素養導向數學教材

平面向量的意義

國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

平面上位置的移動

天文學家在火星上執行探勘任務，派出機器人採集火星上某個區域的土壤。由於機器人發生故障，移動時只能接受前後左右的指令，為了更精確地操控機器人採集土壤，科學家將 基地的位置假設為原點 O，以 1 公里為 1 單位，在所需要探勘的區域建立坐標（如圖2），派出機器人採集 A、B、C、D、E 五個地點的土壤。

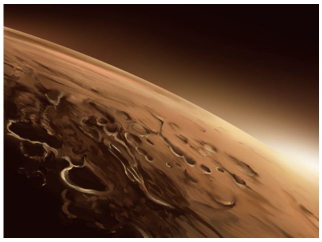


圖 1 火星表面

科學家將機器人的移動程式設計為：輸入兩個數字 ” □,□ ”，第 1 個數字代表左右移動—向右為正，向左為負。第 2 個數字代表上下移動—向上為正，向下為負。例如：機器人由 A 點出發到 B 點，需向右 5 單位，向下 1 單位，故輸入 ″ $\boxed{+5}$, $\boxed{-1}$ ” 。

請同學協助科學家輸入指令，使機器人移動位置，完成任務：

(1) $O \to A$:” □ , □ ”

(2) $B \to C$:” □ , □ ”

(3) $C \to D$:” □ , □ ”

(4) $B \to D$:” □ , □ ”

(5) $D \to E$:” □ , □ ”

(6) $E \to O$:” □ , □ ”

(7) $D \to A$:” □ , □ ”

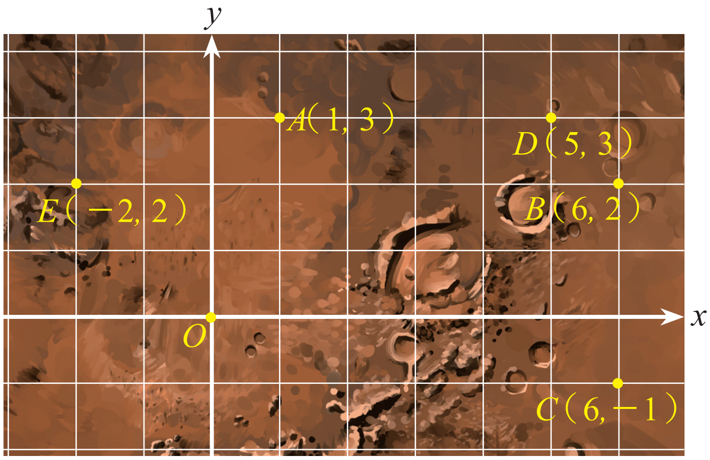


圖 2 火星表面探勘位置坐標

活動 1

(1) 請各小組討論，如何安排一系列的指令輸入，讓機器人以基地（O 點）為起點，可以經過 A、B、C、D、E（順序不限）五個地點採集土壤，並回到原本的基地。

(2) 請各小組討論，如何安排一系列的指令輸入，在最節省資源（走較少的路）的情況下，讓機器人以基地（O 點）為起點，可以經過 A、B、C、D、E 五個地點採集土壤，並回到原本的基地。

活動 2 火星任務

在上面活動中可知：兩點間直線距離為最短，為了方便表示，以下我們連接起點與終點，並以箭頭標註方向，來表示位置的移動。

※遊戲準備 :(詳見教師手冊【 附錄 】)

(1)每組一張 A_0 或 A_1 海報大小 的「 直角坐標 」貼在黑板上。

(2)每組一本坐標卡，第一張為單一坐標，第二張開始為始點與終點坐標。

(3)每組 1 枝紅色粉筆。

※遊戲規則說明：

(1)視人數多寡來決定組別數(今有42人，分為6組)。

(2)每組派出的第一位同學站在圖 3 中 1 的位置，扮演機器人，面對黑板，拿著紅色粉筆，等待科學家下達指令，在直角坐標上畫出位置移動的情況(連結起點、終點並加上箭頭)。

(3)每組派出的第二位同學站在圖 3 中 2 的位置，擔任翻卡任務，背對黑板，面對同學，依序翻開事先準備好的坐標給隊友看。

(4)每組派出的第三位同學站在圖 3 中 3 的位置，扮演科學家，面對翻卡同學，根據卡片上的坐標移動，給機器人下達指令，大聲地告知機器人 :” □,□ ”，以便機器人能在直角坐標海報上正確地畫出位置的移動。

(5)每組的第四位同學及其餘隊友排在第三位同學的後面，待機器人畫出一次移動後，由第四位同學遞補上來扮演科學家，第三位同學向前到圖 3 中 2 的位置擔任翻卡任務，第二位同學向前到圖 3 中 1 的位置扮演機器人，第一位同學回到圖 3 中 3 的位置，排至隊伍最後；待機器人每完成一次移動後，以此類推，依序輪迴，直到題目用完或定好的時間結束。

※遊戲開始：第一張卡為每組一開始的位置，待各組機器人就準備位置，由主持人宣布開始。

※遊戲結束：題目用完或定好的時間結束時，由主持人逐一公布各組答案，確認各組機器人是否正確地移動位置。

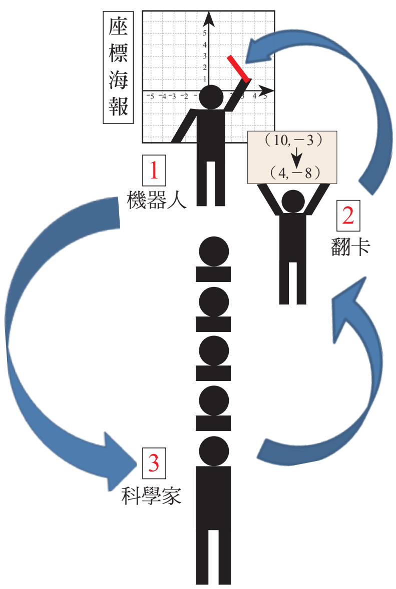


圖 3 遊戲位置示意圖

前面的活動，每一次的移動皆涉及兩個方向（左或右，上或下）的移動，在數學上稱為「 **向量** 」，為了方便書寫起見，我們將 ” □,□ ” 寫成（___，___）。

例如：在前面的活動中，卡片 $\boxed{\begin{matrix}(-3,-2)\\ \downarrow \\ (4,3)\end{matrix}}$ 表示從起點（$-3,-2$）移動至終點（4, 3），下達的指令為“$\boxed{+7}$，$\boxed{+5}$”，因此寫成向量的形式為（7, 5）。

另一張卡片 $\boxed{\begin{matrix}(10,-3)\\ \downarrow \\ (4,-8)\end{matrix}}$ 表示從起點（$10,-3$）移動至終點（$4,-8$），剛剛下的指令為“$\boxed{-6}$，$\boxed{-5}$”，因此寫成向量的形式為（$-6,-5$）。為了區別不同的向量，若令 $A(-3,-2)$，$B(4,3)$，$C(10,-3)$，$D(4,-8)$；此時 $\boxed{\begin{matrix}A(-3,-2)\\ \downarrow \\ B(4,3)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}C(10,-3)\\ \downarrow \\ D(4,-8)\end{matrix}}$，我們以符號「$\overrightarrow{AB}=(7,5)$，$\overrightarrow{CD}=(-6,-5)$」來表示不同起點、終點的向量。因為這樣的表示方式分別涉及兩個方向（左或右，上或下）的移動，因此稱為向量的分量表示法，又稱坐標表示法。

練習 1

(1) $O \to A$：

(2) $A \to B$：

(3) $B \to C$：

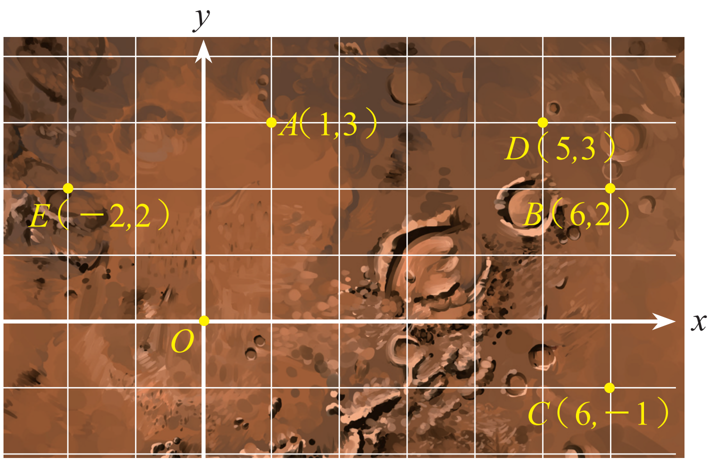
(4) $C \to D$：

(5) $B \to D$：

(6) $D \to E$：

(7) $E \to O$：

(8) $D \to A$：



問題 1

在活動 2 中，請同學說說如何求出 $\overrightarrow{AB}$？如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點為 $A(x_1，y_1)$，終點為 $B(x_2，y_2)$，那麼向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$ 有什麼關係呢？

向量的坐標表示法(1)

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點為 $A(x_1, y_1)$，終點為 $B(x_2, y_2)$，可得

向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=(a, b)$

其中 a 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量，b 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量。

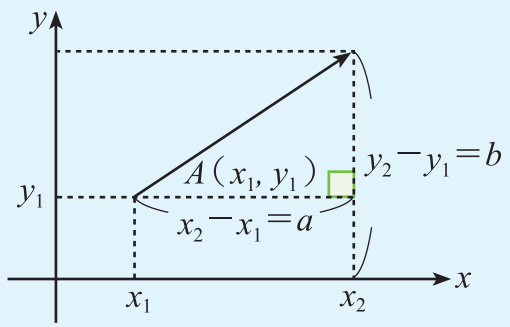


圖 4　a 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量，b 稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量

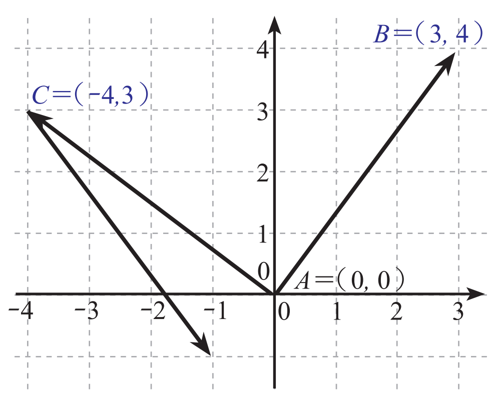
許多時候，我們同時也希望了解從 A 點移動到 B 點，究竟最短距離是多少？由圖4，根據畢式定理可得：A 點移動到 B 點的最短距離為

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(長度)，記作 $|\overrightarrow{AB}|$，即：$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$。此外，從 A 點移動到 B 點的方向，我們稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向；這是向量最特別之處，除了大小之外還包含「 方向 」。因此向量的描述方式有兩種：一、坐標表示法表示。二、直接敘述大小及方向。

例題 1　已知點 $A(0, 0)$，$B(3, 4)$，$C(-4, 3)$，$D(-1, -1)$，試求

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{AB}|$　(2)向量 $\overrightarrow{AC}$ 及 $|\overrightarrow{AC}|$　(3)向量 $\overrightarrow{CD}$ 及 $|\overrightarrow{CD}|$。

(4)你覺得向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CD}$ 方向相同嗎？



答：(1) $\overrightarrow{AB}=(3-0, 4-0)=(3, 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(2) $\overrightarrow{AC}=(-4-0, 3-0)=(-4, 3)$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(3) $\overrightarrow{CD}=(-1-(-4), -1-3)=(3, -4)$

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(4)如右圖，向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CD}$ 方向並不相同。

在例題1中，我們會發現，許多時候，即使向量的大小相同（長度一樣長），但往往方向卻不一定相同，因此在描述向量時，不能僅描述向量的大小，還必須說明向量的方向。因此向量 $\overrightarrow{AB}$ 與線段 $\overline{AB}$ 是很不同的，線段 $\overline{AB}$ 只有大小（長度），向量 $\overrightarrow{AB}$ 除了大小，還包含方向，我們為了強調此一特性，又稱 $\overrightarrow{AB}$ 為「 有向 」線段，即是強調向量 $\overrightarrow{AB}$ 是比線段 $\overline{AB}$ 多了「 有方向性 」的特性。向量的概念，廣泛的存在日常生活中，只要同時描述大小和方向的概念，其實都是向量，比如說：力、位移（位置的移動）、速度、加速度等……。例如：小孩拍打地面上的塑膠球，很顯然地，除了拍打的「 力 」的大小之外，施力的方向也是我們必須考慮的，因為這些都會影響球後續的運動情況。

圖 5 小孩拍打地面上的塑膠球

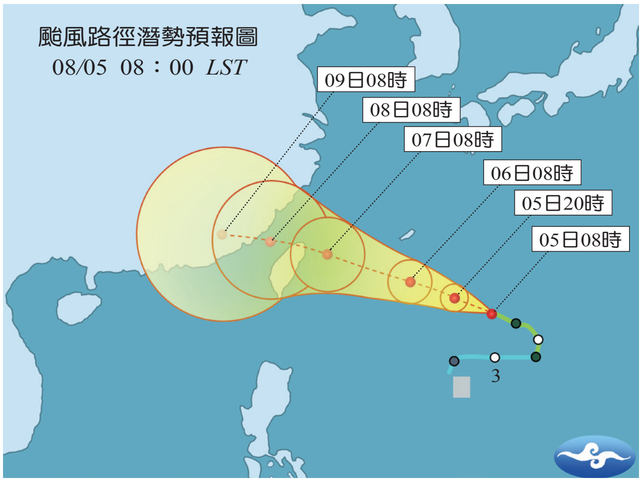


圖 6 颱風預報圖

而在描述「 力 」這個向量的時候，由於沒有所謂的起點、終點，所以我們通常會以單一的英文字母加上向量的符號「 $\overrightarrow{\ }$ 」來表示，例如：力、位移（位置的移動）、速度、加速度可以分別表示成 $\overrightarrow{F}$ 、$\overrightarrow{S}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{a}$。其中位移 $\overrightarrow{S}$ 有時也寫成 $\overrightarrow{AB}$ ，只不過寫成 $\overrightarrow{S}$ 的時候不強調始點 A、終點 B，比較在乎大小、方向。例如颱風的位置不斷地移動，隨時變換起點、終點，所以一般來說，比較常聽到氣象專家描述颱風從上次觀測到現在移動了多少公里（大小），朝哪個方向前進。

為了方便描述向量的方向，我們定義向量與 x 軸正向的夾角 θ ，稱為向量的方向角。

向量的大小與方向

若向量 $\overrightarrow{AB}=(a,\ b)$，

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}=$的大小：指 A 點到 B 點的最短距離，

或向量長 $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向：以方向角描述，指的是向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸正向的夾角 θ

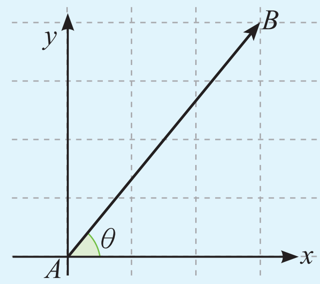


圖 7 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角 θ

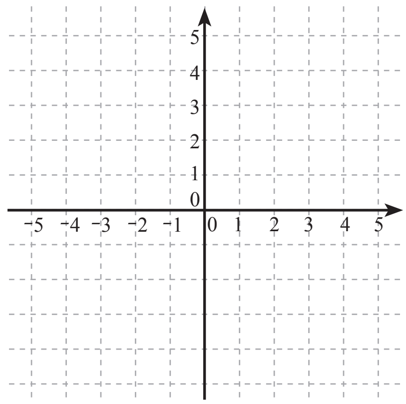
【 註 】若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起點不在 x 軸上，則我們以向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸正向的平行線的夾角 θ 來計算方向角。

練習 1.1 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(9,\ -10)$ 之起點 $A(-1,\ 2)$，求終點 B 的坐標。

答：

練習 1.2 已知點 $A(3,-2)$，$B(-5,\ 4)$，$C(4,-1)$，$D(-4,\ 5)$，試在在標平面上畫出向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BA}$，並以坐標表示法表示向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BA}$，以及求出 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{CD}|$、$|\overrightarrow{BA}|$。

答：



問題 2 試問：

(1) 在練習 1.2 所畫的圖中，請指出 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BA}$ 有何異同之處？它們的坐標表示法有何關聯？

(2) 在練習 1.2 所畫的圖中，請指出 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 有何關係？它們的坐標表示法有何關聯？

答：

相反向量

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，且 $a_1=-b_1$，$a_2=-b_2$，
則稱這兩個向量為**相反向量**，記作：$\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}$。
此時$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，方向相反。

相等向量

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，
則稱這兩個向量為**相等向量**，記作：，記作：$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$。
此時$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，方向相同。

問題 3

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，請問：$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 兩向量的大小相等，且方向相同時，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ 成立嗎？為什麼？

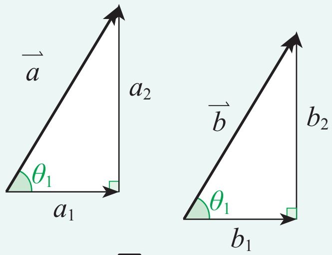


圖 8

例題 2 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(x+3, 5)$，$\overrightarrow{b}=(-2, y-1)$相等，試求 x，y。

答：$x+3=-2$，可得 $x=-5$

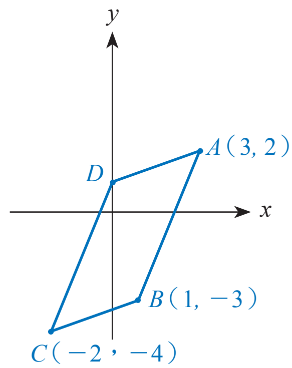
$y-1=5$ ，可得 $y=6$

練習 2.1 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(3x+1, 3)$，$\overrightarrow{b}=(-5, 2y-7)$，相等，試求 x，y。

答：

練習 2.2 在下圖中，已知平行四邊形$ABCD$中，
$A(3, 2)$，$B(1, -3)$，$C(-2，-4)$，試求 D 點坐標。

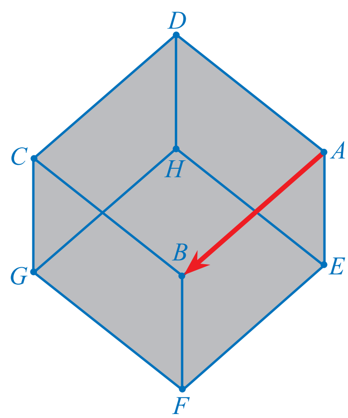
答：



例題 3 在下圖中，已知四邊形 $ABCD$、四邊形 $EFGH$、四邊形 $ABFE$、四邊形 $DCGH$ 皆為平行四邊形，請找出圖中與 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有哪些？

答：$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{HG}$，$\overrightarrow{EF}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 大小相等，方向相同

故與 $\overrightarrow{AB}$ 相等。



練習 3 承上題，在上圖中，找出與 $\overrightarrow{DH}$ 的相反向量有哪些？

答：

平面向量的加減

許多時候，我們只關心起點與終點之間的位置變化。例如：在圖 9 中，貞子原定今日搭乘飛機由臺北（A 點）經由東京（C 點）轉機飛到札幌（B 點）參加明天的會議，但由於東京地區大雪導致飛機這幾天均無法起降，因此貞子今日改搭由臺北（A 點）直飛到札幌（B 點）的飛機，以便準時出席明日在札幌的會議。在這裡我們只會關心一開始的位置及最後位置之間的移動變化，對於貞子來說，上面兩種移動的方式都可以把貞子從臺北（A 點）送到札幌（B 點），

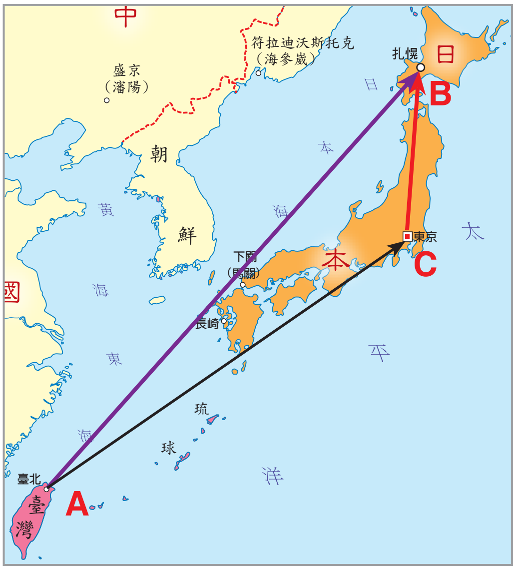


圖 9 飛機由臺北經由東京轉機飛到札幌，或由臺北直飛札幌的位移關係

其移動的最終效果是一樣的，所以我們說這兩種位移向量是相等的。即：$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 合起來的效果與 $\overrightarrow{AB}$ 是相同的。在數學上，記作：「$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$」。事實上，飛機真正的航線也不是如圖中的直線，但顯然圖 9 的表示方式對一般人來說是比較易於理解與接受的，且更為簡潔易懂。

有時為了方便起見，我們會以符號 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、⋯ 來表示向量，例如：在上面的問題中，我們可以令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$。此時將兩向量相加，便可以寫成：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}$ 其位置關係如圖10，若以 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$ 為相鄰兩邊作平行四邊形 $ACBD$，則此時由於 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$，我們對照圖 10，發現 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 即為 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 的對角線 $\overrightarrow{AB}$，如圖 11 所示。

向量加法的幾何意義：

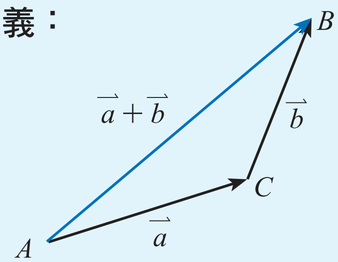


圖 10　三角形法

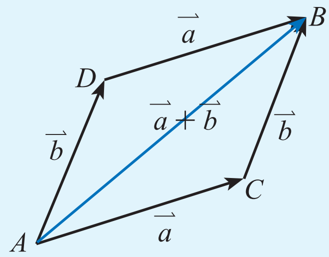
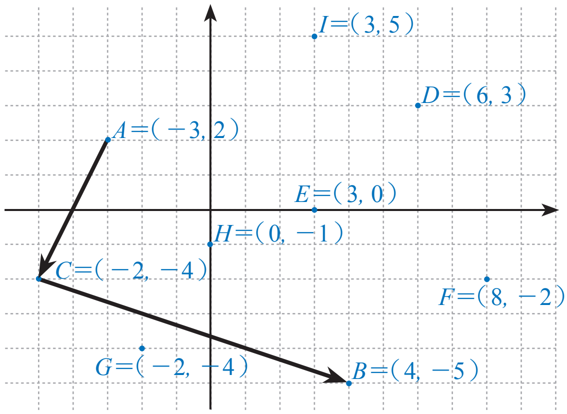


圖 11　四邊形法

活動 3

請各小組討論，在下圖的坐標平面上，從起點 A 出發，中途經過不同的點後到達終點 B，

(1)在坐標平面上以有向線段畫出5組不同的移動方式，並在下表紀錄位置移動（簡稱位移）向量的坐標表示法：



	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量
起點 ↓ 中間點 ↓ 終點	$A(-3, 2)$ ↓ $C(-5, -2)$ ↓ $B(4, -5)$	$\overrightarrow{AC}$ $=(-2, -4)$ $\overrightarrow{CB}$ $=(9, -3)$	$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{\quad}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{\quad}$ ↓ $B(4, -5)$	
	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量	位置移動	位移向量
起點 ↓ 中間點 ↓ 終點	$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{\quad}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{\quad}$ ↓ $B(4, -5)$		$A(-3, 2)$ ↓ $\boxed{\quad}$ ↓ $B(4, -5)$	

(2) $\overrightarrow{AB}=$ ＿＿＿＿＿＿＿ 與上表所紀錄之位移向量之間有何關聯？右式的「 ? 」應該是 ” ＋ ”,” − ”,” × ”,” ÷ ” 哪一種運算符號？對於在(1)中找出的5組不同的移動方式之位移向量與 $\overrightarrow{AB}$ 也有一樣的關聯嗎？

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{AC}=(-2, -4) \\ ?) & \overrightarrow{CB}=(9, -3) \\ \hline & \overrightarrow{AB}= \text{＿＿＿＿＿＿} \end{array}$$

(3)坐標平面上，有向線段 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的圖形有何關聯？對於在(1)中找出的5種不同的位移向量與 $\overrightarrow{AB}$ 的圖形也有一樣的關聯嗎？

在【活動3】中，同學發現 $\overrightarrow{AC}=(-2,-4)$ 和 $\overrightarrow{CB}=(9,-3)$ 之分量分別相加的結果，恰與 $\overrightarrow{AB}=(7,-7)$ 的結果相同，數學上記做：$(-2,-4)+(9,-3)=(7,-7)$，即 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$。且在【活動3】中，同學還會發現，只要起點 A 與終點 B 不變，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$、…… 皆會與 $\overrightarrow{AB}$ 相等，且和 $\overrightarrow{AB}$ 恰形成一個三角形。即 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$、……。

向量加法的坐標表示法

設兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，

則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$。

例題4 已知 $\overrightarrow{a}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{b}=(12, 3)$，求 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$。

答：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-4,-3)+(12, 3)=(-4+12,-3+3)=(8, 0)$

練習 4.1 設 $A(2, 2)$, $B(-3, 0)$，$C(-4, 3)$，$D(-2, 1)$，

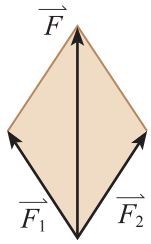
求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

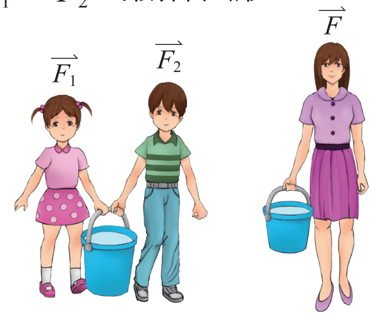
答：

在【練習4.1】中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ 可視為一連串位置的移動，先從A點移動到B點（$\overrightarrow{AB}$），再從B點移動到C 點（$\overrightarrow{BC}$），在從C點移動到D點（$\overrightarrow{CD}$），最後又從D點移動回到A點（$\overrightarrow{DA}$），而整個的移動情況從開始的始點A移動到最後的終點還是A，所以整個的位移總和其實是$\overrightarrow{AA}$也就是$\overrightarrow{0}$（唸作「零向量」)，即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=(0, 0)$。且零向量 $\overrightarrow{0}$ 的大小爲 $\sqrt{0^2+0^2}=0$，而方向則無確定的方向。

例題5 如下圖，兩個小朋友合提一桶水，和另外一個大人一個人提這一桶水，效果是一樣的，請畫出三個力 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{F_1}$ 、$\overrightarrow{F_2}$ 的關係圖形。

答：

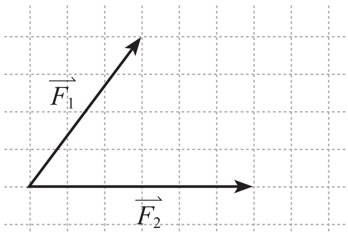




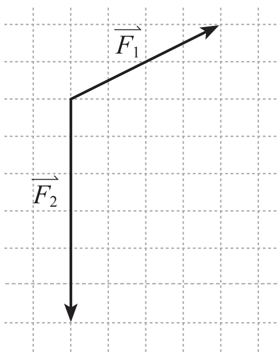
兩個力的作用效果與一個力的作用效果相同

練習 5 在下列各圖中，畫出兩個力 $\overrightarrow{F_1}$ 與 $\overrightarrow{F_2}$ 的合力。

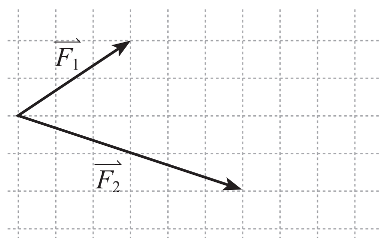
答：



（a）



（b）

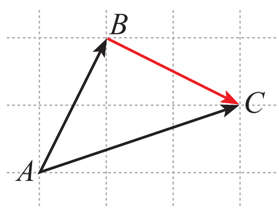


（c）

例題6 設A、B、C為平面上三點，$\overrightarrow{AB}=(1, 2)$，$\overrightarrow{AC}=(3, 1)$, 試求 $\overrightarrow{BC}$ 之長。

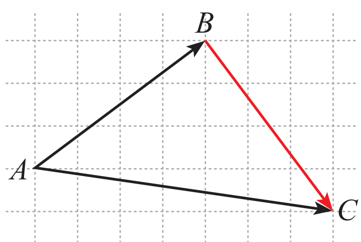
答：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1,-2)+(3, 1)=(2,-1)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$



練習 6 若 $\overrightarrow{AB}=(4, 3)$，$\overrightarrow{AC}=(7,-1)$試求 $\triangle ABC$ 的周長。

答：



自製快艇渡河

小華自製了一艘動力快艇，已知其在靜止的水中船速大小為40公分/分鐘，若快艇由A點出發，船頭朝著對岸的B點前進（如圖12）。由於人造河的河水由南至北流動，快艇抵達對岸的位置將可能偏移至哪一點附近？

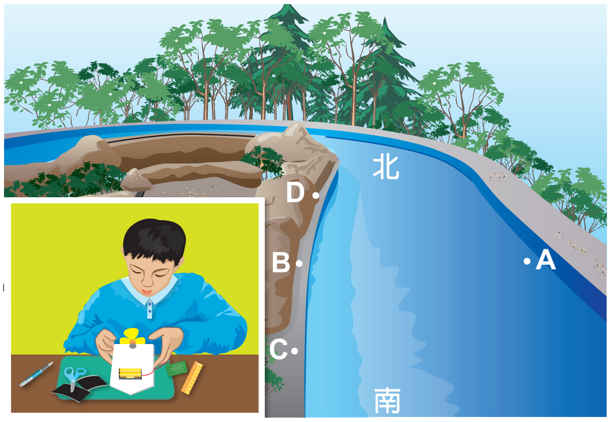


圖 12 自製快艇渡河

若人造河水流速的大小為30公分/分鐘，受到水流的影響，快艇實際速度的大小是多少呢？

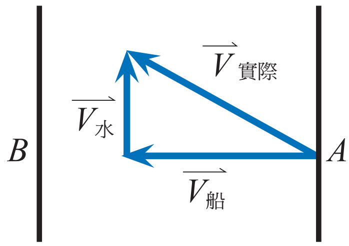


圖 13 船速與水速向量相加

我們可以把快艇與河水的速度合成如圖13，其實就是前面所討論的向量相加：將船實際的速度想成是向左方向的船速 $\overrightarrow{V_{船}}=(-40, 0)$ 與圖中向上方向的水速 $\overrightarrow{V_{水}}=(0, 30)$ 相加的結果，即實際的速度 $\overrightarrow{V_{實際}}$ 為

$\overrightarrow{V_{實際}}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水}}=(-40, 0)+(0, 30)=(-40, 30)$

而快艇實際速度的大小為 $|\overrightarrow{V_{實際}}|=\sqrt{(-40)^2+30^2}=50$ 公分／分鐘。

人造河的河水流動方向若轉變成由北至南流動，快艇抵達對岸的位置又將可能偏移至哪一點附近？若此時人造河水流速的大小亦為30公分／分鐘，快艇實際速度的大小又是多少呢？

同理，我們將快艇與河水的速度向量相加：此時的水速 $\overrightarrow{V_{水'}}=(0, -30)$，相加的結果，即實際的速度 $\overrightarrow{V_{實際'}}$ 為

$\overrightarrow{V_{實際'}}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水'}}=(-40, 0)+(0, -30)=(-40, -30)$

而快艇實際速度的大小為 $|\overrightarrow{V_{實際'}}|=\sqrt{(-40)^2+(-30)^2}$

$=50$ 公分／分鐘。

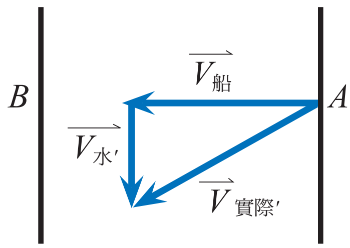


圖 14 船速與水速向量相加

觀察圖13、圖14我們會發現：$\overrightarrow{V_{水}}$ 與 $\overrightarrow{V_{水'}}$ 為相反向量，即 $\overrightarrow{V_{水'}}=-\overrightarrow{V_{水}}$，

而 $\overrightarrow{V_{實際'}}=\overrightarrow{V_{船}}+\overrightarrow{V_{水'}}=\overrightarrow{V_{船}}+(-\overrightarrow{V_{水}})=\overrightarrow{V_{船}}-\overrightarrow{V_{水}}$，

且可寫成$\overrightarrow{V_{實際'}}=\overrightarrow{V_{船}}-\overrightarrow{V_{水}}=(-40, 0)-(0, 30)=(-40, -30)$

由上面的運算可得：若兩向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$，

且 $\vec{b}$ 的相反向量$-\vec{b}=(-b_1, -b_2)$，此時 $\vec{a}-\vec{b}$ 可視為 $\vec{a}+(-\vec{b})$，

即 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1, a_2)+(-b_1, -b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)$

向量減法

設兩向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$，則 $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$

幾何意義如下：

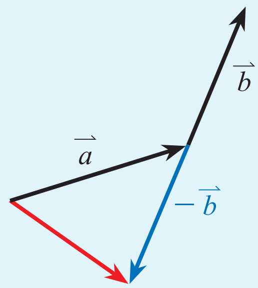


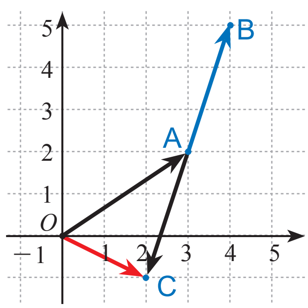
圖 15 向量減法

例題7 已知 $\vec{a}=(3, 2)$，$\vec{b}=(1, 3)$，求與 $\vec{a}-\vec{b}$。

解法1：設 O 為原點，如圖，令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(3, 2)$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}=(1, 3)$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(3, 2)+(-1, -3)$

$=(3+(-1), 2+(-3))=(2, -1)$



解法2：$\vec{a}-\vec{b}=(3, 2)-(1, 3)$

$=(3-1, 2-3)=(2, -1)$

練習 7 設 $A(2, 2)$，$B(-3, 0)$，$C(-4, 3)$，$D(-2, 1)$，求 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

答：

拋體運動

在日常生活中，無論是投籃、打棒球、投擲石塊、丟垃圾，乃至於發射飛彈……等，拋出物體時的方向常與水平方向成斜角，因此不但包含水平方向的速度，也包含垂直方向的速度；在物理學上，稱為**拋體運動**。為了研究拋體運動，常會將速度分解成水平速度與垂直速度。

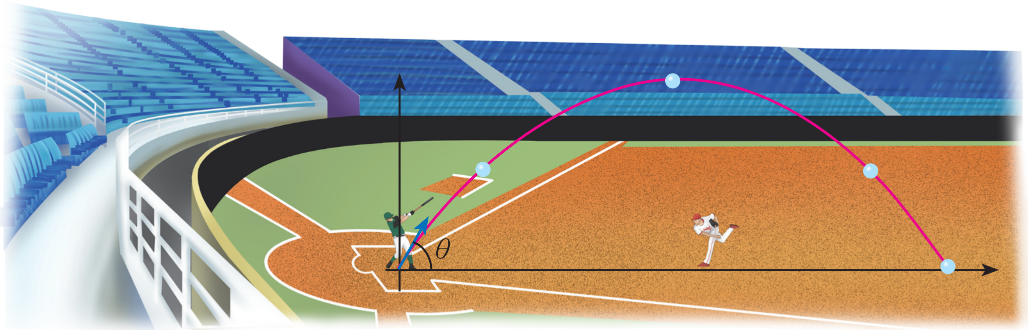


圖 16 拋體運動

在數學上，為了方便運算，會計算物體拋出時的方向與 x 軸正向的夾角 θ（就是前面所說的向量方向角），若物體被拋出時的初速度 $\vec{v}$ 的大小為 $|\vec{v}|$，如圖17，依照之前三角函數的定義，可得：

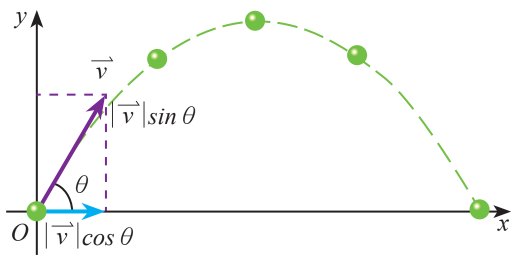


圖 17 處理拋體運動的問題時，常將速度分解

水平初速度大小 $=|\vec{v}|\cos\theta$（$\vec{v}$ 的 x 分量）

垂直初速度大小 $=|\vec{v}|\sin\theta$（$\vec{v}$ 的 y 分量）

即向量 $\vec{v}=(|\vec{v}|\cos\theta，|\vec{v}|\sin\theta)$

向量的坐標表示法(2)

若向量 $\vec{a}$ 的方向角為 θ，則

向量 $\vec{a}=(|\vec{a}|\cos\theta，|\vec{a}|\sin\theta)$

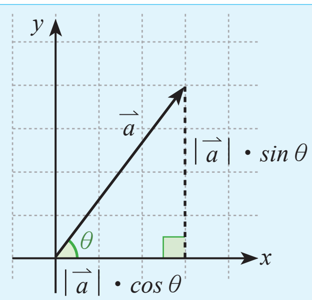


圖 18 由大小與方向角求向量坐標表示法

例題8 若$|\overrightarrow{a}|=20$，向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角為150°，試將向量 $\overrightarrow{a}$ 以坐標表示法表示。

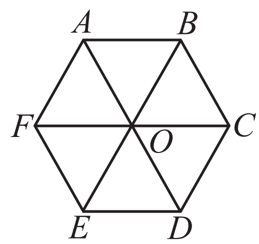
答：$\overrightarrow{a}=(|\overrightarrow{a}|\cdot\cos\theta\ ,|\overrightarrow{a}|\cdot\sin\theta\ )$

$=(20\cdot\cos150^\circ,\ 20\cdot\sin150^\circ)$

$=(20\cdot(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}),\ 20\cdot\dfrac{1}{2})$

$=(-10\sqrt{3},\ 10)$

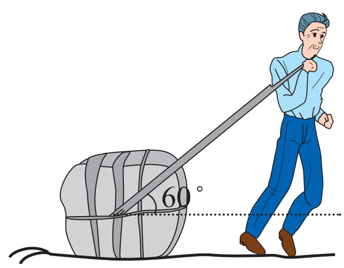
練習 8.1 在下圖中，正六邊形 $ABCDEF$ 邊長為 6，對角線交於原點 O，試將向量 $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AF}$ 以坐標表示法表示。如果對角線交點 O 不在原點，前面的結果會一樣嗎？



答：

練習 8.2 如下圖，一人以 100 牛頓的力，與水平面夾角60°，拖行一物體，試求水平分力（即 x 分量）與垂直分力（即 y 分量）的大小。

答：



兩倍的力

在物理學上，當我們提到「2倍的力」時，是指方向不變，大小為原來力的2倍。由於力是向量，所以將「2倍的力」記作$2\vec{F}$。而當方向相反，大小為原來力的2倍時，則記作$-2\vec{F}$。這樣的向量關係，稱為向量的實數積，其意義如下。

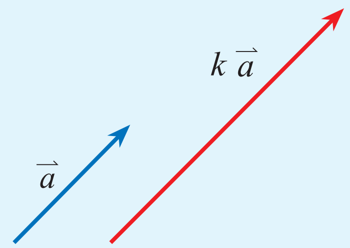
向量的實數積

1. 幾何意義：若向量 $\vec{a}$ 不為零向量。

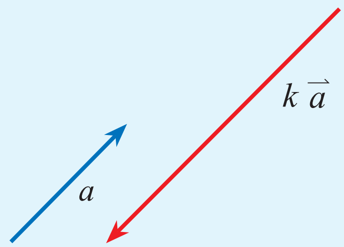
(1)當 $k>0$ 時，
$k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的k倍，
$k\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 相同。

(2)當 $k>0$ 時，
$k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的 $|k|$ 倍，
$k\vec{a}$ 的方向與 $\vec{a}$ 相反。

(3)當 $k=0$ 時，
$k\vec{a}=\vec{0}$。



當 $k>0$ 時，$k\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 同方向。



當 $k<0$ 時，$k\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 反方向。

2. 坐標表示法：若向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$ 不為零向量。
$k\vec{a}=k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$

小幫手：

若向量$\vec{a}=\vec{0}$，
則$k\vec{a}=\vec{0}$。

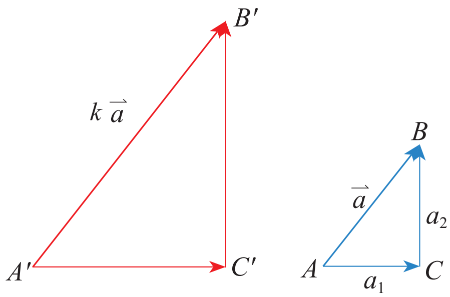
說明：(1)當 $\boldsymbol{k}>0$ 時，如右圖，

設向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(a_1, a_2)$，$k\vec{a}=\overrightarrow{A'B'}$

如圖可知$\Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$

可得$k\vec{a}$ 的 x 分量為 ka_1，y 分量為 ka_2，

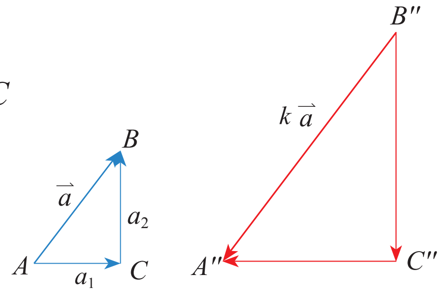
即 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$。



ΔABC與$\Delta A'B'C'$ 相似

(2)當 $\boldsymbol{k}<0$ 時，如右圖，$\Delta A''B''C''\sim\Delta ABC$

同理可得 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$。



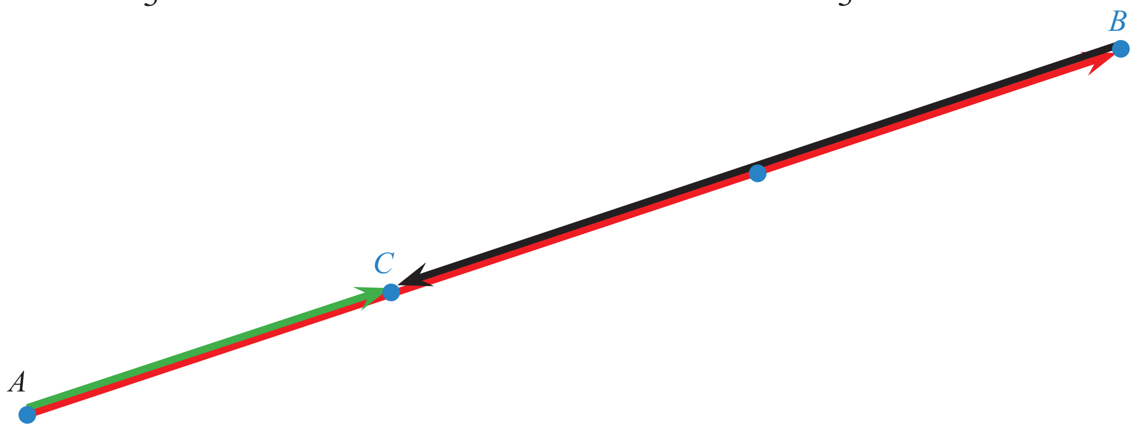
ΔABC與$\Delta A'B'C'$ 相似

例題9

在下圖中，C 點為 $\overline{AB}$ 的一個三等分點，試以$\overrightarrow{AB}$ 表示$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 。

解 $\overline{AC}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 且$\overrightarrow{AC}$ 的方向與$\overrightarrow{AB}$ 相同，所以$\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 。

$\overline{BC}=\dfrac{2}{3}\overline{AB}$，且$\overrightarrow{BC}$ 的方向與$\overrightarrow{AB}$ 相反，所以$\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 。

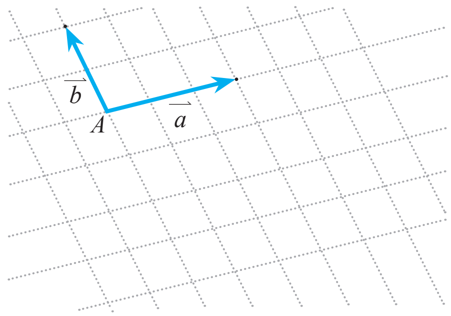


練習 9 在例題9中，若$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{BC}$ ，$\overrightarrow{BA}=n\overrightarrow{BC}$ 。試求m、n之值。

答：

例題10

右圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形。試以 A 點為始點畫出 $\dfrac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}$。



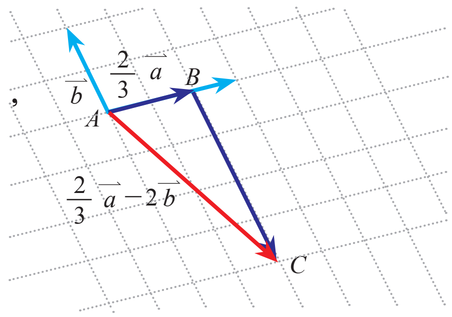
解 $\dfrac{2}{3}\vec{a}$ 是方向與 $\vec{a}$ 相同且長度為 $\vec{a}$ 長度的$\dfrac{2}{3}$ 倍的向量，

作$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ 。

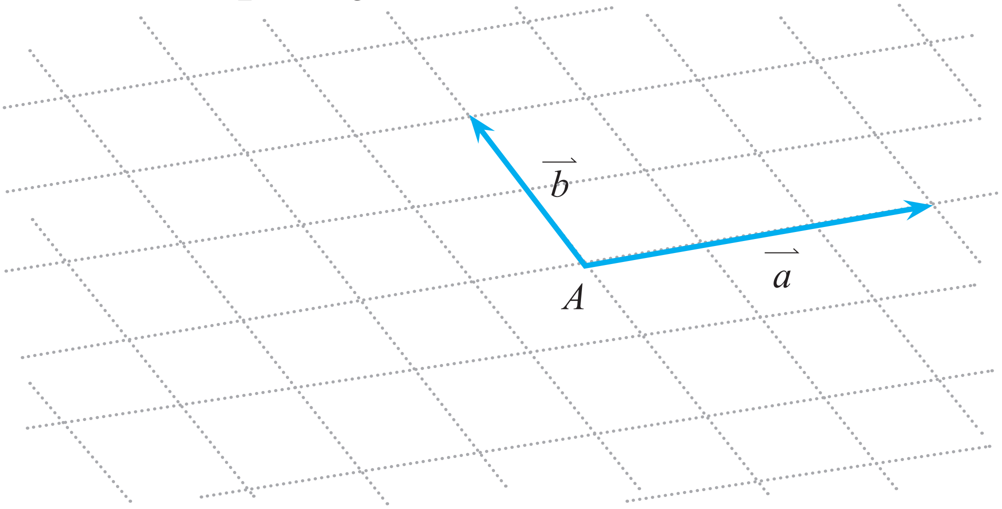
$-2\vec{b}$是方向與 $\vec{b}$ 相反且長度為 $\vec{b}$ 長度的2倍的向量，

作$\overrightarrow{BC}=-2\vec{b}$。

因此 $\dfrac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 。



練習10 下圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形。試以A點為始點畫出$\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{4}{3}\overrightarrow{a}$。



向量實數積的基本性質

設r, s為實數，$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$為二任意向量，則：

(1) $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$　(2) $(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$　(3) $r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$

說明：設$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，則$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+a_2, b_1+b_2)$

(1) $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r(a_1+a_2, b_1+b_2)=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2)$

$r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}=r(a_1, a_2)+r(b_1, b_2)=(ra_1, ra_2)+(rb_1, rb_2)$

$=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2)$

故$r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$

(2) $(r+s)\overrightarrow{a}=(r+s)(a_1, a_2)=((r+s)a_1, (r+s)a_2)=(ra_1+sa_1, ra_2+sa_2)$

$r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}=r(a_1, a_2)+s(a_1, a_2)=(ra_1, ra_2)+(sa_1, sa_2)$

$=(ra_1+sa_1, ra_2+sa_2)$

故$(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$

(3) $r(s\overrightarrow{a})=r(s(a_1, a_2))=r(sa_1, sa_2)=(rsa_1, rsa_2)$

$(rs)\overrightarrow{a}=(rs)(a_1, a_2)=(rsa_1, rsa_2)$

故$r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$

例題10

設 $\vec{a}=(-1, 2)$，$\vec{b}=(4, 3)$試求$|3\vec{a}+2\vec{b}|$之值。

解 $3\vec{a}+2\vec{b}=3(-1, 2)+2(4, 3)=(-3, 6)+(8, 6)=(5, 12)$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|(5, 12)|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

練習11 設 $\vec{a}=(\frac{1}{2}, -3)$，$\vec{b}=(-1, -\frac{2}{3})$，試求$|4\vec{a}-3\vec{b}|$之值。

答：

習　題

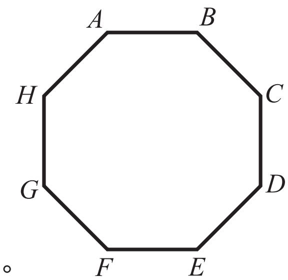
1. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ 之終點 $B(-2,4)$，求起點 A 的坐標。

2. 設 $A(2,1)$，$B(-3,2)$，與 $C(-1,3)$ 為坐標平面上的三點。
   (1) 求向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$　　(2) 已知 $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點的坐標。

3. 已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(2x+1,-9)$，$\overrightarrow{b}=(-3,1-5y)$ 相等，試求 x，y。

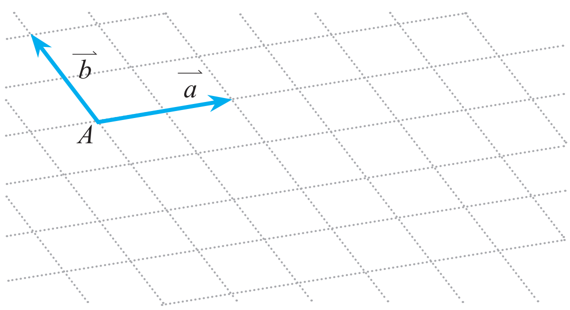
4. 已知 $A(2,2)$，$B(3,1)$，$C(4,-2)$，$D(-1,-3)$，$O(0,0)$ 為坐標平面上五點，且 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$，求 P 的坐標。

5. 試問右圖正八邊形的邊可以決定多少個不相等的向量？



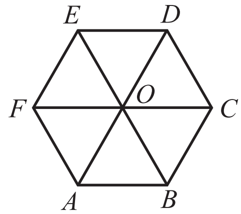
6. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(3,-2)$，$\overrightarrow{b}=(1,3)$ 及 $\overrightarrow{c}=(-2,-1)$
   在下面的方格紙中，請定出原點、x 軸與 y 軸。
   (1) 在坐標平面上，以原點當始點，畫出向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$。
   (2) 求 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 及其長度。 (3) 求 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}$ 及其長度。

7. 下圖中的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是菱形，試以 A 點為始點畫出 $\dfrac{7}{2}\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$。



8. 若$|\overrightarrow{a}|=10$，向量$\overrightarrow{a}$的方向角為$\dfrac{3}{4}\pi$，試將向量$\overrightarrow{a}$以坐標表示法表示。

9. 在右圖中，正六邊形 $ABCDEF$ 邊長為 2，對角線交於 O，試將向量$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AC}$以坐標表示法表示。



習題解答

1. $A(1, 6)$

2. (1)$\overrightarrow{AC}=(-3, 2)$，$\overrightarrow{BC}=(2, 1)$　(2)$D(4, 2)$

3. $x=-2$, $y=2$

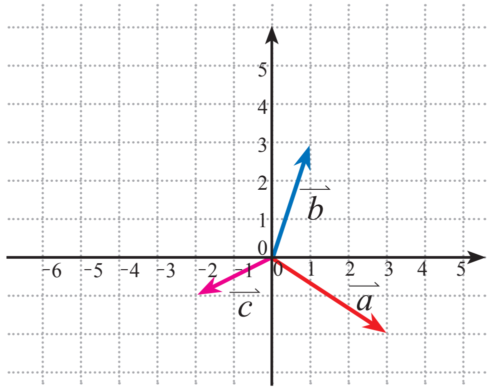
4. $P=(-9, -3)$

5. 8個

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$ 以及它們的相反向量

6. (1)如右圖(一)　(2)$(1, -8)$，$\sqrt{65}$

(3)$(-2, -7)$，$\sqrt{53}$



圖(一)

7. 如右圖(二)

8. $\overrightarrow{a}=(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

9. 設 A 為原點$\overrightarrow{AB}$與 x 軸正向重合，

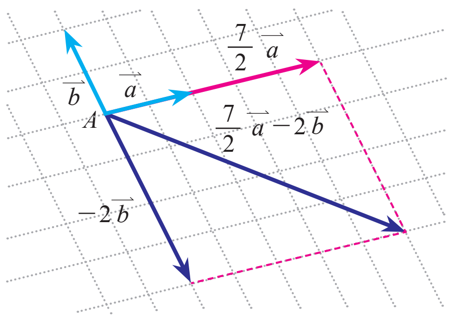
$\overrightarrow{AB}=(2, 0)$，$\overrightarrow{AO}=(2cos60^\circ, 2sin60^\circ)=(1, \sqrt{3})$

$\overrightarrow{AF}=(2cos120^\circ, 2sin120^\circ)=(-1, \sqrt{3})$

$\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{3}cos90^\circ, 2\sqrt{3}sin90^\circ)=(0, 2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AD}=(4cos60^\circ, 4sin60^\circ)=(2, 2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}=(1, \sqrt{3})+(2, 0)=(3, \sqrt{3})$



圖(二)

素養導向數學教材　/　單維彰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

發 行 人：許添明
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組
召 集 人：單維彰
副召集人：鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳姈蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）
作　　者：高健維、馬雅筠（依姓氏筆畫順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過