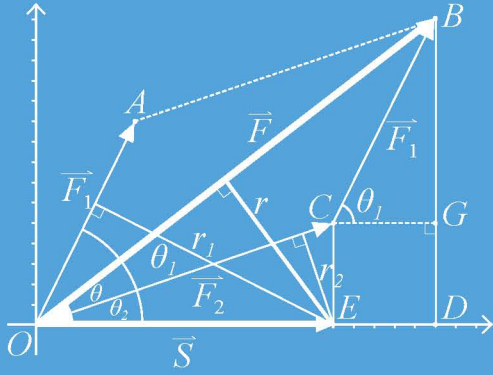
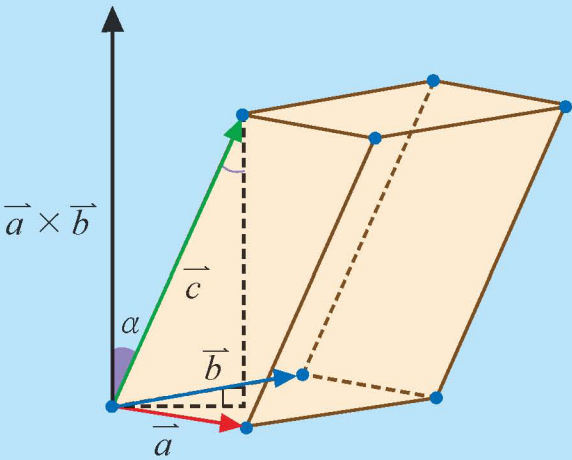
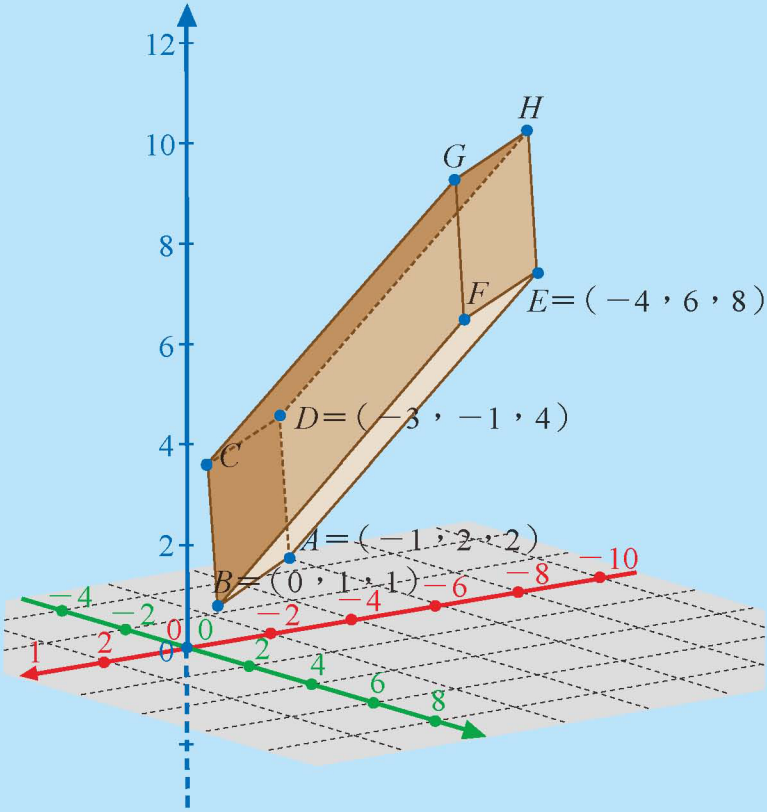


素養導向技術型高中數學教材

力矩與向量外積



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

一、阿基米德的機械研究

阿基米德在埃及 亞歷山大城求學時期，有一天在久旱的尼羅河邊散步，看到農民提水澆地十分費力，幾經思考後，他發明了一種利用螺旋作用在水管裡旋轉而把水吸上來的工具，後世的人稱作它為“阿基米德螺旋提水器”（如圖1），埃及一直到二千年後的現在，還有人使用這種器械，這個工具成了後來螺旋推進器的先祖。



圖 1 阿基米德螺旋提水器

當時的歐洲，在工程和日常生活中，經常使用一些簡單機械，譬如：螺旋、滑車、槓桿、齒輪等，阿基米德花了許多時間去研究，發現了「槓桿原理」和「力矩」的觀念。阿基米德甚至曾說：給他一個支點，他可以舉起整個地球。



圖 2 沉思的阿基米德

剛好當時的國王希倫二世又遇到了一個棘手的問題，國王替埃及 托勒密王造了一艘船，因為太大太重，船無法放進海裡，國王就對阿基米德說，“你連地球都舉得起來，一艘船放進海裡應該沒問題吧？”於是阿基米德利用「槓桿原理」和「力矩」的概念，立刻巧妙地組合各種機械，造出一架機具，在一切準備妥當後，將牽引機具的繩子交給國王，國王輕輕一拉，大船果然移動下水，國王不得不為這個當時全世界對於機械原理與運用，瞭解最透徹的阿基米德所懾服。接下來，我們將跟隨著阿基米德的「力矩」的概念，探究阿基米德所不知，隱藏於力矩中的數學概念。

二、物體的轉動

當我們關上房門時，如果以相同的力量及相同角度推門的不同位置，在圖3 中，轉動的效果會相同嗎？



圖 3 以相同的力量及相同角度推門的不同位置

活動 1 【學生分組討論】

- (1)在圖 4 中，以同樣力量分別對門 A 、 B 、 C 、 D 不同的四點垂直門面施力，施力在哪一點轉動的效果最為顯著呢？施力在哪一點最不易轉動呢？從最容易轉動到最不容易轉動，依序的施力位置是什麼？

答：

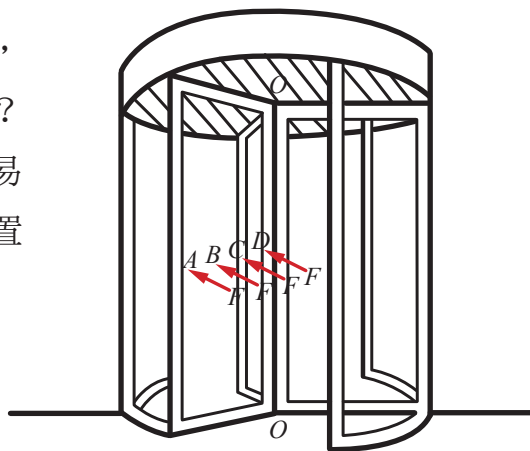


圖 4 不同的施力點對門施相同的力，轉動效果會不同

- (2)在圖 4 中，若以不同力量，對 A 點施力時，究竟是力量越大，轉動的效果最為顯著？還是力量越小，效果越顯著呢？

答：

- (3) 在圖 5 中，若以同樣的力量，不同的方向對 A 點施力時，究竟 a 、 b 、 c 、 d 哪一種情況轉動的效果最為顯著呢？

答：

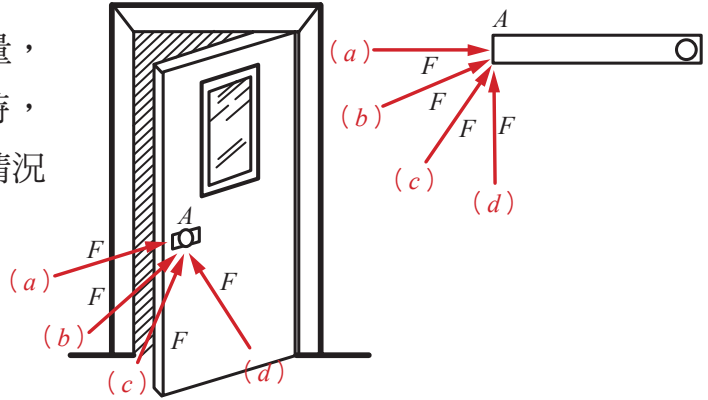


圖 5-1 (正面圖)

圖 5-2 (俯視圖)

以相同的力量，但與門面夾角不同，轉動效果會不同

- (4) 由前面(1)(2)(3)的討論中，可否整理出影響轉動效果的因素有那些呢？

答：

在上面的敘述中，使物體轉動的傾向，在物理上稱為**力矩**(moment, torque)。

三、回顧「力矩」

讓我們回憶一下，國中理化學過的力矩。如上一頁圖 5，施力與門面夾角不同，轉動效果會有不同，力矩依轉動方向不同又可分為哪些方向呢？

下圖 6-1 到圖 6-6 是施力與門面夾角不同，所導致轉動效果不同的力矩圖。

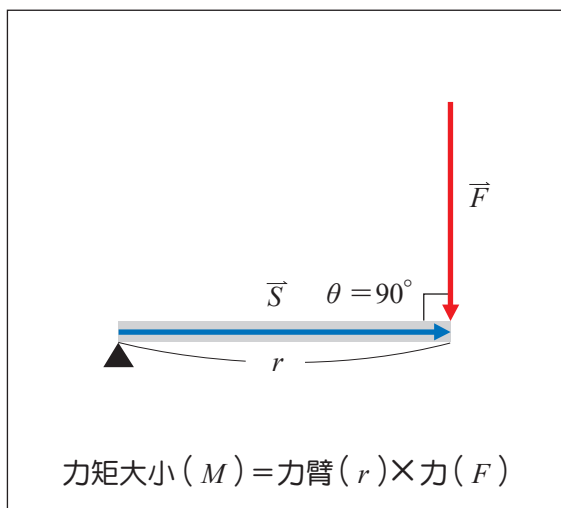


圖 6-1

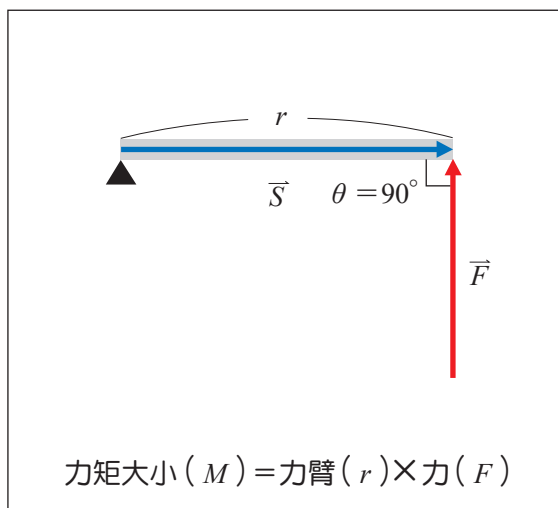


圖 6-2

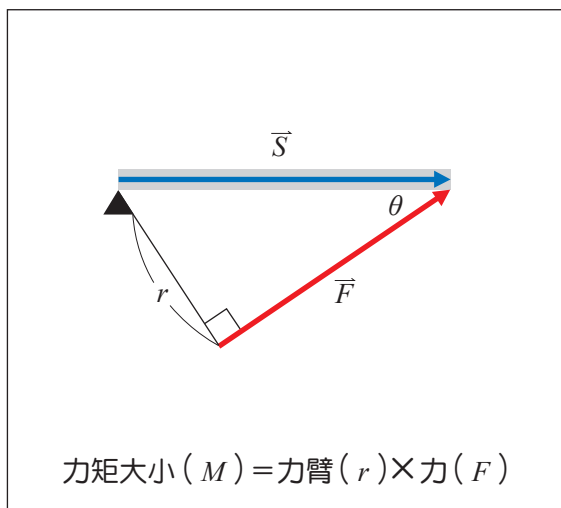


圖 6-3

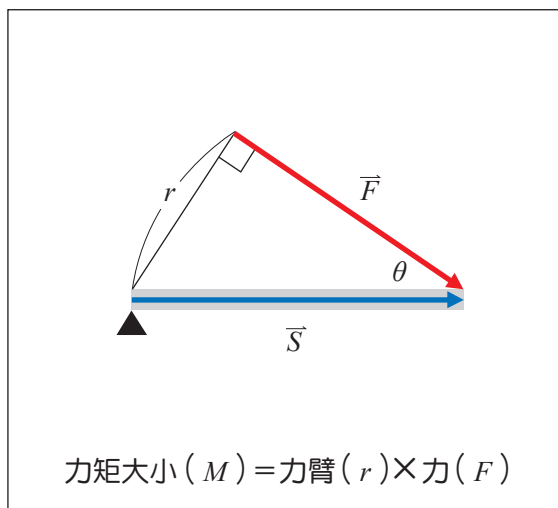


圖 6-4

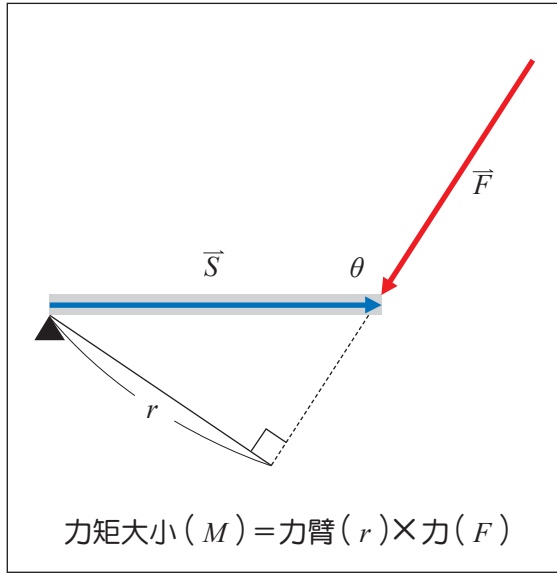


圖 6-5

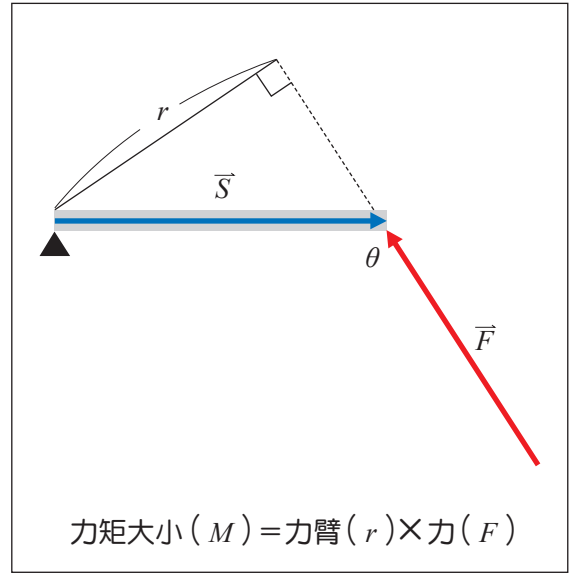


圖 6-6

圖 6 中的力(F)指「施力 $\vec{F}$ 的大小，即 $|\vec{F}|$ 」，力臂(r)指的是「施力到支點的垂直距離」， $\vec{S}$ 指的是由支點到施力點的向量。由上圖可知，當施力大小相同時，力臂愈大，力矩的大小愈大。

練習 1

試問圖 6-1~圖 6-6 有哪些力矩轉動的方向是順時針旋轉的力矩？哪些是逆時針旋轉的力矩？

答：

練習 2

在圖 6-1~圖 6-6 中，當由支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 大小皆相同，而且施力 $\vec{F}$ 的大小相同且施力於同一點時，我們發現力矩的大小與力臂 r 有關，請問力臂 r 的大小又與何者有關呢？

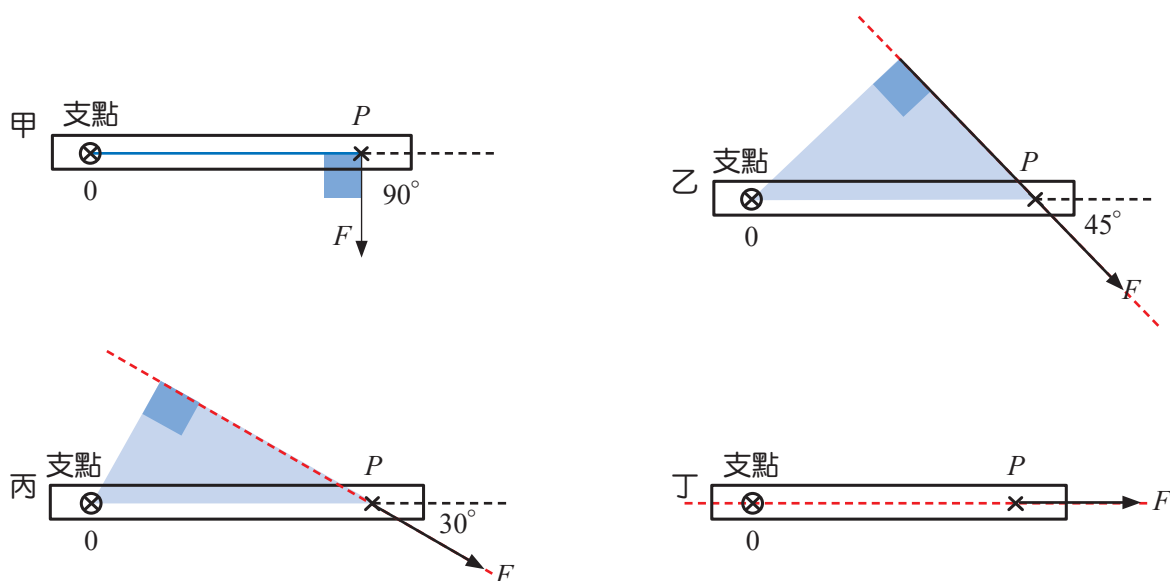
答：

練習 3

在下面甲、乙、丙、丁四個圖中，為同一個槓桿分別以不同方向但相同大小的力 F 作用於 P 點，若 $\overline{OP} = d$ 公尺，請回答下列問題：

(1) 請以作圖法，求出甲、乙、丙、丁四個圖中的力臂之大小。

答：甲：_____；乙：_____；丙：_____；丁：_____。



(2) 請列出甲、乙、丙、丁四個圖中力矩大小之計算式？

答：甲：_____ (_____ 時針旋轉)；乙：_____ (_____ 時針旋轉)；
丙：_____ (_____ 時針旋轉)；丁：_____。

想一想

由上面的討論得知，力矩包含大小與方向（順時針、逆時針方向）兩個要素，在之前學過的高職數學課程中，哪一個概念可以同時表示「大小」及「方向」？

四、以向量表示力矩

力臂大小

在前面圖 6-1~圖 6-6，由支點到施力點的向量若為 $\vec{S}$ ，讓我們想一想「 $\vec{S}$ 與力臂 r 有何關係？」在圖 7 中，我們不難發現，在以長度 $|\vec{S}|$ 為斜邊的直角三角形中（因為是向量大小，所以以符號 $|\vec{S}|$ 表示），力臂 r 恰為角 α 的對邊，即力臂 $r = |\vec{S}| \sin \alpha = |\vec{S}| \sin (180^\circ - \theta) = |\vec{S}| \sin \theta$

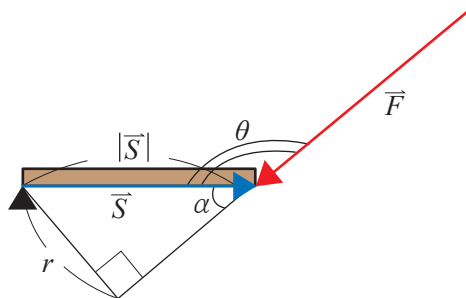


圖 7 支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 與力臂 r 的關係

力矩的大小

由前面的討論可知：國中理化學過的力矩需考慮大小與方向，因此它是個向量；並且施力 $\vec{F}$ 是向量，支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 也是向量，那麼在數學上該如何表示這兩個向量 $\vec{F}$ 與 $\vec{S}$ 之間的運算關係呢？

上面的討論中，若支點到施力點的向量為 $\vec{S}$ ，可得力臂 $r = |\vec{S}| \sin \theta$ 。

因此 力矩 $\vec{M}$ 的大小 $|\vec{M}| = \text{力臂}(r) \times \text{力}(F) = |\vec{S}| \sin \theta |\vec{F}| = |\vec{S}| |\vec{F}| \sin \theta$

向量的夾角

空間向量的夾角：對於兩個非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，我們可以將它們平移，使其始點重合，此時在兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所張的三角形所在平面中， $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 形成的夾角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，如圖 8，稱為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角。



圖 8 向量的夾角

練習

在下圖 9 中，請平移向量後畫出支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 與施力 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 、 $\vec{F}_3$ 、 $\vec{F}_4$ 的夾角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 ？

答：

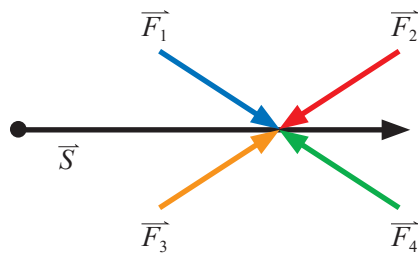


圖 9

力矩的方向

如果以施力 $\vec{F}$ 推動門邊造成轉動時，可能形成逆時針旋轉的力矩（如下圖 10-1）或順時針旋轉的力矩（如下圖 10-2），為計算施力 $\vec{F}$ 與從支點到施力點向量 $\vec{S}$ 的夾角，我們通常將 $\vec{F}$ 平移，使其與 $\vec{S}$ 的始點重合，此時在兩向量 $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 所張的三角形所在平面中，可得 $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 的夾角為 θ 。根據物理的定義，力矩的方向：逆時針旋轉為正，順時針旋轉為負。而我們發現，當右手除了大拇指外的其他四指從向量 $\vec{S}$ 旋轉至向量 $\vec{F}$ 時，大拇指所指的方向若朝上，在物理中稱為「正向」，即為逆時針旋轉；大拇指所指的方向若朝下，在物理中稱為「負向」，即為順時針旋轉。這恰符合力矩的方向，如此利用右手大拇指的方向決定力矩的方向稱為右手定則，如圖 10；而且力矩 $\vec{M}$ 的方向與向量 $\vec{F}$ 的方向垂直，也與向量 $\vec{S}$ 的方向垂直。

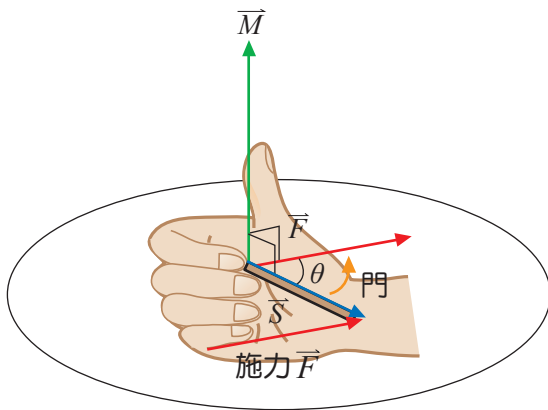


圖 10-1 逆時針轉的力矩為正

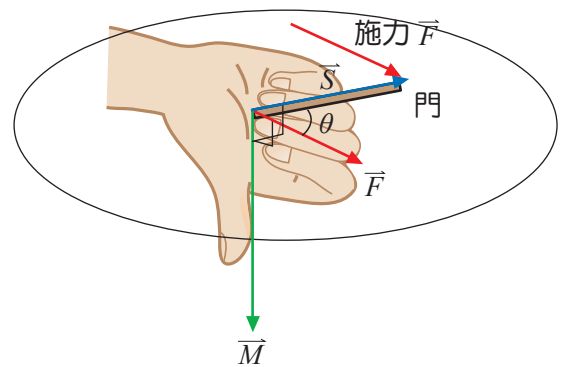


圖 10-2 順時針轉的力矩為負

圖 10-1~10-2 以右手定則決定力矩的方向

【向量表示力矩】

力矩：物體受力後轉動難易程度的物理量，稱為力矩，其具有大小與方向。

力矩 $\vec{M}$ 的大小： $|\vec{M}| = \text{力臂} \times \text{力} = |\vec{S}| |\vec{F}| \sin \theta$

（其中 $\vec{S}$ 為支點到施力點的向量， $\vec{F}$ 為力， $\vec{F}$ 和 $\vec{S}$ 的夾角為 θ ）

力矩的方向：由 $\vec{S}$ 旋轉至 $\vec{F}$ ，依照右手定則來決定，且力矩 $\vec{M}$ 的方向與 $\vec{S}$ 、 $\vec{F}$ 的方向皆垂直。

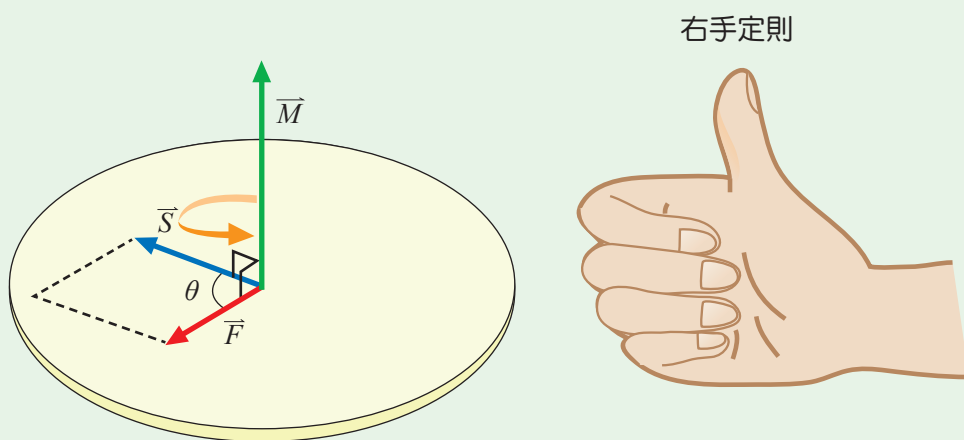


圖 11 利用右手定則決定力矩的方向

力矩是個有大小、有方向的物理量，用數學的語言來說，力矩就是一個向量，它來自於兩個向量 $\vec{S}$ 與 $\vec{F}$ 之間的運算，在數學上，這樣的運算關係記作：力矩 $\vec{M} = \vec{S} \times \vec{F}$ 。

不同於之前所學過的內積運算（功 $W = \vec{S} \cdot \vec{F} = |\vec{S}| |\vec{F}| \cos \theta$ ）是只有大小的純量，並沒有方向性；力矩是有大小、有方向的向量，在力矩的運算中我們以符號「 $\times$ 」來區別它與內積運算的不同，並且稱這樣的運算關係 $\vec{S} \times \vec{F}$ 為向量 $\vec{S}$ 與 $\vec{F}$ 的「外積」。

五、兩向量外積的意義

$\vec{S}$ 與 $\vec{F}$ 兩個向量的乘法 $\vec{S} \times \vec{F}$ ，在數學上稱為**外積**。由前面可知外積的結果是一個向量，且比照力矩的運算，定義空間中兩向量的外積運算如下：

【向量的外積】

若空間中兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，

則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積記做 $\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b}$ 外積的大小為 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \theta$ ，

$\vec{a} \times \vec{b}$ 外積的方向由 $\vec{a}$ 旋轉至 $\vec{b}$ ，依照右手定則所決定（請參考圖 11）。

且 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的方向皆垂直。

活動 2 【學生分組討論】

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{b} \times \vec{a}$ 是否相等？

答：

(2) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平行的兩向量，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的結果是甚麼呢？

答：

【力矩原理】

力矩原理：幾個作用力施加於某位置所產生的力矩的總和，等於這些作用力的合力所產生的力矩。

即：若 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 的合力為 $\vec{F}$ （也就是 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ ），點 O 為支點， E 為施力點，支點到施力點的向量為 $\vec{S}$ ，

則 $\vec{S} \times \vec{F}_1 + \vec{S} \times \vec{F}_2 = \vec{S} \times \vec{F}$

說明：如圖 12，若施力 $\vec{F}$ 、 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 與支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 之夾角分別為 θ 、 θ_1 、 θ_2 ；施力 $\vec{F}$ 、 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 的對於點 E 的垂直距離，也就是力臂，分別為 r 、 r_1 、 r_2 ，

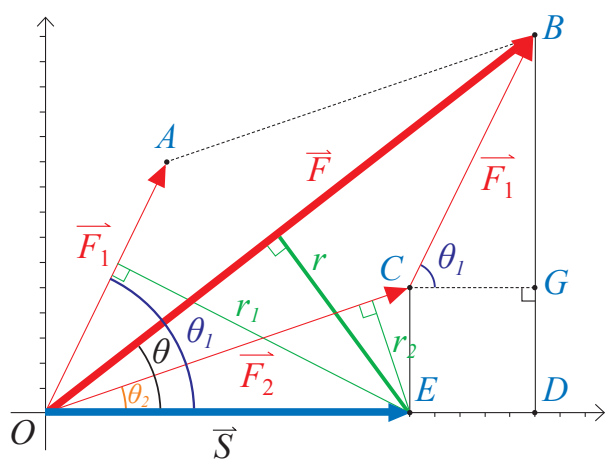


圖 12 力矩原理

由 $\overline{BD} = \overline{BG} + \overline{GD}$ ，可得 $|\vec{F}| \sin \theta = |\vec{F}_1| \sin \theta_1 + |\vec{F}_2| \sin \theta_2$

（等式兩邊同乘以 $|\vec{S}|$ ） $|\vec{S}| |\vec{F}| \sin \theta = |\vec{S}| |\vec{F}_1| \sin \theta_1 + |\vec{S}| |\vec{F}_2| \sin \theta_2 \cdots (1)$

即 $|\vec{S} \times \vec{F}| = |\vec{S} \times \vec{F}_2| + |\vec{S} \times \vec{F}_1|$

由圖中亦可發現 $\vec{S}$ 對於合力 $\vec{F}$ 所產生的力矩方向和 $\vec{S}$ 與分力 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 所產生的力矩方向相同。即 $\vec{S} \times \vec{F} = \vec{S} \times \vec{F}_1 + \vec{S} \times \vec{F}_2$

同理，將 $\vec{F}$ 分為多個分力時，亦可得相同之結論；或是將 $\vec{S}$ 分解為多個支點到施力點的向量之和，亦可得相同之結論。

亦即：對於任意空間向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 外積對加法的分配律均成立，即 $\vec{a} \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d}$ 以及 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ 。

並可得 $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$ 。

六、向量的外積的性質

對於任意空間向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 之夾角為 θ ，則向量的外積具有以下性質：

$$(1) \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

說明：由外積定義可知。

$$(2) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

說明：由力矩原理可知。

$$(3) (m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b}), \text{ 其中 } m \text{ 為任意實數}$$

說明：

①若 $m > 0$ ， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 外積的大小

$$= |(m\vec{a}) \times \vec{b}| = |m\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= |m| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |m| |\vec{a} \times \vec{b}|$$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相同，故依右手定則， $m\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向相同(如圖 13)，亦與 $m(\vec{a} \times \vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a} \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$

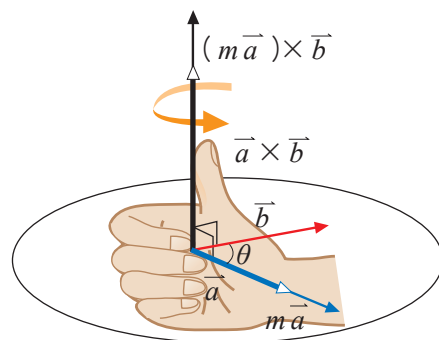


圖 13 $m > 0$ 時， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向相同

②若 $m < 0$ ， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 外積的大小

$$= |(m\vec{a}) \times \vec{b}| = |m\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\pi - \theta)$$

$$= |m| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |m| |\vec{a} \times \vec{b}|$$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相反，故依右手定則， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 的方向與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向相反(如圖 14)；又 $m < 0$ ，故 $m(\vec{a} \times \vec{b})$ 的方向與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向亦相反。

也就是說 $m\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向與 $m(\vec{a} \times \vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a} \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$

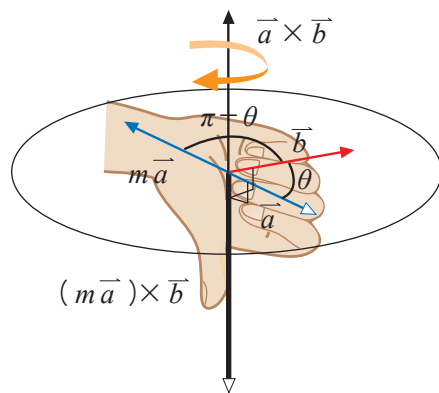


圖 14 $m < 0$ 時， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向相反

③若 $m=0$ ， $(m\vec{a}) \times \vec{b}$ 外積的大小 $=0=|m||\vec{a} \times \vec{b}|$

即 $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ 且 $m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ 。

故 $m\vec{a} \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

由①②③可知：若 m 為任意實數，

$m\vec{a} \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$ 。

同理可得 $\vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$ 。

(4)若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

說明：由外積定義可知。

(5)若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為不平行的兩非零向量， $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ 且 $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ 。

即 $(\vec{a} \times \vec{b})$ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的公垂向量。

說明：由外積定義可知。

七、外積的分量表示法

在數學及較高深的物理運算時，我們習慣將向量以分量表示法（又稱坐標表示法）來簡化運算，那麼外積又要如何用分量表示法來表示呢？

活動 3 【學生分組討論】

我們考慮先前所學到的空間基底單位向量 $\vec{i} = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{j} = (0, 1, 0)$ 、 $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ，如圖15，根據外積運算，並且利用右手定則，想想看下面各式的結果？

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $\vec{i} \times \vec{j} =$ _____ | (2) $\vec{j} \times \vec{k} =$ _____ | (3) $\vec{k} \times \vec{i} =$ _____ |
| (4) $\vec{j} \times \vec{i} =$ _____ | (5) $\vec{k} \times \vec{j} =$ _____ | (6) $\vec{i} \times \vec{k} =$ _____ |
| (7) $\vec{i} \times \vec{i} =$ _____ | (8) $\vec{j} \times \vec{j} =$ _____ | (9) $\vec{k} \times \vec{k} =$ _____ |

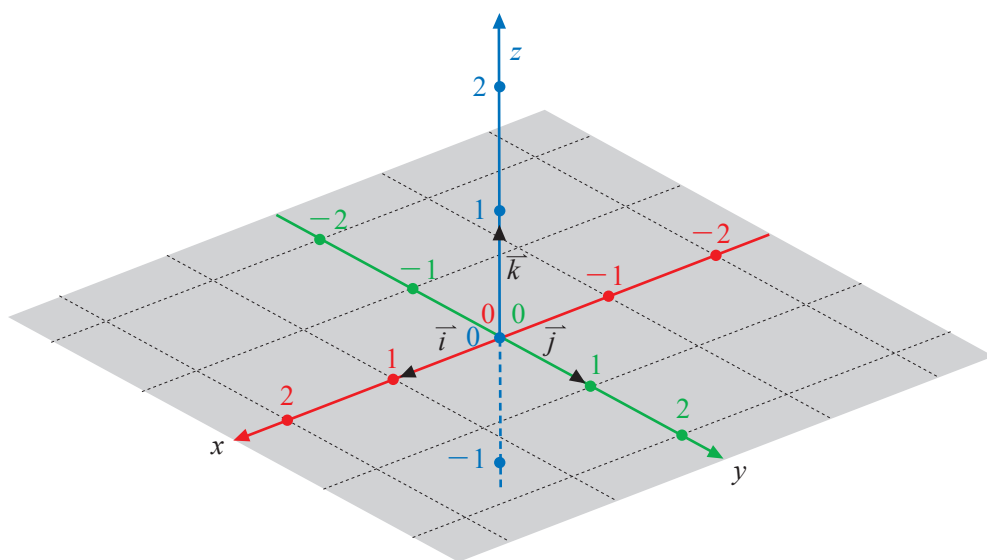


圖 15 空間的基底向量

若有兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，我們將兩向量分別改寫為 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ 、 $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ ，若 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ，配合前面的右手定則及向量外積對加法的分配律。可得

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\
 &= \vec{0} + a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + \vec{0} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} + \vec{0} \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)
 \end{aligned}$$

【向量的外積】

若兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 之夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)。

$$\begin{aligned}
 \text{則 } \vec{a} \text{ 與 } \vec{b} \text{ 的外積 } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)
 \end{aligned}$$

其中 $\vec{i} = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{j} = (0, 1, 0)$ 、 $\vec{k} = (0, 0, 1)$ 為空間的基底單位向量

外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的大小： $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向：由 $\vec{a}$ 旋轉至 $\vec{b}$ ，依照右手定則所決定。

例題 1

已知向量 $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$, 求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{b} \times \vec{a}$ 之值

$$\text{答: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (2, 1, -2)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-2, -1, 2)$$

練習 1

已知向量 $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 求

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ (2) $\vec{b} \times \vec{a}$ (3) 試問(1)與(2)外積結果有何異同之處？

答：

例題 2

如圖 16，小華使用板手旋轉螺帽，若以螺帽重心的支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\vec{S} = (-2, 4, -4)$ ，力 $\vec{F} = (2, 1, -2)$ ，求小華使用板手產生的力矩 $\vec{M} = ?$ 力矩 $\vec{M}$ 的大小是多少？力矩 $\vec{M}$ 的方向是朝向何處？力矩 $\vec{M}$ 是否會與施力 $\vec{F}$ 或支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 垂直？

$$\text{答：(1) } \vec{M} = \vec{S} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 12\vec{j} - 10\vec{k} = (-4, -12, -10)$$

$$(2) \text{力矩大小 } |\vec{M}| = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{65}$$

(3) 力矩的方向朝向圖中的左下(順時針旋轉)

(4) 可利用內積判斷力矩 $\vec{M}$ 是否與施力 $\vec{F}$ 或支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 垂直：

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \vec{F} &= (-4, -12, -10) \cdot (2, 1, -2) \\ &= (-8) + (-12) + 20 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \vec{S} &= (-4, -12, -10) \cdot (-2, 4, -4) \\ &= 8 + (-48) + 40 = 0 \end{aligned}$$

由內積為 0，可判斷力矩 $\vec{M}$ 與施力 $\vec{F}$ 垂直，
力矩 $\vec{M}$ 與支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 亦垂直。

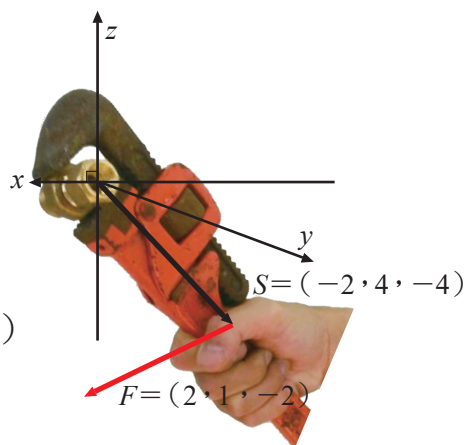


圖 16 板手旋轉螺帽

練習 2

如圖 17，小明使用六角板手旋轉螺帽，若以六角板手直角轉彎處支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\vec{S} = (6, 2, -3)$ ，力 $\vec{F} = (3, 4, -1)$ ，求小明使用板手產生的力矩 $\vec{M} = ?$ 又力矩的大小是多少？

答：

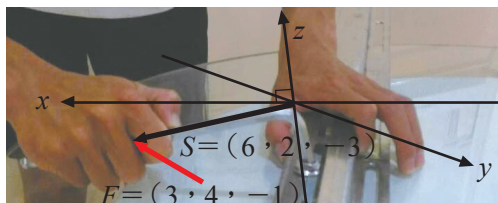


圖 17 六角板手旋轉螺帽

八、平行六面體體積

若兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 之夾角為 θ ，
向量 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ，可得以下面積與體積的關係：

(1) 由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積為 $|\vec{a} \times \vec{b}|$

說明：

如圖18，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的大小 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

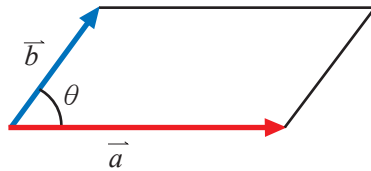


圖 18 由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之平行四邊形為 $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$(2) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

說明：

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{c} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(3)由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張之平行六面體體積為 $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}|$

由上述(1)，圖 19 中平行六面體底面積為 $|\vec{a} \times \vec{b}|$

設 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角為 α ，

則平行六面體的高為 $|\vec{c}| \cos \alpha$

平行六面體體積為底面積 $\times$ 高 $= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

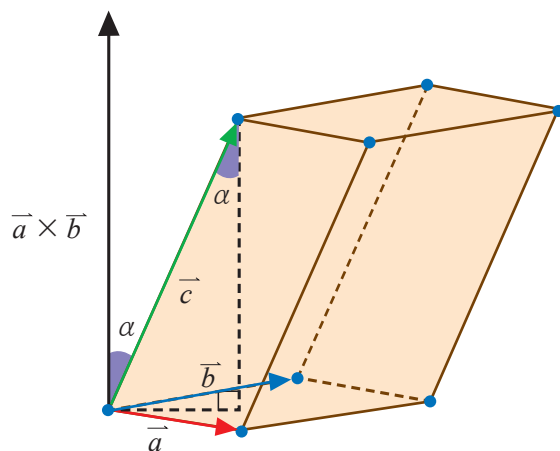


圖 19 由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張之平行六面體

想一想

若以 $|\vec{b} \times \vec{c}|$ 或是 $|\vec{c} \times \vec{a}|$ 為平行六面體底面積，則由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 所張之平行六面體體積要如何表示？其結果與(3)的計算結果會相同嗎？為什麼？

例題 3

如圖 20，已知 $A(-1, 2, 2)$ 、 $B(0, 1, 1)$ 、 $D(-3, -1, 4)$ 、 $E(-4, 6, 8)$ ， $ABCD-EFGH$ 為一平行六面體，請問平行四邊形 $ABCD$ 面積為多少？平行六面體 $ABCD-EFGH$ 體積為多少？

答：

$$(1) \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2, -3, 2)$$

$$\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 面積} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = |-5\vec{i} - 5\vec{k}|$$

$$= |(-5, 0, -5)| = 5\sqrt{2}$$

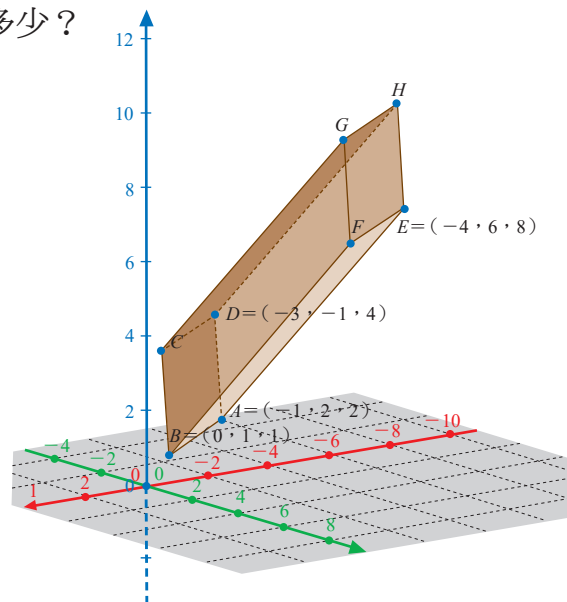


圖 20

$$(2) \overrightarrow{AE} = (-3, 4, 6)$$

$$\text{平行六面體 } ABCD-EFGH \text{ 體積} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 15$$

練習 3

由向量 $\vec{a} = (1, 1, -1)$ 、 $\vec{b} = (1, -1, 1)$ 、 $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ 所張之平行六面體體積為多少？由向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所張之三角形面積為多少？

答：



學習單



1. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, 求
 - (1) $-\vec{a} \times \vec{b}$ (2) $-\vec{b} \times \vec{a}$ (3) 試問(1)與(2)外積結果的有何異同之處？
 - (4) 找出 3 個以上與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 大小相同，方向相反的外積運算。

2. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, 求
 - (1) $2\vec{a} \times \vec{b}$ (2) $\vec{a} \times (-2\vec{b})$ (3) 試問(1)與(2)外積結果的有何異同之處？
為什麼？

3. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為非零向量，且 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則
 - (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ (2) $\vec{a} \times \vec{a}$ (3) 試由力矩概念解釋前兩小題外積結果。

4. 若 $\vec{a}$ 為零向量， $\vec{b}$ 不為零向量，則(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ (2)試由力矩概念解釋外積結果。

5. 已知向量 $\vec{n}$ 和 $\vec{a} = (2, -1, 0)$ ， $\vec{b} = (4, -1, -1)$ 均垂直，且 $|\vec{n}| = 6$ ，求 $\vec{n}$ 。

6. 已知向量 $\vec{n}$ 和 $\vec{a} = (2, 2, 1)$ 與 $\vec{b} = (1, 0, 1)$ 均垂直，且 $|\vec{n}| = 3$ ，求 $\vec{n}$ 。

7. 設向量 $\vec{u} = (2, 1, -1)$ ， $\vec{v} = (1, 3, 3)$ ，設 $\vec{a} \perp \vec{u}$ ， $\vec{a} \perp \vec{v}$ ，且 $\vec{a} = (6, p, q)$ ，則數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 在空間坐標系上有四點分別為 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(3, 5, -1)$ 、 $B(2, 0, 4)$ 、 $C(-1, 0, 1)$ ，試問三向量 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$ 所張之平行六面體體積為多少？以向量 $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 為兩邊的三角形面積為多少？

筆記欄

