國旅遊時若要使用自備的電器，或在國外購買電器用品時，都須留意當地使用的電壓是多少伏特、插座與電器插頭的類型等，例如臺灣的家用電壓值是 110 伏特或 220 伏特（空調等高耗電設備使用 220V 的電壓）、常用的插頭是美式 2 接腳或美式 3 接腳的形式；香港的電壓值是 220 伏特、常用的插頭是英式 3 接腳的形式；而國人常去的日本，電壓值是100 伏特，常用的插頭和臺灣相同。


知識問題 ｜ 發問中 交流電電壓
[檢舉]
發問者：書妤（初學者 5 級）
發問時間：2005-02-12 14:56:14（還有 1 天發問到期）
解答贈點：5（共有 0 人贊助）
回答：0 意見：0
問一般人台灣的交流電電壓是多少
回答都一定會是110V或220V
從日常生活中不難看到，適用於台灣的家電也都標明電壓值是110V或220V
可是實際拿三用電表去測量會發現數據不是110V 或220V
為什麼會有不同?

圖 1 「Yahoo！奇摩知識＋」的網友提問

右圖 1 是 2005 年 2 月 12 日在「Yahoo！奇摩知識＋」中一位網友的提問，你能回答他的問題嗎？

此外，廣泛地運用在家庭與工業用電的交流電（Alternating Current，簡稱 AC），其電壓極性、振幅與電流方向會隨時間而改變，下圖 2 是常見的交流電波形「正弦波」，所謂的「電壓 110 伏特」又是怎麼回事呢？

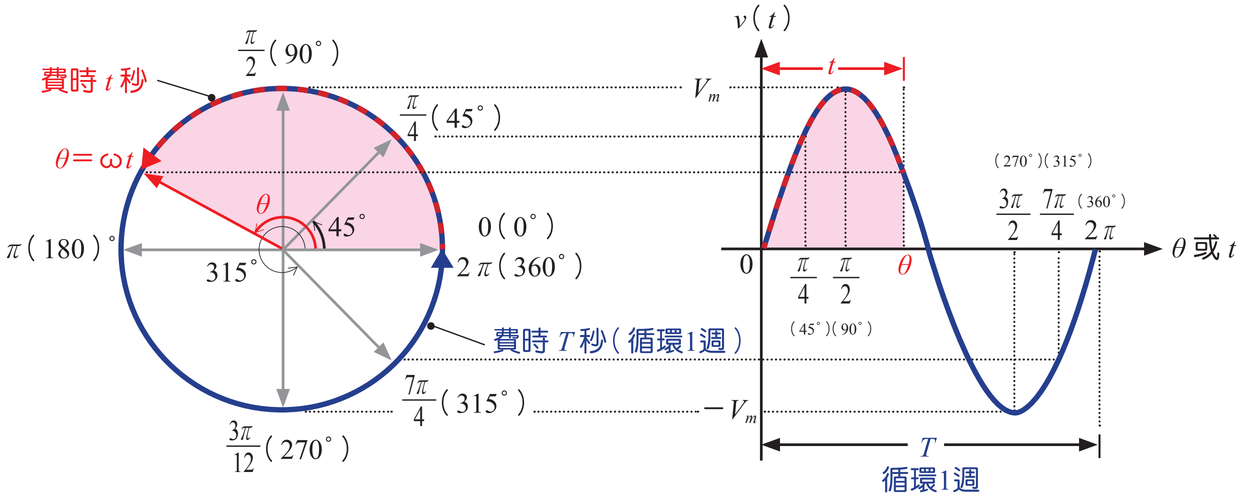


圖 2 常見交流電波形－正弦波

學生手冊 P27

搭配學生手冊 P28

帶領學生複習焦耳定律及歐姆定律，並藉由相關的觀念（如：電能）作爲本段課程的先備知識。

焦耳定律解答：

I^2R

老師的話：

想想看是利用複習的焦耳定律，給予學生進行較具生活情境的練習。

想想看解答：

設可待機 t 小時，

$0.035\times t=3.5\times\frac{1000}{1000}$

$t=100$（小時）

老師的話：

但因上述問題是以直流電爲例，對於交流電相關數值的計算學生尚未有眞正的認知，故可在此處以「交流電數值不停地變動，該如何描述其電流、電壓的值，或找出代表性的值？」提問，作爲教師下面內容的鋪陳，並視情況引發學生思考此問題。

在解決上列問題之前，我們先來複習先前學過的公式：

【焦耳定律】

電功率 P：單位時間所消耗的能量 W，其單位為瓦特。其中「能量」係指移動 Q 庫侖的電荷，產生 V 伏特電壓所需之電能。

$P=\frac{W}{t}=\frac{Q\times V}{t}=($　　　　　　　$)$

上面提到能量 $W=Q\times V$，過去我們曾學到電流 I 是指單位時間通過某一截面的電量，即 $I=\frac{Q}{t}$，所以 $W=Q\times V=\frac{Q}{t}\times V\times t=I\times V\times t$

由歐姆定律─$V=I\times R$ 可以得知，

$$W=I\times V\times t=I\times I\times R\times t=I^2Rt$$

想想看 1

已知某智慧型手機待機時的消耗功率為 0.035 瓦特，若它的電池規格為 3.5 伏特、1000mAh（毫安培．小時），則在理想的待機情況下，充飽電並拔除充電的電源後，約可待機多少小時？

電力公司是以電能（$W=P\times t$，單位是千瓦特×小時）作為計算電費的依據，然而上述的電功率 P 在直流電路的計算較為容易，但交流電路中，電壓與電流會隨時間改變，該如何計算呢？

在科學技術的歷程中，人們對於直流電的認識早於交流電許多。故在交流電進入實用的階段以前，對直流電的研究已經相當全面了。因此人們自然容易想到，若能將交流電的一些數值換算成某一直流電的固定數值，在工程計算、解決問題或應用上應可帶來許多便利。

在基本電學「交流電」單元中提到，交流電波形常用的數值包含瞬間值、最大值（正峰值）、最小值（負峰值）、峰對峰值、平均值和有效值，其中平均值和有效值分別與微積分、三角函數的二倍角公式有極大的關聯，我們先藉著以下活動來認識平均值。

學生手冊　P28

搭配學生手冊 P29

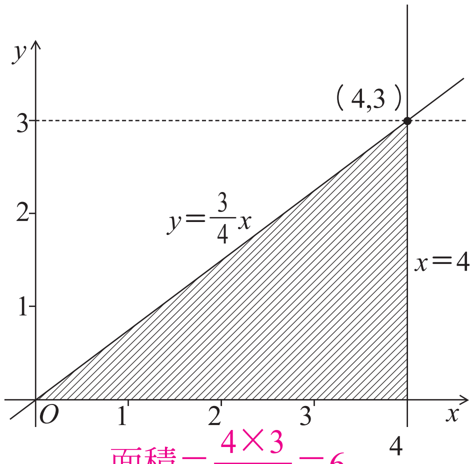
藉活動 1 至活動 3 做爲平均值定義的概念鋪陳

活動 1 解答：

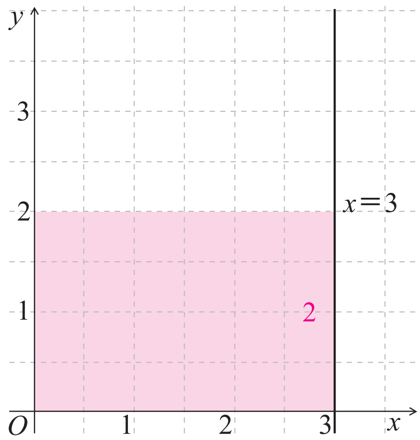
面積$=\dfrac{4\times3}{2}=6$

面積$=\dfrac{(1+3)\times3}{2}=6$

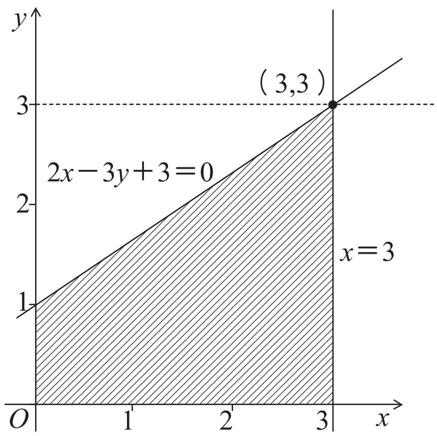
2.



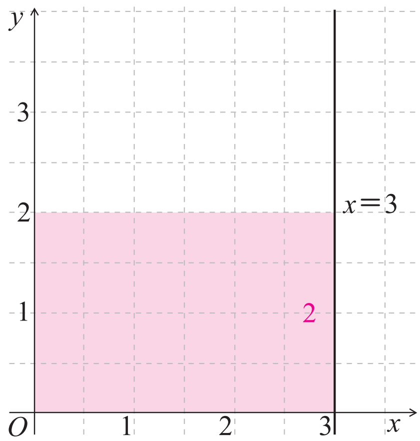
面積$=\dfrac{4\times3}{2}=6$



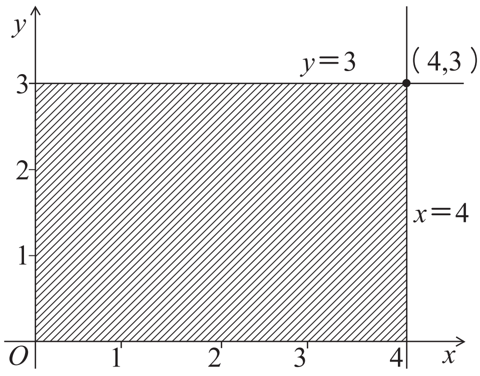
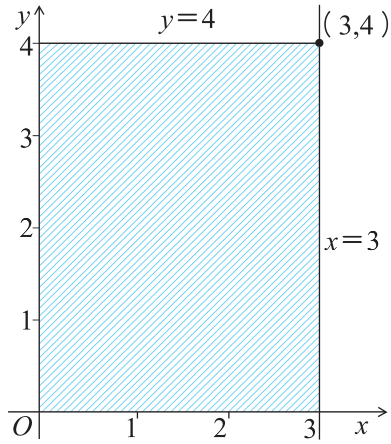
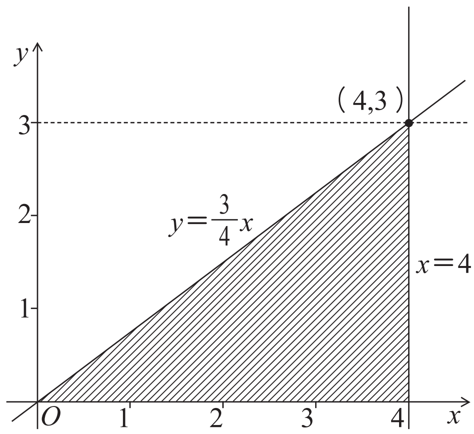
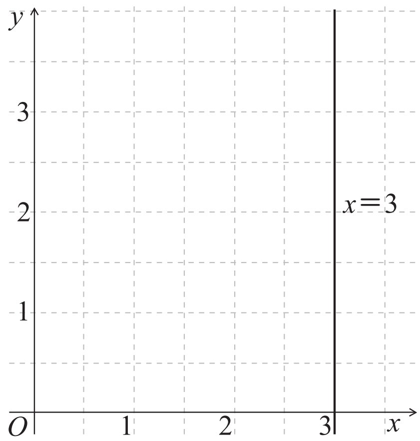
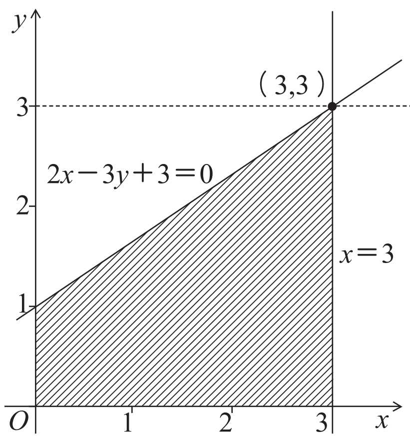
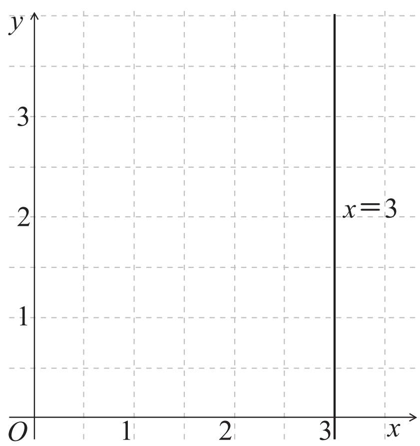
3.



面積$=\dfrac{(1+3)\times3}{2}=6$



活動 1 請計算下列各小題斜線區域的面積，並於右側繪製與該區域面積相同、水平寬度為 3 單位長的矩形。

<table>
<tr><td>1.</td><td>
區域面積＝4×3＝12</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

學生手冊 P29

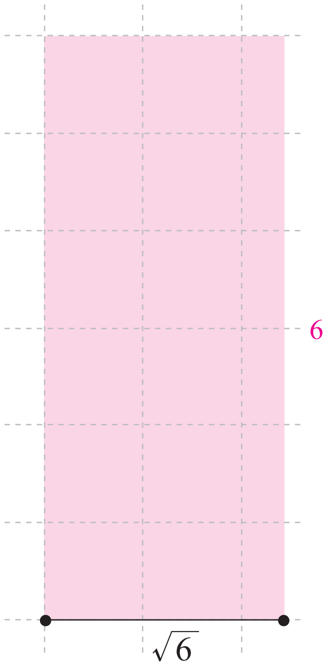
搭配學生手冊 P30

活動 2 解答：

利用海龍公式先進行三角形面積之值的計算

$s=\frac{1}{2}\times(5+6+7)=9$

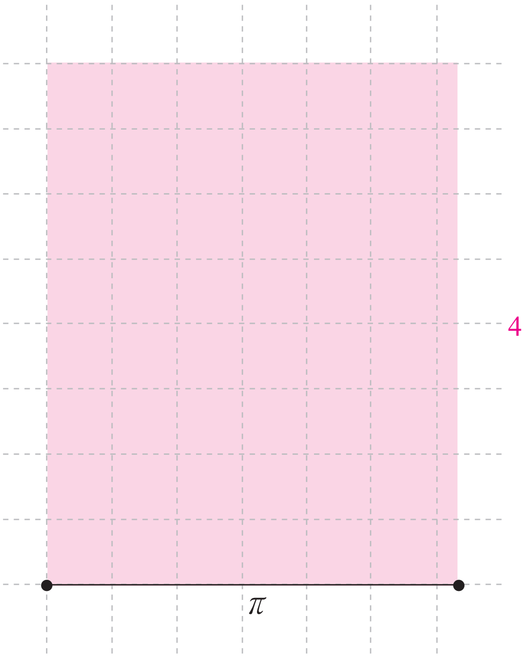
面積 $\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}=6\sqrt{6}$



活動 3 解答：

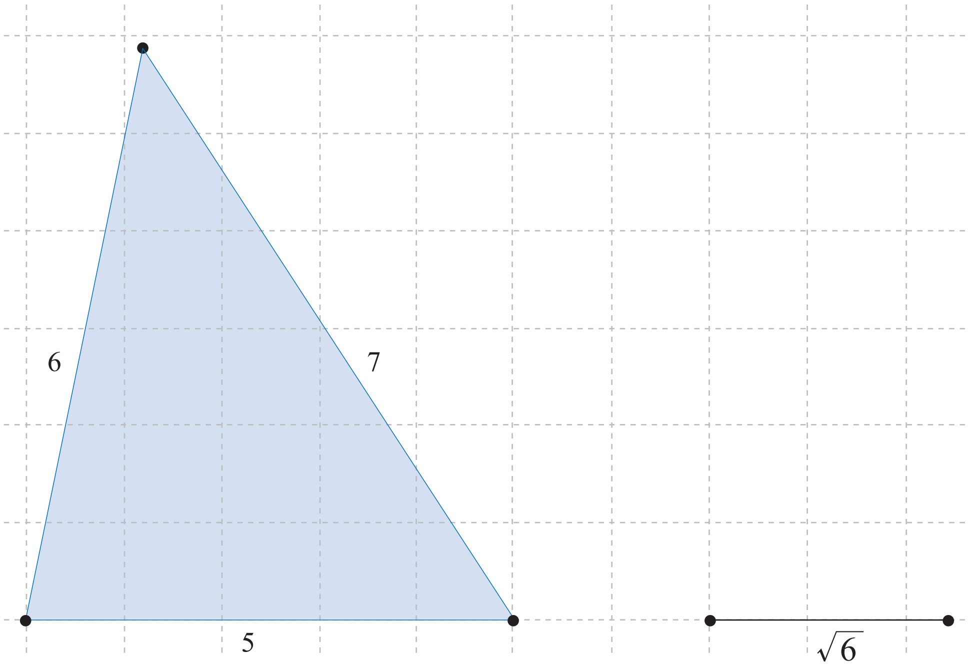
利用圓形面積公式先進行圓形面積之值的計算

半徑 $r=2$，圓的面積爲 $\pi\times2^2=4\pi$



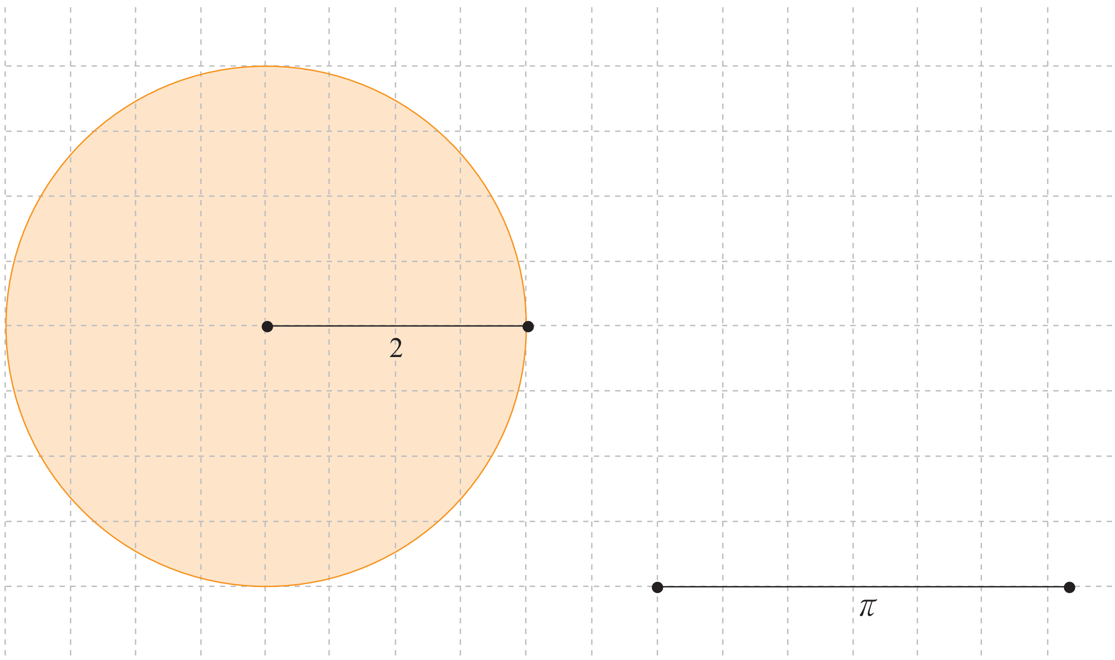
活動 2

請計算下列著色區域的面積，並在它的右側繪製與著色區域面積相同、水平寬度為 $\sqrt{6}$ 單位長的矩形。



活動 3

請計算下列著色區域的面積，並在它的右側繪製與著色區域面積相同、水平寬度為 π 單位長的矩形。



搭配學生手冊 P31

在進行本頁活動 4 之前，教師可帶領學生閱讀或要求學生預習附錄三「積分的意義」，讓學生了解或複習定積分的定義，並學會利用 Geogebra 計算指定函數與範圍的定積分之值。

又或者教師可利用活動 4 作為教導學生定積分的定義及利用 Geogebra 計算定積分值的範例，再請學生以活動 5 作為練習。

活動 4 解答：

⑵2；2π

⑶Integral[f，0，pi]

⑷4

活動 5 解答：

⑵Integral[f，0，2pi]

⑷0

在上列活動中，我們試著計算出規則圖形的面積，並描繪具有相等面積的矩形。但若遇到其他曲線（如：交流電的常見波形——正弦函數圖形）所圍成的區域，要如何計算它的面積呢？本書第 58 頁附錄三「積分的意義」中提到利用定積分即能計算出曲線所圍的面積之值，同學們可試著詳閱當中的內容。

活動 4

請利用 Geogebra 軟體，繪製函數 $y=2\sin x$，並求出此函數半週期的曲線與 x 軸所圍成的區域面積與定積分值。
（可參考本書附錄三第62～64頁）

(1)建議設定「繪圖區」（滑鼠游標在繪圖區後按右鍵）中 x 軸的間距為 $\frac{\pi}{2}$。

(2)函數圖形繪製後，可發現函數最大值為__________，週期為__________。

(3)求取定積分之值需要輸入的指令為：______________________________。

(4)定積分所求得的值為____。

想想看

當我們嘗試將函數圖形做平移或伸縮等變化，例如函數改為 $y=3\sin x$ 或 $y=\sin 2x$，除了先前就知道最大值、週期必定隨著改變之外，定積分之值有何變化？（請利用 Geogebra 軟體來操作）

活動 5

請利用 Geogebra 軟體，繪製函數 $y=2\sin x$，並求出此函數一週期的曲線與 x 軸所圍成的區域面積與定積分值。

(1)同【活動4】，建議 x 軸的間距設定為 $\frac{\pi}{2}$。

(2)求取定積分之值需要輸入的指令為：______________________________。

(3)定積分所求得的值為____。

搭配學生手冊 P32

想想看 1 解答：

當函數圖形在 x 軸下方時，其定積分之值爲函數與 x 軸所圍成區域面積的相反數，故活動 5 的定積分之值因正負相加抵銷而得到 0。

想想看 2 解答：

因正弦波屬於對稱波形，故採用第 2 種半週期的計算方法。

想想看 1

從【活動4】與【活動5】中我們不難發現，相同的週期函數因為取不同範圍計算定積分，所以會得到不同的結果。定積分與面積的差別為何？

在基本電學教科書中關於「平均值」意義是為了計算單位時間內曲線所圍出的區域面積之值，詳述如下：

【平均值】

電壓與電流的平均值(分別以 V_{av} 與 I_{av} 表示之)是指其週期性的波形曲線與 x 軸所圍成的區域面積與經歷之時間的比值，依照波形是否正負對稱，算法分別有以下兩種：

1. 非對稱波形的平均值$=\dfrac{\text{一週期的波形曲線的定積分之值}}{\text{一週期的時間}}$

2. 對稱波形的平均值$=\dfrac{\text{半週期的波形曲線的定積分之值}}{\text{半週期的時間}}$

想想看 2

根據上述定義，計算正弦波的平均值時，應採用哪一種算法呢？

由於正負對稱的波形其正、負兩個半波與 x 軸所圍成的區域面積相同，因此計算定積分時，負半波的定積分值恰與正半波之值會正負相互抵消，致使一個週期的定積分值為0亦導致其平均值為 0，所以對稱波形的平均值是以半個週期來做計算。

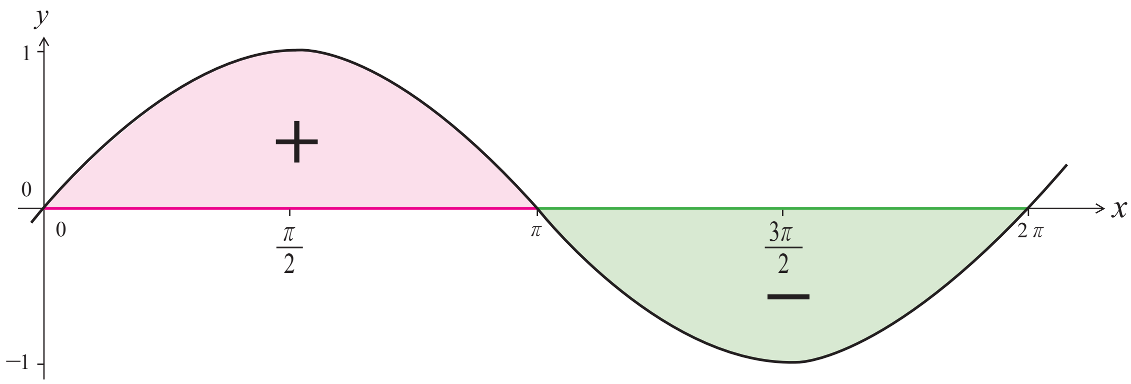


圖 3　兩個半週期與 x 軸所圍成的區域面積是相同的，但曲線若在 x 軸下方，定積分之值為負

學生手冊 P32

搭配學生手冊 P33

進行本頁內容的教學前，教師可再度針對附錄三「積分的意義」進行複習，讓學生更深刻理解定積分之定義，及熟悉如何利用 Geogebra 計算指定函數與範圍的定積分之值。

解答：

$2V_m$ ；$\dfrac{2V_m}{\pi}$ ；$\dfrac{2I_m}{\pi}$

老師的話：

在基本電學教科書中常將上述答案以近似值 $0.636V_m$及$0.636I_m$ 表示，教師或可稍作提醒。

半個週期的面積及其平均值，可以利用定積分的運算或 Geogebra 來幫助我們求得。(可參考本書附錄三第 62～64 頁)

我們過去曾學過，函數 $y=\sin x$ 的最大值為 1，又經由上述方法可得知，函數 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之間(半個週期)的定積分之值為 2。

因此，當電壓的函數式可用正弦波表示成

$$v(t)=V_m\sin(\omega t)$$

其中 V_m 為電壓的最大值(正峰值)、ω 為線圈在磁場空間等速旋轉時的角速度、t 為時間，如圖 4。面積 A 之值變為

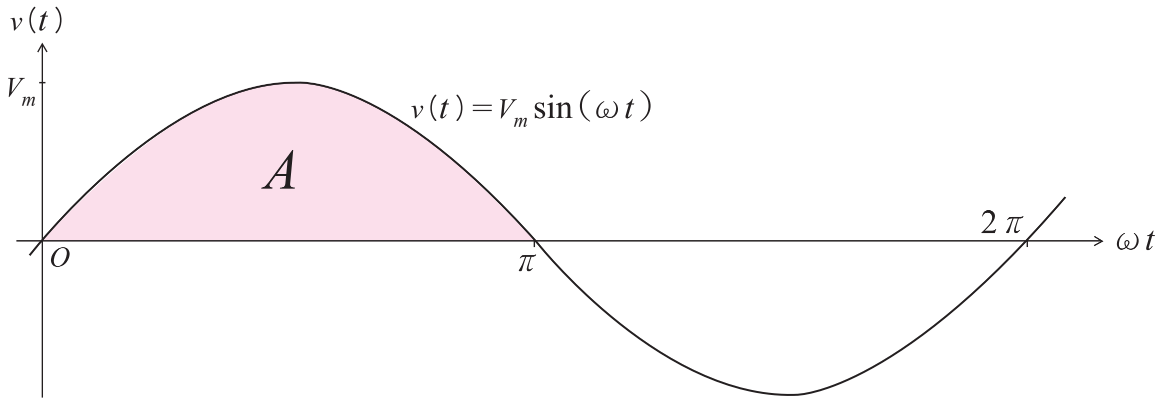


圖 4　半個週期的電壓函數與 x 軸所圍成的區域面積為 A

正弦波電壓的平均值 V_{av}(半週期平均值)為

同理，若正弦波的電流函數式為 $i(t)=I_m\sin(\omega t)$，則其平均值 I_{av}(半週期平均值)為

搭配學生手冊 P34

想想看 3 解答：

⑴ $V_m=100$

平均值 $=\dfrac{2\times 100}{\pi}\fallingdotseq 63.6$ 伏特

（$v(t)=V_m\sin(\omega t)$，平均值 $=\dfrac{2V_m}{\pi}\fallingdotseq 0.636\,V_m$）

⑵ 一個週期爲 2π

平均值 $=\dfrac{2\times 100+0}{2\pi}=\dfrac{100}{\pi}\fallingdotseq 31.8$ 伏特

（圖形非對稱，平均值是以一個完整週期來計算）

⑶ 一個週期爲 π

平均值 $=\dfrac{2\times 100}{2}=\dfrac{200}{\pi}\fallingdotseq 63.6$ 伏特

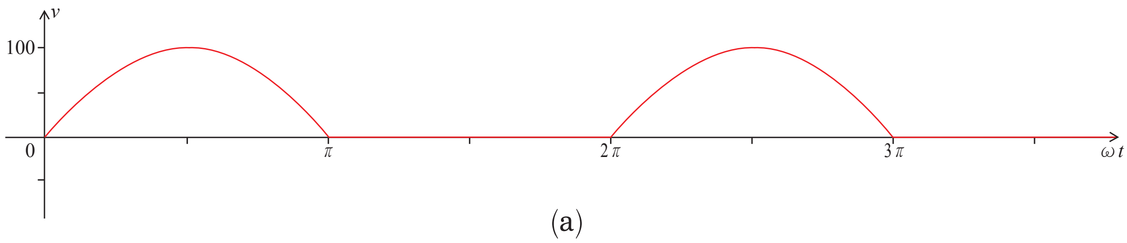
想想看 3

已知有一交流電壓正弦波的方程式為 $v(t)=100\sin(\omega t)$（單位：伏特），試回答下列各小題：

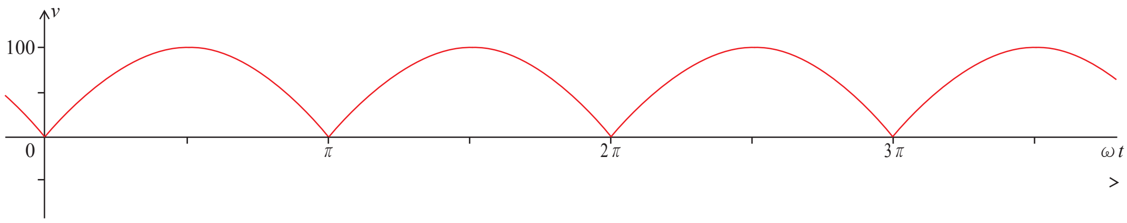
(1)此正弦波的平均值為何？

(2)如圖(a)，當正弦波經半波整流後，其平均值為何？

(3)如圖(b)，當正弦波經全波整流後，其平均值為何？



(a)



(b)

【註】整流是利用二極體（整流器）將交流電轉換為直流電的過程，當交流電經過半波整流器後，波形的正半週期或負半週期之一會被消除，而經過全波整流器會使波形轉變為同一極性輸出。

通常基本電學教科書是如此描述有效值的：

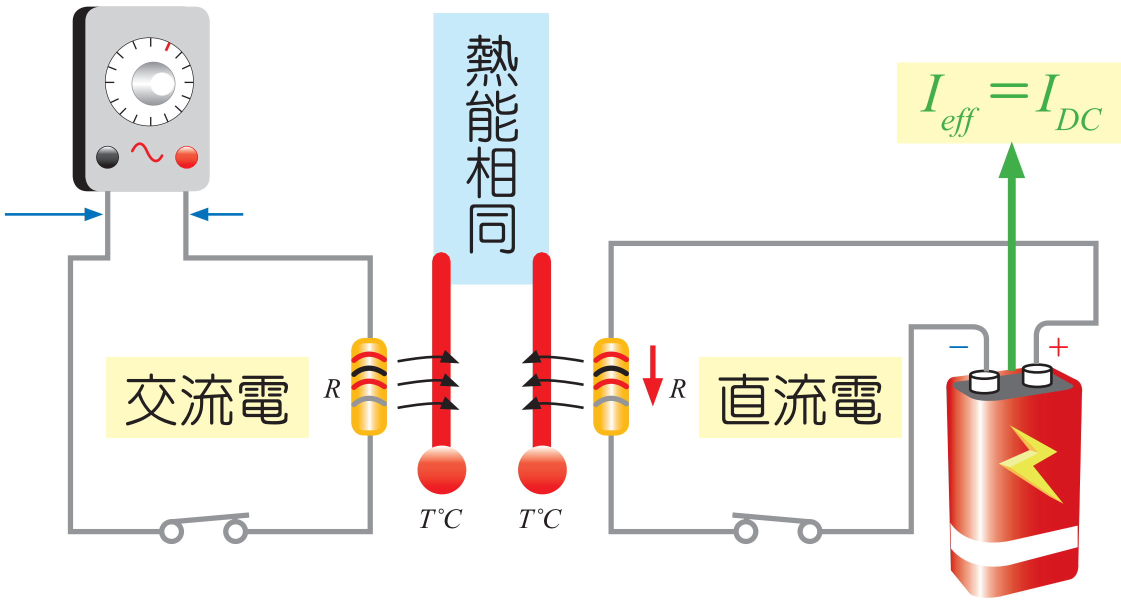
【有效值】

若在一段時間 T 內，一個交流電通過電阻 R 所產生的熱能，和直流電源通過同一電阻 R 所產生的熱能相同時，則稱該直流電壓或電流之值，為此交流電壓或電流的有效值（effective value，以 V_{eff} 或 I_{eff} 表示之）。

學生手冊 P34

搭配學生手冊 P35

教師可針對有效值的定義，依圖5做爲詮釋的參考



本頁主要爲引導學生了解有效值公式是如何推導而得，因涉及三角函數的二倍角公式，教師可視學生上課情形與進度斟酌講述的內容或改以下一頁的後半頁內容作爲說明的參考。

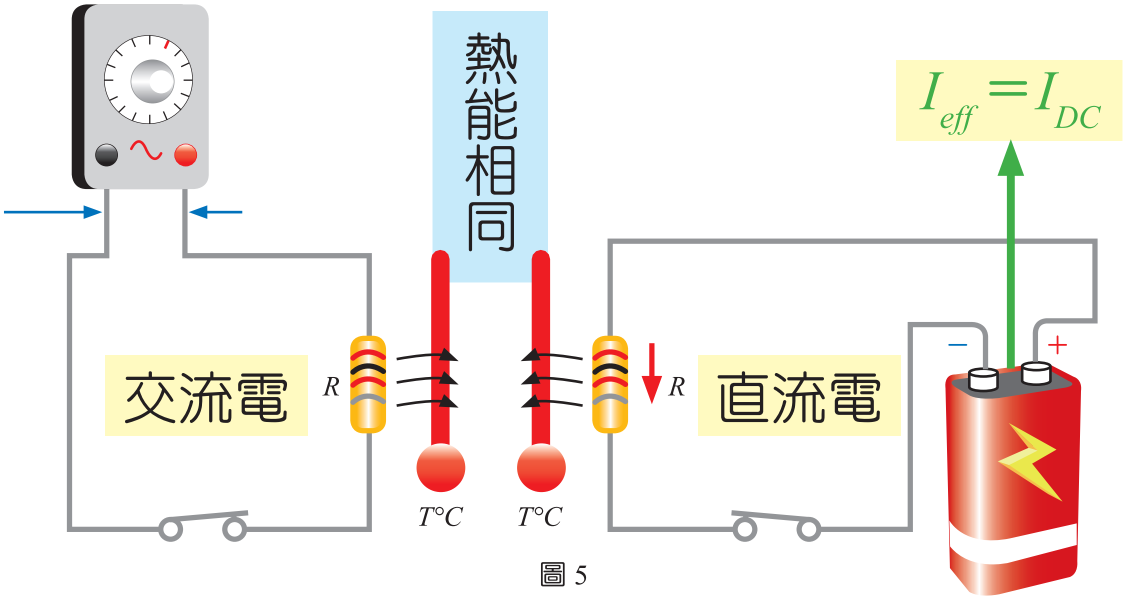


圖 5

第 28 頁曾提到能量 $W=I^2\times R\times t$，而在同一時間交流電的所產生的相同熱能為

$$W=(I_m\sin(\omega t))^2\times R\times t$$

當中的 $I_m\sin(\omega t)$是電流的函數式，I_m 為其正弦波的最大值。因此，

$$I^2=I_m^2\sin^2(\omega t)\cdots\cdots(*)$$

三角函數的二倍角公式中有一為 $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ ，移項可得

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

所以（$*$）式可化成

$$I^2=I_m^2\times\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}=\frac{1}{2}\times I_m^2-\frac{\cos(2\omega t)}{2}\times I_m^2$$

搭配學生手冊 P36

解答：

$$I^2=\frac{1}{2}I_m^2$$

$$I_{eff}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times I_m$$

$$V_{eff}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times V_m$$

老師的話：

其中電流與電壓的有效值在基本電學教科書中常將上述答案以近似值 $0.707\times I_m$ 及 $0.707\times V_m$ 表示，教師可稍作提醒。

下半頁（含圖 7）為延續本教學段落前面「平均值」的內容，作為說明電流有效值（或電壓有效值）的另一種方式，教師可視學生上課情形與進度斟酌講述之。

如圖 6，利用 Geogebra 繪圖並藉此求取定積分之值時可以發現，經過一個週期後餘弦函數的定積分之值為 0（同時平均值亦為 0），

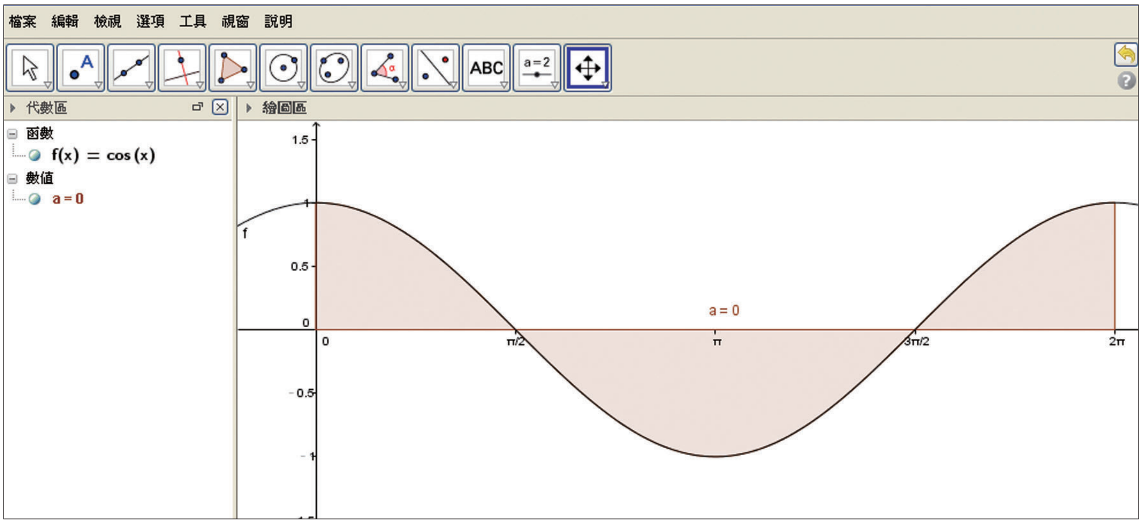


圖 6　使用 Geogebra 求得餘弦函數一個週期的定積分之值為 0

因此，$I^2=\dfrac{1}{2}\times I_m^{\,2}-\dfrac{\cos(2\omega t)}{2}\times I_m^{\,2}$ 可改寫成

也就是說正弦波的電流有效值 I_{eff} 為

同理，若正弦波的電壓函數式為 $v(t)=V_m\sin(\omega t)$，則其電壓有效值 V_{eff} 為

我們也可利用 Geogebra 求取函數 $I^2=I_m^{\,2}\sin^2(\omega t)$ 一個週期的定積分之值，藉以求得 I^2 的平均值，即為正弦波電流有效值的平方。

如圖 7，週期為 π 的函數 $y=\sin^2 x$ 在 $x=0$ 至 $x=\pi$ 的定積分之值為 $\dfrac{\pi}{2}$（圖中 Geogebra 顯示 1.57 為其近似值），故 $y=\sin^2 x$ 的平均值為 $\dfrac{\pi}{2}\div\pi=\dfrac{1}{2}$。

搭配學生手冊 P37

想想看 4 解答：

(1) $v(0)=100\times\sin(2\pi\times60\times0)=100\times\sin(0)$ （伏特）

(2) $v(\frac{1}{60})=100\times\sin(2\pi\times60\times\frac{1}{60})=100\times\sin(2\pi)=0$ （伏特）

(3) $V_m=100$，有效值為 $\frac{V_m}{\sqrt{2}}=\frac{100}{\sqrt{2}}\fallingdotseq70.7$ （伏特）

（有效值 $V_{eff}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times V_m$）

想想看 5 解答：

「想想看」的問題屬開放性提問，教師可視學生上課情形斟酌解釋說明。因篇幅有限且此問題之答案較為繁複，恕予以省略。

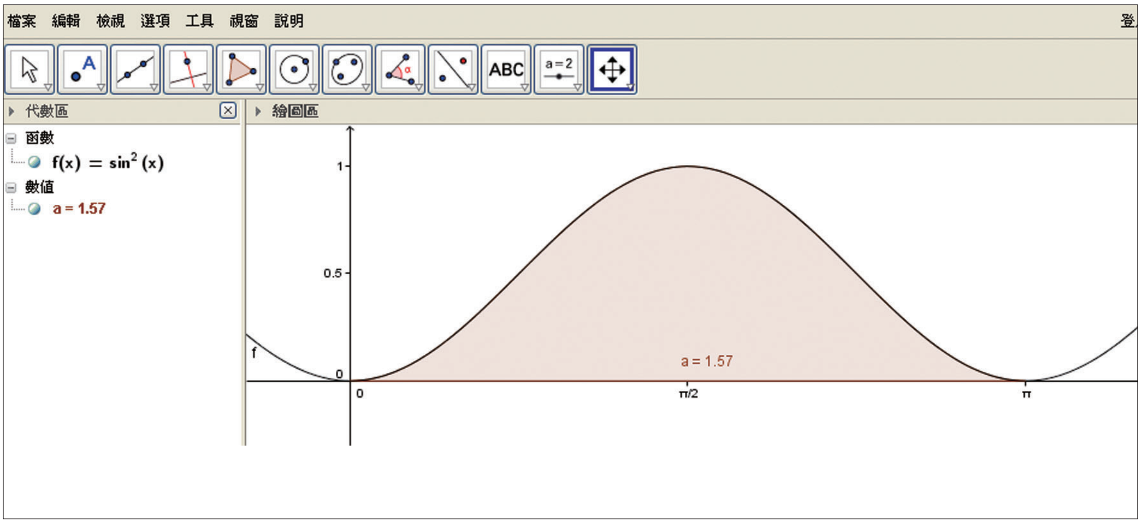


圖 7　使用 Geogebra 求得 $y = \sin^2 x$ 一個週期的定積分之值為 $\frac{\pi}{2}$

因此，$I^2 = I_m^{\,2}\sin^2(\omega t)$的平均值即為 $\frac{1}{2} \times I_m^{\,2}$，取正的平方根後即可得到正弦波電流有效值 I_{eff} 為 $\frac{1}{\sqrt{2}} \times I_m$。

想想看 4

已知有一交流正弦波的方程式為 $v(t) = 100 \times \sin(2\pi \times 60 \times t)$（其中電壓 $v(t)$ 單位為伏特、時間 t 的單位為秒），試回答下列各小題：

(1) $t = 0$ 時之瞬間電壓值為何？

(2) 當時間經過 $\frac{1}{60}$ 秒時，電壓的瞬間值為何？

(3) 使用直流電表量測交流電時，所測得的是交流電一個完整週期的正弦波平均值，故測得的值為 0；而利用交流電表（三用電表撥至交流電壓檔）時所測得的是有效值。故當我們利用三用電表的交流電壓檔量測此交流電波時，測得之數值為何？

想想看 5

除了正弦波，交流電常見波形還有三角波、鋸齒波以及方波等。上述波形的平均值及有效值該如何計算呢？

課後作業

(　) 1. 正弦波的最大值與平均值之比值約為下列何者？

(A) 1　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{2}{\pi}$　(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(　) 2. 當我們以三用電表交流電壓檔量測插座時測得電壓為 AC110V，下列何者為此電表所指示之電壓值？

(A)平均值　(B)最大值　(C)有效值　(D)峰對峰值

(　) 3. 一個 5V 直流電壓源與 10Ω 電阻串聯，電阻散熱功率為 2.5W，此時將直流電壓源移去，改換一個正弦波交流電壓源，發現電阻散熱功率相同。試問下列何者為上述交流電壓源的有效值？

(A) 5　(B) 10　(C) 12.5　(D) 50　伏特。

(　) 4. 下列何者為電壓 $v(t)=100\sqrt{2}\sin(120t)$（單位：伏特）之有效值？

(A) 90　(B) 100　(C) 10　(D) 120　伏特。

(　) 5. 將 110V / 60Hz 的市電電壓以交流電壓瞬間值方程式 $v(t)$ 表示時，下列何者正確（單位：伏特）？

(A) $v(t)=110\sin(60t)$　(B) $v(t)=110\sin(377t)$

(C) $v(t)=156\sin(60t)$　(D) $v(t)=156\sin(377t)$

【100年統測電機與電子群專業科目（一）電子學、基本電學歷屆試題】

課後作業解答

1. (B)解析：$\frac{V_m}{V_{av}}=\frac{V_m}{\frac{2}{\pi}V_m}=\frac{\pi}{2}$
2. (C)
3. (A)解析：一交流電壓加於一電阻所產生的熱量與一直流電壓加於該電阻所產生的熱量相等時，上述直流電壓稱為交流電壓的有效值。
4. (B)
5. (D)解析：$v(t)=V_{eff}\cdot\sqrt{2}\sin\omega t=110\times\sqrt{2}\sin(2\pi\times60t)\fallingdotseq156\sin377t$ (V)

附錄一　Geogebra 簡介

為求課程更為生動、便利，附錄一將介紹一套免費的數學軟體 —Geogebra，它是由美國亞特蘭大學數學系教授 Markus Hohenwarter 設計的跨平臺動態幾何數學繪圖軟體，目前已有包含繁體(正體)中文在內共五十多種語言版本了。現今高中職所學的數學課程如向量、直線、圓錐曲線(二次曲線)、行列式的運算、三角函數、微積分、統計等單元，都可以利用它來作圖、運算。

Geogebra 這個名稱是由 Geometry(幾何)和 Algebra(代數)兩字組合而成，亦即它是個結合幾何與代數的軟體。使用者在繪圖區描繪某個點或某個幾何圖形時，旁邊的代數區就會顯示出它們所對應的坐標或方程式；相對的只要在指令列輸入一個點的坐標、方程式或函數式，繪圖區就會立刻出現它們的圖形了！

要下載安裝 Geogebra，只需連上 Geogebra 的官網首頁，即可依照電腦的作業系統類型下載並執行安裝。由於 Geogebra 是以 JAVA 語言設計的，若你的電腦從未安裝過 JAVA，在安裝 Geogebra 前會被要求安裝新版本的 JAVA。

第 40 頁圖 1 是開啟 Geogebra 後會顯示的視窗畫面，最上方一列是功能表列，包含開新檔案、另存新檔等功能都可利用滑鼠游標在此點擊執行。功能表列下方按鈕列為工具列，使用者可利用工具列中的工具，在幾何繪圖區中使用滑鼠進行繪圖。每個按鈕圖示的右下角都有個小箭頭，按下它可開啟相似的繪圖工具模組。視窗最下方是指令列，使用者可直接在此輸入代數式，按下 Enter 鍵後，輸入的代數表示式會出現在代數區，而繪圖區內會顯示它的圖形。其他功能同學們不妨自行探索，發掘它的更多妙用！

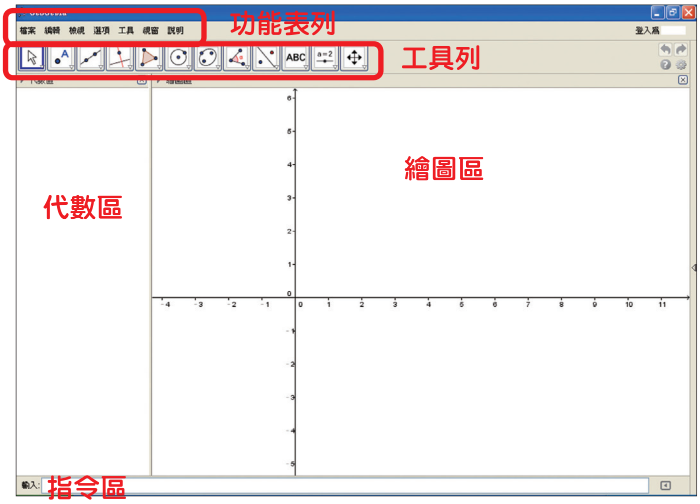


圖 1　開啟 Geogebra 後的畫面

舉例來說，當我們在指令列中輸入「$y=2x+1$」，按下 Enter 鍵後，代數區中會顯示輸入的代數表示式「a：$y=2x+1$」，其中 a 為直線的代號，可在它的屬性中作修改，而繪圖區內會顯示它的圖形 — 直線 a，如圖 2。

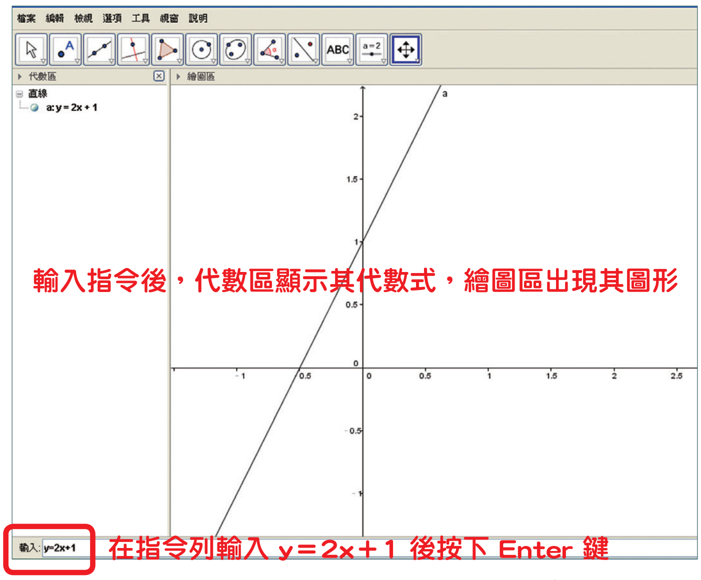


圖 2　Geogebra 輸入指令後出現的畫面

Step 1 滑鼠游標移至指令列點一下，即可利用鍵盤輸入指令在其中。

Step 2 利用鍵盤輸入 $y=2x+1$ 。

Step 3 按下 Enter 鍵。

Step 4 左側代數區顯示「a：$y=2x+1$」，右側繪圖區出現一條斜直線。

以下我們利用 Geogebra 練習描繪幾個過去曾學過的函數圖形：

活動 1-1 請在 Geogebra 的指令列中輸入適當式子，以顯示下列各圖形。

物件	Geogebra 指令列輸入	備註
點 $C(3,5)$	$C=(3,5)$	大寫字母表示點
$y=x^2-2x+5$	$y=x$ ^ $2-2x+5$	x^2 用 x ^ 2 表示
$y=\|x\|$	$y=abs(x)$	abs 為絕對值函數簡寫
$y=\sin x$	$y=\sin(x)$	x 需加括弧
向量 $\vec{a}=(-2,-4)$	$a=(-2,-4)$	小寫字母表示向量

註：符號「 ^ 」是按住 Shift 及數字 6 鍵後即可出現。

當指令輸入正確時括弧是綠色的如圖 3；若指令輸入錯誤時括弧是紅色的如圖 4，強制按下 *Enter* 鍵會出現如圖 5 的對話框提醒指令錯誤的地方。

圖 3　輸入指令正確

圖 4　輸入指令錯誤

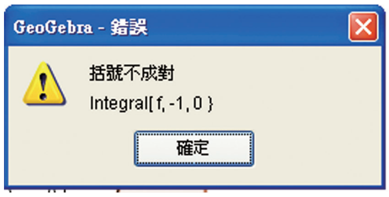


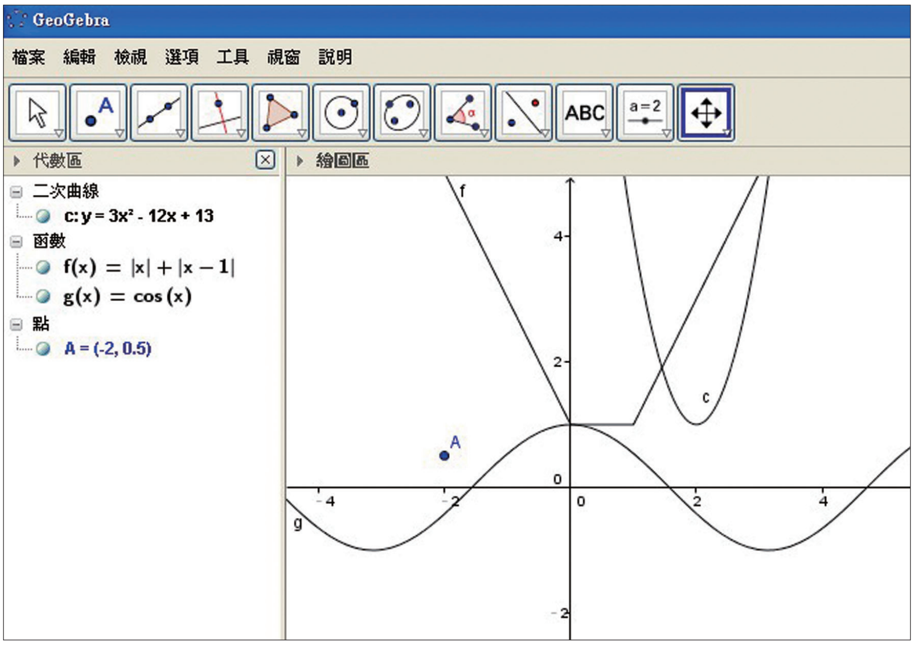
圖 5　提醒對話框

活動 1-1 的上列五個物件顯示如第 42 頁 圖 6。其中除了點 C 與向量 a 的代號是輸入時已自行訂定好的之外，二次曲線 $y=x^2-2x+5$ 為 c、絕對值函數 $y=|x|$ 為 $f(x)$，以及三角函數 $y=\sin x$ 被設定為 $g(x)$，都是 Geogebra 預設的，使用者可在圖形上或代數區用滑鼠右鍵點選後按「屬性」重新命名其代號。

搭配學生手冊 P42

活動 1-2 解答：

物件	Geogebra 指令列輸入
點 $B\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$	$B=\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$
$y=3(x-2)^2+1$	y=3*(x−2)^2 +1
$y=\lvert x \rvert + \lvert x-1 \rvert$	y=abs(x)+ abs(x−1)
$y=\cos x$	y=cos(x)



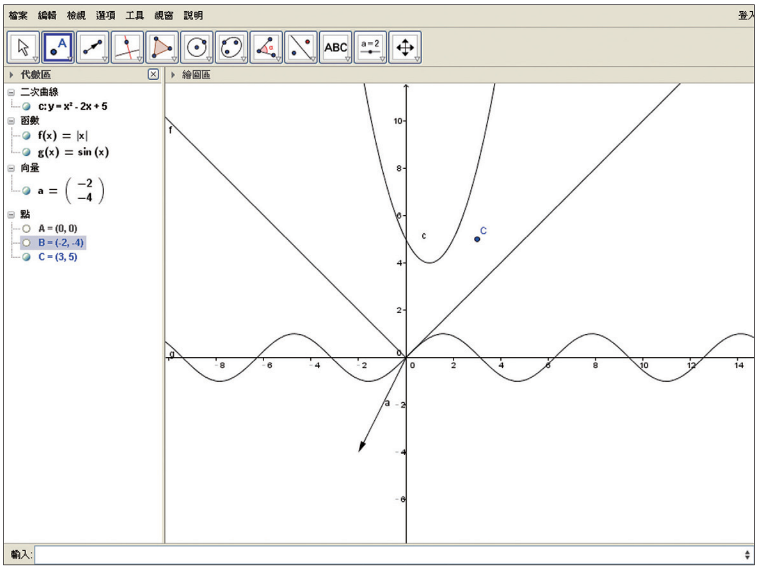


圖 6　例題 1-1 五個物件圖形

活動 1-2 請在 Geogebra 的指令列中輸入適當式子， 以顯示下列各圖形。

物件	Geogebra 指令列輸入
點 $B(-2, \frac{1}{2})$	
$y=3(x-2)^2+1$	
$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$	
$y=\cos x$	

附錄二　正弦函數的圖形與週期

描繪函數圖形最直觀的方法就是描點法，我們將一些特別角的正弦函數值對應關係，列表如下：

x	⋯	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	2π	⋯
			0.52	0.79	1.05	1.57	2.09	2.36	2.62	3.14	3.67	3.93	4.19	4.71	5.24	5.50	5.76	6.28	
$\sin x$	⋯	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	⋯
			0.5	0.71	0.87		0.87	0.71	0.5		-0.5	-0.71	-0.87		-0.87	-0.71	-0.5		

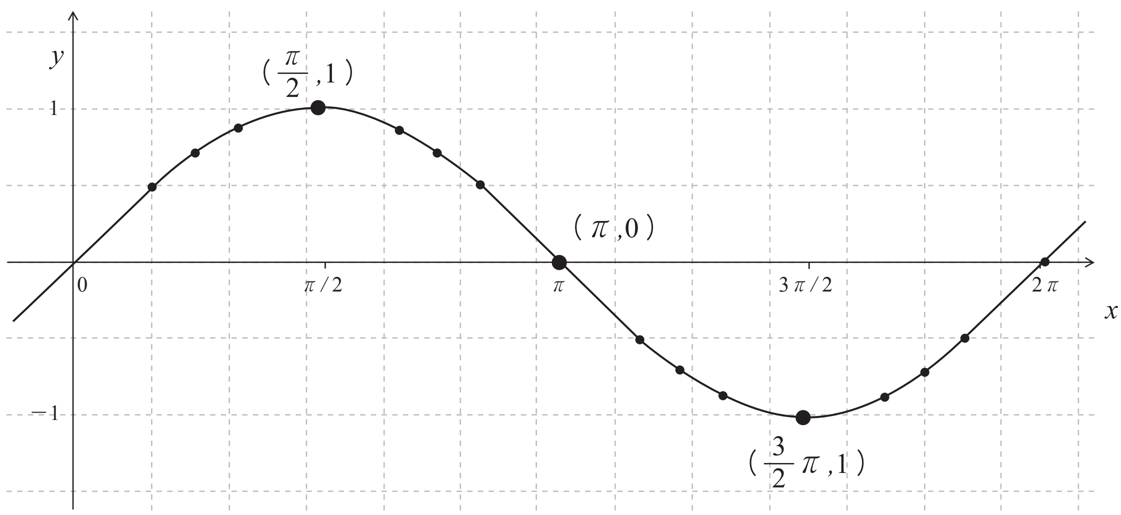


圖 7　以描點法描繪 $y = \sin x$ 的圖形

我們也可以利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數圖形：

(1) 先將 x 軸間距改為 $\dfrac{\pi}{2}$：將滑鼠移至「繪圖區」，按滑鼠右鍵，出現下列對話框，以滑鼠左鍵點選「繪圖區」如圖 8。

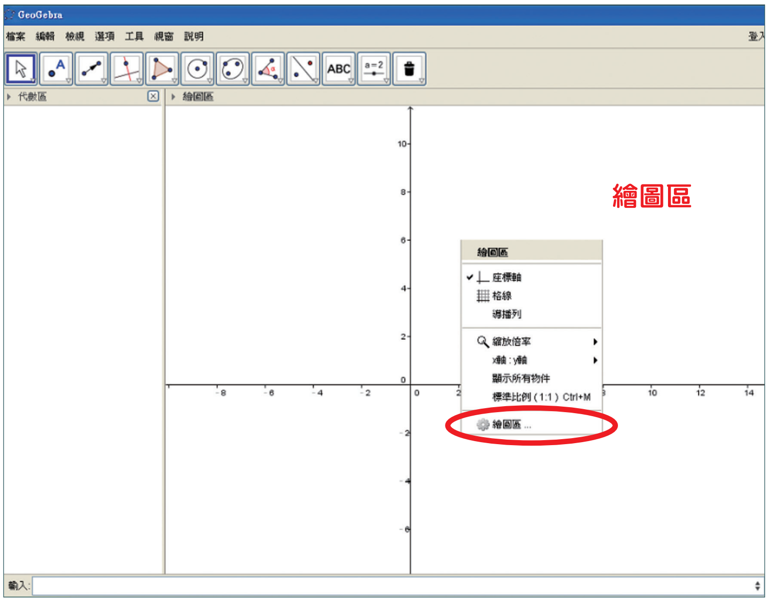


圖 8　按滑鼠右鍵，點選繪圖區

點選 x 軸，勾選間距 $\dfrac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\dfrac{\pi}{2}$ 如圖 9。

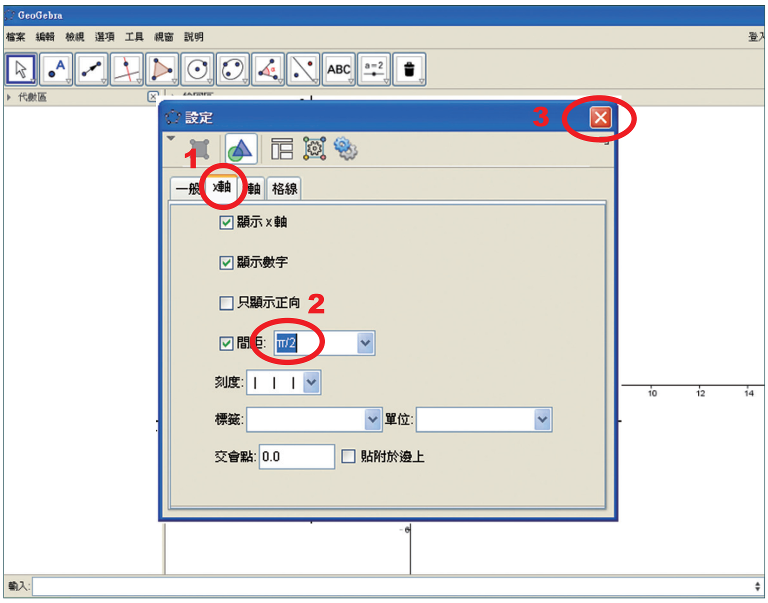


圖 9　調整 x 軸間距

⑵描繪 $y=\sin x$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(x)$」。如圖 10

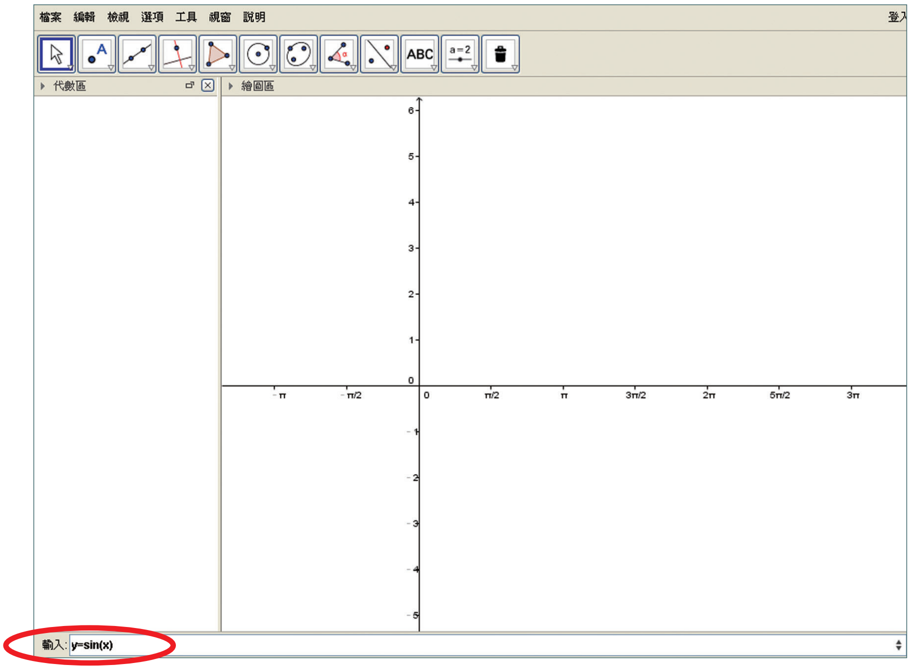


圖 10　在指令列輸入 $y=\sin(x)$

輸入 Enter 鍵，即可得 $y=\sin x$ 的函數圖形如下如圖 11：

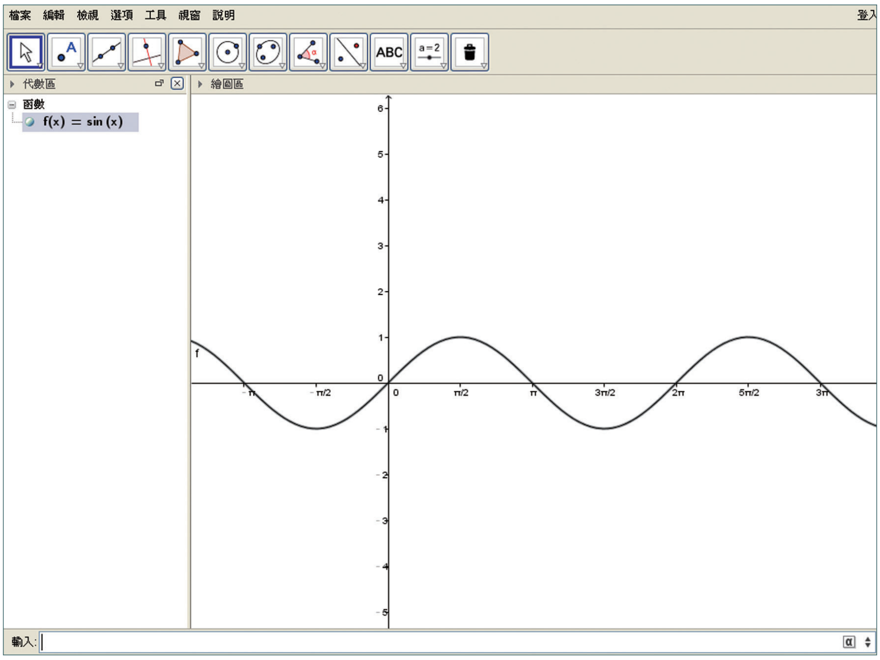


圖 11　繪圖區出現 $y=\sin x$ 的函數圖形

學生手冊 P45

由於之前學過 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，我們發現角度相差 2π 時，函數值相同，也就是說函數圖形每隔 2π 會重複出現；像這樣滿足 $f(p+x)=f(x)$的函數稱之為週期函數，其中滿足此式的最小正數 p 稱為此函數的**週期**。由此可知：正弦函數 $y=\sin x$ 為一個**週期函數**，且其週期為 2π 。

觀察上述圖形可知：

(1) $y=\sin x$ 的定義域為 R，週期為 2π 。

(2) $y=\sin x$ 的值域為 $\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$，也就是 $y=\sin x$ 的最大值為 1，最小值為 -1。

餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

首先利用描點法描繪函數圖，我們將特別角的餘弦函數值對應關係，列表如下：

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
			0.52	0.79	1.05	1.57	2.09	2.36	2.62	3.14	3.67	3.93	4.19	4.71	5.24	5.50	5.76	6.28	
$\cos x$	…	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	…
			0.87	0.71	0.5		-0.5	-0.71	-0.87		-0.87	-0.71	-0.5		0.5	0.71	0.87		

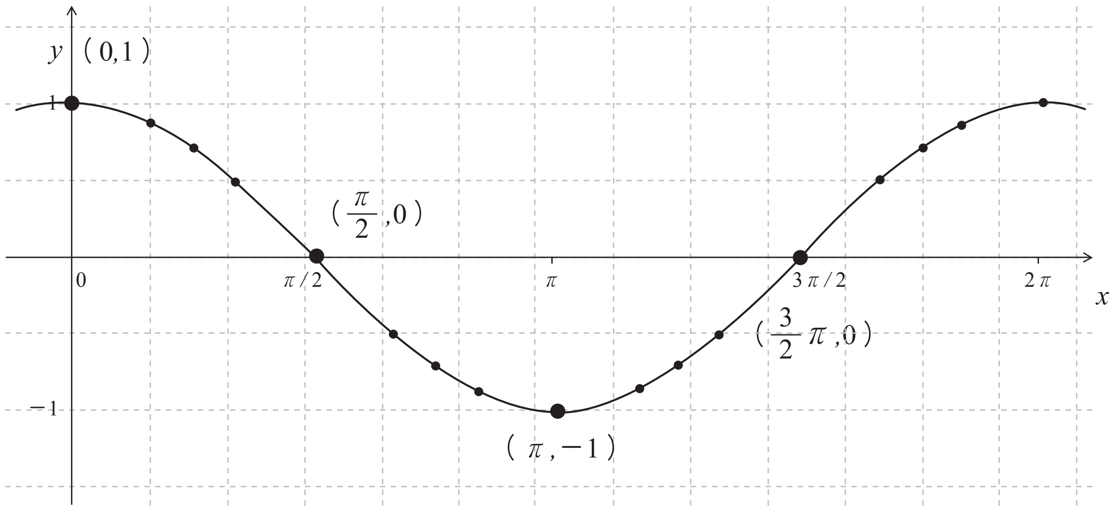


圖 12　以描點法描繪 $y=\cos x$ 的圖形

我們也可以和前面一樣的方法，利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形。

在下方指令列輸入「$y=\cos(x)$」，輸入 Enter 鍵，即可得 $y=\cos x$ 的函數圖形如下圖 13：

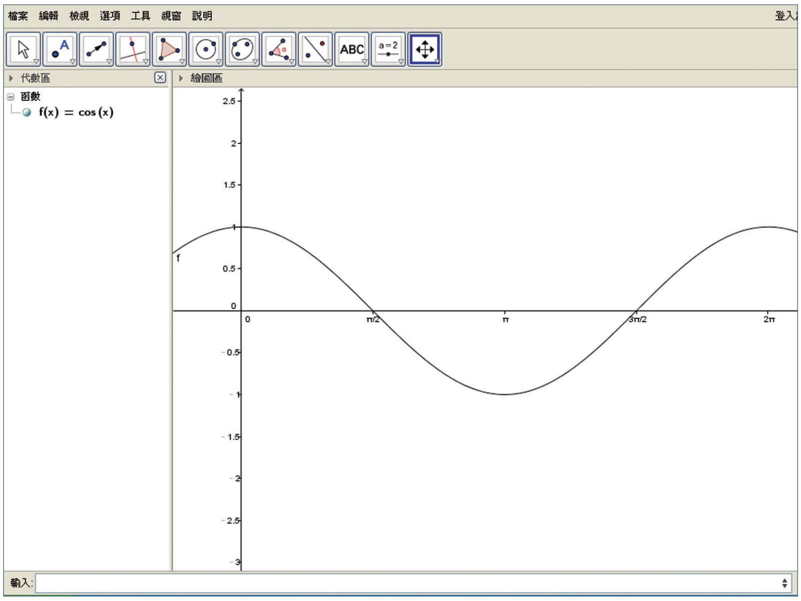


圖 13　輸入指令後，繪圖區出現 $y=\cos x$ 的函數圖形

觀察上述圖形可知：

(1) $y=\cos x$ 的定義域為 R，週期為 2π。

(2) $y=\cos x$ 的值域為 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$，也就是 $y=\cos x$ 的最大值為 1，最小值為 -1。

(3) $y=\cos x$ 的圖形相當於是將前面的 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位。

三角函數圖形的平移伸縮

接下來我們將利用繪圖軟體 Geogebra 的數值滑桿觀察三角函數圖形的平移伸縮問題，藉以了解對於三角函數 $y=f(x)$ 與 $y=af(bx+c)+d$ 圖形的關係。

1. $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 圖形的關係

利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數 $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 的圖形：

(1) 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

(2) 製作數值滑桿：在數值滑桿按鍵上按一下，然後在「繪圖區」上按一下，出現下面對話框，以滑鼠左鍵點選「套用」如圖 14。

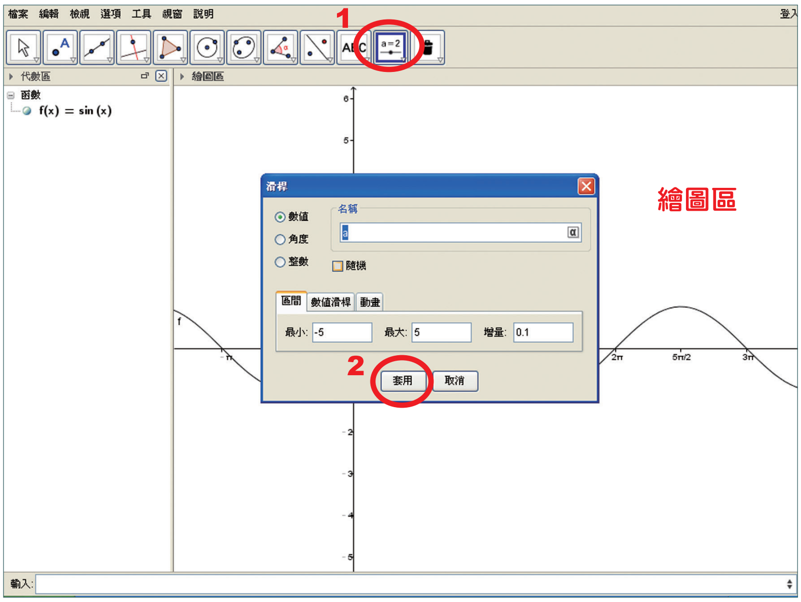


圖 14　設定數值滑桿 a

出現下圖 15 的數值滑桿。

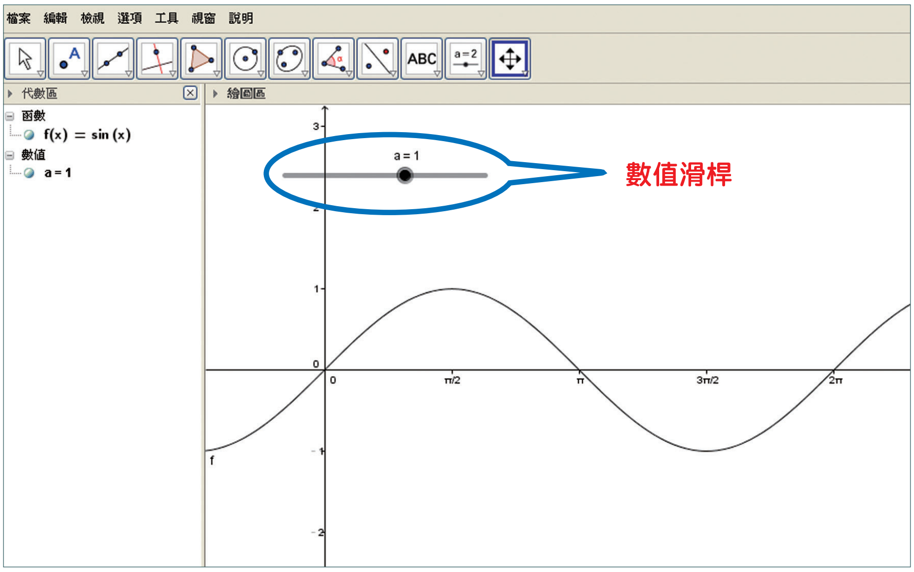


圖 15　數值滑桿出現於繪圖區

(3) 描繪 $y=a\sin x$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=a*\sin(x)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列「移動」的圖示（參見下圖 16），然後以滑鼠左鍵拖曳數值滑桿。

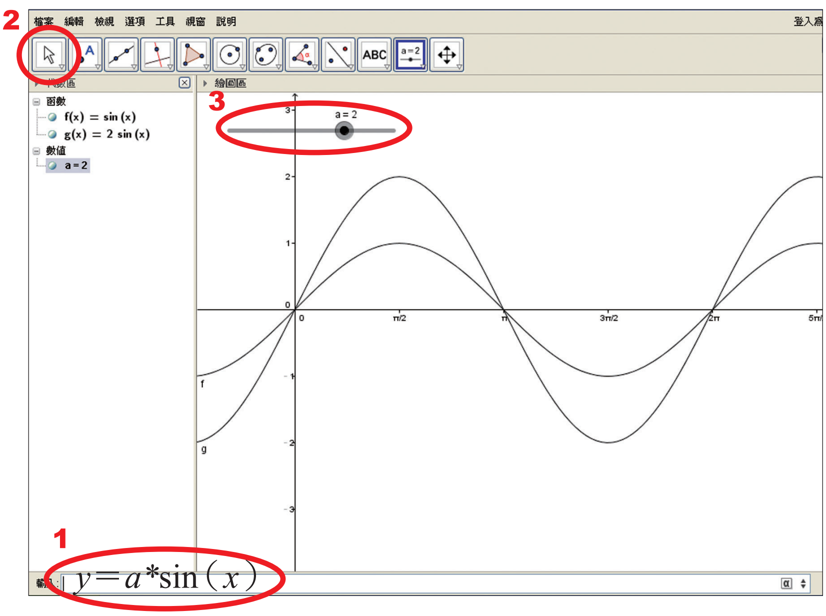


圖 16　拖曳數值滑桿，出現 $y=a\sin x$ 的函數圖形

註：若要改變圖形的顏色、樣式(粗細、虛線…)，可在圖形上任一點，按一下右鍵，即會出現下列對話框，此對話框會註明點選的物件，以滑鼠左鍵點選對話框中的「屬性」如圖 17。

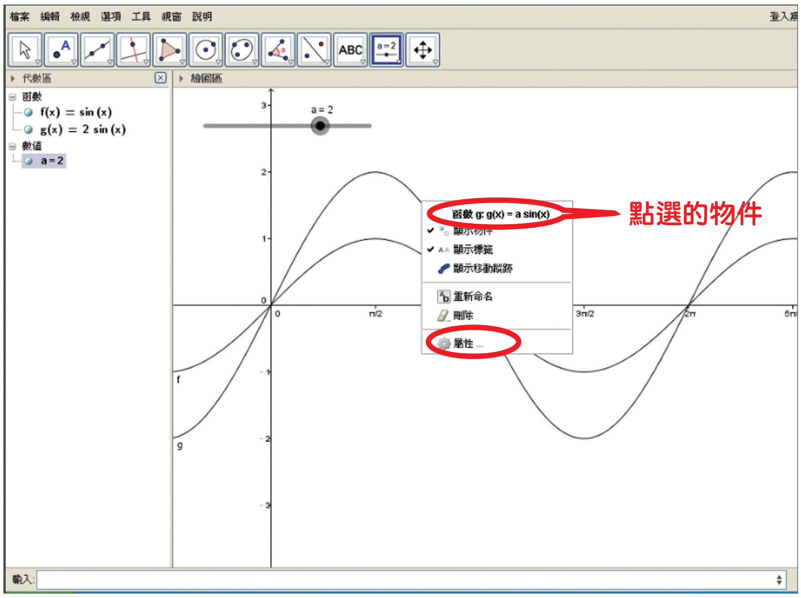


圖 17　點選物件，按滑鼠右鍵以設定屬性

出現下面的對話框，點選顏色如圖 18。

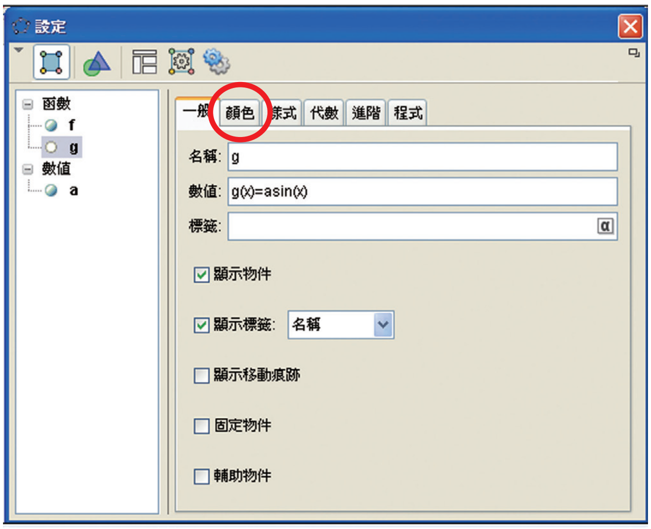


圖 18　出現屬性對話框，點選顏色

如第 51 頁圖 19 依喜好選取想改變的顏色後，關閉對話框即可完成圖形顏色的改變。

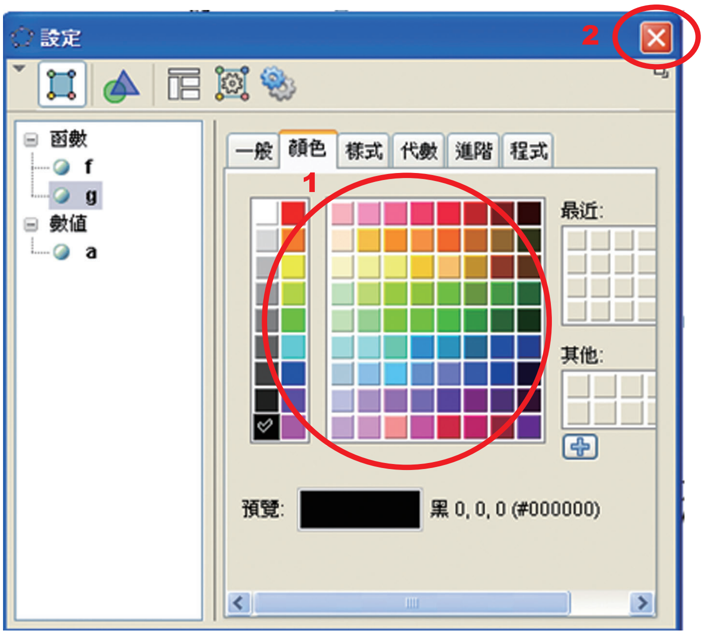


圖 19　在屬性對話框中設定物件顏色，再關閉對話框

可用相同的方式如圖 20，若以滑鼠左鍵點選下列對話框中的「樣式」，即可依喜好選取想改變的線之粗細、或下拉選單選取線的形式，最後關閉對話框即可。

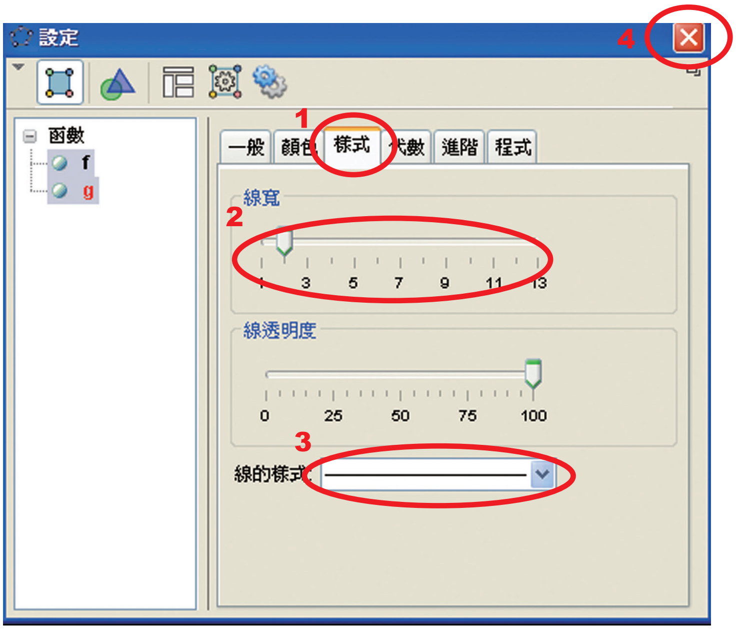


圖 20　在屬性對話框中設定物件（線）樣式，再關閉對話框

拖曳數值滑桿，觀察 $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 a 影響 $y=a\sin x$ 的振幅，換句話說，$y=a\sin x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形伸縮了a 倍如圖 21。

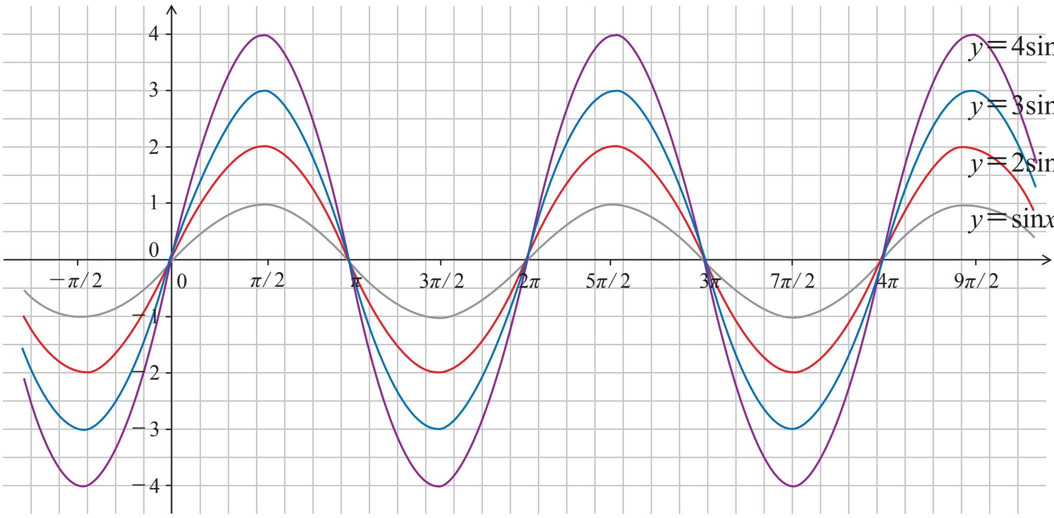


圖 21　$y=a\sin x$ 的圖形

2. $y=\sin bx$ 與 $y=\sin x$ 圖形的關係

⑴ 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

⑵ 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「b」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 b 如第 53 頁圖 22。

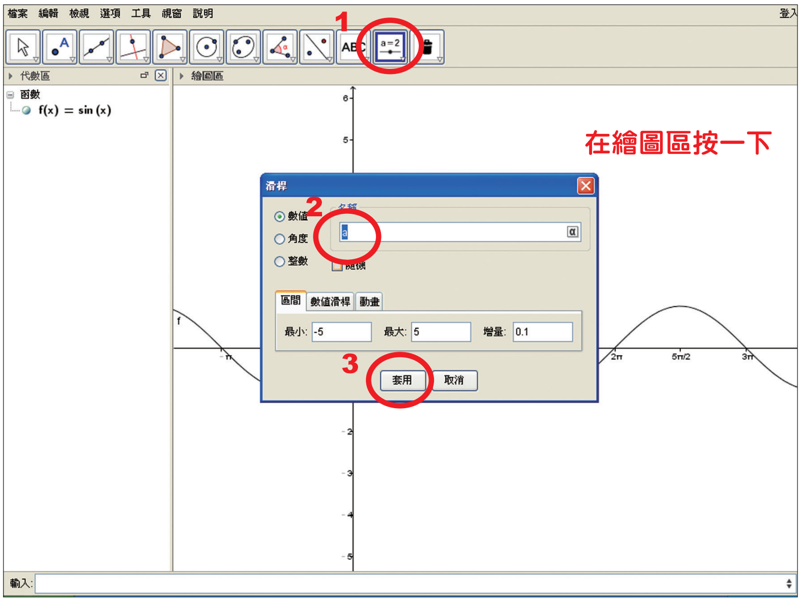


圖 22　設定數值滑桿 b

(3) 描繪 $y=\sin bx$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(b*x)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列” 移動” 的圖示（參見下圖 23），然後拖曳數值滑桿。

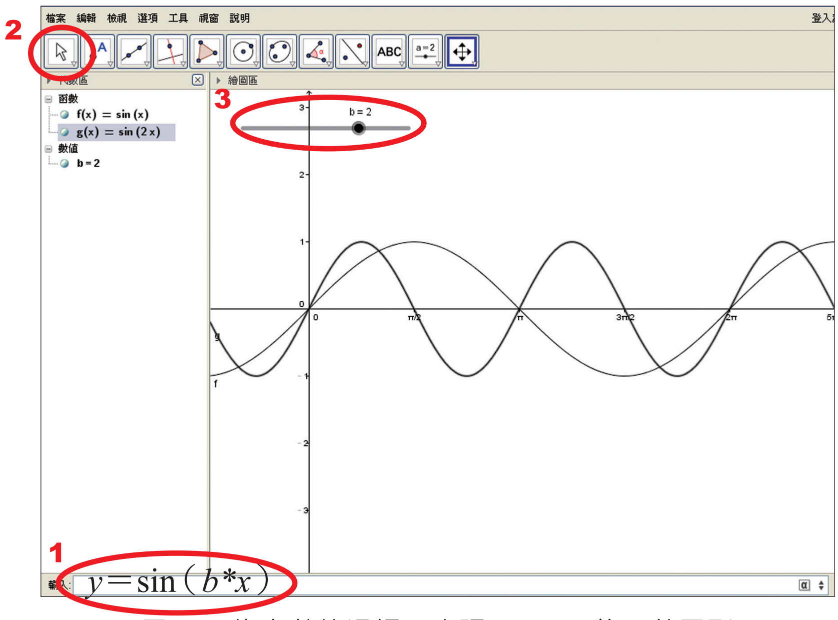


圖 23　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin bx$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin bx$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 b 影響 $y=\sin bx$ 的週期，且 $y=\sin bx$ 的週期是 $y=\sin x$ 的週期 2π 的 $\dfrac{1}{|b|}$ 倍。

3. $y=\sin x$ 與 $y=\sin(x+c)$ 圖形的關係

⑴ 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

⑵ 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「c」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 c 如圖 24。

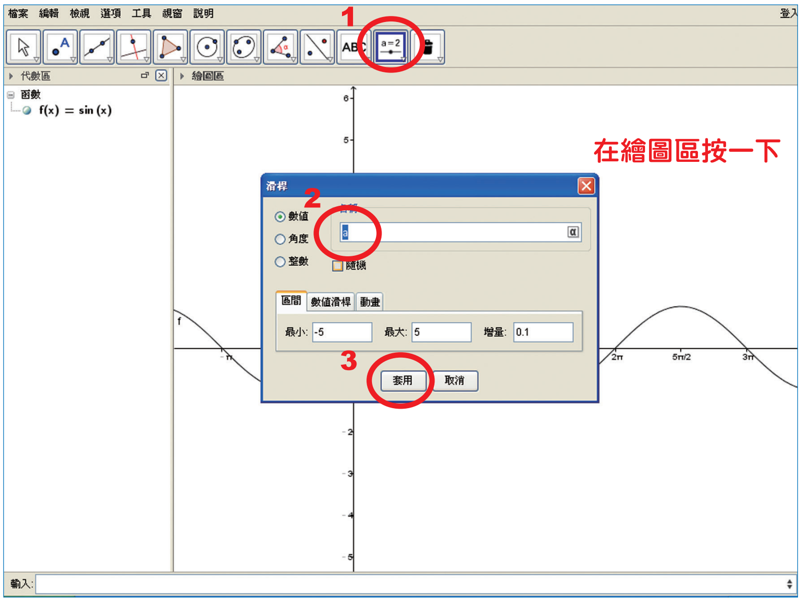


圖 24　設定數值滑桿 c

⑶ 描繪 $y=\sin(x+c)$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(x+c)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列”移動”的圖示（參見第 56 頁圖 25），然後拖曳數值滑桿。

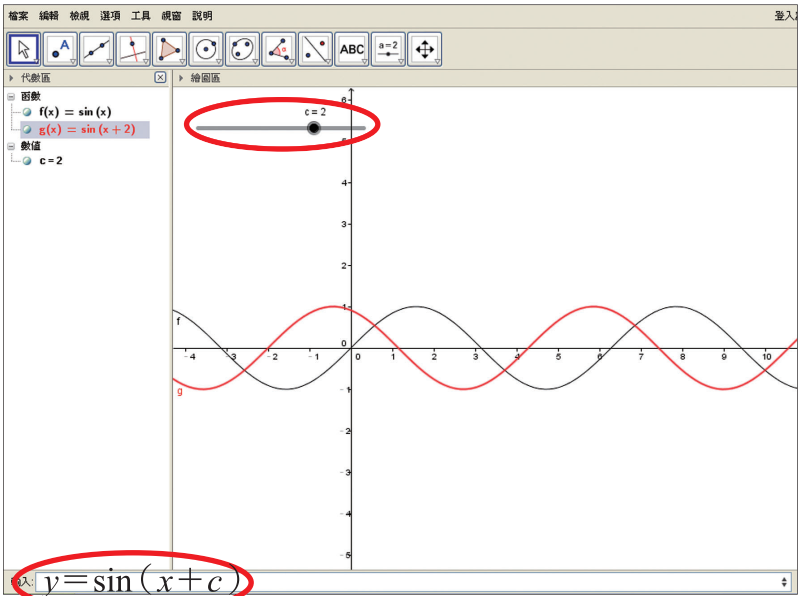


圖 25　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin(x+c)$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin(x+c)$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 c 影響 $y=\sin(x+c)$ 的圖形位置，當 $c>0$，$y=\sin(x+c)$ 的位置是 $y=\sin x$ 往左移 c 單位；當 $c<0$，$y=\sin(x+c)$ 的位置是 $y=\sin x$ 往右移 c 單位。

4. $y=\sin x$ 與 $y=\sin x+d$ 圖形的關係

(1) 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

(2) 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「d」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 d 如第 57 頁圖 26。

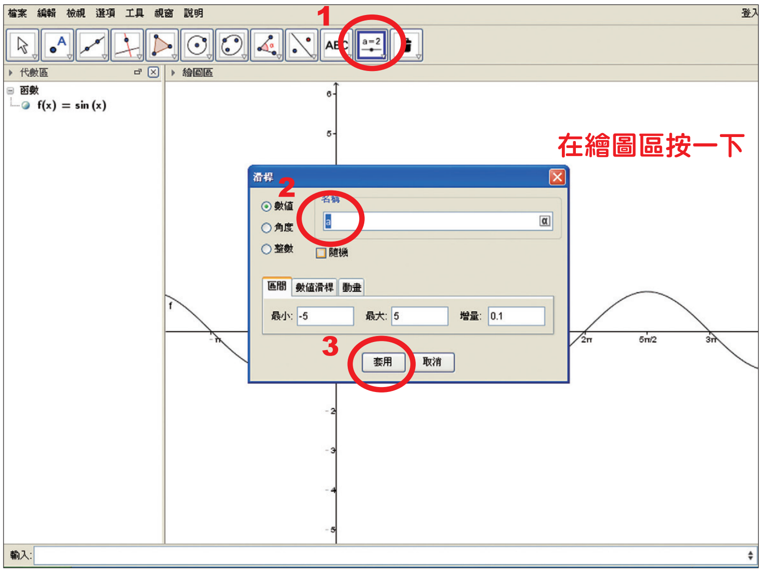


圖 26　設定數值滑桿 d

(3)描繪 $y=\sin x+d$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin x+d$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列” 移動” 的圖示（參見下圖 27），然後拖曳數值滑桿。

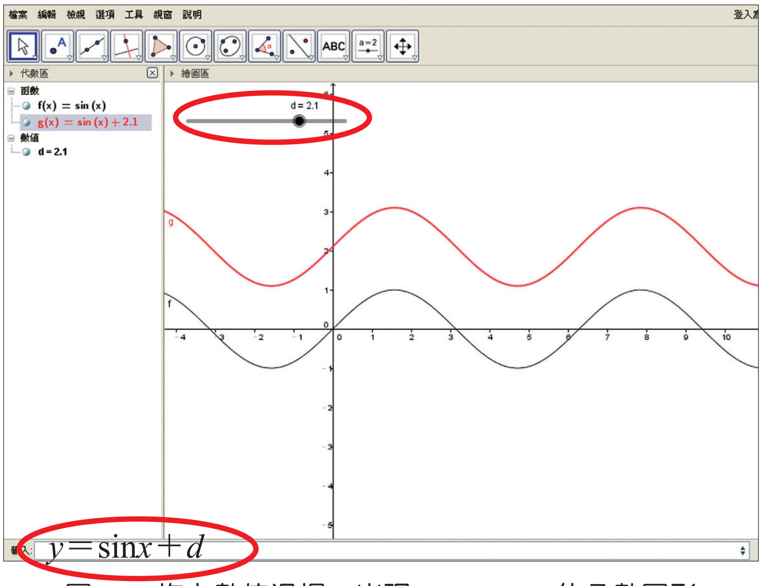


圖 27　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin x+d$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin x+d$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 d 影響 $y=\sin x+d$ 的圖形位置，當 $d>0$，$y=\sin x+d$ 的位置是 $y=\sin x$ 往上移 d 單位；當 $d<0$，$y=\sin x+d$ 的位置是 $y=\sin x$ 往下移 d 單位。

附錄三　積分的意義

附錄三將利用 Geogebra 向同學們示範求取正負對稱波形之平均值與有效值的原理及方式(但不涉及微積分的運算)。

我們先利用 Geogebra 描繪 $y=\sin x$ 的圖形，步驟和附錄一的介紹類似，但為求容易理解，我們以 $\frac{\pi}{2}$ 弧度作為 x 軸的間距：

Step 1 將滑鼠游標移至繪圖區並按右鍵，點選「繪圖區」。

Step 2 點選「x 軸」索引標籤，勾選「間距」並於下拉式選單點選 $\frac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\frac{\pi}{2}$，如圖 28。

Step 3 在指令列輸入「$y=\sin(x)$」，按下 Enter 鍵，即可出現的圖形，如第 59 頁圖 29。

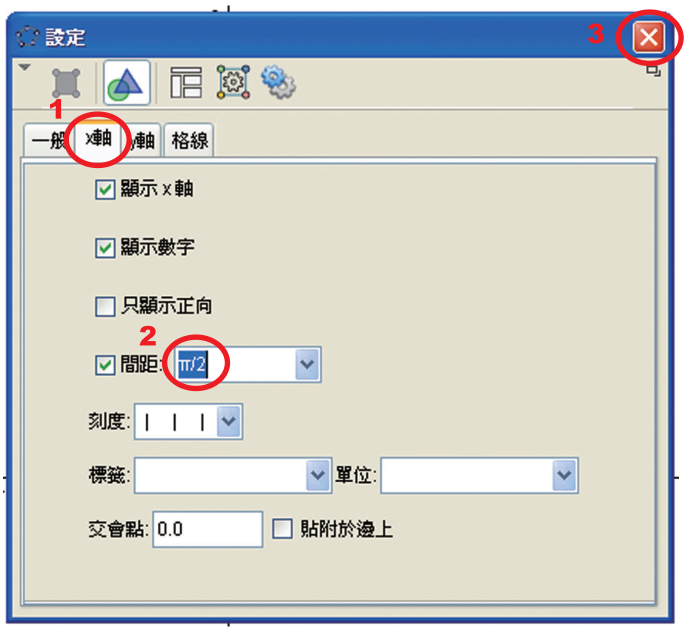


圖 28　變更繪圖區 x 軸的間距

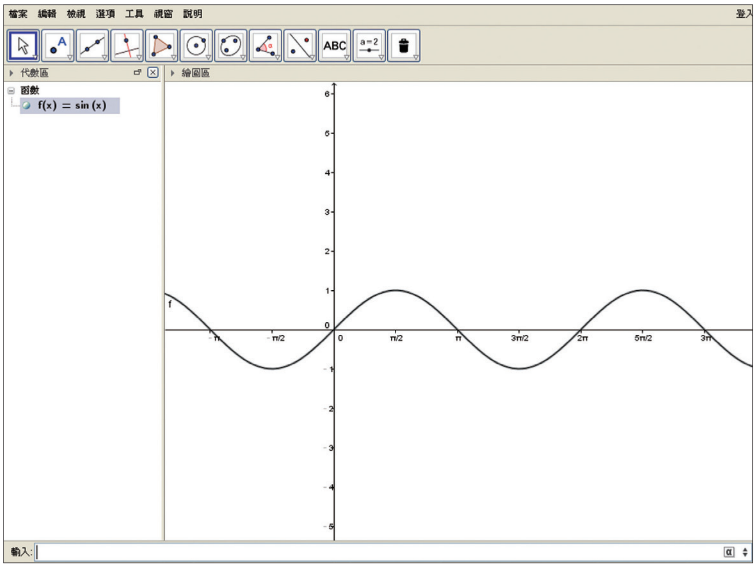


圖 29　Geogebra 繪出 $y=\sin x$ 的圖形

圖 29 中 Geogebra 的繪圖區已經出現了 $y=\sin x$ 的圖形，而代數區中顯示「$f(x)=\sin(x)$」，也就是說 Geogebra 將函數 $y=\sin x$ 的代號預設為 $f(x)$。

接著我們將試著利用在 Geogebra 繪出的圖形來得知它與 x 軸在特定範圍內所圍出的面積。我們先從積分的意義談起。

「積分」的發展源自於人們應用上的需求，例如要計算平面上具有特定規則的曲線（如拋物線、橢圓）或更不規則曲線的區域之面積，或在物理學中要計算位移與施力的累積效果，都可用到積分。

以計算一個平面圖形的面積來說，在國中、國小時我們就已熟知可以利用每邊長為固定單位長的正方形為單位面積來算出規則圖形的面積。如第 60 頁圖 30，矩形的長恰為 7 個單位長、寬恰為 5 個單位長，故面積為 $a\times b=7\times 5=35$ 平方單位，而矩形對角線分割成的兩個三角形面積皆為 $\frac{a\times b}{2}=\frac{35}{2}$ 平方單位。即便是多條線段所圍成的區域，也可分割成多個矩形或三角形，再由這些矩形或三角形的面積和求出區域的面積。

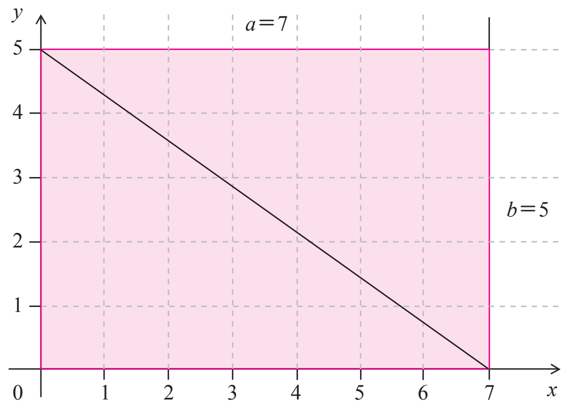


圖 30　利用單位面積的正方形求出矩形或三角形面積

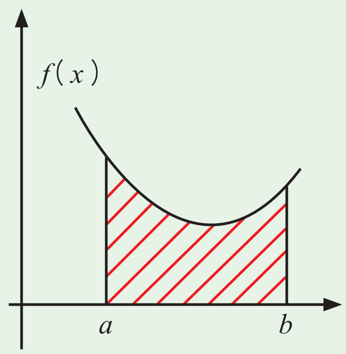
但是當我們面對曲線所包圍的區域時，就可以考慮利用定積分的方式來求得它的面積了。

【定積分的意義】

若 $f(x)$ 是一個在 $a \le x \le b$ 範圍中連續[註1]且函數值非負數的函數，則由 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、直線 $x=a$、直線 $x=b$ 所圍成的區域（如下圖斜線區域）面積即為函數 $f(x)$ 由 a 至 b 的定積分[註2]。

註1：有關「連續」的意義，在數學課程中會做詳細介紹，在此暫不多作解釋。

註2：函數 $f(x)$ 由 a 至 b 的定積分可用 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示。



上面提到函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 範圍中函數值非負數，其定積分之值恰為斜線區域的面積，但若函數圖形在 x 軸下方時，其定積分之值變為面積的相反數。

如圖 31，函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 範圍中之值有正有負，當函數圖形在 x 軸上方時（圖中標示『＋』號處），其定積分之值即為該區域的面積；但函數圖形在 x 軸下方時（圖中標示『－』號處），其定積分之值為紅色區域面積的相反數。

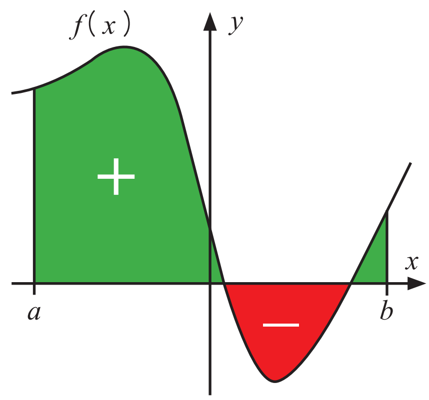


圖 31　函數圖形在x軸下方時，定積分之值與面積互為相反數

以下我們以線性函數的例子來更深刻地認識定積分，並學習利用 Geogebra 求出定積分之值。

如圖 32，函數 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$ 的圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍成的區域面積可利用梯形面積公式求得，即函數 $f(x)$ 由 0 至 4 的定積分之值為 $\frac{(2+4)\times 4}{2}=12$。

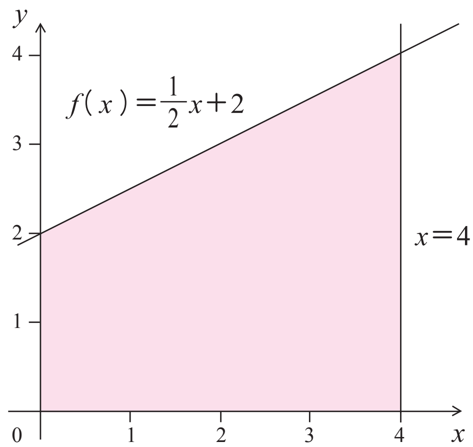


圖 32　函數 $f(x)$ 圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍面積為 $f(x)$ 由 0 至 4 的定積分

如果要利用 Geogebra 求得上述定積分之值時，方法如下：

在開啟 Geogebra 後，在指令列中輸入「$y=0.5x+2$」並按下 Enter 鍵，即可出現函數圖形，同時代數區中出現直線「$a：y=0.5x+2$」。接著在指令列輸入「Integral [a, 0, 4]」，按下 Enter 鍵。繪圖區中即會顯現出函數圖形與 x 軸、直線 $x=0$（y 軸）、直線 $x=4$ 所圍成的指定區域，同時繪圖區及代數區顯示「$b=12$」，如圖 33，表示定積分的值為 12。

上例的指令「Integral [a, 0, 4]」中 Intergral 就是積分的意思，中括號內的第一個文字 a 即為本例中的函數（即直線 $y=0.5x+2$），第二個數字 0 是指欲求的定積分之起始位置為 $x=0$，第三個文字 4 則是指定積分之結束位置為 $x=4$。

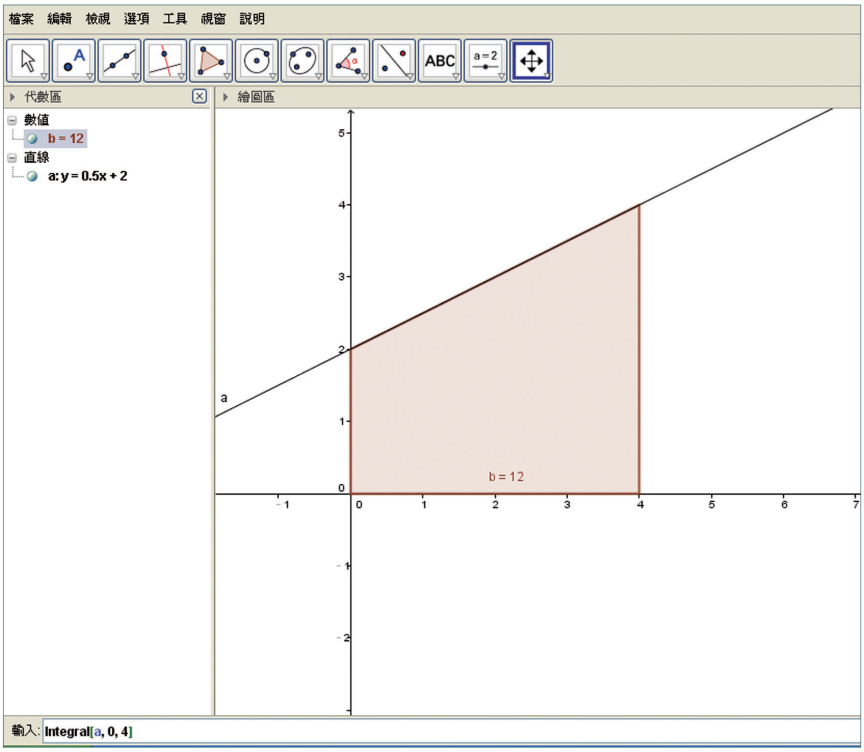


圖 33　用 Geogebra 求函數 $f(x)$ 圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍的面積

最後我們回到本段落的重點，試著利用 Geogebra 求出正弦函數 $y=\sin x$ 在某段範圍的定積分（或與 x 軸所圍成的區域面積）。

首先開啟 Geogebra，先自行繪出 $y=\sin x$ 的圖形，並設定 x 軸的間距。為 $\frac{\pi}{2}$ 在指令列輸入 Integral [f, 0, pi] ，按下 Enter 鍵。繪圖區中即會顯現出 $y=\sin x$ 與x 軸所圍成的指定區域，同時繪圖區及代數區顯示「$a=2$」，如圖 34，表示定積分的值為 2。

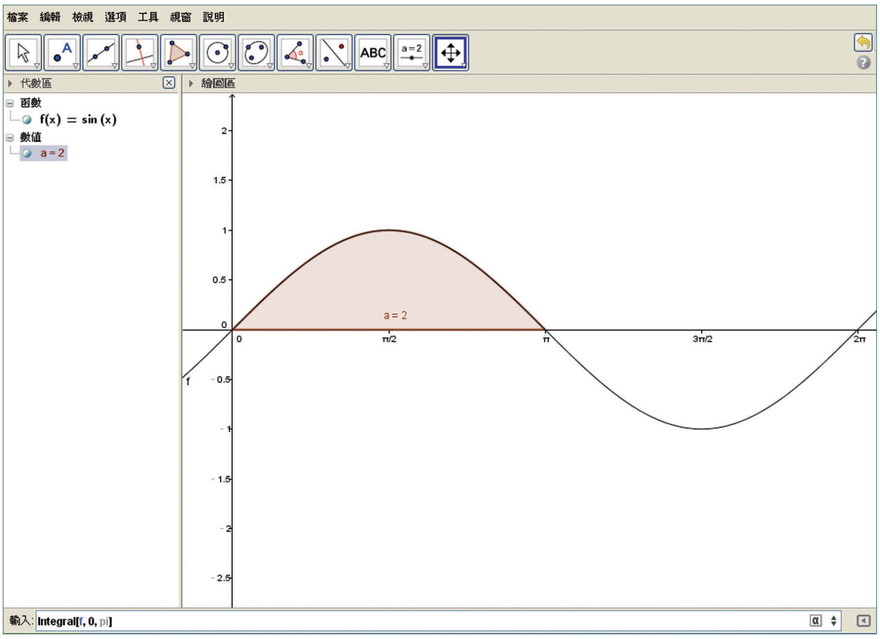


圖 34　函數 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之間的定積分

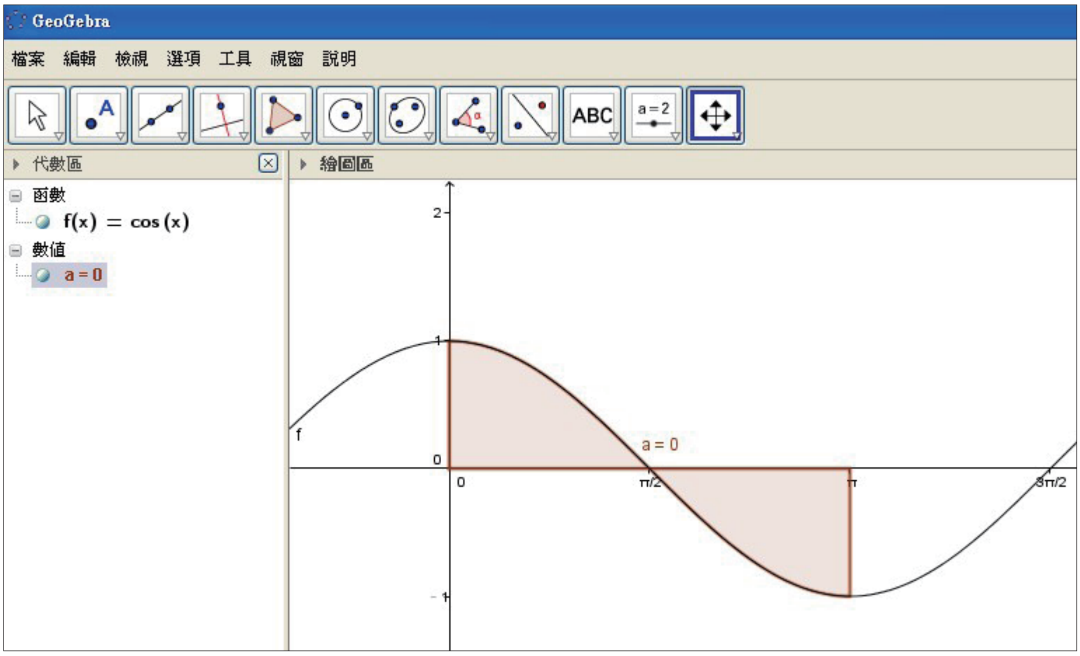
如同上頁的例子，指令 Integral [f, 0, pi] 中的 Intergral 是積分，中括號內的第一個文字 f 即為函數 $f(x)=\sin x$，第二個數字 0 是指欲求的定積分之起始位置為$x=0$，第三個文字 pi 則是指定積分之結束位置為 $x=\pi$ 。

我們利用下面的活動及想想看，試著練習使用 Geogebra 求出 $y=\sin x$ 在另一範圍的定積分之值。

搭配學生手冊 P64

活動 3-2 解答：

開啓 Geogebra 後，在指令列輸入「y=cos（x）」並按下 Enter 鍵。出現 y=cos$x$的圖形後，在指令列輸入「integral[f , 0 , pi]」並按 Enter 鍵即可得到定積分之值爲 0，如下圖。



活動 利用 Geogebra 求出函數 $y=\sin x$ 在 $x=\pi$ 到 $x=2\pi$ 之間的定積分之值。

我們進行下列步驟以求得定積分之值：

Step 1 先自行繪出 $y=\sin x$ 的圖形，並設定x軸的間距為 $\frac{\pi}{2}$。

Step 2 在指令列輸入 Integral[*f, pi,* 2*pi*] ，按下 Enter 鍵。

Step 3 繪圖區中即出現 $y=\sin x$ 與 x 軸所圍成的指定區域，如圖 35。

Step 4 從繪圖區及代數區所顯示的文字「$a=-2$」可知，所求定積分值為-2。

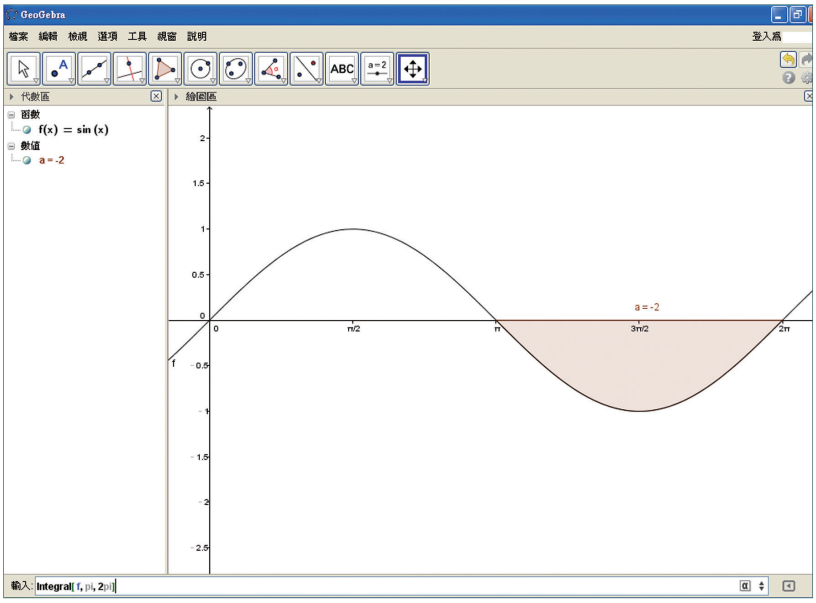


圖 35　函數 $y=\sin x$ 在 $x=\pi$ 到 $x=2\pi$ 之間的定積分

活動 試利用 Geogebra 求函數 $y=\cos x$ 在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 間定積分之值。

在認識積分的意義及利用 Geogebra 求取定積分之值後，我們可能更容易理解交流電波形的平均值與有效值是如何求得，請同學參閱本書第二章。

課後作業

1. 試利用 Geogebra 求下列各函數在指定範圍內的定積分之值。

函數	x的範圍	定積分之值
$y=\sin x$	$0\le x\le \pi$	2
$y=\sin x$	$\pi\le x\le 2\pi$	-2
$y=3x+2$	$0\le x\le 2$	
$y=2x^2-1$	$\frac{1}{2}\le x\le 2$	
$y=\lvert x\rvert+2$	$-1\le x\le 1$	

註：在指令列使用 Integral 指令時，中括號內的第一個文字應依照代數區所顯示的函數代號（如：f、g、h等）輸入。

課後作業解答

1. 10
2. 3.75
3. 5

素養導向數學教材　/　曾世杰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

素養導向技術型高級中學數學教材：交流電中的數學－ 教師手冊
主 編 者：單維彰
作　　者：馬雅筠、陳吳煜
（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組
召 集 人：曾世杰
副召集人：單維彰、鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜
陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿
（依姓氏筆畫順序排列）
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 http://www.naer.edu.tw 免費取用

本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）