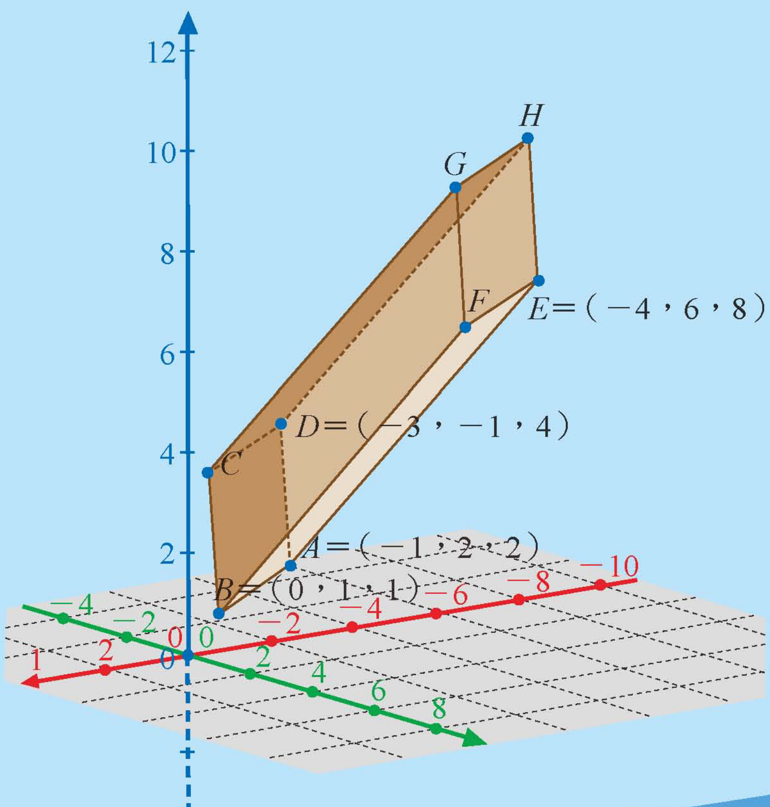
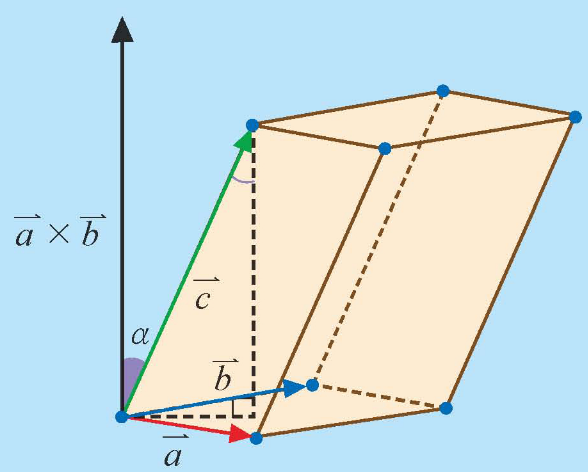
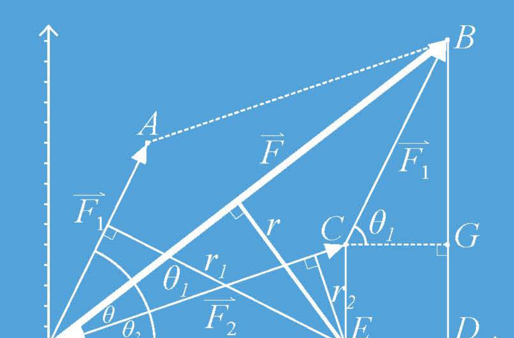
素養導向技術型高中數學教材

力矩與向量外積

教師手冊







國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

◎ 壹、單元名稱

力矩與向量外積

◎ 貳、單元目標

複習國中習得的力矩概念，連結向量外積，使學生察覺數學在學習專業科目時的實用性。

◎ 參、教材設計理念

「學數學有什麼用？」是現今許多中學生在學習數學時常會出現的疑問，對於追求理論與實務並重的技術型高中學生而言也是常見。將數學理論運用到實際的生活與專業科目中，對於技術型高中學生而言，更顯得重要。

多年來，技術型高中數學課程綱要一直未將空間及空間向量單元納入，無法讓技術型高中學生將數學連結於電腦數值控制(Computer Numerical Control；CNC)工具機、電腦輔助製圖、電腦繪圖、空間設計、3D列印 … 等相關課程。而當機械群、動力機械群、土木建築群學生進入下一個學習階段——技專院校時，更發生學習的斷裂，尤其在力學的學習上，毫無空間向量的觀念，更遑論了解向量外積的意義與性質。在105技術型高中數學課程綱要(草案)數學C版的規劃中，加入空間及空間向量，即是爲了彌補此一缺漏，而空間向量更是希望能連結物理、專業科目中的機械力學、材料力學 … 等課程，以作爲學生學習相關學科的基礎概念。

筆者鑑於教學二十餘年的經驗，多數技術型高中學生在學習向量時，對於向量內積常感到抽象而不易學習與接受，因此筆者期望藉由本教材爲技術型高中數學科教師提供參考範例，嘗試由學生國中理化學過的具象概念「力矩」導入向量外積的概念，筆者在設計本教材時，曾多次與物理教師、專業科目教師對話，數次修改教材內容以符合學生起點行爲並與物理、專業科目教學內容連結；期望使學生藉由已習過的具體概念將向量外積內化，進而善用此一工具在相關專業科目課程中。此設計雖與數學史中向量外積的發展脈絡不同，但卻更貼近學生專業科目中相關的數學內容。

◎ 肆、教材架構

十二年國民基本教育之課程發展本於全人教育的精神，以「自發」、「互動」及「共好」爲理念，強調學生是自發主動的學習者，學校教育應善誘學生的學習動機與熱情，因此本教材設計以學生爲主體，教師只是引導者，透過提問、討論、發表、操作、情境體驗等教學活動與策略，引導學生創造與省思，提供學生更多參與互動及力行實踐的機會，導引學生開展與自我、與他人、與社會、與自然的各種互動能力。本教材內容爲「力矩與向量外積」，設計架構分述如下。

一、引起動機：

從「阿基米德的機械研究」談起，探究阿基米德所不知，隱藏於力矩中的數學概念——向量的外積。

二、與生活連結：

藉由「物體的轉動」，引發學生討論與思考，並與日常生活經驗連結。

三、複習舊知識：

回顧「力矩」，連結國中理化課程，並讓學生聯想一下，物理的力矩除了大小外，仍包含了方向，順勢連結數學向量概念。

四、連結舊經驗，導入新概念：

以向量表示力矩運算，由力矩導入向量外積。

五、與專業科目連結：

介紹力矩原理，連結向量外積與專業科目內容，並藉此說明向量外積的分配律。

六、歸納總結：

讓學生藉由相互討論「空間基底向量的外積運算」，理解外積符號的意義，精確地預測結果，並藉此導引外積的分量表示法，歸納總結外積概念。

七、舉例示範：

提供連結向量外積與專業科目內容的例題示範，澄清學生觀念，並讓學生了解外積如何實際應用於專業科目。

八、適當練習：

提供學習單，讓學生課中或課後練習。

一、阿基米德的機械研究

阿基米德在埃及 亞歷山大城求學時期，有一天在久旱的尼羅河邊散步，看到農民提水澆地十分費力，幾經思考後，他發明了一種利用螺旋作用在水管裡旋轉而把水吸上來的工具，後世的人稱作它為"阿基米德螺旋提水器"（如圖1），埃及一直到二千年後的現在，還有人使用這種器械，這個工具成了後來螺旋推進器的先祖。

圖 1　阿基米德螺旋提水器

當時的歐洲，在工程和日常生活中，經常使用一些簡單機械，譬如：螺絲、滑車、槓桿、齒輪等，阿基米德花了許多時間去研究，發現了「**槓桿原理**」和「**力矩**」的觀念。阿基米德甚至曾說：給他一個支點，他可以舉起整個地球。

圖 2　沉思的阿基米德

剛好當時的國王希倫二世又遇到了一個棘手的問題，國王替埃及 托勒密王造了一艘船，因為太大太重，船無法放進海裡，國王就對阿基米德說，"你連地球都舉得起來，一艘船放進海裡應該沒問題吧？"於是阿基米德利用「槓桿原理」和「力矩」的概念，立刻巧妙地組合各種機械，造出一架機具，在一切準備妥當後，將牽引機具的繩子交給國王，國王輕輕一拉，大船果然移動下水，國王不得不為這個當時全世界對於機械原理與運用，瞭解最透徹的阿基米德所懾服。接下來，我們將跟隨著阿基米德的「力矩」的概念，探究阿基米德所不知，隱藏於力矩中的數學概念。

本頁授課要點—引起動機

- 教師可利用 *youtube* 影片讓學生了解阿基米德的簡易的生平及簡易螺旋汲水器製作：*https://www.youtube.com/watch?v=JujyFDX6p7s*。
- 延伸學習：阿基米德與浮力 *https://www.youtube.com/watch?v=1MYQK9fhxzo*

二、物體的轉動

p2.p3 授課要點—複習國中力矩

- 讓學生迅速回想國中的學習經驗，並讓將力矩與向量連結，以進入本單元重點：空間向量的外積。
- 可將 p2 與 p3 活動一的問題製作成學習單，透過學生分組討論或由老師實際轉動教室的門，讓學生觀察，使其回想國中理化學過的力矩概念。

當我們關上房門時，如果以相同的力量及相同角度推門的不同位置，在圖3 中，轉動的效果會相同嗎？

圖 3　以相同的力量及相同角度推門的不同位置

活動 1 【學生分組討論】

⑴在圖 4 中，以同樣力量分別對門 A、B、C、D 不同的四點垂直門面施力，施力在哪一點轉動的效果最為顯著呢？施力在哪一點最不易轉動呢？從最容易轉動到最不容易轉動，依序的施力位置是什麼？

答：

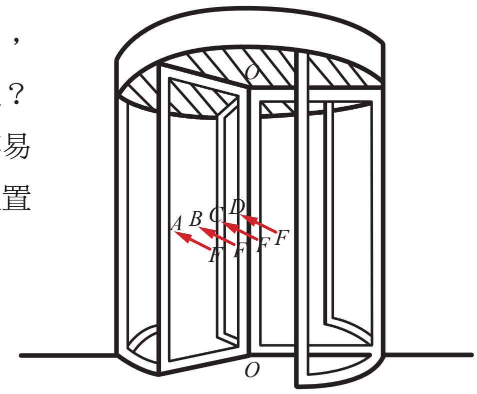


圖 4　不同的施力點對門施相同的力，轉動效果會不同

⑵在圖 4 中，若以不同力量，對 A 點施力時，究竟是力量越大，轉動的效果最為顯著？還是力量越小，效果越顯著呢？

答：

活動 1

⑴轉動效果最爲顯著的是：A 點
最不易轉動的是：D 點
從最容易轉動到最不容易轉動，依序的施力位置是：A、B、C、D

⑵力量越大，轉動的效果越顯著

▪藉此活動連結國中理化課程，並讓學生回想一下，物理的力矩除了大小外，仍包含了方向（順時針力矩、逆時針力矩），以方便連結下頁內容。

(3)在圖 5 中，若以同樣的力量，不同的方向對 A 點施力時，究竟 a、b、c、d 哪一種情況轉動的效果最為顯著呢？

答：

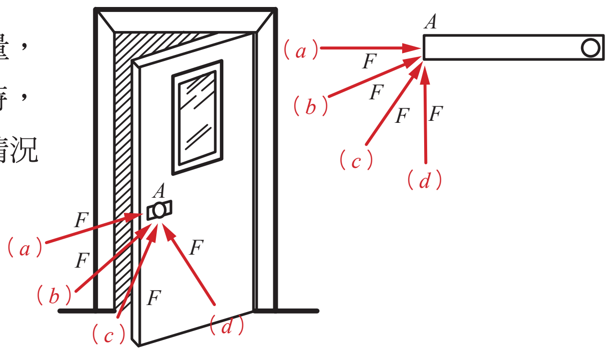


圖 5-1（正面圖）　　圖 5-2（俯視圖）

以相同的力量，但與門面夾角不同，轉動效果會不同

(4)由前面(1)(2)(3)的討論中，可否整理出影響轉動效果的因素有那些呢？

答：

在上面的敘述中，使物體轉動的傾向，在物理上稱為**力矩**(moment，torque)。

活動 1

(3)與門面垂直時（d），轉動的效果越顯著。與門面所夾銳角越小，轉動的效果越不顯著。

(4)影響轉動效果的因素：

①施力：施力越大，轉動效果越明顯。

②力的作用點：施力點離轉軸越遠（學生可能會回答力臂越大），轉動效果越明顯。

③施力方向：施力方向和物體夾角越接近 90 度，轉動效果越明顯。施力與門面的夾角愈小，門愈不易轉動。

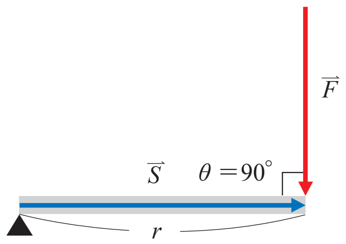
三、回顧「力矩」

p4.p5 授課要點—(1)力矩的方向(2)力臂與向量夾角的關係(3)力矩大小的計算

- 回顧「力矩」—此處強調的是力矩的方向：力矩依轉動方向可分逆時針力矩與順時針力矩。
- 學生在國中理化所習得之「力臂」為「施力到支點的垂直距離」，學生多半能畫出力臂，但恐怕無法與三角函數做聯結，計算力臂大小。

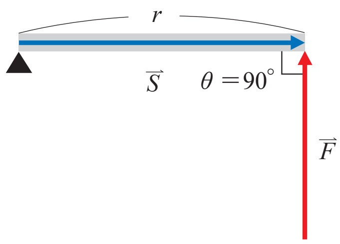
讓我們回憶一下，國中理化學過的力矩。如上一頁圖 5，施力與門面夾角不同，轉動效果會有不同，力矩依轉動方向不同又可分為哪些方向呢？

下圖 6-1 到圖 6-6 是施力與門面夾角不同，所導致轉動效果不同的力矩圖。



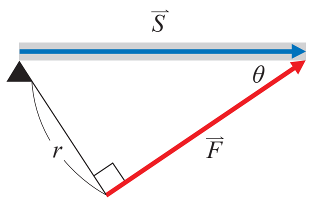
力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-1



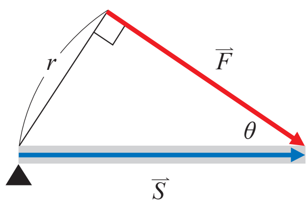
力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-2



力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-3



力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-4

學生手冊 P4

課文

- 力矩依轉動方向可分為逆時針力矩與順時針力矩。

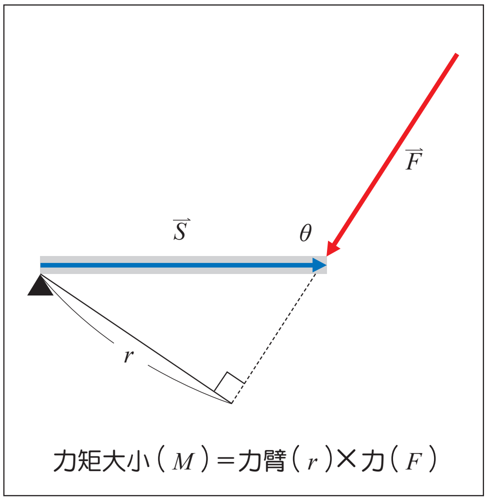


圖 6-5

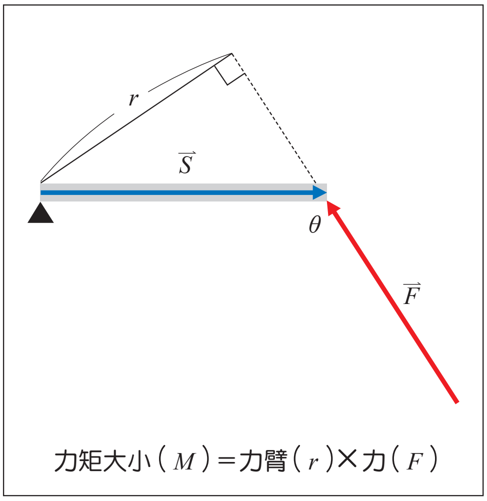


圖 6-6

圖 6 中的力(F)指「施力 $\vec{F}$ 的大小，即 $|\vec{F}|$」，力臂(r)指的是「施力到支點的垂直距離」，$\vec{S}$ 指的是由支點到施力點的向量。由上圖可知，當施力大小相同時，力臂愈大，力矩的大小愈大。

練習 1

試問圖 6-1~圖 6-6 有哪些力矩轉動的方向是順時針旋轉的力矩？哪些是逆時針旋轉的力矩？

答：

練習 2

在圖 6-1~圖 6-6 中，當由支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 大小皆相同，而且施力 $\vec{F}$ 的大小相同且施力於同一點時，我們發現力矩的大小與力臂 r 有關，請問力臂 r 的大小又與何者有關呢？

答：

學生手冊 P5

- 練習題請學生討論或回答。
- 在練習2中，請老師導引學生，在 $|\vec{S}|$ 的大小相同時，讓學生察覺力臂 r 的大小與角度 θ 有關，若學生能發現與 $\sin\theta$ 有關，則可加速教材的進行。

練習 1

- 順時針力矩：圖 6-1、圖 6-4、圖 6-5。逆時針力矩：圖 6-2、圖 6-3、圖 6-6

練習 2

- 力臂大小與圖中的夾角 θ 有關。

本頁授課要點—簡單回顧國中所學力矩的意義

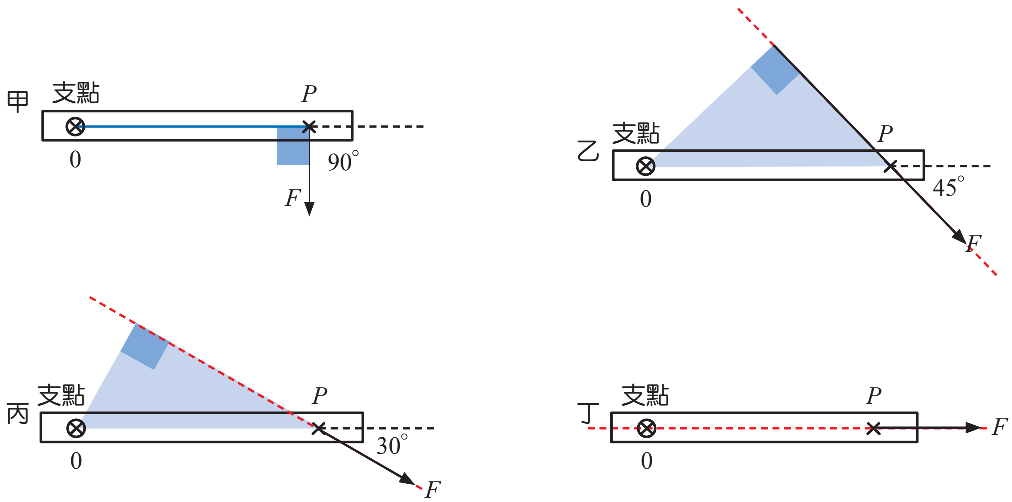
- 定義：施力 與 力臂 的乘積，來衡量物體轉動的難易⇨符號：M。
- 力矩關係式：力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）
- 力矩的單位：與 功 的單位相同，但意義完全不同
  (1) $N \cdot m$
  牛頓‧公尺
  $M = N \cdot m$
  (2) $kgw \cdot m$
  公斤重‧公尺
  $M = kgw \cdot m$
  (3) $gw \cdot m$
  公克重‧公尺
  $M = gw \cdot m$
- 力矩的方向性：力矩是有方向性的
  (1) 順時針 旋轉
  (2) 逆時針 旋轉

練習 3

在下面甲、乙、丙、丁四個圖中，為同一個槓桿分別以不同方向但相同大小的力 F 作用於 P 點，若 $\overline{OP} = d$ 公尺，請回答下列問題：

(1)請以作圖法，求出甲、乙、丙、丁四個圖中的力臂之大小。

答：甲：________；乙：________；丙：________；丁：________。



(2)請列出甲、乙、丙、丁四個圖中力矩大小之計算式？

答：甲：________（　　時針旋轉）；乙：________（　　時針旋轉）；
丙：________（　　時針旋轉）；丁：________。

想一想

由上面的討論得知，力矩包含大小與方向（順時針、逆時針方向）兩個要素，在之前學過的高職數學課程中，哪一個概念可以同時表示「大小」及「方向」？

學生手冊 P6

練習 3

(1)甲：$r_{甲} = d$；乙：$r_{乙} = \frac{d}{\sqrt{2}}$；丙：$r_{丙} = \frac{d}{2}$；丁：$r_{丁} = 0$。

(2)甲：$M_{甲} = F \times d$（順時針旋轉）；乙：$M_{乙} = F \times \frac{d}{\sqrt{2}}$（順時針旋轉）；
丙：$M_{丙} = F \times \frac{d}{2}$（順時針旋轉）；丁：$M_{丁} = 0$。

想一想

- 之前學過，可以同時表示大小及方向的概念是向量。由前面討論中我們可以得知：力矩需考慮大小與方向，因此它是個向量。

四、以向量表示力矩

力臂大小

在前面圖 6-1~圖 6-6，由支點到施力點的向量若為 $\overline{S}$，讓我們想一想「$\overline{S}$ 與力臂 r 有何關係？」在圖 7 中，我們不難發現，在以長度 $|\overline{S}|$ 為斜邊的直角三角形中（因為是向量大小，所以以符號 $|\overline{S}|$ 表示），力臂 r 恰為角 α 的對邊，即力臂 $r = |\overline{S}|\sin\alpha = |\overline{S}|\sin(180° - \theta) = |\overline{S}|\sin\theta$

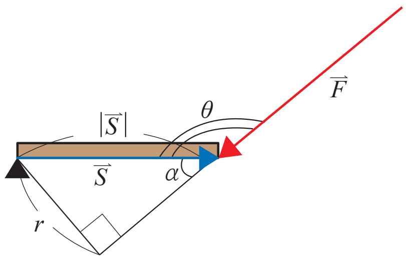


圖 7　支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 與力臂 r 的關係

力矩的大小

由前面的討論可知：國中理化學過的力矩需考慮大小與方向，因此它是個向量；並且施力 $\overline{F}$ 是向量，支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 也是向量，那麼在數學上該如何表示這兩個向量 $\overline{F}$ 與 $\overline{S}$ 之間的運算關係呢？

上面的討論中，若支點到施力點的向量為 $\overline{S}$，可得力臂 $r = |\overline{S}|\sin\theta$。

因此　**力矩 $\overline{M}$ 的大小** $|\overline{M}|$ = **力臂**（r）× **力**（F）$= |\overline{S}|\sin\theta\ |\overline{F}| = |\overline{S}||\overline{F}|\sin\theta$

本頁授課要點——(1)力臂的計算(2)力矩大小的計算(3)向量夾角的計算

- 力矩參考資料：師大物理系物理教學示範實驗教室 http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/phpBB/viewtopic.php?topic=24703
- 教師可能需要先幫學生複習正弦的概念，以及 $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$。

本頁授課要點—學生易忽略犯錯的概念：計算夾角時必須平移向量，使兩向量始點重合。

向量的夾角

空間向量的夾角：對於兩個非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，我們可以將它們平移，使其**始點重合**，此時在兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所張的三角形所在平面中，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 形成的夾角 θ（$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$），如圖 8，稱為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角．

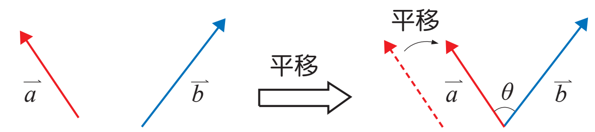


圖 8　向量的夾角

練習

在下圖 9 中，請平移向量後畫出支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 與施力 $\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$、$\vec{F_3}$、$\vec{F_4}$ 的夾角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4？

答：

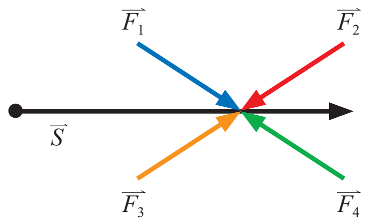


圖 9

學生手冊 P8

練習

本頁授課要點—由 $\vec{S}$ 旋轉至 $\vec{F}$ 的方向推得力矩方向，並銜接外積的方向。

力矩的方向

如果以施力 $\vec{F}$ 推動門邊造成轉動時，可能形成逆時針旋轉的力矩（如下圖10-1）或順時針旋轉的力矩（如下圖10-2），為計算施力 $\vec{F}$ 與從支點到施力點向量 $\vec{S}$ 的夾角，我們通常將 $\vec{F}$ 平移，使其與 $\vec{S}$ 的始點重合，此時在兩向量 $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 所張的三角形所在平面中，可得 $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 的夾角為 θ 。根據物理的定義，力矩的方向：逆時針旋轉為正，順時針旋轉為負。而我們發現，當右手除了大拇指外的其他四指從向量 $\vec{S}$ 旋轉至向量 $\vec{F}$ 時，大拇指所指的方向若朝上，在物理中稱為「正向」，即為逆時針旋轉；大拇指所指的方向若朝下，在物理中稱為「負向」，即為順時針旋轉。這恰符合力矩的方向，如此利用右手大拇指的方向決定力矩的方向稱為右手定則，如圖10；而且力矩 $\vec{M}$ 的方向與向量 $\vec{F}$ 的方向垂直，也與向量 $\vec{S}$ 的方向垂直。

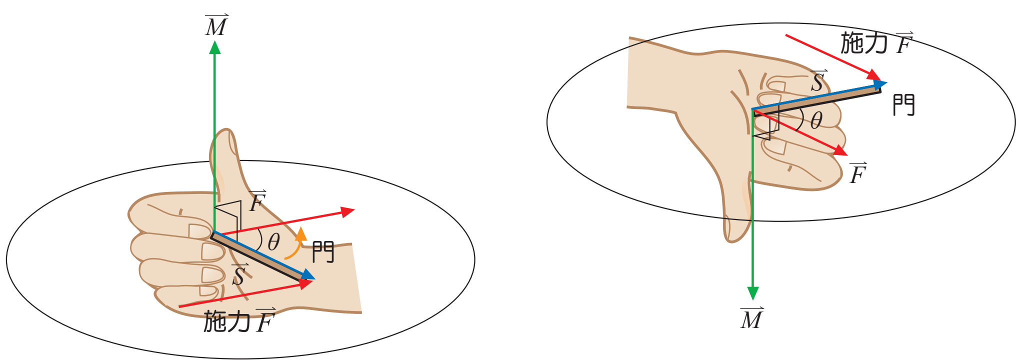


圖 10-1　逆時針轉的力矩為正　　圖 10-2　順時針轉的力矩為負

圖 10-1~10-2　以右手定則決定力矩的方向

本頁授課要點—導入外積

- $\overline{S}\times\overline{F}$ 的符號及名詞，由力矩的大小與方向聯結外積的運算包含大小與方向，強調外積是「向量」。
- 提醒學生因為在決定方向時，是由 $\overline{S}$ 旋轉至 $\overline{F}$，所以記作 $\overline{S}\times\overline{F}$。

【向量表示力矩】

力矩：物體受力後轉動難易程度的物理量，稱為力矩，其具有大小與方向。

力矩 $\overline{M}$ 的大小：$|\overline{M}|$＝力臂×力＝$|\overline{S}||\overline{F}|\sin\theta$

（其中 $\overline{S}$ 為支點到施力點的向量，$\overline{F}$ 為力，$\overline{F}$ 和 $\overline{S}$ 的夾角為 θ）

力矩的方向：由 $\overline{S}$ 旋轉至 $\overline{F}$，依照右手定則來決定，且力矩 $\overline{M}$ 的方向與 $\overline{S}$、$\overline{F}$ 的方向皆垂直。

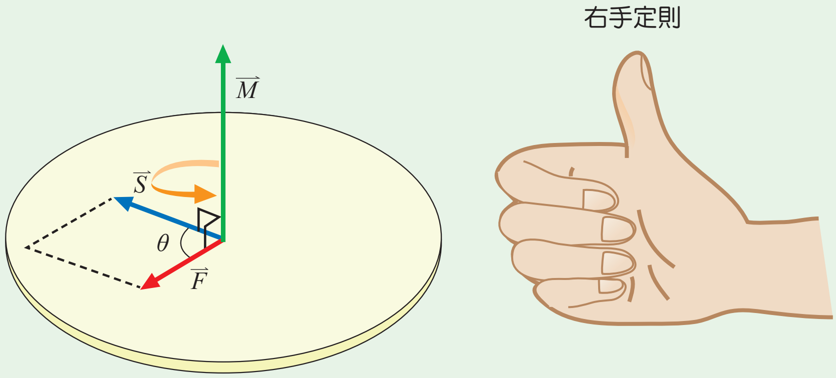


圖 11　利用右手定則決定力矩的方向

力矩是個有大小、有方向的物理量，用數學的語言來說，力矩就是一個向量，它來自於兩個向量 $\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 之間的運算，在數學上，這樣的運算關係記作：力矩 $\overline{M}=\overline{S}\times\overline{F}$。

不同於之前所學過的內積運算（功 $W=\overline{S}\cdot\overline{F}=|\overline{S}||\overline{F}|\cos\theta$）是只有大小的純量，並沒有方向性；力矩是有大小、有方向的向量，在力矩的運算中我們以符號「×」來區別它與內積運算的不同，並且稱這樣的運算關係 $\overline{S}\times\overline{F}$ 為向量 $\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 的「外積」。

學生手冊　P10

五、兩向量外積的意義

$\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 兩個向量的乘法 $\overline{S}\times\overline{F}$，在數學上稱為**外積**。由前面可知外積的結果是一個向量，且比照力矩的運算，定義空間中兩向量的外積運算如下：

【向量的外積】

若空間中兩向量 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 的夾角為 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$，

則 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 的外積記做 $\overline{a}\times\overline{b}$

$\overline{a}\times\overline{b}$ **外積的大小**為 $|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\theta$，

$\overline{a}\times\overline{b}$ **外積的方向**由 $\overline{a}$ 旋轉至 $\overline{b}$，依照右手定則所決定（請參考圖 11）。

且 $\overline{a}\times\overline{b}$ 的方向與 $\overline{a}$、$\overline{b}$ 的方向皆垂直。

活動 2【學生分組討論】

(1) $\overline{a}\times\overline{b}$ 與 $\overline{b}\times\overline{a}$ 是否相等？

答：

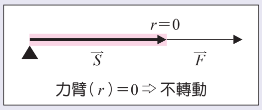
(2) 若 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 是平行的兩向量，外積 $\overline{a}\times\overline{b}$ 的結果是甚麼呢？

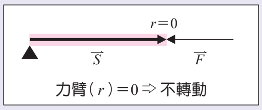
答：

學生手冊 P11

本頁授課要點──外積的定義，並透過學生分組討論思考與釐清外積的方向與符號的意義。

- 可讓學生思考當施力 $\overline{F}$ 與支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 平行時，力矩的大小為 0，換言之 $\overline{M}=\overline{S}\times\overline{F}=\overline{0}$，此時物體不轉動。可請學生想一想，圖 5-1、5-2中（a）的轉動情形。





活動 2

(1) $\overline{a}\times\overline{b}$ 與 $\overline{b}\times\overline{a}$ 是大小相同，但方向相反的向量，故 $\overline{a}\times\overline{b}\neq\overline{b}\times\overline{a}$。

（$\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$）

(2) $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$

由 $\overline{a}\times\overline{b}$ 的大小 $|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\theta$，當 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 平行時，夾角為 0° 或 180°

而 $\sin0^\circ=\sin180^\circ=0$，即 $\overline{a}\times\overline{b}$ 之大小為 0，因此 $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}$。

本頁授課要點─藉由力矩原理說明外積的分配律。

- 力矩原理又名瓦銳蘭定理(*Varignon's theorem*)，是機械群、動力機械群、土木建築群學生在學習力矩時的重要定理。
- 此處乃藉由力矩原理說明外積的分配律，並為學生手冊 p15 外積的分量表示法所使用的運算奠基。
- 由於

$|\overline{S}|\sin\theta=r$

$|\overline{S}|\sin\theta_1=r_1$

$|\overline{S}|\sin\theta_2=r_2$

若

$|\overline{F}|=F$

$|\overline{F_1}|=F_1$

$|\overline{F_2}|=F_2$

由(1)可得

$rF=r_1F_1+r_2F_2$

此為學生在專業科目「力學」單元所見之公式，教師可多做說明，以利學生聯結。

【力矩原理】

力矩原理：幾個作用力施加於某位置所產生的力矩的總和，等於這些作用力的合力所產生的力矩。

即：若 $\overline{F_1}$ 與 $\overline{F_2}$ 的合力為 $\overline{F}$（也就是 $\overline{F_1}+\overline{F_2}=\overline{F}$），點 O 為支點，E 為施力點，支點到施力點的向量為 $\overline{S}$，

則 $\overline{S}\times\overline{F_1}+\overline{S}\times\overline{F_2}=\overline{S}\times\overline{F}$

說明：如圖 12，若施力 $\overline{F}$、$\overline{F_1}$、$\overline{F_2}$ 與支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 之夾角分別為 θ、θ_1、θ_2；施力 $\overline{F}$、$\overline{F_1}$、$\overline{F_2}$ 的對於點E的垂直距離，也就是力臂，分別為 r、r_1、r_2，

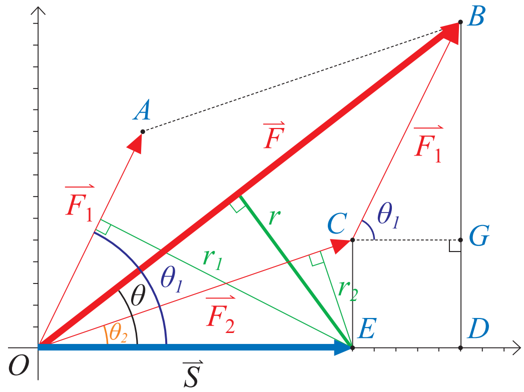


圖 12　力矩原理

由 $\overline{BD}=\overline{BG}+\overline{GD}$，可得 $|\overline{F}|\sin\theta=|\overline{F_1}|\sin\theta_1+|\overline{F_2}|\sin\theta_2$

（等式兩邊同乘以 $|\overline{S}|$）$|\overline{S}||\overline{F}|\sin\theta=|\overline{S}||\overline{F_1}|\sin\theta_1+|\overline{S}||\overline{F_2}|\sin\theta_2\cdots(1)$

即 $|\overline{S}\times\overline{F}|=|\overline{S}\times\overline{F_2}|+|\overline{S}\times\overline{F_1}|$

由圖中亦可發現 $\overline{S}$ 對於合力 $\overline{F}$ 所產生的力矩方向和 $\overline{S}$ 與分力 $\overline{F_1}$、$\overline{F_2}$ 所產生的力矩方向相同。即 $\overline{S}\times\overline{F}=\overline{S}\times\overline{F_1}+\overline{S}\times\overline{F_2}$

同理，將 $\overline{F}$ 分為多個分力時，亦可得相同之結論；或是將 $\overline{S}$ 分解為多個支點到施力點的向量之和，亦可得相同之結論。

亦即：對於任意空間向量 $\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$、$\overline{d}$ 外積對加法的分配律均成立，即 $\overline{a}\times(\overline{c}+\overline{d})=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{d}$ 以及 $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$。

並可得 $(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{c}+\overline{d})=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{d}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{d}$。

六、向量的外積的性質

對於任意空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之夾角為 θ，則向量的外積具有以下性質：

(1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

說明：由外積定義可知。

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

說明：由力矩原理可知。

(3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(m\vec{b})$，其中 m 為任意實數

說明：

①若 $m>0$，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 外積的大小

$=\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=|m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|m|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相同，故依右手定則，$m\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同(如圖 13)，亦與 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a}\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})$

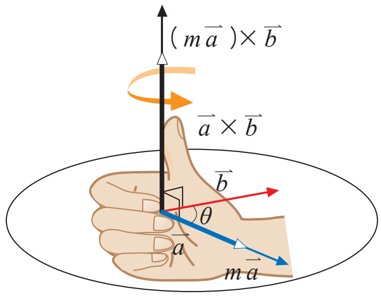


圖 13　$m>0$ 時，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同

②若 $m<0$，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 外積的大小

$=\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-\theta)$

$=|m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|m|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相反，故依右手定則，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相反(如圖 14)；又 $m<0$，故 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向亦相反。

也就是說 $m\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向與 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a}\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})$

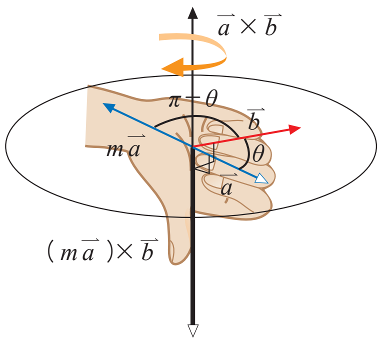


圖 14　$m<0$ 時，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相反

學生手冊　P13

p13.p14 授課要點—向量的外積的性質

- 其中性質(1)(2)(4)(5)可由定義得知。
- 性質(3)先複習 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 的關係，再請學生想一想 $(m\vec{a})\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的關係（大小如何？方向如何？），高職學生應當可理解 $(m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(m\vec{b})$ 的性質，學生手冊 p13 讓有興趣追根究底的學生自學即可，不建議對高職生嚴密地證明。

■ 在性質(4)中，若 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$、$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 或 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$

③若 $m=0$，$(m\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$ 外積的大小 $=0=|m|\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$

即 $(m\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 且 $m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0}$。

故 $m\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0}$

由①②③可知：若 m 為任意實數，

$m\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$。

同理可得 $\overrightarrow{a}\times(m\overrightarrow{b})=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$。

(4)若 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

說明：由外積定義可知。

(5)若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為不平行的兩非零向量，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ 且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$。

即 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的公垂向量。

說明：由外積定義可知。

學生手冊 P14

七、外積的分量表示法

在數學及較高深的物理運算時，我們習慣將向量以分量表示法（又稱坐標表示法）來簡化運算，那麼外積又要如何用分量表示法來表示呢？

活動3 【學生分組討論】

我們考慮先前所學到的空間基底單位向量 $\overline{i}=(1，0，0)$、$\overline{j}=(0，1，0)$、$\overline{k}=(0，0，1)$，如圖15，根據外積運算，並且利用右手定則，想想看下面各式的結果？

(1) $\overline{i}\times\overline{j}=$ ______　(2) $\overline{j}\times\overline{k}=$ ______　(3) $\overline{k}\times\overline{i}=$ ______
(4) $\overline{j}\times\overline{i}=$ ______　(5) $\overline{k}\times\overline{j}=$ ______　(6) $\overline{i}\times\overline{k}=$ ______
(7) $\overline{i}\times\overline{i}=$ ______　(8) $\overline{j}\times\overline{j}=$ ______　(9) $\overline{k}\times\overline{k}=$ ______

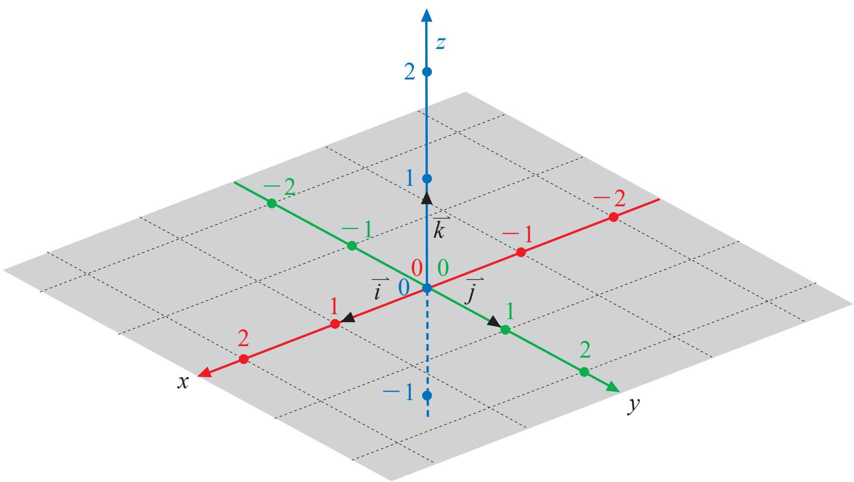


圖 15　空間的基底向量

學生手冊 P15

本頁授課要點—外積的分量表示法
- 透過學生分組討論思考熟悉外積的性質，並作爲外積分量表示法運算的基礎。
- 需先複習三階行列式降階法的運算性質。
- 需先複習空間基底單位向量。

活動3

(1) $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$　(2) $\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}$　(3) $\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}$
(4) $\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k}$　(5) $\overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}$　(6) $\overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}$
(7) $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{0}$　(8) $\overline{j}\times\overline{j}=\overline{0}$　(9) $\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$

p16.p17 授課要點—(1)外積定義的統整(2)使學生了解與練習如何使用分量表示法計算外積。

若有兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，我們將兩向量分別改寫為 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}$、$\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}$，若 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，配合前面的右手定則及向量外積對加法的分配律。可得

$$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k})\times(b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k})$$

$$=\overrightarrow{0}+a_1b_2\overrightarrow{k}-a_1b_3\overrightarrow{j}-a_2b_1\overrightarrow{k}+\overrightarrow{0}+a_2b_3\overrightarrow{i}+a_3b_1\overrightarrow{j}-a_3b_2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{0}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\overrightarrow{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

【向量的外積】

若兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 之夾角為 $\theta(0^\circ\leq\theta\leq180^\circ)$。

則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

其中 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{j}=(0,1,0)$、$\overrightarrow{k}=(0,0,1)$ 為空間的基底單位向量

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的大小： $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的方向： 由 $\overrightarrow{a}$ 旋轉至 $\overrightarrow{b}$，依照右手定則所決定。

學生手冊 P16

例題 1

已知向量$\overrightarrow{a}=(1，0，1)$，$\overrightarrow{b}=(2，-2，1)$，求$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$之值

答：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}=(2，1，-2)$

$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}=(-2，-1，2)$

■教師可提醒學生依行列式運算性質「兩列互換，其值異號」，亦可得$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$異號。

練習 1

已知向量$\overrightarrow{a}=(1，2，-2)$，$\overrightarrow{b}=(2，1，2)$，求

(1)$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　　(2)$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$　　(3)試問(1)與(2)外積結果有何異同之處？

答：

學生手冊 P17

練習 1

(1)$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(6，-6，-3)$

(2)$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=(-6，6，3)$

(3)方向不同但大小相同

本頁授課要點—提供連結向量外積與專業科目內容的例題示範，澄清學生觀念，並提供練習題讓學生當場練習。

- 教師需要先複習 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
- 例題 2 的最後一小題，是透過代數運算驗證，$(\vec{S}\times\vec{F})\perp\vec{F}$ 及 $(\vec{S}\times\vec{F})\perp\vec{S}$。

例題 2

如圖 16，小華使用板手旋轉螺帽，若以螺帽重心的支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\vec{S}=(-2,4,-4)$，力 $\vec{F}=(2,1,-2)$，求小華使用板手產生的力矩 $\vec{M}=$？力矩 $\vec{M}$ 的大小是多少？力矩 $\vec{M}$ 的方向是朝向何處？力矩 $\vec{M}$ 是否會與施力 $\vec{F}$ 或支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 垂直？

答：(1) $\vec{M}=\vec{S}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&4&-4\\2&1&-2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-12\vec{j}-10\vec{k}=(-4,-12,-10)$

(2) 力矩大小 $|\vec{M}|=\sqrt{(-4)^2+(-12)^2+(-10)^2}=2\sqrt{65}$

(3) 力矩的方向朝向圖中的左下（順時針旋轉）

(4) 可利用內積判斷力矩 $\vec{M}$ 是否與施力 $\vec{F}$ 或支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 垂直：

$\vec{M}\cdot\vec{F}=(-4,-12,-10)\cdot(2,1,-2)$
$=(-8)+(-12)+20=0$

$\vec{M}\cdot\vec{S}=(-4,-12,-10)\cdot(-2,4,-4)$
$=8+(-48)+40=0$

由內積為 0，可判斷力矩 $\vec{M}$ 與施力 $\vec{F}$ 垂直，力矩 $\vec{M}$ 與支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 亦垂直。

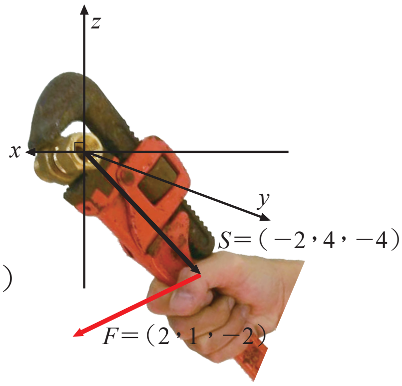


圖 16　板手旋轉螺帽

練習 2

如圖17，小明使用六角板手旋轉螺帽，若以六角板手直角轉彎處支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\vec{S}=(6,2,-3)$，力 $\vec{F}=(3,4,-1)$，求小明使用板手產生的力矩 $\vec{M}=$？又力矩的大小是多少？

答：

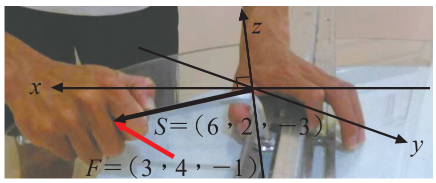


圖 17　六角板手旋轉螺帽

學生手冊 P18

練習 2

$$\vec{M}=\vec{i}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&2&-3\\3&4&-1\end{vmatrix}=10\vec{i}-3\vec{j}+18\vec{k}=(10,-3,18)$$

力矩大小 $|\vec{M}|=\sqrt{433}$

八、平行六面體體積

若兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 之夾角為 θ，向量 $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，可得以下面積與體積的關係：

(1)由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張之平行四邊形面積為 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$

說明：

如圖18，外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的大小 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\sin\theta$

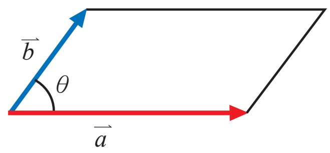


圖 18　由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張之平行四邊形為 $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$

(2) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

說明：

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\overrightarrow{c}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}\right)\cdot(c_1\overrightarrow{i}+c_2\overrightarrow{j}+c_3\overrightarrow{k})$$

$$=c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

p19.p20 授課要點—向量外積的應用，利用外積求平行四邊形面積與平行六面體體積

- 其中(2)是爲了說明(3)的運算而先行整理，教師可視學生學習情況加以調整。
- 教師需要先複習 $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C$ $=\frac{1}{2}bc\sin A$ $=\frac{1}{2}ac\sin B$
- 教師需要先複習 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

■教師需先複習 $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$（其中 θ 爲 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 的夾角）。

(3)由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積為 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

由上述(1)，圖 19 中平行六面體底面積為 $|\vec{a}\times\vec{b}|$

設 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角為 α，

則平行六面體的高為 $|\vec{c}||\cos\alpha|$

平行六面體體積為底面積×高 $=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}||\cos\alpha|$

$=\left||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha\right|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

$=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

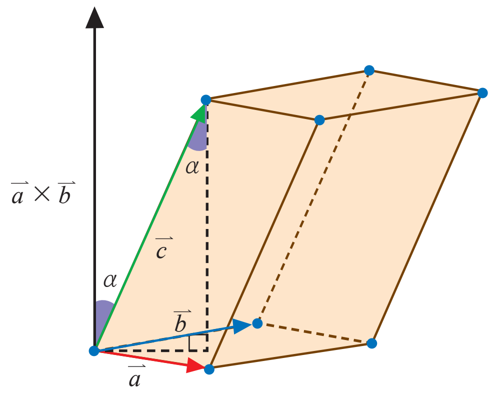


圖 19　由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張之平行六面體

想一想

若以 $|\vec{b}\times\vec{c}|$ 或是 $|\vec{c}\times\vec{a}|$ 為平行六面體底面積，則由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積要如何表示？其結果與(3)的計算結果會相同嗎？為什麼？

學生手冊 P20

想一想

$|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=\left|\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\right|$，$|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|=\left|\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\right|$，

皆與 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 相同，由行列式性質可知。

例題 3

如圖 20，已知 $A(-1，2，2)$、$B(0，1，1)$、$D(-3，-1，4)$、$E(-4，6，8)$，$ABCD\text{-}EFGH$ 為一平行六面體，請問平行四邊形 $ABCD$ 面積為多少？平行六面體 $ABCD\text{-}EFGH$ 體積為多少？

答：

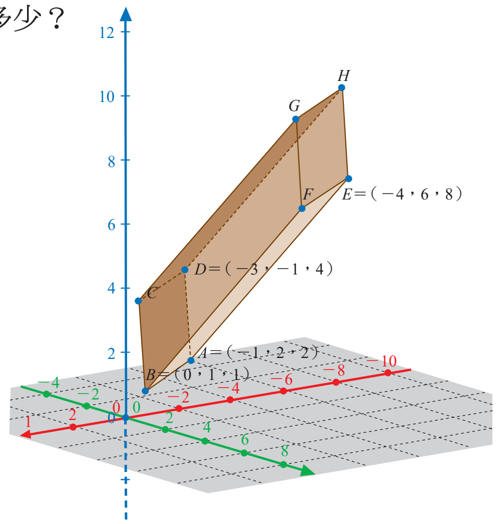


圖 20

(1) $\overrightarrow{AB}=(1，-1，-1)$，

$\overrightarrow{AD}=(-2，-3，2)$

平行四邊形 $ABCD$ 面積 $=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

$$=\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right|=\left|-5\vec{i}-5\vec{k}\right|$$

$$=\left|(-5，0，-5)\right|=5\sqrt{2}$$

(2) $\overrightarrow{AE}=(-3，4，6)$

平行六面體 $ABCD\text{-}EFGH$ 體積 $=\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}\right|=15$

練習 3

由向量 $\vec{a}=(1，1，-1)$、$\vec{b}=(1，-1，1)$、$\vec{c}=(-1，1，1)$ 所張之平行六面體體積為多少？由向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之三角形面積為多少？

答：

學生手冊 P21

本頁授課要點—提供平行六面體體積與平行四邊形面積例題示範，澄清學生觀念，並提供練習題讓學生當場練習。

- 平行六面體 $ABCD\text{-}EFGH$ 體積亦可利用 $\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AE}\right|$ $=\left|(-5,0,-5)\cdot(-3,4,6)\right|=\left|15-30\right|=15$ 來計算。

練習 3

(1)由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積 $=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|=4$

(2)由向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之三角形面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|-2\vec{j}-2\vec{k}\right|=\dfrac{1}{2}\left|(0，-2，-2)\right|=\sqrt{2}$

學 習 單

1. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,2)$，求

(1) $-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　　(2) $-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$　　(3)試問(1)與(2)外積結果的有何異同之處？

(4)找出 3 個以上與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 大小相同，方向相反的外積運算。

1. *Ans*：
(1) $(-7,-4,5)$
(2) $(7,4,-5)$
(3)方向不同但大小相同
(4) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$、$-\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}\times(-\overrightarrow{b})$、$-\overrightarrow{b}\times(-\overrightarrow{a})$ …

2. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,2)$，求

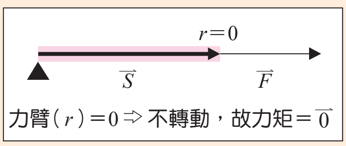
(1) $2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　(2) $\overrightarrow{a}\times(-2\overrightarrow{b})$　(3)試問(1)與(2)外積結果的有何異同之處？為什麼？

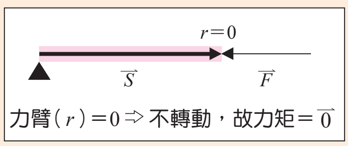
2. *Ans*：
(1) $2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(14,8,-10)$
(2) $\overrightarrow{a}\times(-2\overrightarrow{b})=(-14,-8,10)$
(3)方向相反但大小相同，因為根據外積的性質：$2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\times2\overrightarrow{b}$；而 $\overrightarrow{a}\times(-2\overrightarrow{b})$ 與 $\overrightarrow{a}\times(2\overrightarrow{b})$ 方向相反，因此 $2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}\times(-2\overrightarrow{b})$ 方向不同但大小相同。

3. 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為非零向量，且 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$，則

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}$　(3)試由力矩概念解釋前兩小題外積結果。

3. *Ans*：
(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$
(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$
(3)第(1)小題力矩概念如右列兩圖所示；





第(2)小題則是 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{a}$，由(1)可知：力臂與作用力平行時無力矩（力矩＝$\overrightarrow{0}$）。

4. 若 $\overrightarrow{a}$ 為零向量，$\overrightarrow{b}$ 不為零向量，則(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　(2)試由力矩概念解釋外積結果。

4. *Ans*：
(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$
(2)無作用力或無力臂結果為無力矩（力矩＝$\overrightarrow{0}$）。

5. 已知向量 $\overrightarrow{n}$ 和 $\overrightarrow{a}=(2，-1，0)$，$\overrightarrow{b}=(4，-1，-1)$ 均垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=6$，求 $\overrightarrow{n}$。

5. *Ans*：
$(2，4，4)$ 或 $(-2，-4，-4)$

6. 已知向量 $\overrightarrow{n}$ 和 $\overrightarrow{a}=(2，2，1)$ 與 $\overrightarrow{b}=(1，0，1)$ 均垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=3$，求 $\overrightarrow{n}$。

6. *Ans*：
$(2，-1，-2)$ 或 $(-2，1，2)$

7. 設向量 $\overrightarrow{u}=(2，1，-1)$，$\overrightarrow{v}=(1，3，3)$，設 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{v}$，且 $\overrightarrow{a}=(6，p，q)$，則數對 $(p，q)=$__________。

7. *Ans*：
$(-7，5)$

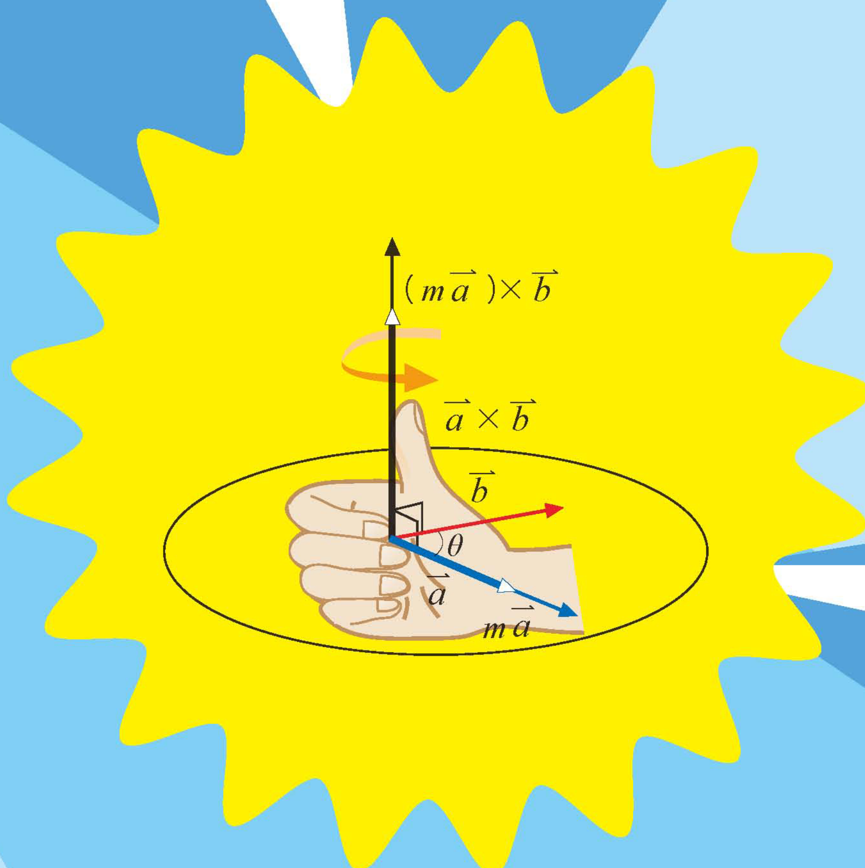
8. 在空間坐標系上有四點分別為 $O(0，0，0)$、$A(3，5，-1)$、$B(2，0，4)$、$C(-1，0，1)$，試問三向量 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 所張之平行六面體體積為多少？以向量 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 為兩邊的三角形面積為多少？

8. *Ans*：
30；$\sqrt{174}$

學生手冊　P23

筆記欄

memo



$(m\vec{a})\times\vec{b}$
$\vec{a}\times\vec{b}$
$\vec{b}$
θ
$\vec{a}$
$m\vec{a}$