素養導向數學教材

平面向量的意義

教師手冊

國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

平面向量的意義

單元 目標

1. 建立向量的概念，並以坐標表示法表示向量。
2. 由起點、終點求出向量。
3. 了解向量平移、向量的大小。
4. 了解相反向量、相等向量的分量關係與幾何意義。
5. 理解向量加法的分量關係與幾何意義。
6. 理解向量的分解與合成的幾何意義。
7. 利用向量解決生活與物理問題實例。

教學 設計理念

由於筆者任教於工科學校，有鑒於向量在物理及專業科目上多所連結，往往會從物理概念導入向量，及至物理沒有學好的學生反應「 因為物理沒學好，導致數學的向量也不想學 」，讓筆者想從不一樣的角度切入向量概念，讓即使物理不好的學生也能順利學習向量，進而應用於物理及專業科目。

筆者嘗試與學生生活經驗結合，從活動中利用學生的「 數感 」，讓學生自然接受向量概念。並且讓學生自己探索發現向量相等、相反向量、向量加法的意義，從而建立學生對於數學的自信心與學習成就感。

筆者在設計本教材時，曾多次與物理教師對話，數次修改教材內容以符合學生生活經驗或學習經驗，並在教材後半部與物理教學內容連結，期望使學生將已習得的向量概念內化，進而善用此一工具在相關課程中。

教材 架構

教材教授的對象為技術型高中學生，學生特質為透過實作經驗學習強於由刻板的定義、公式解法與證明的學習，本教材利用「 做中學 」，強化長期記憶，達成更有效的學習，以期使向量概念能夠內化，並與物理及相關學科產生有力的連結。

本教材從「天文學家在火星上執行探勘任務」談起，學生模擬天文學家對機器人下達指令，有如玩「夾娃娃機」一般，很容易上手，再透過「活動1：火星任務」，讓學生熟悉如何讓機器人上下左右移動，藉以建立向量的坐標表示法，並讓學生自己發現如何由起點、終點求出向量 $\overrightarrow{AB}$，並順勢導入從 A 點移動到 B 點的最短距離—向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小 $|\overrightarrow{AB}|$。

藉由例題一的運算，引導學生觀察發現相反向量、相等向量的分量關係以及幾何圖形的關聯。透過活動3，引導學生觀察向量加法的分量關係，說明其幾何意義，並進一步連結物理的位移概念以及合力與分力…等。

本教材並提供連結向量與物理內容的例題示範，澄清學生觀念，從中讓學生了解向量的用途。

平面上位置的移動

天文學家在火星上執行探勘任務，派出機器人採集火星上某個區域的土壤。由於機器人發生故障，移動時只能接受前後左右的指令，為了更精確地操控機器人採集土壤，科學家將 基地的位置假設為原點 O，以 1 公里為 1 單位，在所需要探勘的區域建立坐標（如圖2），派出機器人採集 A、B、C、D、E 五個地點的土壤。

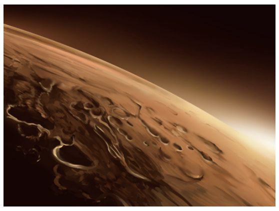


圖 1 火星表面

科學家將機器人的移動程式設計為：輸入兩個數字”□,□”，第 1 個數字代表左右移動—向右為正，向左為負。第 2 個數字代表上下移動—向上為正，向下為負。例如：機器人由 A 點出發到 B 點，需向右 5 單位，向下 1 單位，故輸入 ”$\boxed{+5}$，$\boxed{-1}$”。

請同學協助科學家輸入指令，使機器人移動位置，完成任務：

(1) $O \to A$：”$\boxed{+1}$, $\boxed{+3}$”

(2) $B \to C$：”$\boxed{0}$, $\boxed{-3}$”

(3) $C \to D$：”$\boxed{-1}$, $\boxed{+4}$”

(4) $B \to D$：”$\boxed{-1}$, $\boxed{+1}$”

(5) $D \to E$：”$\boxed{-7}$, $\boxed{-1}$”

(6) $E \to O$：”$\boxed{+2}$, $\boxed{-2}$”

(7) $D \to A$：”$\boxed{-4}$, $\boxed{0}$”

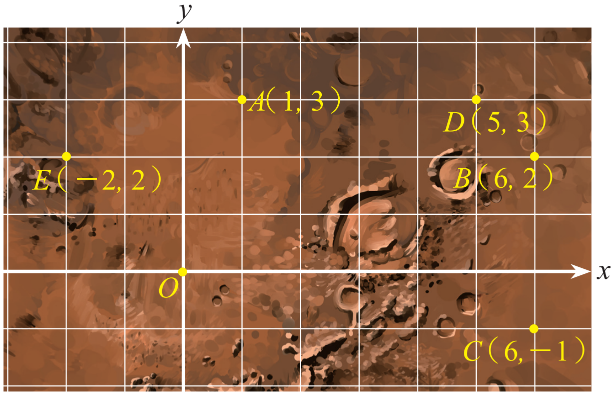


圖 2 火星表面探勘位置坐標

活動 1

(1) 請各小組討論，如何安排一系列的指令輸入，讓機器人以基地（O 點）為起點，可以經過 A、B、C、D、E（順序不限）五個地點採集土壤，並回到原本的基地。

(2) 請各小組討論，如何安排一系列的指令輸入，在最節省資源（走較少的路）的情況下，讓機器人以基地（O 點）為起點，可以經過 A、B、C、D、E 五個地點採集土壤，並回到原本的基地。

學生手冊 P1

活動 1

(1) 可重複經過同一點，只要向量之和爲 $\vec{0}$ 皆可。

(2) 可開放學生使用計算機，實際計算、比較機器人如何走路徑較短，不需嚴密證明，只要學生能察覺「①走直線②同一點不重複經過」即可。若能發現「③依順時針或逆時針依序經過各點」，則可進一步問學生原因或作爲課後的作業讓學生更深入思考。

- 順勢導入有向線段的概念，教師可視學生情況，是否介紹有向線段之名稱。
- 以能讓學生參與2~3次以上爲優，亦應考量時間。
- 座標卡可參考教師手冊附錄，或由老師自行設計。

活動2 火星任務

在上面活動中可知：兩點間直線距離為最短，為了方便表示，以下我們連接起點與終點，並以箭頭標註方向，來表示位置的移動。

※遊戲準備：(詳見教師手冊【附錄】)

(1)每組一張 A_0 或 A_1 海報大小的「直角坐標」貼在黑板上。

(2)每組一本坐標卡，第一張為單一坐標，第二張開始為始點與終點坐標。

(3)每組 1 枝紅色粉筆。

※遊戲規則說明：

(1)視人數多寡來決定組別數(今有42人，分為6組)。

(2)每組派出的第一位同學站在圖 3 中 1 的位置，扮演機器人，面對黑板，拿著紅色粉筆，等待科學家下達指令，在直角坐標上畫出位置移動的情況(連結起點、終點並加上箭頭)。

(3)每組派出的第二位同學站在圖 3 中 2 的位置，擔任翻卡任務，背對黑板，面對同學，依序翻開事先準備好的坐標給隊友看。

(4)每組派出的第三位同學站在圖 3 中 3 的位置，扮演科學家，面對翻卡同學，根據卡片上的坐標移動，給機器人下達指令，大聲地告知機器人：”□,□”，以便機器人能在直角坐標海報上正確地畫出位置的移動。

(5)每組的第四位同學及其餘隊友排在第三位同學的後面，待機器人畫出一次移動後，由第四位同學遞補上來扮演科學家，第三位同學向前到圖 3 中 2 的位置擔任翻卡任務，第二位同學向前到圖 3 中 1 的位置扮演機器人，第一位同學回到圖 3 中 3 的位置，排至隊伍最後；待機器人每完成一次移動後，以此類推，依序輪迴，直到題目用完或定好的時間結束。

※遊戲開始：第一張卡為每組一開始的位置，待各組機器人就準備位置，由主持人宣布開始。

※遊戲結束：題目用完或定好的時間結束時，由主持人逐一公布各組答案，確認各組機器人是否正確地移動位置。

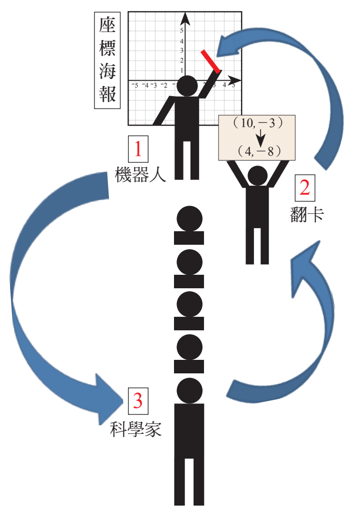


圖 3 遊戲位置示意圖

前面的活動，每一次的移動皆涉及兩個方向（左或右，上或下）的移動，在數學上稱為「 向量 」，為了方便書寫起見，我們將 ” □,□ ” 寫成（___，___）。

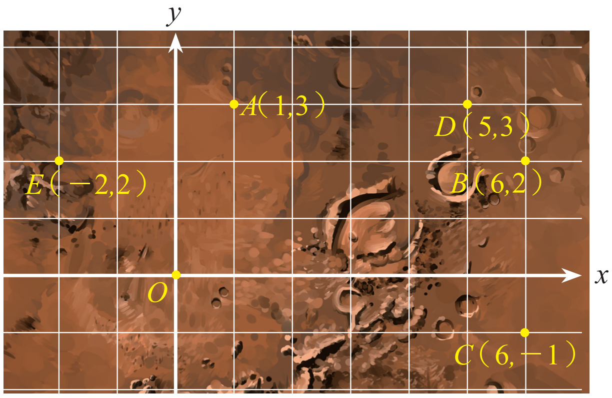
例如：在前面的活動中，卡片 $\begin{array}{|c|}(-3,-2)\\ \downarrow \\ (4,3)\end{array}$ 表示從起點（$-3,-2$）移動至終點（$4, 3$），下達的指令為“ $\boxed{+7}$，$\boxed{+5}$ ”，因此寫成向量的形式為（$7, 5$）。

另一張卡片 $\begin{array}{|c|}(10,-3)\\ \downarrow \\ (4,-8)\end{array}$ 表示從起點（$10,-3$）移動至終點（$4,-8$），剛剛下的指令為 “ $\boxed{-6}$，$\boxed{-5}$ ”，因此寫成向量的形式為（$-6,-5$）。為了區別不同的向量，若令 $A(-3,-2)$，$B(4,3)$，$C(10,-3)$，$D(4,-8)$；此時 $\begin{array}{|c|}A(-3,-2)\\ \downarrow \\ B(4,3)\end{array}$ $\begin{array}{|c|}C(10,-3)\\ \downarrow \\ D(4,-8)\end{array}$，我們以符號「 $\overrightarrow{AB}=(7,5)$，$\overrightarrow{CD}=(-6,-5)$」來表示不同起點、終點的向量。因為這樣的表示方式分別涉及兩個方向（左或右，上或下）的移動，因此稱為向量的分量表示法，又稱坐標表示法。

■ 「位置的移動」在物理上稱爲「位移」。

練習 1

(1) $O \to A$：$\overrightarrow{OA}=(1, 3)$
(2) $A \to B$：$\overrightarrow{AB}=(5,-1)$
(3) $B \to C$：$\overrightarrow{BC}=(0,-3)$
(4) $C \to D$：$\overrightarrow{CD}=(-1, 4)$
(5) $B \to D$：$\overrightarrow{BD}=(-1, 1)$
(6) $D \to E$：$\overrightarrow{DE}=(-7,-1)$
(7) $E \to O$：$\overrightarrow{EO}=(2,-2)$
(8) $D \to A$：$\overrightarrow{DA}=(-4, 0)$



問題 1

在活動 2 中，請同學說說如何求出 $\overrightarrow{AB}$？如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點為 $A(x_1, y_1)$，終點為 $B(x_2, y_2)$，那麼向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 有什麼關係呢？

學生手冊 P3

問題 1

■ $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，以「終點坐標-始點坐標」。

- 請強調向量中「方向」的概念。
  學生之所以覺得向量很抽象，即是因為向量是包含「方向性」的量，在學生過去的經驗中，不論是計算速度，加速度……，都只強調量（大小）的部分，而忽略了「方向性」。
- 此題設計的目的為：即使大小皆相同的向量，因為方向不同，這些向量仍然不相等。
  不過此處尚未介紹向量相等的概念，只需讓學生有感覺即可。在下一頁會有較為詳盡的說明。

向量的坐標表示法(1)

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點為 $A(x_1, y_1)$，終點為 $B(x_2, y_2)$，可得

向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=(a, b)$

其中 a 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量，b 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量。

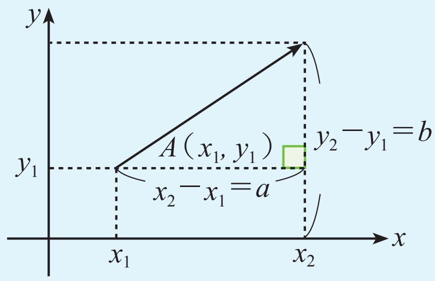


圖 4　a 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量，
b 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量

許多時候，我們同時也希望了解從 A 點移動到 B 點，究竟最短距離是多少？由圖4，根據畢式定理可得：A 點移動到 B 點的最短距離為

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(長度)，記作 $|\overrightarrow{AB}|$，即：$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$。此外，從 A 點移動到 B 點的方向，我們稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向；這是向量最特別之處，除了大小之外還包含「方向」。因此向量的描述方式有兩種：一、坐標表示法表示。二、直接敘述大小及方向。

例題 1　已知點 $A(0, 0)$，$B(3, 4)$，$C(-4, 3)$，$D(-1, -1)$，試求

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{AB}|$　(2)向量 $\overrightarrow{AC}$ 及 $|\overrightarrow{AC}|$　(3)向量 $\overrightarrow{CD}$ 及 $|\overrightarrow{CD}|$。

(4)你覺得向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CD}$ 方向相同嗎？

答：(1) $\overrightarrow{AB}=(3-0, 4-0)=(3, 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

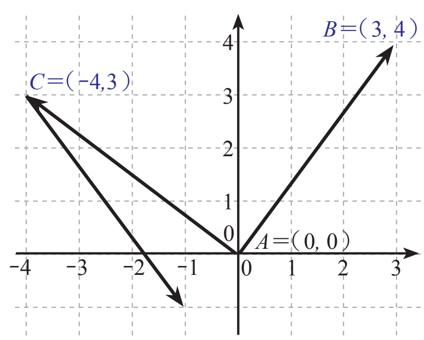
(2) $\overrightarrow{AC}=(-4-0, 3-0)=(-4, 3)$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(3) $\overrightarrow{CD}=(-1-(-4), -1-3)=(3, -4)$

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(4)如右圖，向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CD}$ 方向並不相同。



學生手冊 P4

在例題1中，我們會發現，許多時候，即使向量的大小相同（長度一樣長），但往往方向卻不一定相同，因此在描述向量時，不能僅描述向量的大小，還必須說明向量的方向。因此向量 $\overrightarrow{AB}$ 與線段 $\overline{AB}$ 是很不同的，線段 $\overline{AB}$ 只有大小（長度），向量 $\overrightarrow{AB}$ 除了大小，還包含方向，我們為了強調此一特性，又稱 $\overrightarrow{AB}$ 為「有向」線段，即是強調向量 $\overrightarrow{AB}$ 是比線段 $\overline{AB}$ 多了「有方向性」的特性。向量的概念，廣泛的存在日常生活中，只要同時描述大小和方向的概念，其實都是向量，比如說：力、位移（位置的移動）、速度、加速度等⋯⋯。例如：小孩拍打地面上的塑膠球，很顯然地，除了拍打的「力」的大小之外，施力的方向也是我們必須考慮的，因為這些都會影響球後續的運動情況。

圖 5 小孩拍打地面上的塑膠球

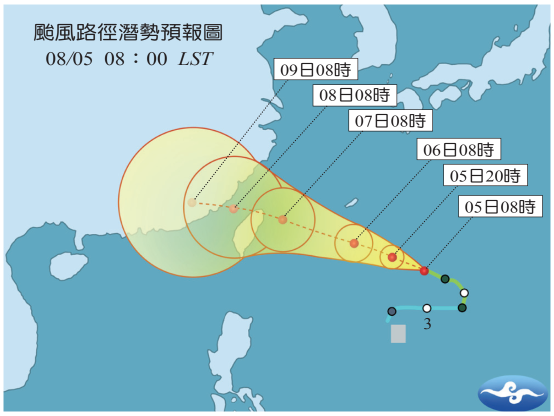


圖 6 颱風預報圖

而在描述「力」這個向量的時候，由於沒有所謂的起點、終點，所以我們通常會以單一的英文字母加上向量的符號「$\overrightarrow{\ }$」來表示，例如：力、位移（位置的移動）、速度、加速度可以分別表示成 $\overrightarrow{F}$、$\overrightarrow{S}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{a}$。其中位移 $\overrightarrow{S}$ 有時也寫成 $\overrightarrow{AB}$，只不過寫成 $\overrightarrow{S}$ 的時候不強調始點 A、終點 B，比較在乎大小、方向。例如颱風的位置不斷地移動，隨時變換起點、終點，所以一般來說，比較常聽到氣象專家描述颱風從上次觀測到現在移動了多少公里（大小），朝哪個方向前進。

為了方便描述向量的方向，我們定義向量與 x 軸正向的夾角 θ，稱為向量的方向角。

- 此處說明線段與有向線段的差異。
- 此處以物理上的實例介紹向量的表示方式。

向量的大小與方向

若向量 $\overrightarrow{AB}=(a, b)$，

(1)向量 $\overrightarrow{AB}=$的大小：指 A 點到 B 點的最短距離，

或向量長 $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向：以方向角描述，指的是向量

$\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸正向的夾角 θ

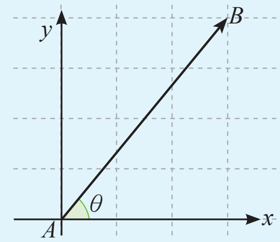


圖 7 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向向角θ

【 註 】若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點不在 x 軸上，則我們以向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸正向的平行線的夾角 θ 來計算方向角。

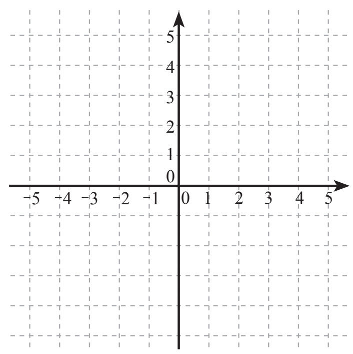
練習 1.1 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(9, -10)$之起點 $A(-1, 2)$，求終點 B 的坐標。

答：解法1：學生依據活動2所得的經驗，可得$B=(-1+9, 2+(-10))=(8, -8)$

解法2：設$B(x, y)$

$\overrightarrow{AB}=(9, -10)=(x+1, y-2)$　$(x, y)=(8, -8)$

練習 1.2 已知點 $A(3, -2)$，$B(-5, 4)$，$C(4, -1)$，$D(-4, 5)$，試在在標平面上畫出向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BA}$，並以坐標表示法表示向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BA}$，以及求出 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{CD}|$、$|\overrightarrow{BA}|$。



答：(1)$\overrightarrow{AB}=(-5-3, 4-(-2))=(-8, 6)$

$|\overrightarrow{AB}|=|(-8, 6)|\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$

(2)$\overrightarrow{BA}=(3-(-5), -2-4)=(8, -6)$

$|\overrightarrow{BA}|=|(8, -6)|\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$

(3)$\overrightarrow{CD}=(-4-4), 5(-1))=(-8, 6)$

$|\overrightarrow{CD}|=|(-8, 6)|\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$

問題 2 **試問：**

(1)在練習 1.2 所畫的圖中，請指出 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BA}$ 有何異同之處？它們的坐標表示法有何關聯？

(2)在練習 1.2 所畫的圖中，請指出 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 有何關係？它們的坐標表示法有何關聯？

答：

學生手冊 P6

問題 2

- 此題設計的目的爲：引導學生自己找出相等向量，相反向量的意涵。
- (1)$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$大小相等，方向相反。且在坐標表示法中，x 分量、y 分量皆爲相反數（學生可能會說「異號」，只要學生能夠觀察得出來就可以了）。
- (2)$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$大小相等，方向相同，x 分量、y 分量皆相等。

相反向量

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，且 $a_1=-b_1$，$a_2=-b_2$，

則稱這兩個向量為**相反向量**，記作：$\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}$。

此時$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，方向相反。

相等向量

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，

則稱這兩個向量為**相等向量**，記作：，記作：$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$。

此時$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，方向相同。

問題 3

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，請問：$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，且方向相同時，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ 成立嗎？為什麼？

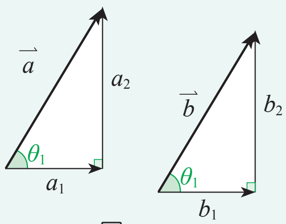


圖 8

例題 2 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(x+3, 5)$，$\overrightarrow{b}=(-2, y-1)$相等，試求 x，y。

答：$x+3=-2$，可得 $x=-5$

$y-1=5$ ，可得 $y=6$

學生手冊 P7

問題 3

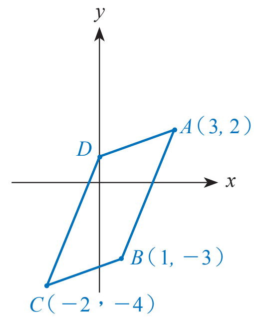
- 前面以「分量相等」定義兩個向量的相等，導致向量的大小相等，方向相同。此處爲其逆命題，可畫出向量的 x 分量、y 分量的圖形，利用兩三角形全等，證明兩個向量相等。

  不過技術型高中的學生，尚未學過邏輯概念，不易分辨其中的差異，教師授課時可依照學生實際學習的情況，決定是否需在此處清楚說明。

練習 2.1 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(3x+1, 3)$，$\overrightarrow{b}=(-5, 2y-7)$，相等，試求 x，y。

答：$3x+1=-5$，可得 $x=-2$
$2y-7=3$ ，可得 $y=5$

練習 2.2 在下圖中，已知平行四邊形$ABCD$中，
$A(3, 2)$，$B(1, -3)$，$C(-2，-4)$，試求 D 點坐標。

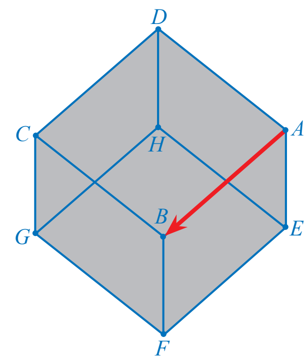


答：設 D 點坐標 $(x，y)$
如圖5，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{CD}=(x+2, y+4)$，$\overrightarrow{BA}=(2, 5)$
可得$D(x, y)=(0，1)$

例題 3 在下圖中，已知四邊形 $ABCD$、四邊形 $EFGH$、四邊形 $ABFE$、四邊形 $DCGH$ 皆為平行四邊形，請找出圖中與 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有哪些？

答：$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 大小相等，方向相同

故與 $\overrightarrow{AB}$ 相等。



練習 3 承上題，在上圖中，找出與 $\overrightarrow{DH}$ 的相反向量有哪些？

答：$\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{FB}$ 或 $-\overrightarrow{DH}, -\overrightarrow{AE}, -\overrightarrow{CG}, -\overrightarrow{BF}$

學生手冊 P8

例題 3

- 教師授課時可依照學生實際學習的情況，決定是否需在此處加入以下相等的向量 $-\overrightarrow{BA}, -\overrightarrow{FE}, -\overrightarrow{CD}, -\overrightarrow{GH}$,。

平面向量的加減

許多時候，我們只關心起點與終點之間的位置變化。例如：在圖 9 中，貞子原定今日搭乘飛機由臺北（A 點）經由東京（C 點）轉機飛到札幌（B 點）參加明天的會議，但由於東京地區大雪導致飛機這幾天均無法起降，因此貞子今日改搭由臺北（A 點）直飛到札幌（B 點）的飛機，以便準時出席明日在札幌的會議。在這裡我們只會關心一開始的位置及最後位置之間的移動變化，對於貞子來說，上面兩種移動的方式都可以把貞子從臺北（A 點）送到札幌（B 點），

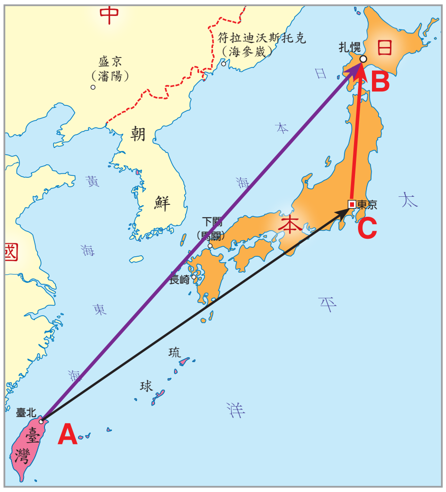


圖 9 飛機由臺北經由東京轉機飛到札幌，或由臺北直飛札幌的位移關係

其移動的最終效果是一樣的，所以我們說這兩種位移向量是相等的。即：$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 合起來的效果與 $\overrightarrow{AB}$ 是相同的。在數學上，記作：「 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ 」。事實上，飛機真正的航線也不是如圖中的直線，但顯然圖 9 的表示方式對一般人來說是比較易於理解與接受的，且更為簡潔易懂。

有時為了方便起見，我們會以符號 $\vec{a}$、$\vec{b}$、⋯ 來表示向量，例如：在上面的問題中，我們可以令 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$。此時將兩向量相加，便可以寫成：$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ 其位置關係如圖10，若以 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ 為相鄰兩邊作平行四邊形 $ACBD$，則此時由於 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，我們對照圖 10，發現 $\vec{a}+\vec{b}$ 即為 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 的對角線 $\overrightarrow{AB}$ ，如圖 11 所示。

向量加法的幾何意義：

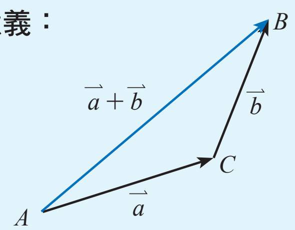


圖 10 三角形法

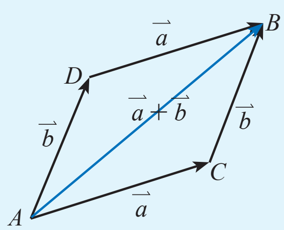


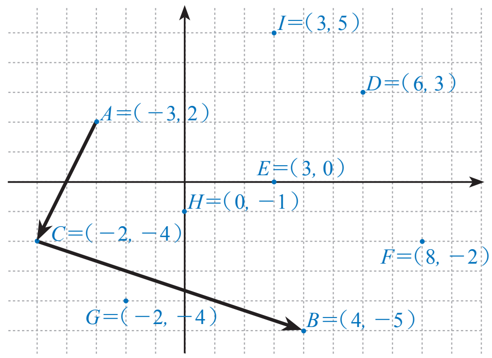
圖 11 四邊形法

■ 學生在學習物理計算「合力」(向量加法)時，多使用三角形法，因此一般說來，學生對於三角形法的概念接受度較高。

活動3

請各小組討論，在下圖的坐標平面上，從起點 A 出發，中途經過不同的點後到達終點 B，

⑴在坐標平面上以有向線段畫出5組不同的移動方式，並在下表紀錄位置移動（簡稱位移）向量的坐標表示法：



	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量
起點 ↓ 中間點 ↓ 終點	$A(-3, 2)$ ↓ $C(-5, -2)$ ↓ $B(4, -5)$	$\overrightarrow{AC}$ $=(-2, -4)$ $\overrightarrow{CB}$ $=(9, -3)$	$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{}$ ↓ $B(4, -5)$	
	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量
起點 ↓ 中間點 ↓ 終點	$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{}$ ↓ $B(4, -5)$	

⑵$\overrightarrow{AB}=$__________ 與上表所紀錄之位移向量之間有何關聯？右式的「?」應該是”＋”,”－”,”×”,”÷”哪一種運算符號？對於在⑴中找出的5組不同的移動方式之位移向量與 $\overrightarrow{AB}$ 也有一樣的關聯嗎？

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{AC}=(-2, -4) \\ ? & \overrightarrow{CB}=(9, -3) \\ \hline & \overrightarrow{AB}=\_\_\_\_\_\_ \end{array}$$

⑶坐標平面上，有向線段 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的圖形有何關聯？對於在⑴中找出的5種不同的位移向量與 $\overrightarrow{AB}$ 的圖形也有一樣的關聯嗎？

學生手冊 P10

活動3

■ ⑴ $D(6, 3)$　$\overrightarrow{AD}=(9, 1)$ $\overrightarrow{DB}=(-2, -8)$　$E(3, 0)$　$\overrightarrow{AE}=(6, -2)$ $\overrightarrow{EB}=(1, -5)$
$F(8, -2)$　$\overrightarrow{AF}=(11, -4)$ $\overrightarrow{FB}=(-4, -3)$　$G(-2, -4)$　$\overrightarrow{AG}=(1, -6)$ $\overrightarrow{GB}=(6, -1)$
$H(0, -1)$　$\overrightarrow{AH}=(3, -3)$ $\overrightarrow{HB}=(4, -4)$

⑵ $(7, -7)$
＋
是的。

⑶依照向量加法的幾何意義，可知 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$。
是的。可得 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$，……

在【 活動3】中，同學發現 $\overrightarrow{AC}=(-2,-4)$ 和 $\overrightarrow{CB}=(9,-3)$ 之分量分別相加的結果，恰與 $\overrightarrow{AB}=(7,-7)$ 的結果相同，數學上記做：$(-2,-4)+(9,-3)=(7,-7)$，即 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$。且在【 活動3】中，同學還會發現，只要起點 A 與終點 B 不變，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$、⋯⋯ 皆會與 $\overrightarrow{AB}$ 相等，且和 $\overrightarrow{AB}$ 恰形成一個三角形。即 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$、⋯⋯。

向量加法的坐標表示法

設兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，

則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$。

例題4 已知 $\overrightarrow{a}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{b}=(12, 3)$，求 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$。

答：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-4,-3)+(12, 3)=(-4+12,-3+3)=(8, 0)$

練習 4.1 設 $A(2,2)$, $B(-3,0)$，$C(-4,3)$，$D(-2,1)$，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

答：(1) $\overrightarrow{AB}=(-5,-2)$

$\overrightarrow{CD}=(2,-2)$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(-5+2,-2+(-2))=(-3,-4)$

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=(0, 0)$

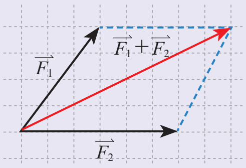
在【 練習4.1】中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ 可視為一連串位置的移動，先從A點移動到B點（$\overrightarrow{AB}$），再從B點移動到C 點（$\overrightarrow{BC}$），在從C點移動到D點（$\overrightarrow{CD}$），最後又從D點移動回到A點（$\overrightarrow{DA}$），而整個的移動情況從開始的始點A移動到最後的終點還是A，所以整個的位移總和其實是$\overrightarrow{AA}$也就是$\overrightarrow{0}$（唸作「 零向量 」)，即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=(0,0)$。且零向量 $\overrightarrow{0}$ 的大小爲 $\sqrt{0^2+0^2}=0$，而方向則無確定的方向。

學生手冊 P11

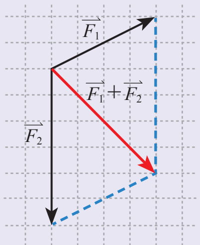
練習 4.1

- 相當於是白忙一場，回到起點。

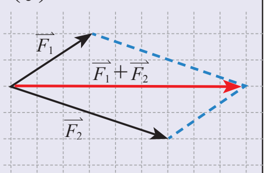
(a)



(b)

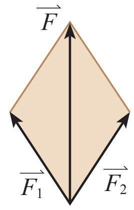


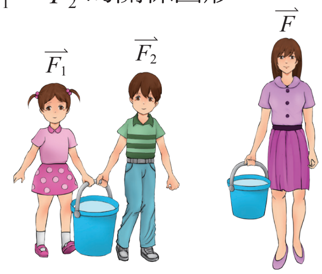
(c)



例題5 如下圖，兩個小朋友合提一桶水，和另外一個大人一個人提這一桶水，效果是一樣的，請畫出三個力 $\vec{F}$ 與 $\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$ 的關係圖形。

答：

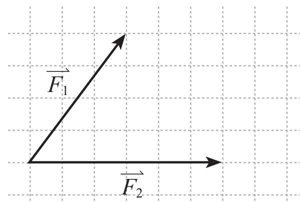




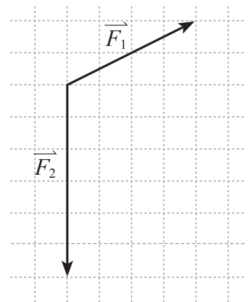
兩個力的作用效果與一個力的作用效果相同

練習 5 在下列各圖中，畫出兩個力 $\vec{F_1}$ 與 $\vec{F_2}$ 的合力。

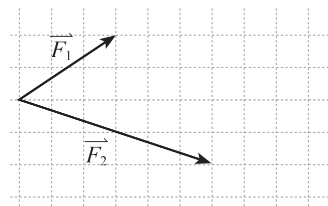
答：



(a)



(b)

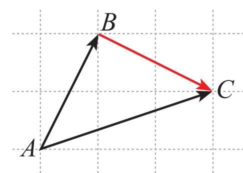


(c)

例題6 設 A、B、C 為平面上三點，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,1)$，試求 $\overline{BC}$ 之長。

答：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,-2)+(3,1)=(2,-1)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$



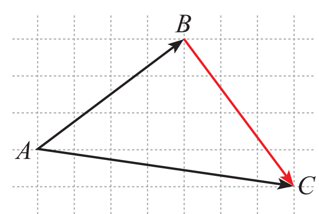
練習 6 若 $\overrightarrow{AB}=(4,3)$，$\overrightarrow{AC}=(7,-1)$ 試求 $\triangle ABC$ 的周長。

答：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$=(-4,-3)+(7,-1)=(3,-4)$

$\therefore \triangle ABC$ 周長 $=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|$

$=5+5+5\sqrt{2}=10+5\sqrt{2}$



學生手冊 P12

自製快艇渡河

圖 12 自製快艇渡河

小華自製了一艘動力快艇，已知其在靜止的水中船速大小為40公分/分鐘，若快艇由A點出發，船頭朝著對岸的B點前進（如圖12）。由於人造河的河水由南至北流動，快艇抵達對岸的位置將可能偏移至哪一點附近？

■ D 點

若人造河水流速的大小為30公分/分鐘，受到水流的影響，快艇實際速度的大小是多少呢？

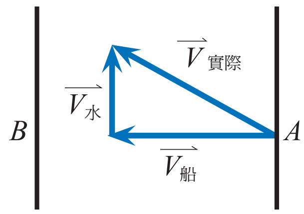


圖 13 船速與水速向量相加

我們可以把快艇與河水的速度合成如圖13，其實就是前面所討論的向量相加：將船實際的速度想成是向左方向的船速 $\overrightarrow{V_{船}}=(-40,0)$ 與圖中向上方向的水速 $\overrightarrow{V_{水}}=(0,30)$ 相加的結果，即實際的速度 $\overrightarrow{V}_{實際}$為

$\overrightarrow{V}_{實際}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水}}=(-40,0)+(0,30)=(-40,30)$

而快艇實際速度的大小為$|\overrightarrow{V}_{實際}|=\sqrt{(-40)^2+30^2}=50$公分／分鐘。

人造河的河水流動方向若轉變成由北至南流動，快艇抵達對岸的位置又將可能偏移至哪一點附近？若此時人造河水流速的大小亦為30公分／分鐘，快艇實際速度的大小又是多少呢？

■ C 點

同理，我們將快艇與河水的速度向量相加：此時的水速

$\overrightarrow{V_{水'}}=(0,-30)$，相加的結果，即實際的速度$\overrightarrow{V}_{實際'}$為

$\overrightarrow{V}_{實際'}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水'}}=(-40,0)+(0,-30)=(-40,-30)$

而快艇實際速度的大小為$|\overrightarrow{V}_{實際'}|=\sqrt{(-40)^2+(-30)^2}$

$=50$公分／分鐘。

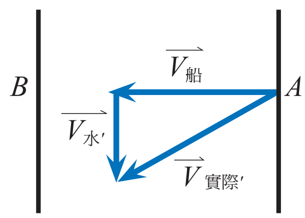


圖 14 船速與水速向量相加

學生手冊 P13

■ 此處僅利用相反向量來說明向量相減的關係。

觀察圖13、圖14我們會發現：$\overrightarrow{V_{水}}$ 與 $\overrightarrow{V_{水'}}$ 為相反向量，即 $\overrightarrow{V_{水'}}=-\overrightarrow{V_{水}}$，

而 $\overrightarrow{V_{實際'}}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水'}}=\overrightarrow{V_{船}}+(-\overrightarrow{V_{水}})=\overrightarrow{V_{船}}-\overrightarrow{V_{水}}$，

且可寫成 $\overrightarrow{V_{實際'}}=\overrightarrow{V_{船}}-\overrightarrow{V_{水}}=(-40,0)-(0,30)=(-40,-30)$

由上面的運算可得：若兩向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，

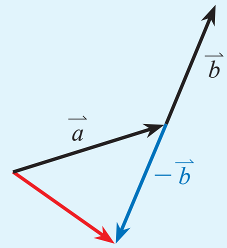
且 $\vec{b}$ 的相反向量 $-\vec{b}=(-b_1,-b_2)$，此時 $\vec{a}-\vec{b}$ 可視為 $\vec{a}+(-\vec{b})$，

即 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1,a_2)+(-b_1,-b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

向量減法

設兩向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則 $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

幾何意義如下：



$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

圖 15 向量減法

例題7 已知 $\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(1,3)$，求與 $\vec{a}-\vec{b}$。

■可由圖中觀察，$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 為相反向量，

即 $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$

$\vec{a}-\vec{b}$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{AB})$

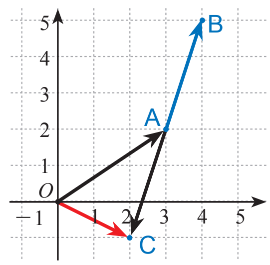
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OC}$

解法1：設 O 為原點，如圖，令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(3,2)$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}=(1,3)$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(3,2)+(-1,-3)$

$=(3+(-1),2+(-3))=(2,-1)$



解法2：$\vec{a}-\vec{b}=(3,2)-(1,3)$

$=(3-1,2-3)=(2,-1)$

練習 7 設 $A(2,2)$，$B(-3,0)$，$C(-4,3)$，$D(-2,1)$，求 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

答：

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

$=(-3-2,0-2)-(-2+4,1-3)$

$=(-5,-2)-(2,-2)$

$=(-7,0)$

學生手冊 P14

拋體運動

在日常生活中，無論是投籃、打棒球、投擲石塊、丟垃圾，乃至於發射飛彈……等，拋出物體時的方向常與水平方向成斜角，因此不但包含水平方向的速度，也包含垂直方向的速度；在物理學上，稱為**拋體運動**。為了研究拋體運動，常會將速度分解成水平速度與垂直速度。

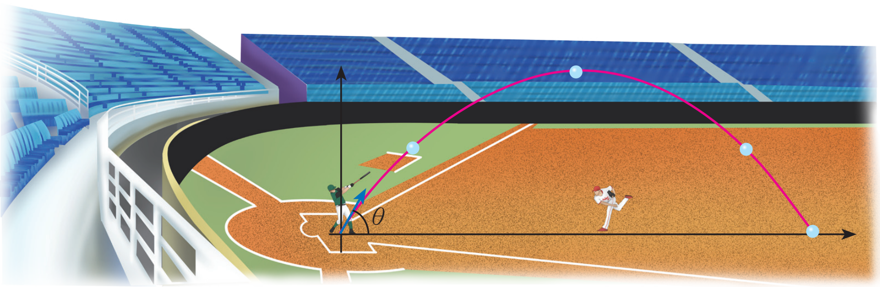


圖 16 拋體運動

在數學上，為了方便運算，會計算物體拋出時的方向與 x 軸正向的夾角 θ（就是前面所說的向量方向角），若物體被拋出時的初速度 $\vec{v}$ 的大小為 $|\vec{v}|$，如圖17，依照之前三角函數的定義，可得：

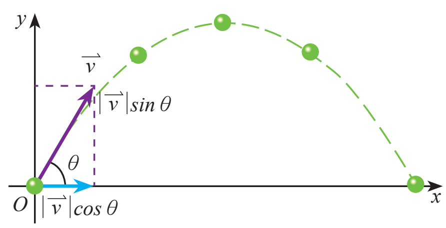


圖 17 處理拋體運動的問題時，常將速度分解

水平初速度大小 $=|\vec{v}|\cos\theta$（$\vec{v}$ 的 x 分量）

垂直初速度大小 $=|\vec{v}|\sin\theta$（$\vec{v}$ 的 y 分量）

即向量 $\vec{v}=(|\vec{v}|\cos\theta, |\vec{v}|\sin\theta)$

向量的坐標表示法(2)

若向量 $\vec{a}$ 的方向角為 θ，則

向量 $\vec{a}=(|\vec{a}|\cos\theta, |\vec{a}|\sin\theta)$

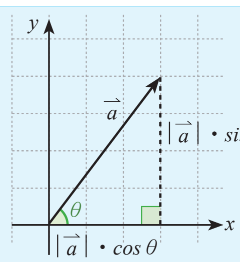


圖 18 由大小與方向角求向量坐標表示法

學生手冊 P15

- 水平速度與垂直速度即水平分量、垂直分量，也就是向量的 x 分量、y 分量。

- 斜邊為 $\vec{v}$ 的長度（大小）$|\vec{v}|$。

- 斜邊為 $\vec{a}$ 的長度 $|\vec{a}|$。

■ 由例題8及練習8.1可以引導學生觀察(1)同一向量,方向角可以從逆時針方向計算,也可以從順時針方向計算.無論從何方向取值,所得該向量之結果皆一致。(2)由方向角所在象限經三角函數運算後得到之X-分量及Y-分量,其正,負值代表X軸向右向左及Y軸向上向下之方向與方向角所在象限之正負具有一致性。

例題8 若$|\overrightarrow{a}|=20$，向量$\overrightarrow{a}$的方向角為150°，試將向量$\overrightarrow{a}$以坐標表示法表示。

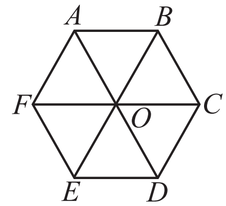
答：$\overrightarrow{a}=(|\overrightarrow{a}|\cdot\cos\theta，|\overrightarrow{a}|\cdot\sin\theta)$

$=(20\cdot\cos150^\circ, 20\cdot\sin150^\circ)$

$=(20\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}), 20\cdot\frac{1}{2})$

$=(-10\sqrt{3}, 10)$

練習 8.1 在下圖中，正六邊形$ABCDEF$邊長為6，對角線交於原點O，試將向量$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AF}$以坐標表示法表示。如果對角線交點O不在原點，前面的結果會一樣嗎？



答：$\overrightarrow{OB}=(6\cos60^\circ, 6\sin60^\circ)=(3, 3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{OD}=(6\cos300^\circ, 6\sin300^\circ)=(3, -3\sqrt{3})$

或$\overrightarrow{OD}=(6\cos(-60^\circ)，6\sin(-60^\circ))=(3, -3\sqrt{3})$

$\overrightarrow{OF}=(6\cos180^\circ, 6\sin180^\circ)=(-6, 0)$

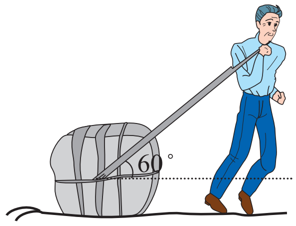
如圖，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OB}=(-3, -3\sqrt{3})$

若對角線交點O不在原點，前面的結果仍然相同。

練習 8.2 如下圖，一人以100牛頓的力，與水平面夾角60°，拖行一物體，試求水平分力(即x分量)與垂直分力(即y分量)的大小。

答：水平分力大小$=100\cos60^\circ=50$ (牛頓)

垂直分力大小$=100\sin60^\circ=50\sqrt{3}$ (牛頓)



學生手冊 P16

兩倍的力

在物理學上，當我們提到「2倍的力」時，是指方向不變，大小為原來力的2倍。由於力是向量，所以將「2倍的力」記作$2\vec{F}$。而當方向相反，大小為原來力的2倍時，則記作$-2\vec{F}$。這樣的向量關係，稱為向量的實數積，其意義如下。

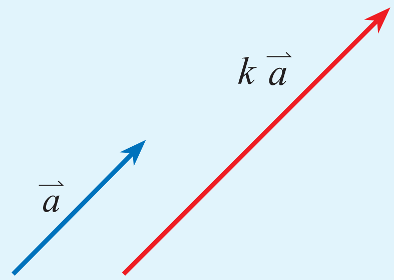
向量的實數積

1. 幾何意義：若向量 $\vec{a}$ 不為零向量。

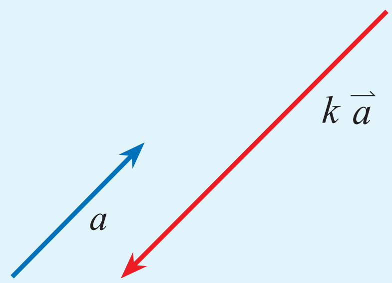
(1) 當 $k>0$ 時，
$k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的k倍，
$k\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 相同。

(2) 當 $k>0$ 時，
$k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的 $|k|$ 倍，
$k\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 相反。

(3) 當 $k=0$ 時，
$k\vec{a}=\vec{0}$。



當 $k>0$ 時，$k\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 同方向。



當 $k<0$ 時，$k\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 反方向。

2. 坐標表示法：若向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 不為零向量。
$k\vec{a}=k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$

小幫手：
若向量$\vec{a}=\vec{0}$，
則$k\vec{a}=\vec{0}$。

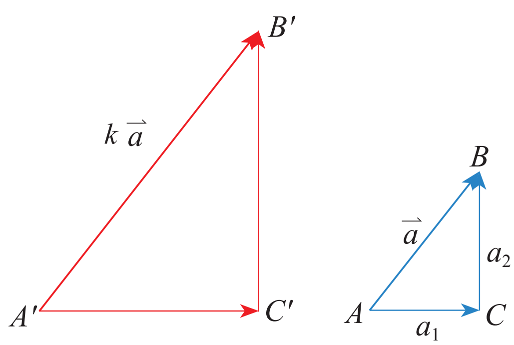
說明：(1) 當 $\boldsymbol{k}>0$ 時，如右圖，

設向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(a_1, a_2)$，$k\vec{a}=\overrightarrow{A'B'}$

如圖可知$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

可得$k\vec{a}$ 的 x 分量為 ka_1，y 分量為 ka_2，

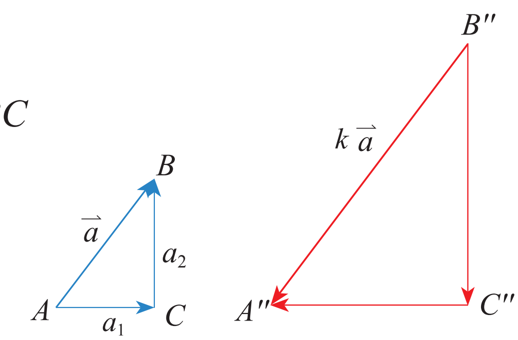
即 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$。



ΔABC與$\Delta A'B'C'$ 相似

(2) 當 $\boldsymbol{k}<0$ 時，如右圖，$\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$

同理可得 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$。



ΔABC與$\Delta A'B'C'$ 相似

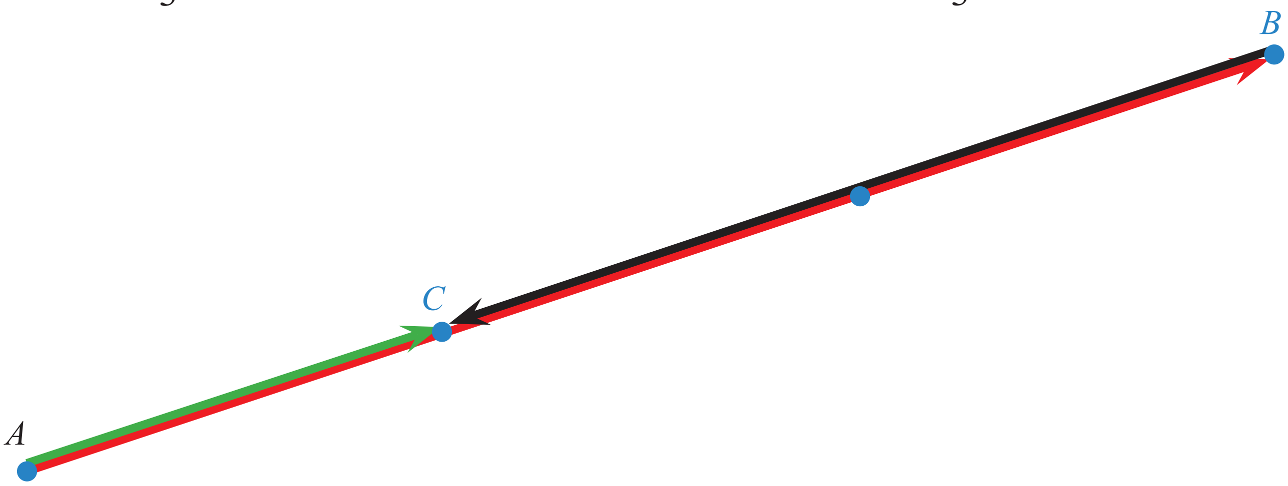
學生手冊 P17

例題9

在下圖中，C 點為 $\overline{AB}$ 的一個三等分點，試以 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 。

解 $\overline{AC}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{AC}$ 的方向與 $\overrightarrow{AB}$ 相同，所以 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 。

$\overline{BC}=\dfrac{2}{3}\overline{AB}$，且 $\overrightarrow{BC}$ 的方向與 $\overrightarrow{AB}$ 相反，所以 $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 。



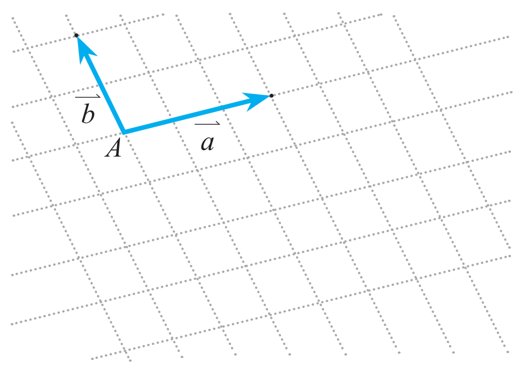
練習 9 在例題9中，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BC}$ ，$\overrightarrow{BA}=n\overrightarrow{BC}$ 。試求 m、n 之值。

答：

$m=-\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{2}{3}$

例題10

右圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形。試以 A 點為始點畫出 $\dfrac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}$。



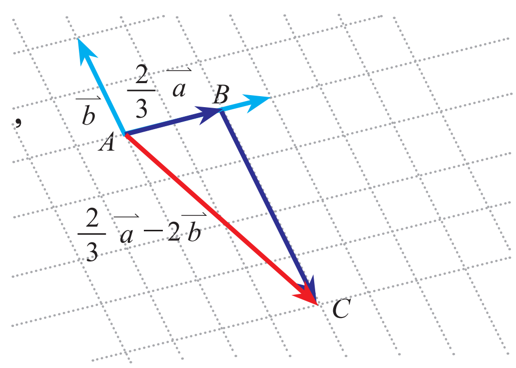
解 $\dfrac{2}{3}\vec{a}$ 是方向與 $\vec{a}$ 相同且長度為 $\vec{a}$ 長度的 $\dfrac{2}{3}$ 倍的向量，

作 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ 。

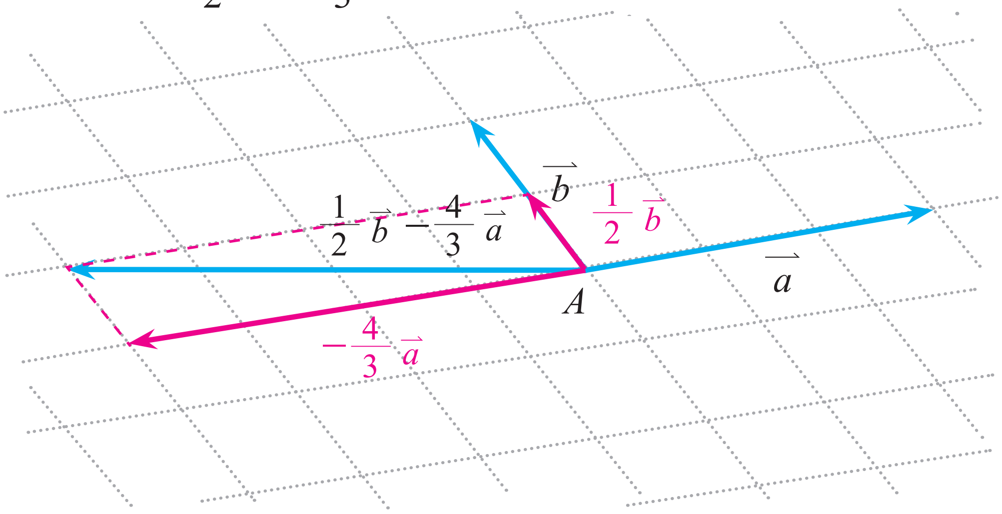
$-2\vec{b}$ 是方向與 $\vec{b}$ 相反且長度為 $\vec{b}$ 長度的2倍的向量，

作 $\overrightarrow{BC}=-2\vec{b}$。

因此 $\dfrac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 。



練習10 下圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形。試以A點為始點畫出 $\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{4}{3}\overrightarrow{a}$。



向量實數積的基本性質

設 r, s 為實數，$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為二任意向量，則：

(1) $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$ (2) $(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$ (3) $r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$

說明：設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+a_2, b_1+b_2)$

(1) $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r(a_1+a_2, b_1+b_2)=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2)$

$r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}=r(a_1, a_2)+r(b_1, b_2)=(ra_1, ra_2)+(rb_1, rb_2)$

$=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2)$

故 $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$

(2) $(r+s)\overrightarrow{a}=(r+s)(a_1, a_2)=((r+s)a_1, (r+s)a_2)=(ra_1+sa_1, ra_2+sa_2)$

$r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}=r(a_1, a_2)+s(a_1, a_2)=(ra_1, ra_2)+(sa_1, sa_2)$

$=(ra_1+sa_1, ra_2+sa_2)$

故 $(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$

(3) $r(s\overrightarrow{a})=r(s(a_1, a_2))=r(sa_1, sa_2)=(rsa_1, rsa_2)$

$(rs)\overrightarrow{a}=(rs)(a_1, a_2)=(rsa_1, rsa_2)$

故 $r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$

學生手冊 P19

例題10

設 $\vec{a}=(-1, 2)$，$\vec{b}=(4, 3)$試求 $|3\vec{a}+2\vec{b}|$ 之值。

解 $3\vec{a}+2\vec{b}=3(-1, 2)+2(4, 3)=(-3, 6)+(8, 6)=(5, 12)$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|(5, 12)|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

練習11 設 $\vec{a}=(\frac{1}{2}, -3)$，$\vec{b}=(-1, -\frac{2}{3})$，試求 $|4\vec{a}-3\vec{b}|$ 之值。

答：

$4\vec{a}-3\vec{b}=4(\frac{1}{2}, -3)-3(-1, -\frac{2}{3})=(2, -12)+(3, 2)=(5, -10)$

$|4\vec{a}-3\vec{b}|=|(5, -10)|=\sqrt{5^2+(-10)^2}=5\sqrt{5}$

學生手冊 P20

習　題

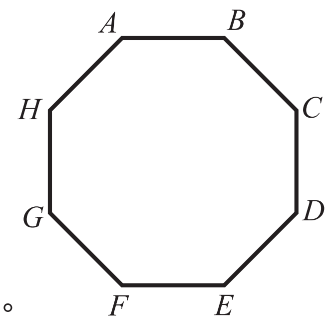
1. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$之終點 $B(-2,4)$，求起點 A 的坐標。

2. 設 $A(2,1)$，$B(-3,2)$，與 $C(-1,3)$為坐標平面上的三點。

 (1)求向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$　　(2)已知 $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點的坐標。

3. 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(2x+1,-9)$，$\overrightarrow{b}=(-3,1-5y)$相等，試求 x，y。

4. 已知 $A(2,2)$，$B(3,1)$，$C(4,-2)$，$D(-1,-3)$，$O(0,0)$為坐標平面上五點，且 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$，求 P 的坐標。



5. 試問右圖正八邊形的邊可以決定多少個不相等的向量？

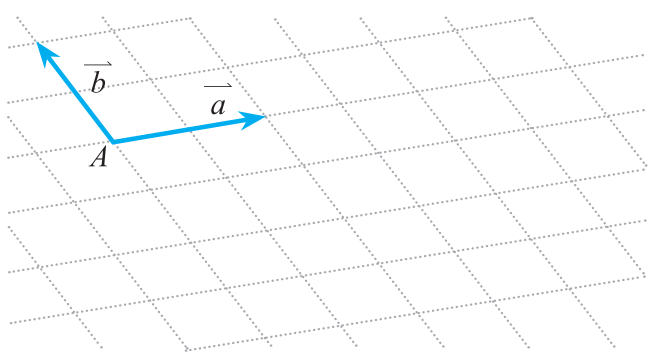
6. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(3,-2)$，$\overrightarrow{b}=(1,3)$及 $\overrightarrow{c}=(-2,-1)$

 在下面的方格紙中，請定出原點、x 軸與 y 軸。

 (1)在坐標平面上，以原點當始點，畫出向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$。

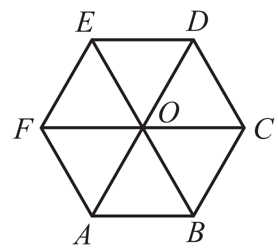
 (2)求 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 及其長度。 (3)求 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$ 及其長度。

7. 下圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形，試以 A 點為始點畫出 $\dfrac{7}{2}\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$。



8. 若$|\overrightarrow{a}|=10$，向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角為 $\frac{3}{4}\pi$ ，試將向量 $\overrightarrow{a}$ 以坐標表示法表示。

9. 在右圖中，正六邊形 $ABCDEF$ 邊長為 2，對角線交於 O，試將向量 $\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AD}$ 、$\overrightarrow{AC}$以坐標表示法表示。



習題解答

1. $A(1, 6)$

2. (1)$\overrightarrow{AC}=(-3, 2)$，$\overrightarrow{BC}=(2, 1)$　(2)$D(4, 2)$

3. $x=-2$, $y=2$

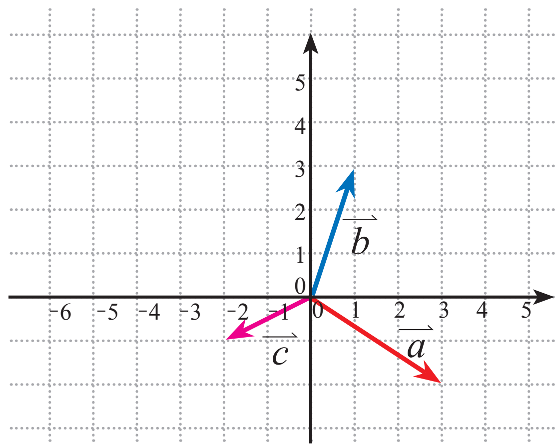
4. $P=(-9, -3)$

5. 8個

 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$ 以及它們的相反向量

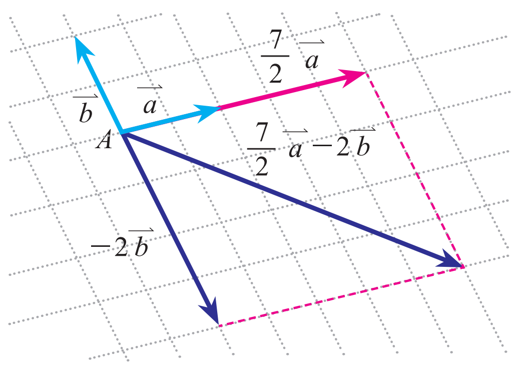
6. (1)如右圖㈠　(2)$(1, -8)$，$\sqrt{65}$

 (3)$(-2, -7)$，$\sqrt{53}$



圖㈠

7. 如右圖㈡



圖㈡

8. $\overrightarrow{a}=(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

9. 設 A 為原點 $\overline{AB}$ 與 x 軸正向重合，

 $\overrightarrow{AB}=(2, 0)$，$\overrightarrow{AO}=(2\cos 60^\circ, 2\sin 60^\circ)=(1, \sqrt{3})$

 $\overrightarrow{AF}=(2\cos 120^\circ, 2\sin 120^\circ)=(-1, \sqrt{3})$

 $\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{3}\cos 90^\circ, 2\sqrt{3}\sin 90^\circ)=(0, 2\sqrt{3})$

 $\overrightarrow{AD}=(4\cos 60^\circ, 4\sin 60^\circ)=(2, 2\sqrt{3})$

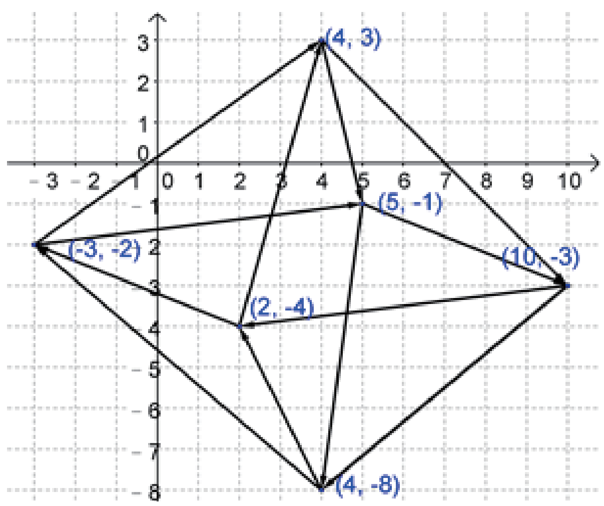
 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}=(1, \sqrt{3})+(2, 0)=(3, \sqrt{3})$

附　錄

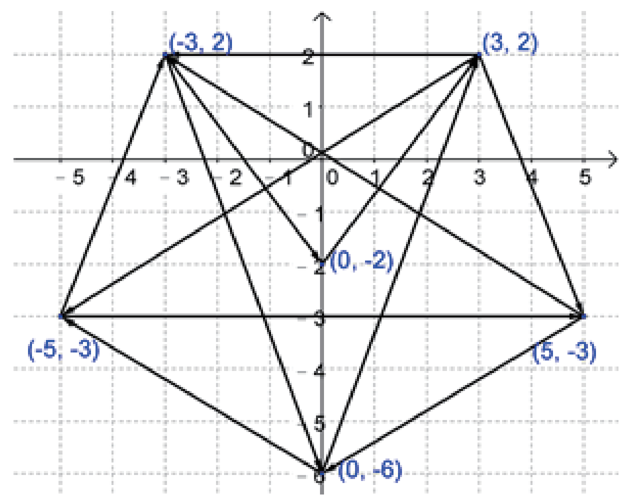
活動 2　火星任務－遊戲準備：坐標卡與圖形

1. 坐標卡 (a)

編號	第1張	編號	第2張	第3張	第4張	第5張	第6張	第7張
初始位置	(−3, −2)	起點	(−3, −2)	(4, 3)	(5, −1)	(10, −3)	(4, −8)	(2, −4)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(4, 3)	(5, −1)	(10, −3)	(4, −8)	(2, −4)	(4, 3)
		編號	第8張	第9張	第10張	第12張	第13張	第14張
		起點	(4, 3)	(10, −3)	(2, −4)	(−3, −2)	(5, −1)	(4, −8)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(10, −3)	(2, −4)	(−3, −2)	(5, −1)	(4, −8)	(−3, −2)



坐標卡 (a) 最後圖形



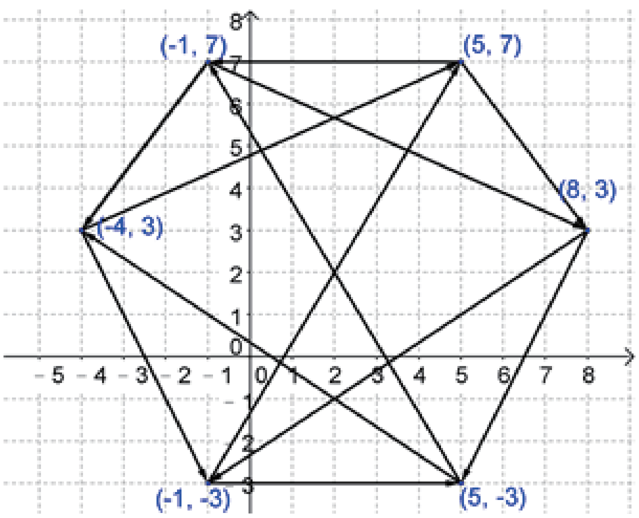
坐標卡 (b) 最後圖形

2. 坐標卡 (b)

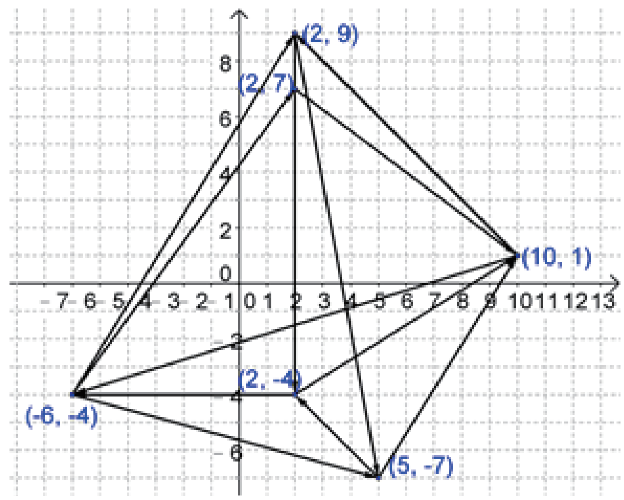
編號	第 1 張	編號	第 2 張	第 3 張	第 4 張	第 5 張	第 6 張	第 7 張
初始位置	(3, 2)	起點	(3, 2)	(5, −3)	(0, −6)	(3, 2)	(−5, −3)	(5, −3)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(5, −3)	(0, −6)	(3, 2)	(−5, −3)	(5,−3)	(−3, 2)
		編號	第 8 張	第 9 張	第 10 張	第 12 張	第 13 張	第 14 張
		起點	(−3, 2)	(0, −6)	(−5, −3)	(−3, 2)	(0, −2)	(3, 2)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(0, −6)	(−5, −3)	(−3,2)	(0, −2)	(3, 2)	(−3, 2)

3. 坐標卡 (c)

<table>
<tr><th>編號</th><th>第1張</th><th>編號</th><th>第2張</th><th>第3張</th><th>第4張</th><th>第5張</th><th>第6張</th><th>第7張</th></tr>
<tr><td rowspan="4">初始位置</td><td rowspan="4">(5, 7)</td><td>起點
↓
終點</td><td>(5, 7)
↓
(8, 3)</td><td>(8, 3)
↓
(5, −3)</td><td>(5, −3)
↓
(−1, 7)</td><td>(−1, 7)
↓
(−4, 3)</td><td>(−4, 3)
↓
(−1, −3)</td><td>(−1, −3)
↓
(5, 7)</td></tr>
<tr><td>編號</td><td>第8張</td><td>第9張</td><td>第10張</td><td>第12張</td><td>第13張</td><td>第14張</td></tr>
<tr><td>起點
↓
終點</td><td>(5,7)
↓
(−1,7)</td><td>(−1,7)
↓
(8, 3)</td><td>(8, 3)
↓
(−1, −3)</td><td>(−1, −3)
↓
(5, −3)</td><td>(5, −3)
↓
(−4, 3)</td><td>(−4, 3)
↓
(5, 7)</td></tr>
</table>



坐標卡 (c) 最後圖形



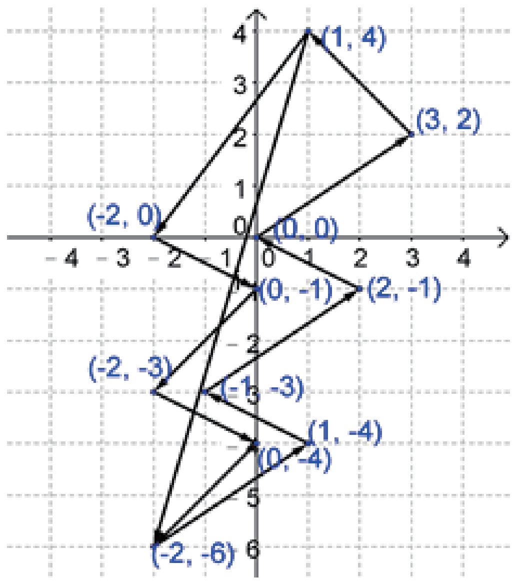
坐標卡 (d) 最後圖形

4. 坐標卡 (d)

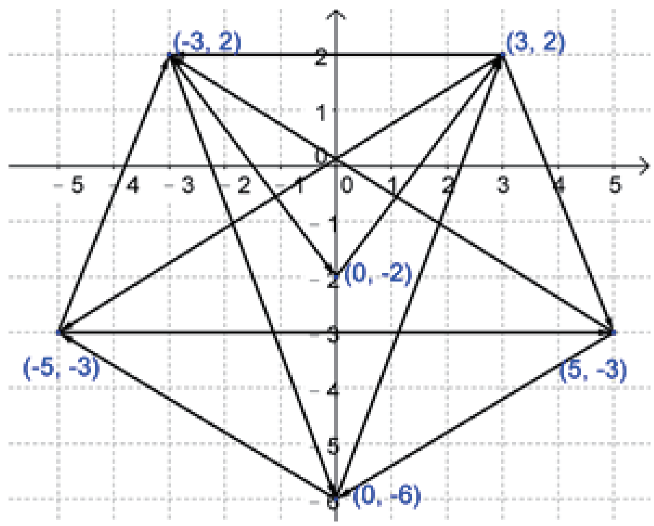
<table>
<tr><th>編號</th><th>第1張</th><th>編號</th><th>第2張</th><th>第3張</th><th>第4張</th><th>第5張</th><th>第6張</th><th>第7張</th></tr>
<tr><td rowspan="4">初始位置</td><td rowspan="4">(−6, −4)</td><td>起點
↓
終點</td><td>(−6, −4)
↓
(2, 9)</td><td>(2, 9)
↓
(5, −7)</td><td>(5, −7)
↓
(10, 1)</td><td>(10, 1)
↓
(-6, −4)</td><td>(−6, −4)
↓
(5, −7)</td><td>(5, −7)
↓
(2, −4)</td></tr>
<tr><td>編號</td><td>第8張</td><td>第9張</td><td>第10張</td><td>第12張</td><td>第13張</td><td>第14張</td></tr>
<tr><td>起點
↓
終點</td><td>(2, −4)
↓
(10, 1)</td><td>(10, 1)
↓
(2, 9)</td><td>(2, 9)
↓
(2, −4)</td><td>(2, −4)
↓
(−6, −4)</td><td>(−6, −4)
↓
(2, 7)</td><td>(2, 7)
↓
(10, 1)</td></tr>
</table>

5. 坐標卡 (*e*)

編號	第1張	編號	第2張	第3張	第4張	第5張	第6張	第7張
初始位置	(1, 4)	起點	(1, 4)	(−2,0)	(0, −1)	(−2, −3)	(0, −4)	(−2, −6)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(−2, 0)	(0, −1)	(−2, −3)	(0, −4)	(−2, −6)	(1, −4)
		編號	第8張	第9張	第10張	第12張	第13張	第14張
		起點	(1, −4)	(−1, −3)	(2, −1)	(0, 0)	(3, 2)	(1, 4)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(−1, −3)	(2, −1)	(0, 0)	(3, 2)	(1, 4)	(−2, −6)



坐標卡 (*e*) 最後圖形



坐標卡 (*f*) 最後圖形

6. 坐標卡 (*f*)

編號	第1張	編號	第2張	第3張	第4張	第5張	第6張	第7張
初始位置	(−3, 2)	起點	(−3, 2)	(3, 2)	(0, −2)	(−3, 2)	(−5, −3)	(0, −6)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(3, 2)	(0, −2)	(−3, 2)	(−5, −3)	(0, −6)	(−3, 2)
		編號	第8張	第9張	第10張	第12張	第13張	第14張
		起點	(−3, 2)	(5, −3)	(−5, −3)	(3, 2)	(0, −6)	(5, −3)
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		終點	(5, −3)	(−5, −3)	(3, 2)	(0, −6)	(5, −3)	(3, 2)

【註1】建議以 *A*4 大小紙張製作坐標卡。

【註2】教師亦可改變坐標卡初始位置或改為相反向量，讓二、三組畫出的圖形相同，以便讓學生觀察及察覺自己的錯誤（萬一中間向量計算有誤）。

筆記欄

memo

素養導向數學教材　/　單維彰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

發 行 人：許添明
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組
召 集 人：單維彰
副召集人：鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳姈蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）
作　　者：高健維、馬雅筠（依姓氏筆畫順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）