平面上的線性變換與二階方陣

壹 平面上的線性變換（*linear transformation*）

一 變換矩陣

二 線性組合觀點看線性變換

貳 平面上特殊的線性變換

一 伸縮變換

二 旋轉變換

三 鏡射變換

四 推移變換

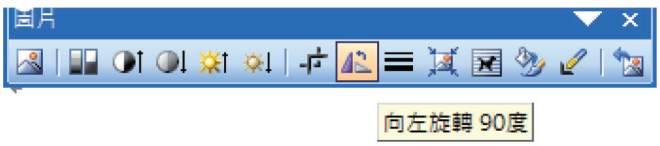
叁 線性變換的面積比

前言

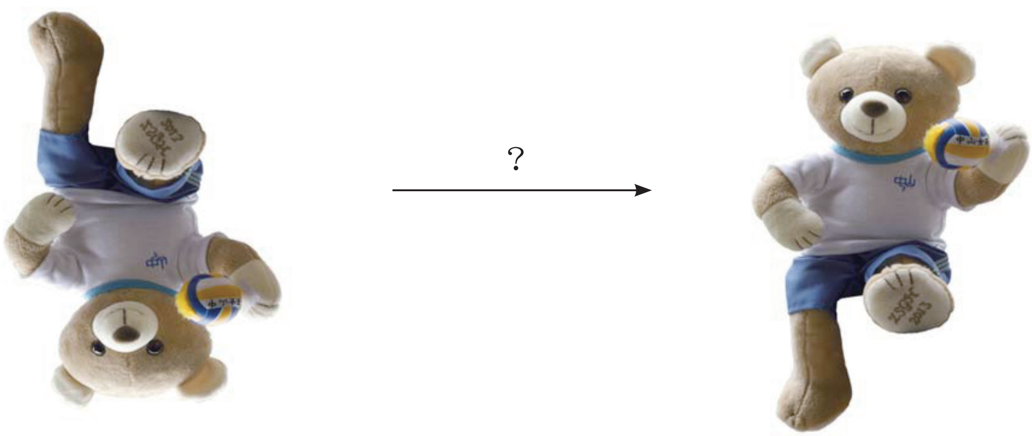
購買電視或數位相機時，最常提到「畫素」(*pixel* 亦稱為「像素」、「像點」)，此名詞的意思是這個裝置會把取得的影像，以格狀來儲存，每一格為一個畫素，影像的長與寬被切成許多格，那麼每一個影像便是一個矩陣，矩陣中的每一個元素就是每一格子儲存的資料。因此，畫素愈高矩陣愈大，影像呈現得更清楚，不過代價便是影像所使用的記憶空間增大，處理時所需的時間也會增加。

在處理影像的時候，這個矩陣的每一個元素儲存了這一個格子影像的顏色與透明度。當顯示靜態畫面時，只要在矩陣上打上各位置所對應的顏色數值，即可呈現所需圖案；但若要展現動態畫面時，便須逐次變換圖案的位置、角度與大小，這就牽涉到平面變換的概念，基本的平面變換有平移、旋轉、伸縮、鏡射與推移，如何使用矩陣的運算，來使影像旋轉、平移、縮放、鏡射 … 等，此處因平移概念較為簡單，所以我們介紹其餘四種變換。

如下圖，當我們收到了這一張照片，你是不是會使用工具列來將圖修正呢？



這背後的數學原理為何呢？讓我們來展開這段數學學習之旅囉！



壹　平面上的線性變換（linear transformation）

1 變換矩陣

在之前的單元，我們學習了矩陣的乘法，現在我們要專門來討論二階方陣的一個特別作用。

活動 1

請利用矩陣乘法性質計算下列各值：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=$ ______　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=$ ______

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=$ ______　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}=$ ______

【討論1】

對於這個矩陣乘法，我們可以有幾何意義的解釋嗎？

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 在坐標平面上代表什麼？

(2) $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ 在坐標平面上可以代表什麼？

(3)猜一猜 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的意義可能是什麼？

如 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P'=\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$，$Q'=\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$，$R'=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$，

則 $AP=P'$，$AQ=Q'$，$AR=R'$，

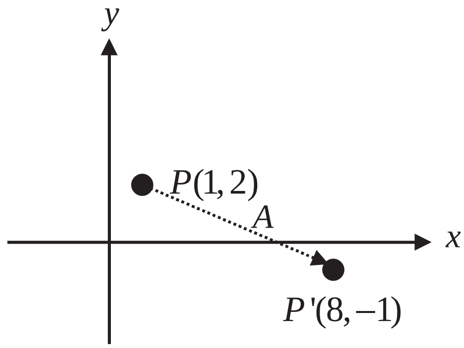
對於這個矩陣乘法，我們可以視為 $P\xrightarrow{A}P'$，$Q\xrightarrow{A}Q'$，$R\xrightarrow{A}R'$，

也就是說，將矩陣 A 視為一個函數，型如：$x\xrightarrow{f}f(x)$，

只是這裡需看成是：

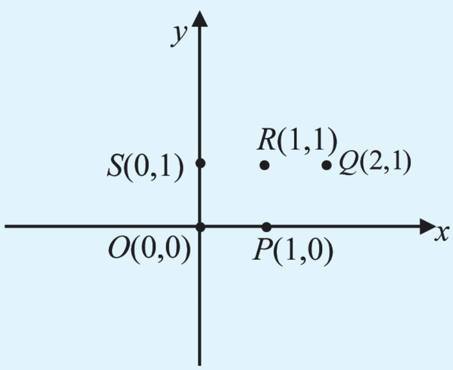
將點(1，2)透過矩陣 A 轉換得到點(8，−1)；點(0，3)透過矩陣 A 轉換得到點(9，−3)；點(−2，1)透過矩陣 A 轉換得到點(−1，−3)，所以我們將平面上的點(x, y)寫成 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的形式，則上式就可以解釋成矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 作用在點 $P(1, 2)$上，得到點 $P'(8, -1)$，亦即矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 可視為將點 $P(1, 2)$變換為點 $P'(8, -1)$的一個動作，如右圖所示。

用這個觀點來看，**矩陣** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **即代表一個平面上點與點之間的一個變換規則**(簡稱為**變換**)。

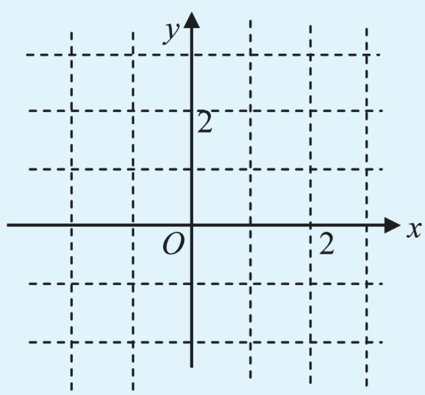


活動 2

圖一中有五個點，分別為點 O（0，0）、點 P（1，0）、點 Q（2，1）、點 R（1，1）、點 S（0，1），矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，請試在圖二中描繪出 O、P、Q、R、S 經矩陣 A 變換後的五個點 O'、P'、Q'、R'、S' 分別所對應的位置。



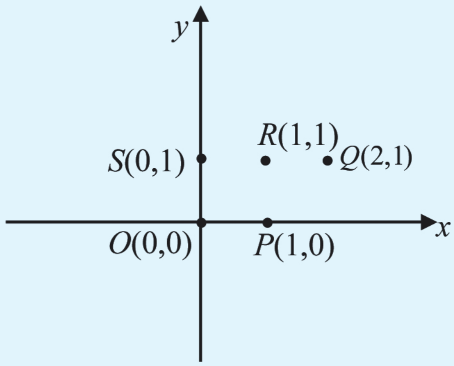
圖一



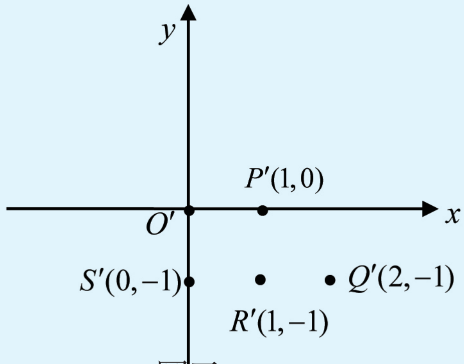
圖二

活動 3 分組討論

1. 若矩陣 B 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖三的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 B，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？

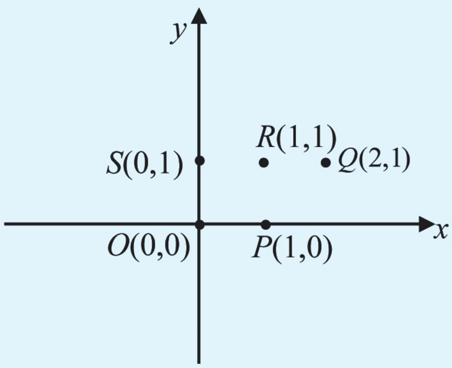


圖一

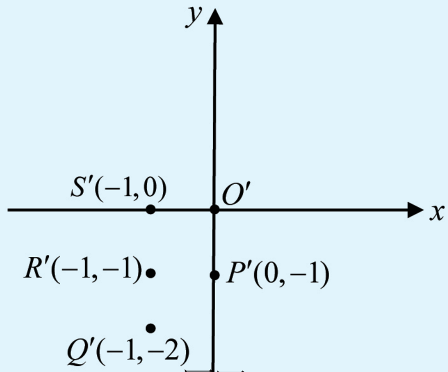


圖三

2. 若矩陣 C 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖四的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 C，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？

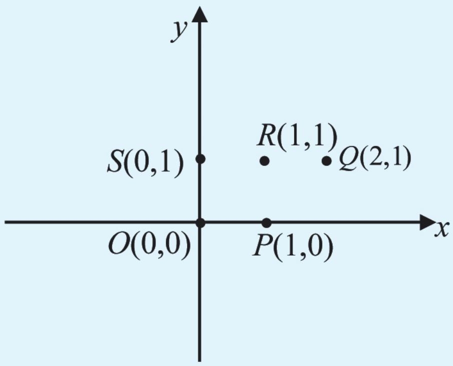


圖一

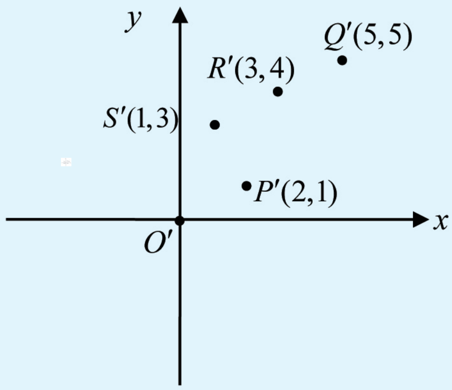


圖四

3. 若矩陣 D 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖五的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 D，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？



圖一



圖五

【討論 2】

1. 觀察活動三的三個變換前後的圖形，有沒有哪一個點是不動點？
2. 已知一個圖形經由某個矩陣變換後得到另一個圖形，如何從原始圖形坐標和變換後的圖形坐標來求出此變換矩陣呢？我們要代入圖形中所有的點嗎？一個點夠嗎？
3. 你認為知道原圖形通過哪些點坐標及其變換後的點坐標，就可以更有效率的求出變換矩陣？

活動 4

1. 請找出點 O（0，0）、（1，0）與（0，1）經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後的點坐標分別為何？

2. 向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後分別為何？

任務 1

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，

請問上述矩陣所代表的變換，各將點（1，0）與（0，1）變換為哪兩點？

任務 2

1. 如果一個變換矩陣 A 使得 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，

   則變換矩陣 A 為何？

2. $A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ 的結果為______________。

任務 3

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$，

(1)求點 $O(0,0)$ 經過 A 作變換後所對應的點 O' 的坐標為______________。

(2)求點 $P(4,1)$ 經過 A 作變換後所對應的點 P' 的坐標為______________。

(3)求 $\overrightarrow{OP}=(4,1)$ 經過 A 作變換後所對應的向量 $\overrightarrow{O'P'}$ 為______________。

任務 4

設平面上的一線性變換 A 使得 $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 8 \\ -38 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}$，

試求矩陣 A 。

2 線性組合觀點看線性變換

活動 5

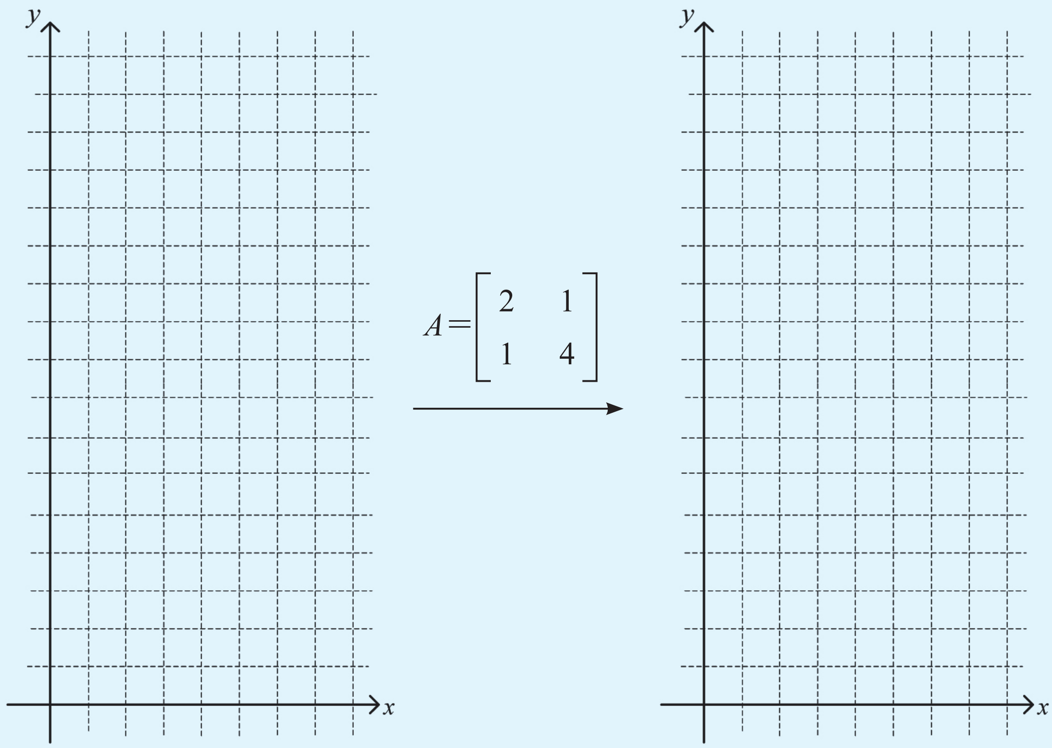
若變換矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，又

$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\xrightarrow{A}\overrightarrow{u}=(2,1)$；

$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{j}=(0,1)\xrightarrow{A}\overrightarrow{v}=(1,4)$；

$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 14\end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{p}=(2,3)\xrightarrow{A}\overrightarrow{k}=(7,14)$。

(1)請在下方左邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{p}$，並於下方右邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{k}$ 上述六個向量所對應的位置。（以原點為向量的起點）

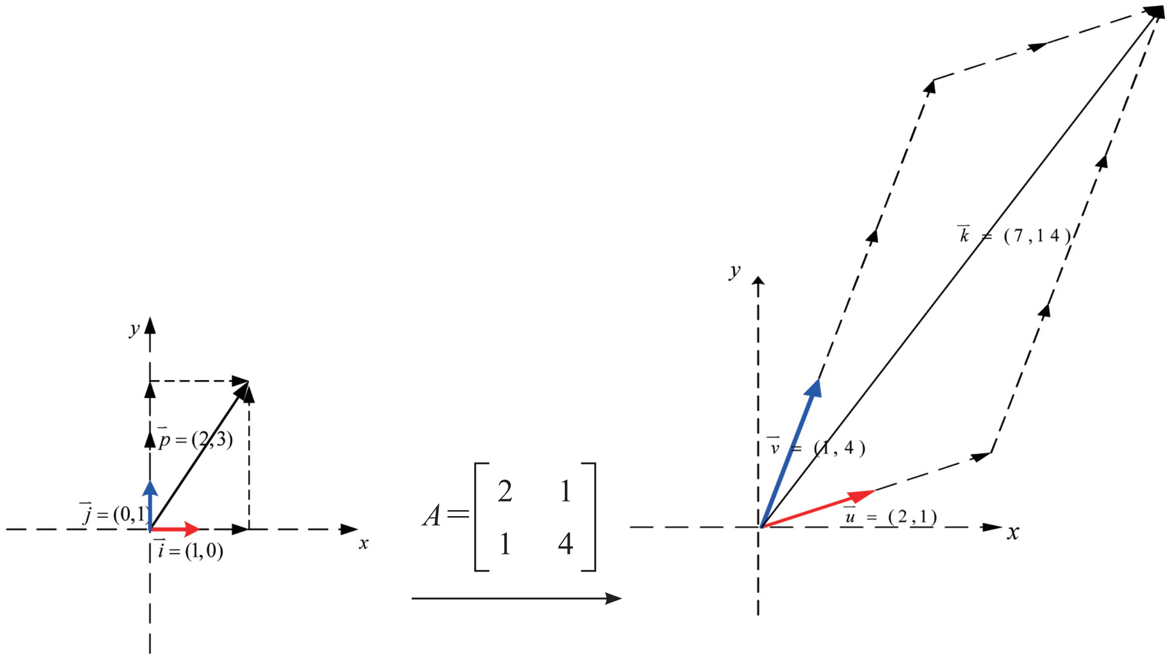


⑵利用矩陣運算規則，可得運算式如下：

請利用圖形解釋下列算式所代表的意義。

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\left(2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix}$$



圖六　　　　　　　　　　　　圖七

現在我們以向量觀點來看點的變換，如點（2，3）視為向量 $\overrightarrow{p}$ =（2，3），因為平面上任何向量皆可以二個不平行的非零向量作線性組合，所以

$\overrightarrow{p}$ =（2，3）＝2（1，0）＋3（0，1）＝2 $\overrightarrow{i}$ ＋3 $\overrightarrow{j}$ ，如圖六，

$\overrightarrow{k}$ =（7，14）＝2（2，1）＋3（1，4）＝2 $\overrightarrow{u}$ ＋3 $\overrightarrow{v}$ 仍保有線性組合概念，如圖七。

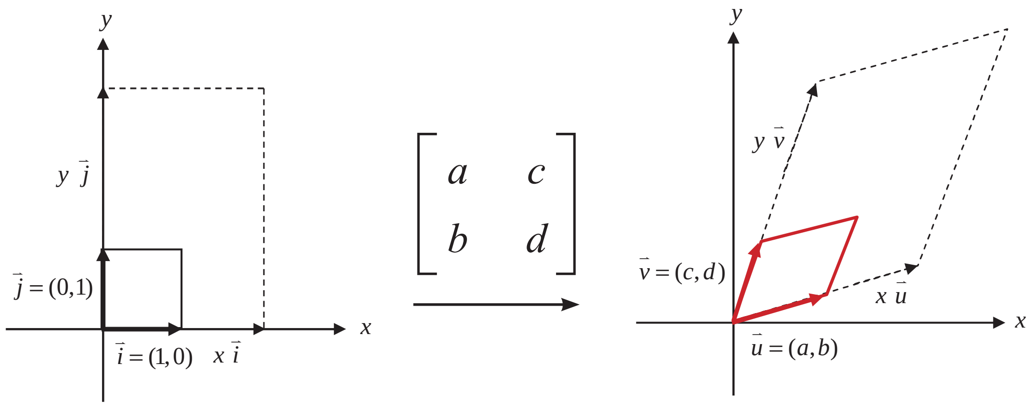
因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A。

向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換後的結果，

向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換後的結果。

因為 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=x(\overrightarrow{u})+y(\overrightarrow{v})=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，

由矩陣的係數積與分配律性質，可得 $A(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=x(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ 為一線性組合，故矩陣 A 被稱為**線性變換**。也就是說，A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 為基底的向量空間（斜角坐標系），向量 (x,y) 被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，如下圖八。



圖八

只要能求得 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(c,d)$，

這個變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 就能得知。

【討論 3】

觀察圖八中，由 $\overrightarrow{i}=(1\ ,\ 0)$和 $\overrightarrow{j}=(0\ ,\ 1)$張成的平行四邊形面積 A_1 與由向量 $\overrightarrow{u}=(a, b)$和 $\overrightarrow{v}=(c, d)$張成的平行四邊形面積 A_2，二者面積有何關係？

【討論 4】

已知「點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量」，那麼直線經過矩陣變換亦為直線嗎？並請說明原因。

觀察任務 4，可將之視為二點 $P(4,-2)$，$Q(3,-1)$經矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&2\\-7&5\end{bmatrix}$分別變換到二點 $P'(8,-38)$，$Q'(7,-26)$，又二點決定一直線，若將之視為直線 PQ 經矩陣 A 變換到直線 $P'Q'$，是否直線 PQ 上每一點皆可對應到直線 $P'Q'$ 上？我們做以下初步的檢驗：

先求出直線 PQ 方程式為 $x+y=2$，直線 $P'Q'$ 方程式為 $12x+y=58$，直線 PQ 上另一點 $R(5,-3)$，因為 $\begin{bmatrix}3&2\\-7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-50\end{bmatrix}$，所以點 $R(5,-3)$對應到點 $R'(9,-50)$，點 R' 在直線 $P'Q'$ 上。

直線可由點及方向向量組成，又點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量，所以我們將直線 L 以參數式 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$，$t\in R$ 表示，$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 即 L 上任一點(x,y)可表示為 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，變換矩陣為 A。

因為 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A(\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix})=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+tA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$，

其中 $\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，所以矩陣 A 把直線 L 變換成一直線 L'。

任務 5

設 A 是平面上的線性變換，$A=\begin{bmatrix}3&-1\\0&-2\end{bmatrix}$，直線 $L：2x+y-4=0$，求直線 L 經矩陣 A 變換後的直線方程式。(請寫出二種以上的解法)。

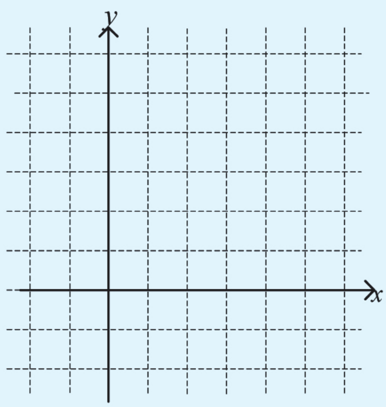
貳　平面上特殊的線性變換

這裡我們要介紹平面上常見的四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移，又因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，又 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+y\left(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A，所以在這裡我們將尋找 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經由四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移而變換到新向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 與 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，進而找到變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

1 伸縮變換

活動 6

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿水平向伸縮 r 倍 $(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍 $(s>0)$ 的向量為何？



坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x,y)$ 沿水平向伸縮 r 倍 $(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍 $(s>0)$，得點 $P'(x',y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ 為伸縮變換矩陣。

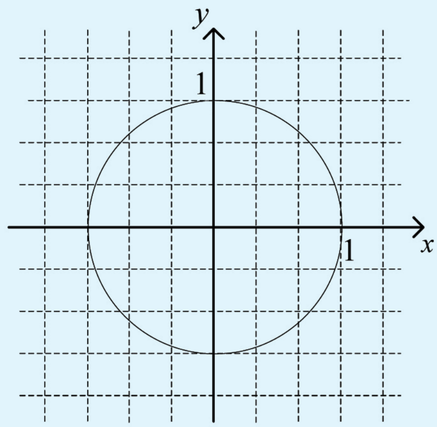
$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}}$

2 旋轉變換

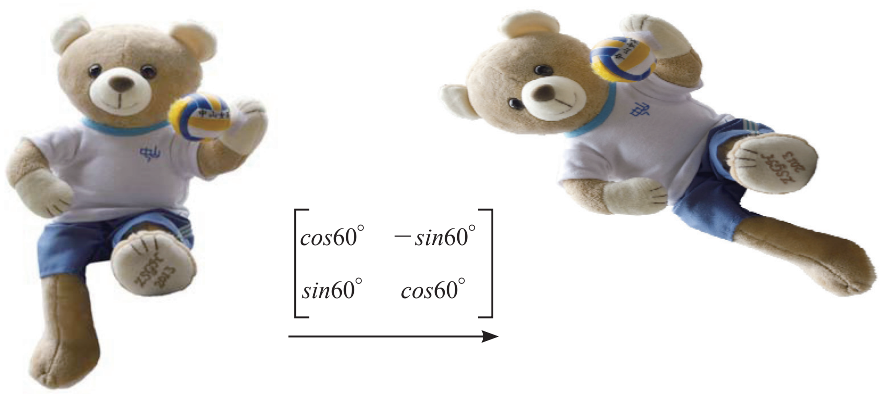
我們介紹以**原點為中心**旋轉 θ 角的變換（θ 大於 0 時，表逆時鐘方向旋轉；θ 小於 0 時，表順時鐘方向旋轉）。

活動 7

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 旋轉 θ 角後的向量為何？



坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

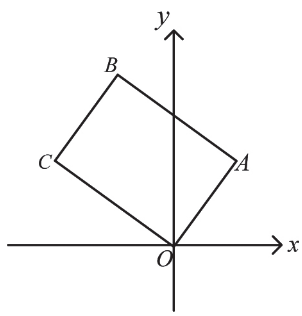


任務 6

設△OAB 為正三角形且 $O(0, 0)$，$A(4, 2)$，求 B 點的坐標。

任務 7

如圖所示，$OABC$ 為一矩形，已知 $\overline{OP}=\sqrt{3}\,\overline{OA}$，且 A 點坐標為$(3, 4)$，試求 B 點的坐標。



3 鏡射變換

需討論以那一條直線為對稱軸的鏡射變換。

⑴對 x 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,-1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。

⑵對 y 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(-1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

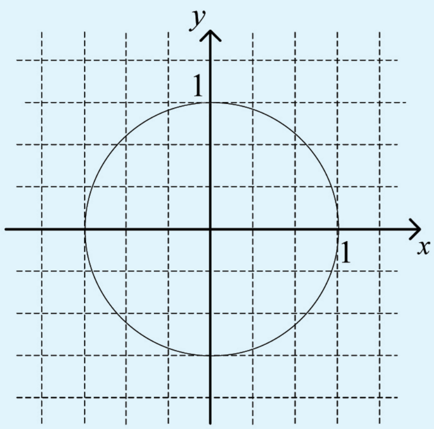
⑶對直線 $x=y$ 作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(0,1)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(1,0)$，

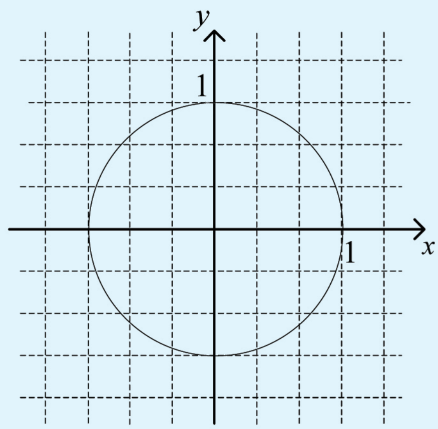
所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

若對稱軸為一般直線呢？其對稱直線為 $y=mx=(\tan\theta)x$，請看：

活動 8

直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾 θ 角的直線，其方程式為 $y=mx=(\tan\theta)x$，求 $\overrightarrow{i}=(1,0)$與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$對直線 L 做鏡射所得向量分別為何？

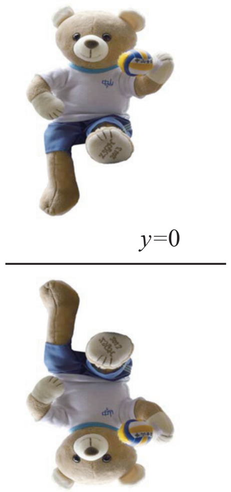


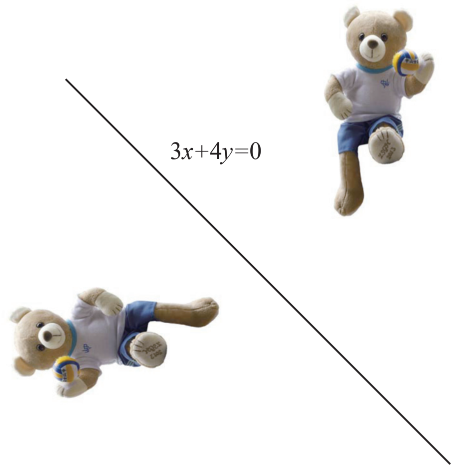


坐標平面上，L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線（$y=mx=(\tan\theta)x$），

若點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$，則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{\quad}&\underline{\quad}\\\underline{\quad}&\underline{\quad}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，

並稱矩陣 $\begin{bmatrix}\underline{\quad}&\underline{\quad}\\\underline{\quad}&\underline{\quad}\end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。



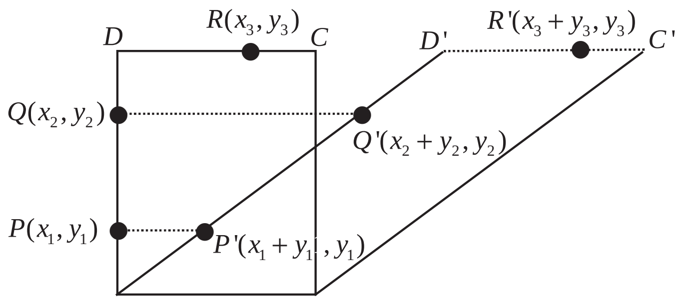


任務 8

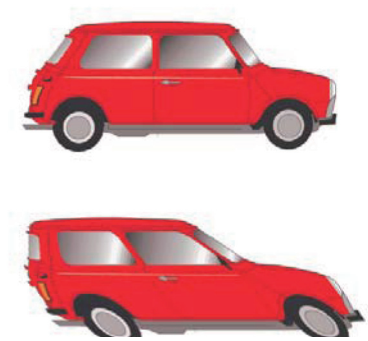
1. 設矩陣 A 表示以直線 $L：x+y=0$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A。
2. 設矩陣 A 表示以直線 $L：y=2x$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A，並求點 $P(-2,1)$ 在矩陣 A 變換下的點 P' 為何？

4 推移變換

如圖九，已知 $ABCD$ 為一矩形，將矩形下底 $\overline{AB}$ 固定不動，上底 $\overline{CD}$ 向右平行移動（假設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 是具有伸縮彈性的線）得平行四邊形 $ABC'D'$，這就是推移的概念。數學語言為將圖形沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 1 倍，所以點的位置愈高，被推移的距離愈大，產生傾斜的效果。



圖九



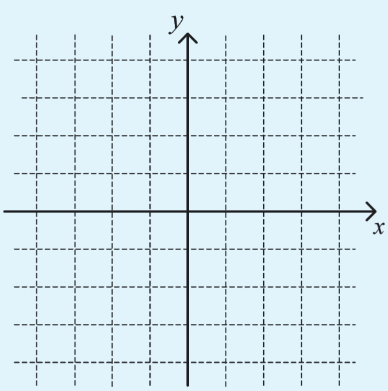
推移

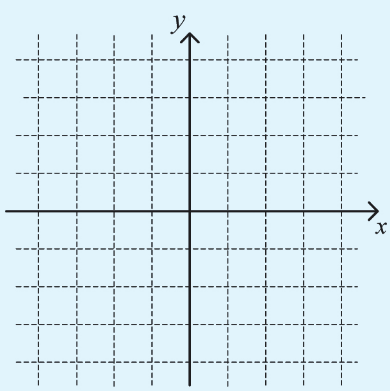
活動 9

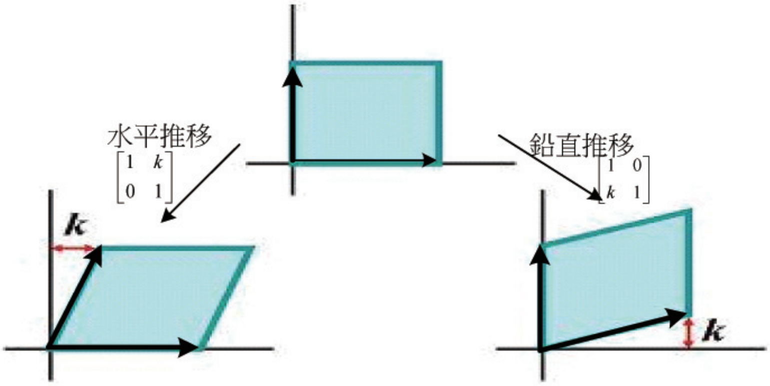
實數 $k>0$，請找出坐標平面上：

(1)將 $\overrightarrow{i}=(1, 0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0, 1)$ 沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 k 倍，其向量為何？

(2)將 $\overrightarrow{i}=(1, 0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0, 1)$ 沿 y 軸方向鉛直推移 x 坐標的 k 倍，其向量為何？







坐標平面上，

(1)若將點 $P(x,y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_\\\_\_ & \_\_\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_\\\_\_ & \_\_\end{bmatrix}$ 為水平推移矩陣。

(2)若將點 $P(x,y)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

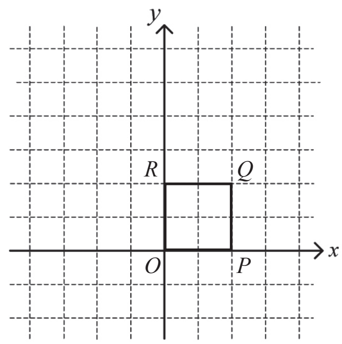
則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_\\\_\_ & \_\_\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_\\\_\_ & \_\_\end{bmatrix}$ 為鉛直推移矩陣。

$\xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 1.3\\0 & 1\end{bmatrix}}$

$\xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\\1.2 & 1\end{bmatrix}}$

任務 9

設坐標平面上一正方形 $OPQR$，其中 $O(0,0)$，$P(2,0)$，$Q(2,2)$，$R(0,2)$，試作此正方形 $OPQR$ 對 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 作推移變換所得之新圖形。



任務 10

請寫出二階方陣表示的平面變換為：先對直線 $x=y$ 作鏡射，再鉛直推移 2 倍，再水平方向伸縮 3 倍，最後對 y 軸作鏡射。

參　線性變換的面積比

線性變換 A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$為基底的向量空間（斜角坐標系），向量(x,y)被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$。由活動 5 知，由基底向量所張成的二平行四邊形面積比為 $1:|\det A|$，若是任意二向量張成的平行四邊形與經由線性變換矩陣後所得的二向量張成的平行四邊形，二者面積比是否仍然為 $1:|\det A|$？

令 $\overline{OP}=(x_1,y_1)$，$\overline{OQ}=(x_2,y_2)$為平面上二點，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$為平面上的線性變換矩陣，$A$ 分別將 $\overline{OP}$、$\overline{OQ}$ 變換到 $\overline{OP'}=(x'_1,y'_1)$，$\overline{OQ'}=(x'_2,y'_2)$，

則 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$，

$\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$，

變換後，$\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix}\right| &= \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1+dy_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2+dy_2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & dy_1 \\ ax_2+cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} ax_1 & bx_1 \\ ax_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & dy_1 \\ cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|ad\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|(ad-bc)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= |\det A|\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|。
\end{aligned}
$$

坐標平面上，在矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，$\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積的 $|det\ A|$ 倍。同理，$\triangle ABC$ 經矩陣 A 的線性變換後形成 $\triangle A'B'C'$，其面積關係為 $\triangle A'B'C'$ 面積＝ $\triangle ABC$ 面積 $\times |det\ A|$。

任務 11

已知 $A(0,0)$，$B(-2,4)$，$C(5,3)$，$\triangle ABC$ 經過矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 推移變換後成 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 之面積為何？

活動 10

請討論 $\triangle ABC$ 經由四種基本變換：伸縮、旋轉、鏡射、推移對應到 $\triangle A'B'C'$，其變換後面積的變化為何？

課後練習

1. 令 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ 將點（1，0）變換至（1，-1），將點（0，1）變換至（-2，1），試求 A。此線性變換 A 將點 P（-1，1）變換到哪裡？

2. 設 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$，試求一點 P 經過 A 的變換後的像為 Q（1，-7）。

3. 試求一矩陣 A，使 A 的變換將 P（2，3）變為 Q（10，6），將 P'（-1，2）變為 Q'（9，4）。

4. 直線 L：$3x+y=5$ 被 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換變換到直線 L'，試求直線 L' 的方程式。

5. 試描述下列各線性變換的作用。

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

6. 設 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，若平面上兩點 $P(2,1)$，$Q(3,5)$ 在 A 的變換下對應到 P' 和 Q' 兩點，試求 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 決定的平行四邊形面積。

7. 設直線 L 的方程式為 $y=3x$，二階方陣 A 所對應的線性變換是對直線 L 的鏡射。

(1)試求二階方陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$對於直線 L 的對稱點 Q 的坐標為何？

再求點 Q 對於直線 L 的對稱點為何？

8. (1)請寫出旋轉 60° 的旋轉矩陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$ 經過旋轉 60° 的點 Q 坐標為何？
再求點 Q 旋轉 60° 的 R 點為何？

任務參考解答

1. A：$(1,0)$ 與 $(0,-1)$；B：$(3,0)$ 與 $(2,-1)$；C：$(4,2)$ 與 $(-1,3)$

2. $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}17\\ 3\end{bmatrix}$

3. (1) $O'(0,0)$　(2) $P'(13,22)$　(3) $\overrightarrow{O'P'}=(13,22)$

4. $A=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -38 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}8 & 7\\ -38 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$

5. 法一：直線上找二點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找二點 $P(2,0)$，$Q(0,4)$，

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ -8\end{bmatrix}$，

由 $P'(6,0)$，$Q'(-4,-8)$ 可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$

法二：利用直線的方向向量與直線上一點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找一點 $P(2,0)$ 及直線方向向量為 $(1,-2)$

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$，

所以變換後的直線上有一點 $P'(6,0)$ 及方向向量 $(5,4)$，

可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

或直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\ y=-2t+4\end{cases}(t\in R)$，

因為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ -2t+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t & -4\\ -4t & +8\end{bmatrix}$，所以直線 L' 的參數式為 $\begin{cases}x=5t-4\\ y=-4t+8\end{cases}(t\in R)$，

故 L' 的方程式為 $4x-5y-24=0$。

法三：以新舊坐標變換

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\-\frac{1}{2}y'\end{bmatrix}$$

所以將 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\y=-\frac{1}{2}y'\end{cases}$ 代入 L：$2x+y-4=0$ 得

$$2(\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y')+(-\frac{1}{2}y')-4=0$$

整理可得 $4x'-5y'-24=0$，

所以變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

6. B 點坐標為 $(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$ 或 $(2+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+1)$

7. B 點坐標為 $(3-4\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+4)$

8. (1) $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$P'(2,-1)$

9. 略

10. $\begin{bmatrix}0 & -3\\1 & 2\end{bmatrix}$

11. 13

課後練習參考答案

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$(-3,2)$

2. $(-1,2)$

3. $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. $2x-3y-5=0$

5. (1)水平向伸縮 3 倍，鉛直向伸縮 4 倍
   (2) y 方向的推移變換
   (3) 旋轉-45°（順時針旋轉 45°）
   (4) 旋轉 30°（逆時針旋轉 30°）

6. 98

7. (1)$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $Q\left(-\frac{22}{5},\frac{4}{5}\right)$，$P(4,-2)$

8. (1)$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (3) $Q(2+\sqrt{3},2\sqrt{3}-1)$，$R(-2+\sqrt{3},2\sqrt{3}+1)$

深入閱讀

深入閱讀

1.《數學快遞-創刊號 數學與數位圖像》 中央大學 單維彰教授‧三民出版社
http://www.sanmin.com.tw/learning/science/highschool/math/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%BF%AB%E9%81%9E-%E5%89%B5%E5%88%8A%E8%99%9F.pdf

2.《高中 99 課綱》翰林版、全華版、三民版

3. *geogebra* 示範教學影片
https://www.youtube.com/watch?v=lUyJM-usbvo&list=PLXH05kw-i_5L7bKMjcmLxgTnWZjE3CUuV&index=4