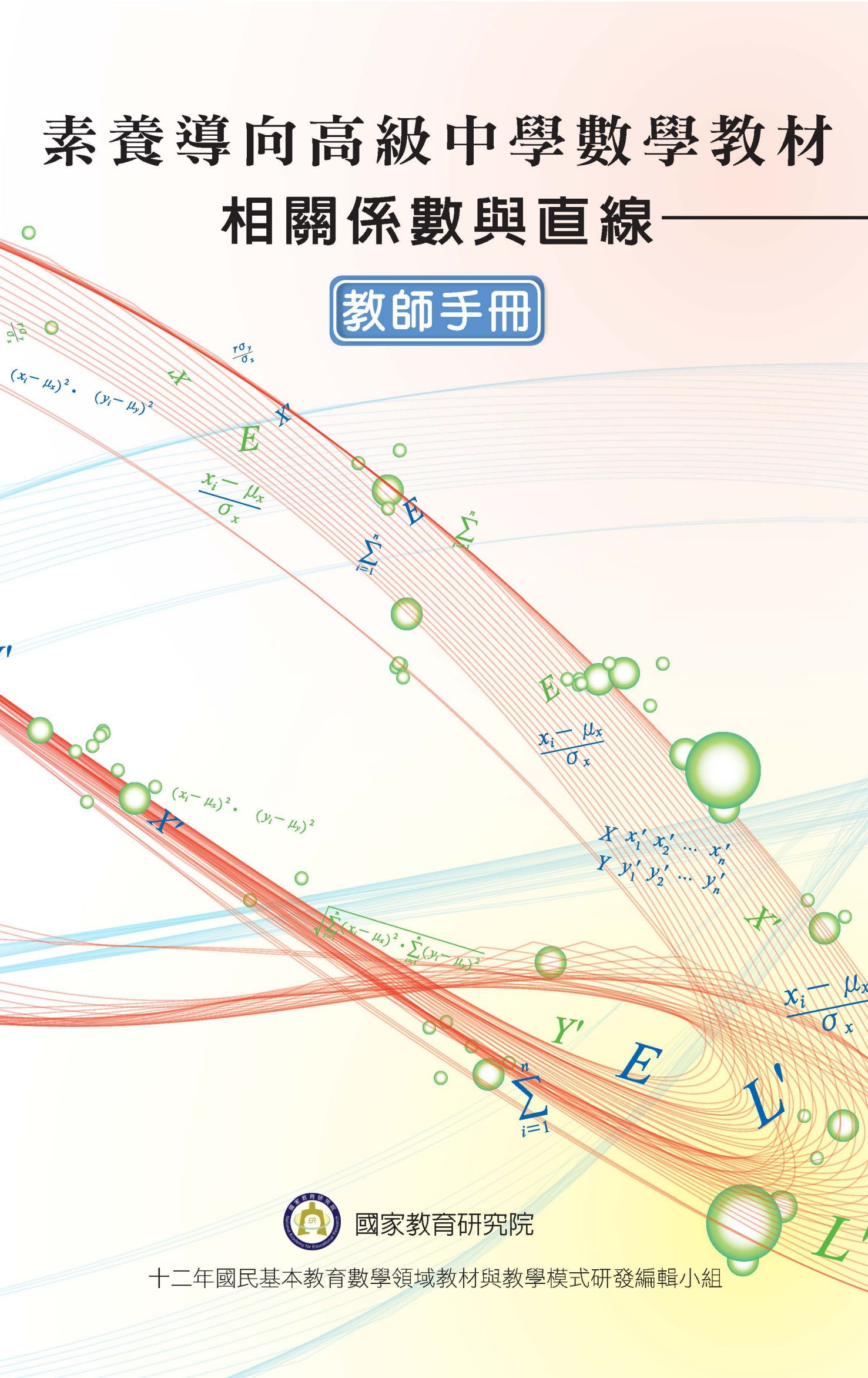
素養導向高級中學數學教材

相關係數與直線

教師手冊



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

最佳直線與相關係數

教師手冊

教材設計理念

1 教材架構

本教材企圖從歷史與生活的角度切入，透過一連串的活動發展概念與程序性的知識，活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論，除了活動、任務之外，編者設計了六個評量問題，希望學生可以透過實作的方式熟悉計算機的操作，並且深化教材中的概念。

2 教材設計想法

⑴第一單元編者選擇了介紹相關係數的歷史與相關性的生活應用，除了希望學生的學習可以更緊密連接相關的歷史與應用的脈絡之外，更希望能提升學生數學閱讀的能力。

⑵編者先從散布圖與直線相關性出發，用 *Excel* 畫出散布圖並且討論兩筆數據的直線相關程度，編者希望能引發學生思考為何需要發展相關係數衡量直線相關程度，因此設計例題讓學生發現光靠散布圖無法客觀判定直線相關性，引發其探討如何發展衡量直線相關性的統計量（相關係數）的動機。

⑶教材在相關係數的定義方式，有別於一般教科書的內容，編者以如何衡量直線相關性為出發點，設計例題讓學生討論如何選擇直線來代表數據的直線關係，討論的核心是各種誤差形式的優缺點。一般課程總是直接寫出最小平方法的誤差形式，課堂上再由老師解釋原因，不過編者希望誤差形式是透過學生的討論產生的，這樣更能夠深化最小平方法的概念。

⑷獲得最小平方法的誤差形式的共識之後，編者繼續設計例題用同學理解的方法（配方法）找出最佳直線，有鑑於學生程度的個別差異，學習單上把配方的過程顯示出來，希望學生可以先繞過繁瑣的代數計算，而直接根據配方結果找出最佳直線 $y=a+bx$。

⑸為了能夠簡化計算，編者將數據標準化並且找最佳直線，

誤差$=a^2+〔b-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')〕^2+1-〔\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')〕^2$

上述關係中，$a=0$，$b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'$ 時，誤差最小，這表示直線

$y=(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i')\,x$ 最能代表數據的直線關係，並且據此定義

相關係數 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'$，再將這個定義寫成原來數據的定義形式：

相關係數 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i'=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)\,(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$

教材這樣的安排是以衡量直線相關為核心，最佳直線的過程中自然定義出相關係數，編者認為這比一般教科書中總以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)\,(y_i-\mu_y)$ 的正負與相關性、有界性的理由來解釋相關係數的定義來得有說服力，又因為誤差的最小值為 $1-r^2$，因此很容易得知 $-1\leq r\leq 1$，可以避免介紹複雜的方法得到係數範圍的教學流程。

⑹編者將利用 *Excel* 畫散布圖、計算相關係數與最佳直線的程序都放在教材的附錄中，鼓勵學生利用電腦做計算，這樣的用意是希望學生學習的重心不全是用紙筆計算相關係數或最佳直線，更重要的是散布圖的解讀，了解相關係數與最佳直線的意義。

教學補充．搭配學生手冊 P2

壹 歷史與生活

1 歷史

法蘭西斯・高爾頓爵士 *Sir Francis Galton*
（西元1822～1911，英國人）

1884 年，英國人類學家高爾頓（*Sir Francis Galton*）在倫敦成立人體測量實驗室，收集了許多關於親子間的資料，包括身高、體重、特定骨頭的長度等。他發現「非常高的父母所生的孩子，往往會比父母矮些，而非常矮的父母所生的孩子，則往往比父母高」，他把這個現象稱作「迴歸至平均值（*regression to the mean*）」，這就是現在的統計上「迴歸（*regression*）」一詞的起源。

事實上，高爾頓是演化論之父達爾文（*Charles Darwin*）的表弟，高爾頓原本在劍橋讀醫學。1860 年時，高爾頓轉向氣象學的研究，在這段研究過程中，他對於統計方面的興趣與能力漸漸的浮現。1865 年起，高爾頓由於自己家族的經驗以及達爾文的影響，興趣轉向於人類種族的進化與遺傳學，並開始了研究統計上的問題。而他最為大家熟知的事蹟，便是首先發現了不同人、不同種族具有不同指紋。這讓人們知道世界上每個人的指紋都是獨一無二的，甚至有特定的方法可用來區分並辨識一個人的身分。

起初，為了瞭解遺傳的特性，高爾頓試圖從智力演化的方向去探討，卻礙於當時沒有一套完善測量智力的方法而遭遇到瓶頸。於是他想到一個能容易測量且公正的人類特徵「身高」，這才有了人體測量實驗室的成立。

高爾頓在達爾文的《物種原始》一書中提到他對於遺傳的看法：「這些新的觀念，激勵我去研究遺傳學和人類種族的進化。」此時，他需要一個好方法來描述這個世代的智力，與前一個世代的智力是「相關」的。高爾頓再嘗試尋找可供測量如此關係的數學方法後，他開始使用了相關係數（*correlation coefficient*）的概念。他使用字母「*r*」來表示相關係數，而這個傳統一直延續至今。現今的相關係數的公式是由高爾頓的學生皮爾森（*Karl Pearson*）所發展出來的。

（資料來源：國立臺灣大學「生物統計學程」*http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Figures.htm#gal*）

教學補充．搭配學生手冊 P3

[教學活動安排]

⑴老師導讀與解說歷史與生活部分，讓學生瞭解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。

摘自數學傳播十六卷三期民 81 年 9 月 *P*2，數學史在數學教育中的重要性，楊淑芬

⑵*Google* 新聞「相關係數」一詞，可發現它在經濟、科學、政治等生活應用的各種新聞不少，讓學生瞭解本單元的知識與生活上的關聯而且也是其他學科進行量化分析所需要用到的數學。

例如：

1. 財經新聞「中華民國 95年 1 月 21 日星期日臺股與美股步調愈趨緊密……經建會分析指出，西元 2003 年到 2006 年臺灣股市與美國股市**相關係數**達零點三六三八，雖不如英、美股市連動性，但已接近日、美股市零點四六一的**相關係數**；臺股開春後走勢將深受美股影響……」
2. 2012.05.30 02：20：16 鉅亨網新聞中心（來源：財匯資訊，摘自：每日經濟新聞）「近日，某媒體發表一篇題為《美元指數與滬深 300 指數間的奧秘》文章，對股票市場與美元指數之間的關係進行分析，其研究結果包括中國在內的大多數發展中國家的股價與美元指數呈現負相關關係，並且這樣的**負相關關係**是長期存在的。其中，美元與巴西聖保羅指數、印度孟買指數呈現**強負相關**，相關係數的絕對值都大於 0.8，而中國的滬深300 指數與美元指數之間同樣呈現強負相關，相關係數的絕對值為 0.6 左右。

[教學注意事項]

不要忽略歷史與生活部分而不教學。學習數學之目的不只在於訓練學生的思考能力，也要讓學生認識數學與生活的關係，及知道數學的來龍去脈，這些都有助於提高學生的學習興趣。

2 生活

在網路新聞上搜尋「相關係數」一詞，可發現它在經濟、科學、政治等生活應用的各種新聞不少，例如：

『生活幸福感是一個非常主觀的概念，在這一次的調查中，我們針對「生活幸福感」作出調查，同時透過和生活幸福感可能有關的 11 個面向分別進行電話訪問。調查結束之後，統計分析顯示，按照相關程度的高低，和生活幸福感最相關的面向分別為：未來發展樂觀度（相關係數為 0.545）、經濟收入（0.457）、工作情況（0.450）、家庭關係（0.362）、人際關係（0.319）、地方政府施政（0.291）、環境品質（0.276）、健康狀況（0.270）、政治權利（0.265）。至於治安狀況則不具有統計解釋力、宗教信仰相關係數偏低，這兩個面向因此只有表面上的參考價值，我們不再作深入的探討。』（2012/05/17　幸福指數的重要性 臺灣競爭力論壇彭錦鵬，臺灣競爭力論壇理事長）

甚至，我們會在財經新聞上聽到這樣的報導：「歷史經驗顯示，美國聯準會升息前，美元會有一波明顯上漲的走勢，而美國十年期公債與基準利率相關係數高達 0.92（呈高度正相關），且殖利率曲線走勢明顯快於聯邦基準利率，因此，可視這兩指標為美國何時升息的領先指標……。」（2015/07/31　從 7 月的利率會議聲明，來看 9 月美聯儲升息的機率！）

現在生活周遭中許多變數間關聯性的探討，與種種分析數據的方法，其實是源自於數百年來科學家們努力的成果。

教學補充．搭配學生手冊 P4

貳 直線相關

1 散布圖與相關

前言：

在日常生活中，我們也常常將兩個數據資料相提並論，例如：吸菸與肺癌、咖啡因與骨質疏鬆症、睡眠時數與肥胖程度、國民所得與壽命、產品的售價與需求量等等。

針對兩個數據資料之間可以討論以下三個問題：

⑴ 兩個數據資料間的關聯性為何？

⑵ 如何衡量兩數據資料直線相關的程度？

⑶ 如何找出最佳的直線來描述兩數據資料的關係並作預測？

教學補充．搭配學生手冊 P5

[教學活動安排]

⑴教師要引導學生觀察資料，必要時可以向學生提問，找出成績超過（低於）平均數的同學，物理成績也超過（低於）於平均數

⑵教師引導學生畫出 $x=67.55$，$y=61.15$ 兩直線，將散布圖分成四象限，並要學生觀察資料點是否大部分落在第一、三象限。

[教學注意事項]

⑴教師要提醒學生注意還是有些學生例如編號 3，7，11，19 號的學生，他的數學物理成績變化的趨勢與大部分的同學不同，而我們關心的問題是趨勢而非每個同學都要符合數學成績超過（低於）平均數的同學，物理成績都會超過（低於）平均數這樣的規則。

⑵必要時教師可以使用 *Excel* 或是其它可以畫散布圖的軟體輔助教學。

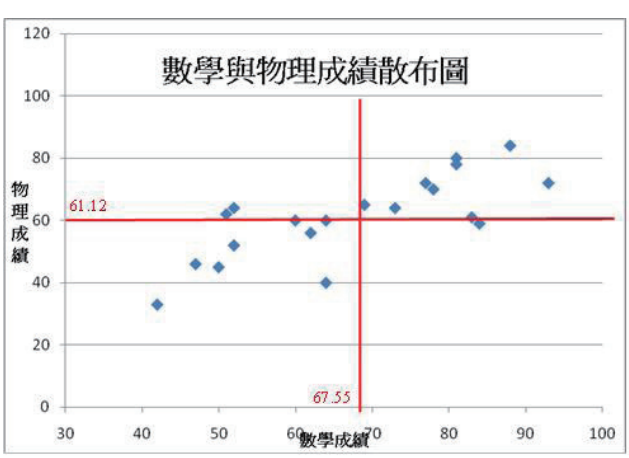
[活動解答]

觀察上面的資料， 編號 1，2，6，8，9，10，13，18 號同學的數學成績超過平均數，物理成績也超過於平均數。

編號 4，5，12，14，15，16，17，20 號同學的數學成績低於平均數，物理成績也低於於平均數。

因此大致而言，數學成績超過（低於）平均數的同學，物理成績都會超過（低於）平均數。

畫出 $x=67.55$，$y=61.15$ 兩直線，將散布圖分成四象限，資料點大部分落在第一、三象限。



活動 1

數學成績高的學生，物理成績通常也不會很低嗎？

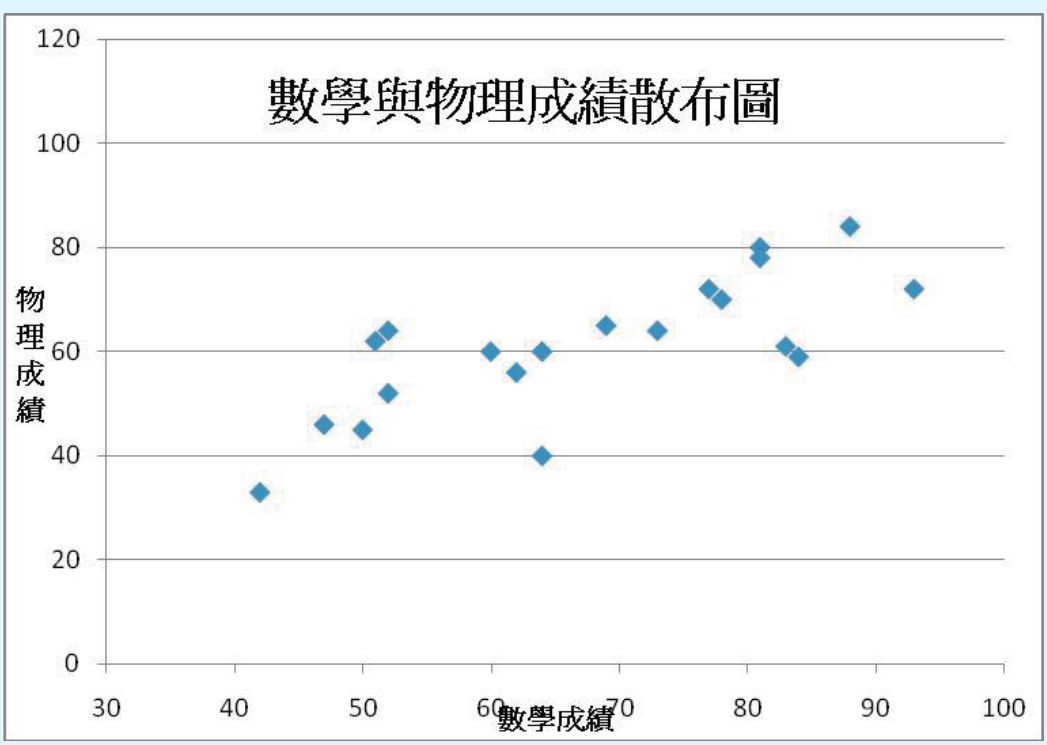
考慮某個社團中成員數學與物理的成績：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數學	93	88	83	42	50	81	52	69	73	78
物理	72	84	61	33	45	80	64	65	64	70

編號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
數學	84	52	77	64	62	64	60	81	51	47
物理	59	52	72	40	56	60	60	78	62	46

將兩個數據資料，以數對方式畫在坐標平面上，以表明它們的分布情形的圖形，如圖所示，稱為**散布圖**，散布圖上的點稱為**樣本點**。

觀察數學與物理的散布圖，經由計算數學與物理成績的平均數分別為67.55 與61.15 分，是否有數學成績超過（低於）平均數，而物理成績超過（低於）平均數的趨勢？



教學補充．搭配學生手冊 P6

[教學活動安排]

⑴教師要引導學生觀察資料，，必要時可以向學生提問，試著找出葡萄酒消耗量高於（低於）平均數的國家，他們人民心臟病死亡率低於（高於）平均數的國家。

⑵教師引導學生畫出 $x=3.49$，$y=186.2$ 兩直線，將散布圖分成四象限，並要學生觀察資料點是否大部分落在第二、四象限。

[教學注意事項]

⑴教師要提醒學生注意還是有些國家並不符合葡萄酒消耗量高於（低於）平均數的國家，他們人民心臟病死亡率低於（高於）平均數這樣的規則。

⑵必要時教師可以使用 *Excel* 或是其它可以畫散布圖的軟體輔助教學。

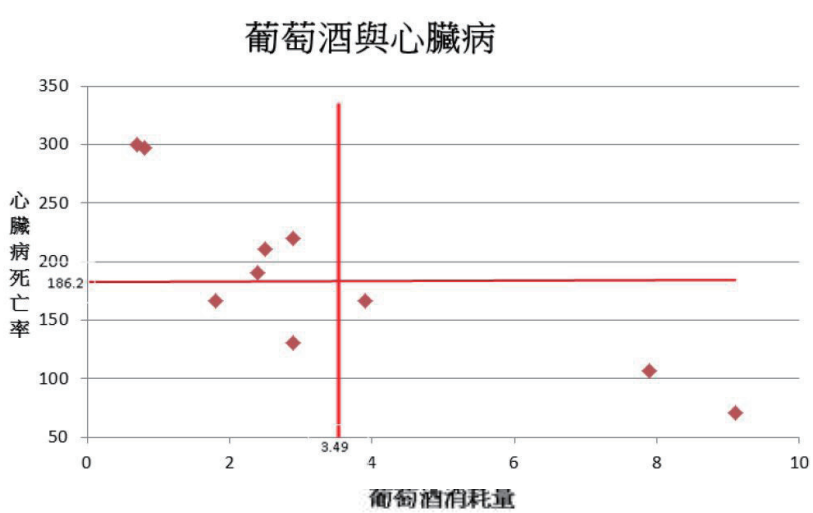
[活動解答]

觀察上面資料，畫出 $x=3.49$，$y=186.2$ 兩直線

奧地利、法國、義大利三個國家葡萄酒消耗量超過平均數的國家，心臟病死亡率低於平均數。

澳洲、加拿大、丹麥、芬蘭、愛爾蘭五個國家葡萄酒消耗量低於平均數的國家，心臟病死亡率高於平均數。

畫出 $x=3.49$，$y=186.2$ 兩直線，將散布圖分成四象限，資料點大部分落在第二、四象限。



活動 2

適量的飲用葡萄酒可以預防心臟病？

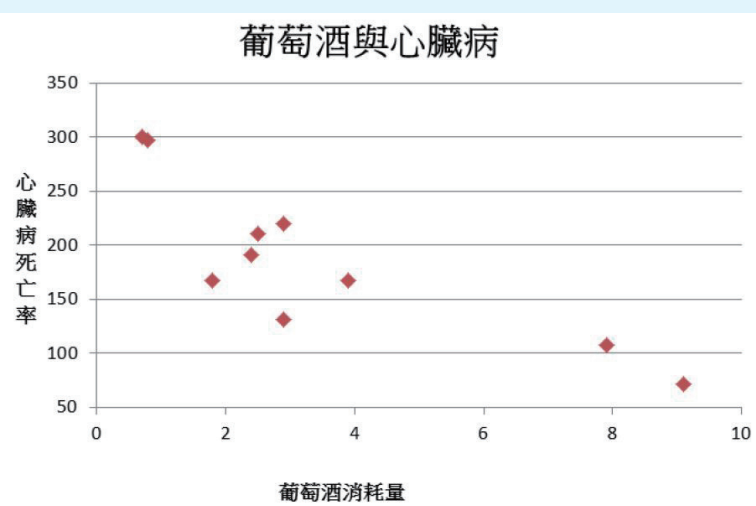
下表是 10 個已開發國家一年葡萄酒消耗量（平均每人從喝葡萄酒所攝取的酒精量）以及一年中因心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）。

國家	澳洲	奧地利	比利時／盧森堡	加拿大	丹麥
葡萄酒消耗量（公升）	2.5	3.9	2.9	2.4	2.9
心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）	211	167	131	191	220

國家	芬蘭	法國	荷蘭	愛爾蘭	義大利
葡萄酒消耗量（公升）	0.8	9.1	1.8	0.7	7.9
心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）	297	71	167	300	107

※ 資料來源出自《統計學的世界》*P*400（*David S.Moore*著，鄭惟厚譯，天下文化）

觀察上述資料的散布圖，經由計算葡萄酒消耗量、心臟病死亡率的平均數分別為 3.49 公升、186.2 人，是否有葡萄酒消耗量超過（低於）平均數的國家，他們人民心臟病死亡率低於（高於）平均數的趨勢？



教學補充．搭配學生手冊 P7

根據前面兩個問題，可以得到以下結論：

1. 散布圖（*scatter plot*）的意義：

蒐集了兩數據資料 X 與 Y：(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、……、(x_n, y_n)，將每一個數對 (x_i, y_i) 標示在坐標平面上，所得的圖形稱為**散布圖**，散布圖上的點稱為**樣本點**。

從散布圖中，我們可以觀察資料分布的整體型態與相關情形。

2. 正相關與負相關

從散布圖中觀察兩個數據資料 X 與 Y 之間的相關情形，當其中一個數據的值高於平均時，另一數據的值也傾向高於平均；而其中一個數據的值低於平均時，另一數據的值也傾向低於平均，則稱數據資料 X 與 Y 是**正相關（positively associated），此時樣本點大致上會從左下往右上傾斜**。如果其中一個數據的值高於平均時，另一數據的值傾向低於平均；而若其中一個數據的值低於平均時，另一數據的值傾向高於平均，則稱數據資料 X 與 Y 是**負相關（negatively associated），此時樣本點大致上會從左上往右下傾斜**。

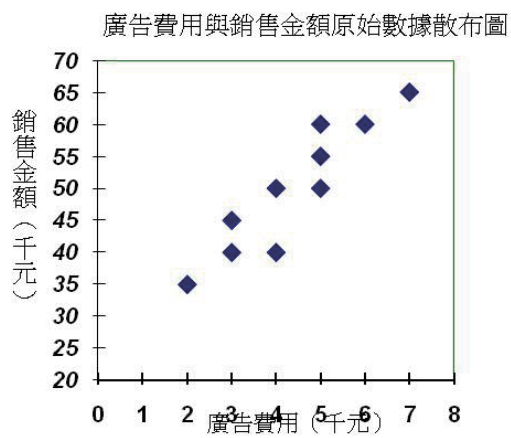
教學補充．搭配學生手冊 P8

任務 1 參考解答：

⑴正相關　⑵負相關

任務 2 參考解答：

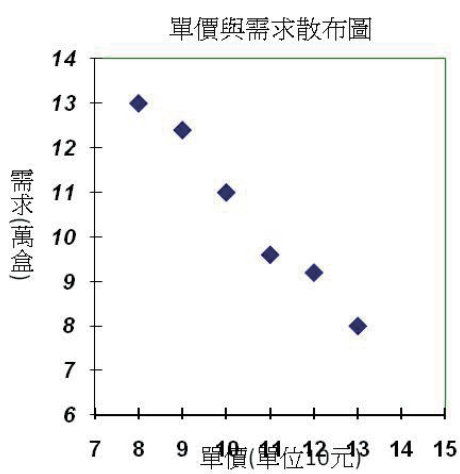
⑴散布圖如右：



⑵散布圖點的分佈接近一條直線，顯示很強的正向直線相關。這代表「廣告費用」與「銷售金額」變動趨勢大致相同，當「廣告費用」增加（減少）時，「銷售金額」也大致上增加（減少）。

任務 3 參考解答：

⑴散布圖如右：



⑵根據散布圖顯示很強的負向直線相關（負相關），「單價」與「需求」的變動趨勢大致相反，即此增彼減或 此減彼增。

任務 1

從散布圖判別正相關與負相關：

(1) 活動 1 中，請問兩筆資料是正相關或是負相關？

(2) 活動 2 中，請問兩筆資料是正相關或是負相關？

任務 2

某公司在過去數年擁有穩定的月銷售金額。今年該公司決定調整廣告費用以觀察是否對銷售金額有明顯影響，為了利於評估廣告對銷售金額的影響，該公司蒐集的資料數據如下表。其中每月廣告費用 x_i（單位：千元）與銷售金額 y_i（單位：千元）。

月分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
廣告費用 x_i（千元）	2	4	6	5	3	5	4	3	5	7
銷售金額 y_i（千元）	35	50	60	60	45	55	40	40	50	65

(1) 請根據上述資料畫出散布圖，並將「銷售金額」置於垂直坐標軸上。

(2) 請描述資料分布的整體型態及「廣告費用」、「銷售金額」二者的關聯性。

任務 3

某肥皂廠商欲推出一種新產品，在上市前以不同的單價 x （單位：十元）調查市場的需求 y （單位：萬盒），調查結果如下表：

單價 x	8	9	10	11	12	13
需求 y	13	12.4	11	9.6	9.2	8

(1) 請根據上述資料畫出散布圖，並將「需求」置於垂直坐標軸上。

(2) 請描述資料分布的整體型態及「單價」、「需求」二者的關聯性。

教學補充．搭配學生手冊 P9

[活動解答]

看起來上圖樣本點較下圖密集，會誤認為上圖的資料直線相關比較強，其實兩個散布圖都是根據同一筆資料繪製的，只是因為刻度的單位長度不同，因此兩個散布圖數學、物理成績直線相關相同。

[教學活動安排]

⑴建議教師可以利用電腦呈現這兩個圖，並且與學生討論哪個散布圖數學、物理成績直線相關比較強？

⑵教師可以利用 *GeoGebra* 畫出數學與物理的散布圖，並且調整座標的比例或刻度，來呈現同一筆資料的散布圖可能會呈現出密集或稀疏的情形，完全要視刻度的大小來決定。

[教學注意事項]

通常學生都會認為樣本點比較密集的話，兩資料間的相關會比較強，教師可以利用這個活動的討論來澄清這個迷思。

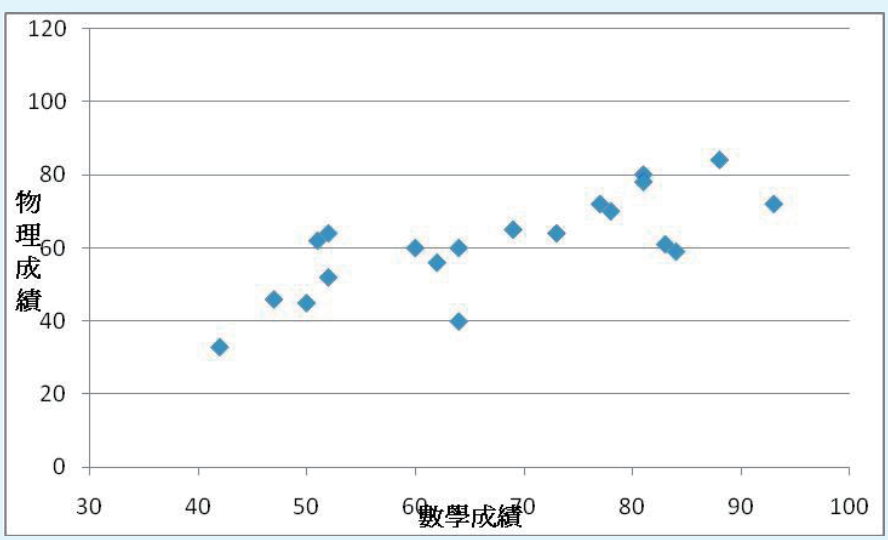
叁 最佳直線與相關係數

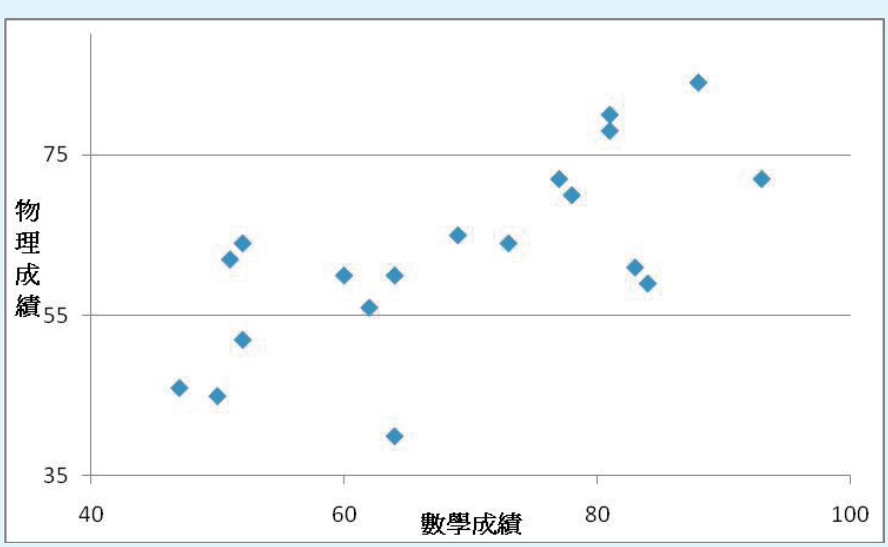
1 最小平方法

散布圖呈現兩個數據資料間相關的方向、型式、強度。其中直線相關尤其重要，因為直線是最簡單的型態，但是光用眼睛看，並不容易判斷出相關的強度。

活動 3

只靠散布圖判別兩變量的相關足夠嗎？





上面兩個散布圖，哪個圖的數學、物理成績直線相關比較強？

學生手冊 P9

教學補充．搭配學生手冊 P10

[教學活動安排]

⑴教師可以將學生分成 3～4 人一組，然後就活動提供的誤差加以討論，討論的重點在於這些誤差的形式的優缺點。

⑵教師可以提出開放性的問題，讓學生自行設計誤差的形式，計算誤差。

⑶討論達成共識之後，教師可以利用 *GeoGebra* 軟體，讓學生可以去找出誤差最小時斜率 m 的值。

⑷若教學時間允許可以設計習題就 E_2 的誤差形式找出誤差 E_2 最小時斜率 m 的值。

[教學注意事項]

⑴E_3 與 E_4 發生最小值時，a，b 的值都相同，不過選 E_3 或 E_4 教師可以讓學生充分討論，教師可以引導學生去考慮平均誤差的好處，經過討論之後，希望可以讓學生體驗誤差是可以依需求來加以改變的，並且在這個問題上達成誤差選取的共識。

⑵學生若提問為何直線要過（μ_x, μ_y），建議教師可以提示因為算術平均數是代表資料的統計量，因此考慮通過（μ_x, μ_y）斜率為 m 的直線來表示 x，y 的關係是很是恰當以及告知之後會證明迴歸直線必過點（μ_x, μ_y）。

⑶建議教師可以利用 *GeoGebra* 設計教材讓學生自行操作找出 m 值。

[活動解答]

⑴選用 E_1 形式的誤差表現形式容易發生正負相消去的結果，無法真正呈現誤差的實際大小。

選用 E_2 形式的誤差表現形式不會發生正負相消的結果，基本上可行，但是要計算 E_2 最小時的 a，b 值時，不易計算出 a，b。

選用 E_3、E_4 形式的誤差表現形式不會發生正負相消的結果，而且可以利用配方法求出發生最小值時，a，b 的值。而 E_3 的誤差表現形式會受資料個數的影響，因此選用 $E4$ 的誤差表現形式會不受資料個數影響。

⑵根據 *GeoGebra* 的觀察，使得 E_4 最小的 m 約為 1.3，此時誤差 E_4 最小約為 3.075。

活動三中，兩個散布圖畫的是同一組數據，只是兩個圖形的坐標選取之範圍不同，所以只要修改散布圖上坐標軸的刻度或範圍，或是點和點之間的空白處大小，眼睛就可能受騙。所以得定義一個統計量（相關係數）來衡量兩個變數的直線相關強度，我們先從代表兩筆數據的直線開始，探討如何找出最佳（最適合）直線並定義相關係數。

活動 4 最小平方法的引進

右表中有 4 筆資料：

x	1	2	3	4
y	3	1	2	7

若想用直線 $y=a+bx$ 來表示 x、y 的關係，那麼 a、b 要如何取，才會使直線 $y=a+bx$ 與散布圖中的點愈靠「近」呢？

⑴令樣本點 $(x_1, y_1)=(1, 3)$、$(x_2, y_2)=(2, 1)$、$(x_3, y_3)=(3, 2)$、$(x_4, y_4)=(4, 7)$，希望能夠選取 a、b 的值，使得資料點 x_i 的 y 坐標 y_i（實際值）與 $a+bx_i$（預測值）的誤差要最小。

請就下面幾種誤差的形式加以討論它們有甚麼優缺點。

$$E_1=|(y_1-(a+bx_1))+(y_2-(a+bx_2))+(y_3-(a+bx_3))+(y_4-(a+bx_4))|$$

$$E_2=|y_1-(a+bx_1)|+|y_2-(a+bx_2)|+|y_3-(a+bx_3)|+|y_4-(a+bx_4)|$$

$$E_3=(y_1-(a+bx_1))^2+(y_2-(a+bx_2))^2+(y_3-(a+bx_3))^2+(y_4-(a+bx_4))^2$$

$$E_4=\frac{1}{4}[(y_1-(a+bx_1))^2+(y_2-(a+bx_2))^2+(y_3-(a+bx_3))^2+(y_4-(a+bx_4))^2]$$

⑵經計算 x、y 兩筆數據資料的算術平均數分別為 $\mu_x=\frac{10}{4}$，$\mu_y=\frac{13}{4}$。考慮通過 (μ_x, μ_y) 斜率為 m 的直線 $y=m(x-\mu_x)+\mu_y$，利用 GeoGebra 軟體找出誤差最小時斜率為 m 的值。

如果散布圖顯示出兩個數值資料之間有很強的直線相關，可以在散布圖中畫條直線，來對這個直線相關做一個概述。**最小平方法**就是一種找出這樣的直線之方法，找出來的直線稱為**最佳直線**或**迴歸直線**。

教學補充．搭配學生手冊 P11

[教學活動安排]

教師可以建議學生代入不同 a，b 的值，去觀察出誤差會大於等於 $\frac{123}{40}$，因此 a，b 要滿足 $2a+5b-\frac{13}{2}=0$ 且 $b-\frac{13}{10}=0$ 時，E 會有最小值。

[教學注意事項]

誤差最後如何配方成 $E=\frac{1}{4}\left[\left(2a+5b-\frac{13}{2}\right)^2+5\left(b-\frac{13}{10}\right)^2+\frac{123}{10}\right]$，教師可以視學生程度來回答這個問題，但是重點是配方完之後，如何找 a，b 使得 E 最小。

[活動解答]

根據配方法

$$E=\frac{1}{4}\left[(3-(a+b))^2+(1-(a+2b))^2+(2-(a+3b)^2+(7-(a+4b))^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(2a+5b-\frac{13}{2}\right)^2+5\left(b-\frac{13}{10}\right)^2+\frac{123}{10}\right]$$

當 $2a+5b-\frac{13}{2}=0$ 且 $b-\frac{13}{10}=0$ 時，誤差 E 的值最小。

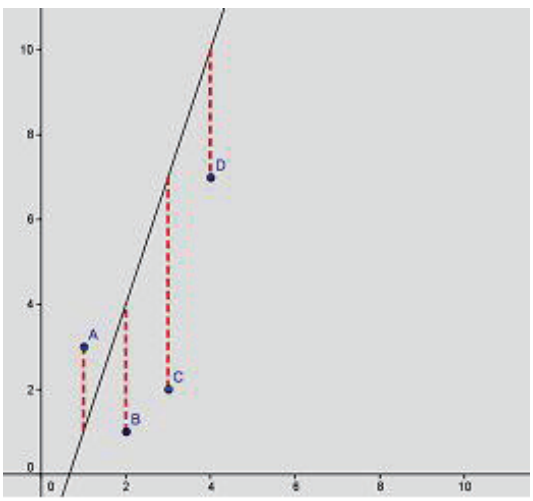
故當 $a=0$，$b=1.3$，誤差 E 的值最小。

任務 4 參考解答：

$y=1+\frac{1}{2}x$

最小平方法

對於給定有限個樣本點(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 、……、(x_n, y_n)、求出一條直線$y=a+bx$使得誤差平方的平均$E=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}〔y_i-(a+bx_i)〕^2)$最小。
求得的直線$y=a+bx$稱為**y 對 x 的最佳直線或迴歸直線**。



活動 5 用最小平方法找最佳直線

考慮活動 4 中的 4 個樣本點：
$(x_1, y_1)=(1, 3)$、$(x_2, y_2)=(2, 1)$、$(x_3, y_3)=(3, 2)$、$(x_4, y_4)=(4, 7)$，
根據配方法，找出 a、b 使得誤差

$$E=\frac{1}{4}〔(3-(a+b))^2+(1-(a+2b))^2+(2-(a+3b)^2+(7-(a+4b))^2〕$$

$$=\frac{1}{4}〔(2a+5b-\frac{13}{2})^2+5(b-\frac{13}{10})^2+\frac{123}{10}〕\text{最小。}$$

任務 4 考慮 3 個樣本點

$(x_1, y_1)=(1, 2)$、$(x_2, y_2)=(2, 1)$、$(x_3, y_3)=(3, 3)$，求兩實數 a、b 使得下列 E 值最小：

$$E=\frac{1}{3}〔(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+(y_3-a-bx_3)^2〕$$

$$=\frac{1}{3}〔(2-a-b)^2+(1-a-2b)^2+(3-a-3b)^2〕$$

$$=\frac{1}{3}〔3(a+2b-2)^2+2(b-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}〕$$，試求此兩筆數據資料的最佳直線。

教學補充．搭配學生手冊 P12

[教學活動安排]

⑴教師可以利用第⑴題複習資料平均數與標準差的定義。

⑵教師可以視學生程度講解誤差 E' 的配方過程，這裡可以實施差異化教材。

[教學注意事項]

⑴教師要特別強調 a，b 改變時，會產生不同的直線，我們希望找到能夠滿足誤差最小的直線，必要時可以配合 *GeoGebra* 的軟體輔助教學。

[活動解答]

⑴因為 X'、Y' 的平均數與標準差分別為 0 與 1，所以 $0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i'$，

故 $\sum_{i=1}^{n}x_i'=\sum_{i=1}^{n}y_i'=0$，$1=\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2-0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2-0^2$，所以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2=n$。

⑵$E'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i'-(a+bx_i')]^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(y_i')^2-2y_i'(a+bx_i')+(a+bx_i')^2]$

$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2-2\sum_{i=1}^{n}(ay_i'+bx_i'y_i')+\sum_{i=1}^{n}(a^2+2abx_i'+b^2(x_i')^2])$

$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2-2a\sum_{i=1}^{n}y_i'-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')+na^2+2ab\sum_{i=1}^{n}x_i'+b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2)$

$=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')+na^2+b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2)=\frac{1}{n}(n-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')+na^2+nb^2)$

$=a^2+[b^2-\frac{2b}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')+1]=a^2+[b^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]^2+1-[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]^2$

（以上教材可以視學生程度而定）根據上式可以得知，當 $a=0$，$b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')$ 時，E' 有最小值為 $1-[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]^2$。

⑶因此 Y' 對 X' 的最佳直線為 $y'=[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]x'$。

2 定義相關係數

活動 6

如下表所示，給定 X、Y 兩個數據資料，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

若 X 與 Y 的關係可以用直線來描述，利用最小平方法可以找到 Y 對 X 的最佳直線 L：$y=a+bx$ 使得誤差 $E=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2\right)$ 最小。

為了配方方便起見，將 X、Y 兩個數據資料標準化成 X'、Y'

X'	x_1'	x_2'	$\cdots$	x_n'
Y'	y_1'	y_2'	$\cdots$	y_n'

其中 $x_i'=\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$。

設標準化後，由最小平方法得到 Y' 對 X' 的最佳直線 L'：$y'=a+bx'$

考慮誤差 $E'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i'-(a+bx_i')\right]^2$

⑴數據資料 X'、Y' 的平均數與標準差分別為 0 與 1，

試求下列各項之值 $\sum_{i=1}^{n}x_i'$，$\sum_{i=1}^{n}y_i'$，$\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2$，$\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2$。

⑵誤差 $E'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i'-(a+bx_i')\right]^2$ 可以配方化成

$$a^2+\left[b-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')\right]^2+1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')\right]^2$$

根據上式可以得知當 a、b 之值為何時，E' 有最小值？

⑶試求數據資料標準化之後的最佳直線。

教學補充．搭配學生手冊 P13

[教學活動安排]

⑴利用分組討論的方式，讓學生討論答案。

⑵提醒學生觀察誤差的最小值會不會小於 0？

⑶對於問題⑶的討論，教師可以先問當資料給定後，根據活動六的算法，得到 $r=1$、$r=0.9$、$r=0.2$、$r=0.01$ 時，那麼這些數據資料的關係用最佳直線來代表是否合適呢？

[教學注意事項]

⑴教師對於分組討論的議題要事先布置完整，必要時提醒學生問題的關鍵。

⑵請教師依學生程度斟酌，一些式子的推導與計算可由老師進行演示，一些可留給學生。

[活動解答]

⑴Y' 對 X' 的最佳直線為 $y'=rx'$。

⑵因為不管 a，b 取何值，E' 均不小於 0，

因此 E' 的最小值為 $1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')\right]^2=1-r^2\geq 0$，所以 $-1\leq r\leq 1$。

⑶若 $|r|$ 愈接近 1，E' 愈小，表示兩變數之間的直線相關程度越大，

因此兩個數值資料用最佳直線 $y'=rx'$ 來描述關係就愈恰當。

若 $|r|$ 愈接近 0，E' 愈大，表示兩變數之間有很弱的直線相關，

因此兩個數值資料用最佳直線 $y'=rx'$ 來描述關係就愈不恰當。

活動六中，令 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')$，接下來，我們來討論 r 的範圍，以及 r 與最佳直線的關係。

活動 7

活動六中，令 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')$

⑴請問 Y' 對 X' 的最佳直線如何表示？（以 r 表示）

⑵請問 r 的範圍為何？

⑶請討論當 r 改變時，選用最佳直線代表數據資料的關係是否合適？

根據活動六、七的討論，$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')$ 可以作為衡量兩個變數 X、Y 直線相關的強弱程度的統計量，我們稱為**相關係數**。

※ 相關係數（correlation coefficient）的定義：

衡量兩個變數直線相關的程度的統計量 相關係數定義如下：

對於兩組數據資料 X、Y

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

X 與 Y 的相關係數 r 定義為 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i' y_i')$，

其中 $x_i'=\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$（標準化資料）

相關係數亦可以寫成

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

其中，μ_x、μ_y 為 X、Y 的算術平均數；σ_x、σ_y 為 X、Y 的標準差。

教學補充．搭配學生手冊 P14

任務 5 參考答案：

$\because \sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\mu_x)^2}$ ，

$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-(\mu_y)^2}$ ，

代入 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$ 可得相關係數

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_x^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\mu_y^2}}$$

任務 5

證明：相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_x^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\mu_y^2}}$

根據前面的討論，相關係數 r 可以量測兩個數據資料的直線相關程度，並且具有以下特性：

⑴它的範圍有界，強度大小的絕對值不大於 1，即 $-1\le r\le 1$。

⑵它能表達出相關性的正負方向。

⑶它與變數所使用的量測單位無關。

⑷它能表達出兩變數間直線相關性的強度大小。

說明如下：

⑴相關係數的範圍有界，強度大小的絕對值不大於 1，

即 $-1\le r\le 1$。根據活動六的結果即可得知。

⑵相關係數能表達出直線相關的方向。

設 (X, Y) 的數據資料為 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、…、(x_n, y_n)，在散布圖中以 $y=\mu_y$ 為新的橫軸，$x=\mu_x$ 為新的縱軸，則可將散布圖分成四個象限，

如果點 (x_i, y_i) 在第一、三象限內，則 $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ 的值為正；

如果點 (x_i, y_i) 在第二、四象限內，則 $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ 的值為負，因此

(*a*) 若 $r>0$ 時，即 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)>0$，則 X、Y 為正相關。

即表示 X 與 Y 的變動趨勢大致相同。

(*b*) 若 $r<0$ 時，即 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)<0$，則 X、Y 為負相關。

即表示 X 與 Y 的變動趨勢大致相反，即此增彼減或此減彼增。

⑶相關係數與數據所使用的量測單位無關。

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

分子、分母單位相消，所以相關係數 r 與使用的單位無關。

教學補充．搭配學生手冊 P15

任務 6

[教學注意事項]

⑴建議教師可以複習一次函數 $y=a+bx$ 中 b 代表斜率的意義。

參考答案：

斜率為（$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$）且通過點（$\mu_x$，$\mu_y$）。

任務 7 參考答案：

將 $\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}$ ，$\sigma_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}$ ，$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$

代入 $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，即可得到 $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}$ 的結果。

(4)相關係數能表達出直線相關的強度。

(a) 若 r 值很接近 0，表示兩變數之間有很弱的直線相關；

(b) 若 r 的絕對值越接近 1，表示兩變數之間的直線相關程度越大。

(c) $r=1$ 時，表示樣本點都落在斜率為正的一條直線上，

$r=-1$ 時，表示樣本點都落在斜率為負的一條直線上。

3 找最佳直線

根據前面的討論，對於標準化的資料 X'、Y' 而言，Y' 對於 X' 的最佳直線為 $y'=rx'$。因為 $x_i'=\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$，因此可以令 $x'=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$，$y'=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ 代入 $y'=rx'$ 得到 $\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}=r\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$，化簡為 $y=\left(r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x)+\mu_y$。

我們稱 $y=\left(r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x)+\mu_y$ 為數據資料 Y 對 X 的最佳直線。

任務 6

請問 Y 對 X 的最佳直線的斜率等於多少？一定會通過哪一點？

任務 7

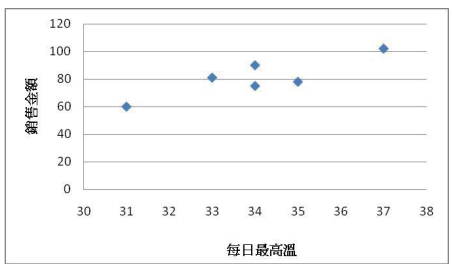
利用 σ_x、σ_y、r 的定義，試推導 Y 對 X 的最佳直線的斜率

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}。$$

教學補充．搭配學生手冊 P16

[活動解答]

(1)



(2)散布圖中點的分布大致接近一條直線，顯示強的正向直線相關。這代表「最高氣溫」與「銷售金額」變動趨勢大致相同，當「最高氣溫」增加（減少）時，「銷售金額」也大致增加（減少）。

(3) $\mu_x=34$，$\mu_y=81$

							總和
$x-\mu_x$	-3	1	-1	3	0	0	
$y-\mu_y$	-21	-3	0	21	9	-6	
$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$	63	-3	0	63	0	0	123
$(x-\mu_x)^2$	9	1	1	9	0	0	20
$(y-\mu_y)^2$	441	9	0	441	81	36	1008

將以上數字代入公式，可得 $r=\dfrac{123}{\sqrt{18}\times\sqrt{1008}}\fallingdotseq 0.866$

(4)因為最佳直線斜率為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)^2}=\dfrac{123}{20}=6.15$，且直線過（34 , 81），

故最佳直線為 $y=6.15(x-34)+81$，化簡為 $y=6.15x-128.1$

(5)$x=36$ 代入最佳直線，得到 $y=6.15\times 36-128.1=93.3$（千元）$=93300$（元）

(6)攝氏 100 度的環境下，人類已無法生存。因此以 $x=100$ 代入最佳直線，得到 $y=6.15\times 100-128.1=486.9$（千元）$=486900$（元），以此去預測銷售金額，並不合適！

[教學注意事項]

教師提醒學生，任意將所得的最佳直線模型，延伸到範圍以外做預測使用，並不一定合適，須注意合理性。

根據前面的討論，可以整理成以下的結論：

⑴若給定 X、Y 兩筆數據資料，將 X、Y 標準化成數據 X'、Y'，

則 Y' 對 X' 的最佳直線 L' 為 $y'=rx'$，其中 r 為數據 X、Y 的相關係數。

⑵若給定 X、Y 兩筆數據資料，$\begin{array}{c|c|c|c|c} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array}$，則 Y 對 X 的最佳直線 L：$y=a+bx$ 必通過點（μ_x，μ_y），斜率 $b=\dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}$。

※ 線性模型

要預測必須先有模型，若我們決定模型為線性模型，然後根據蒐集到的數據，利用最小平方法決定直線的斜率和截距，找出最佳直線或迴歸直線。若是兩個數據之間的關係是可以解釋或預測的話，我們就可以透過最佳直線用一個變數來解釋或預測另一個變數。

活動 8

假設臺灣某珍珠奶茶店的店長注意到每天珍珠奶茶的銷售金額似乎與當天的最高氣溫有關，於是隨機選了 6 天並記錄了該日最高氣溫（攝氏）和珍珠奶茶的銷售金額（千元）如下表：

編號	1	2	3	4	5	6	平均
最高氣溫（攝氏 x 度）	31	35	33	37	34	34	34
銷售金額（y 千元）	60	78	81	102	90	75	81

店長觀察數據之後認為「銷售金額」與「最高氣溫」二者之間似乎有某種關聯性，他希望能找到這項關聯，並加以利用，但是他沒有學過數據分析，我們來幫他做這件事吧！

⑴請根據上述資料畫出散布圖。

⑵請描述資料分布的整體型態 及「最高氣溫」、「銷售金額」二者的關聯性。

⑶計算「最高氣溫」、「銷售金額」二者的相關係數。

⑷求這 6 筆資料「最高氣溫」對「銷售金額」的最佳直線方程式。

⑸用最佳直線方程式估計最高氣溫 36 度時珍珠奶茶的銷售金額。

⑹若最高氣溫為攝氏 100 度，則銷售金額為多少元？這樣的預測合理嗎？

教學補充．搭配學生手冊 P17

任務 8 參考答案：

⑴ y 對 x 的最佳直線的斜率為 $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.8\times\frac{5}{10}=0.4$ 且通過點 $(\mu_x,\ \mu_y)=(65,\ 70)$

所以最佳直線方程式為 $y=0.4(x-65)+70$，化簡為 $y=0.4x+44$。

⑵ 令 $x=65$ 代入最佳直線，得到 $y=0.4\times65+44=70$（分）。

因此當這位同學數學成績為 65 分時，預測此生的英文成績為 70 分。

任務 9 參考答案：（※第(2)、(3)題參考答案接教師手冊 *P*36）

⑴ 令 $u_i=\frac{9}{5}x_i+32$，$i=1,2,\cdots,6$；$v_i=\frac{1}{30}y_i$，$i=1,2,\cdots,6$。結果如下表：

編號	1	2	3	4	5	6	平均
最高氣溫（攝氏 x 度）	31	35	33	37	34	34	34
銷售金額（y 千元臺幣）	60	78	81	102	90	75	81
最高氣溫（華氏 u 度）	87.8	95	91.4	98.6	93.2	93.2	93.2
銷售金額（v 千美元）	2	2.6	2.7	3.4	3	2.5	2.7

$\mu_x=93.2$，$\mu_x=2.7$

							總和
$u-\mu_u$	-5.4	1.8	-1.8	5.4	0	0	
$v-\mu_v$	-0.7	-0.1	0	0.7	0.3	-0.2	
$(u-\mu_u)(v-\mu_v)$	3.78	-0.18	0	3.78	0	0	7.38
$(u-\mu_u)^2$	29.16	3.24	3.24	29.16	0	0	64.8
$(v-\mu_v)^2$	0.49	0.01	0	0.49	0.09	0.04	1.12

將以上數字代入公式，可得相關係數為 $\frac{7.38}{\sqrt{64.8}\times\sqrt{1.12}}=\frac{7.38}{\sqrt{72.576}}\fallingdotseq0.866$

又由 $r_{uv}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(\mu_i-\mu_u)(v_i-\mu_v)}{6\times\sigma_U\times\sigma_V}=\frac{\sum_{i=1}^{6}[(\frac{9}{5}x_i+32)-(\frac{9}{5}\mu_x+32)](\frac{1}{30}y_i+\frac{1}{30}\mu_y)}{6\times\frac{9}{5}\sigma_X\times\frac{1}{30}\sigma_Y}$

$$=\frac{\frac{9}{5}\times\frac{1}{30}}{\frac{9}{5}\times\frac{1}{30}}\times\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{6\times\sigma_x\times\sigma_y}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{6\times\sigma_x\times\sigma_y}=r_{xy}$$

所以知改變單位後相關係數沒有改變。

任務 8

設抽樣某班 8 位學生的數學成績（x）與英文成績（y），結果如下：

$\mu_x=65$，$\mu_y=70$，$\sigma_x=10$，$\sigma_y=5$，$r=0.8$

(1)請寫出英文成績（y）對數學成績（x）的最佳直線方程式。

(2)若此班某位同學數學成績 65 分，請預測此生的英文成績。

任務 9

在活動八中，若店長為提供想加盟開店的美國友人資料，將攝氏溫度（x 度）及臺幣（y 千元）單位分別轉換成華氏溫度（u 度）及美元（v 千美元）。那麼

(1)相關係數會怎麼改變？

(2)以最小平方法決定的最佳直線斜率會怎麼改變？

(3)最佳直線方程式為何？

（已知當攝氏溫度為 x 時，華氏溫度為 $u=\frac{9}{5}x+32$；1 美元以 30 元臺幣計算）

你可以利用 *Excel* 來計算以上各問題。

教學補充．搭配學生手冊 P18

任務 9 參考答案：

⑵ 因為最佳直線斜率為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(u_i-\mu_u)(v_i-\mu_v)}{\sum_{i=1}^{6}(u_i-\mu_u)^2}=\dfrac{7.38}{64.8}=\dfrac{738}{6480}=\dfrac{41}{360}$

又由 $\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(u_i-\mu_u)(v_i-\mu_v)}{\sum_{i=1}^{6}(u_i-\mu_u)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{6}[(\frac{9}{5}x_i+32)-(\frac{9}{5}\mu_x+32)](\frac{1}{30}y_i-\frac{1}{30}\mu_y)}{\sum_{i=1}^{6}[(\frac{9}{5}x_i+32)-(\frac{9}{5}\mu_x+32)]^2}$

$=\dfrac{\frac{9}{5}\times\frac{1}{30}}{(\frac{9}{5})^2}\times\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_x)^2}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{9}{5}}\times\dfrac{123}{20}=\dfrac{1}{54}\times\dfrac{123}{20}=\dfrac{123}{1080}=\dfrac{41}{360}$

故改變單位後最佳直線的斜率為原斜率 $\dfrac{123}{20}$ 再乘上 $\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{9}{5}}$，即新斜率為原斜率的 $\dfrac{1}{54}$。

【另解】改變單位後最佳直線斜率為 $r_{uv}\dfrac{\sigma_v}{\sigma_u}=r_{xy}\cdot\dfrac{\frac{1}{30}\sigma_y}{\frac{9}{5}\sigma_y}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{9}{5}}(r_{xy}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x})=\dfrac{1}{54}(r_{xy}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x})$

即改變單位後最佳直線的斜率為原斜率的 $\dfrac{1}{54}$。

⑶ 因為最佳直線會通過點 $(\mu_u,\mu_v)=(93.2,2.7)$，又其斜率為 $\dfrac{41}{360}$，

所以最佳直線方程式為 $y-2.7=\dfrac{41}{360}(x-93.2)$

任務 10 參考答案：

⑴ $r_{UV}=\dfrac{ac}{|ac|}\times r_{XY}=\begin{cases} r_{XY}，ac>0 \\ -r_{XY}，ac<0 \end{cases}$

⑵ $\dfrac{c}{a}\times m$

⑶ $y-(c\mu_y+d)=\dfrac{c}{a}\times m[x-(a\mu_y+b)]$

任務 10

同學們可將任務九的問題一般化：

設有兩個變數 X、Y 的 n 筆數據資料（x_i, y_i），$i=1,2,\cdots,n$。已知 X、Y 的算術平均數分別為 μ_x、μ_y，標準差分別為 σ_x、σ_y，相關係數為 r_{XY}，Y 對 X 的最佳直線斜率為 m。若將變數 X 與 Y 經由伸縮、平移分別得到變數 U、V，其中 $U=aX+b$，$V=cY+d$，其中 a、b、c、d 均為常數，即 $\mu_i=ax_i+b$，$i=1,2,\cdots,n$；$v_i=cy_i+d$，$i=1,2,\cdots,n$。那麼

(1) U、V 的相關係數會怎麼改變？

(2) V 對 U 的最佳直線斜率會怎麼改變？

(3) V 對 U 最佳直線方程式為何？

[教學活動安排]

(1)教師可以複習平均數與標準差經由伸縮、平移後的改變。

(2)此處可以實施差異化教材，教師可以視學生程度，由學生自行推導或由老師講解。

任務 10 參考答案：(詳解)

(1) $\because U=aX+b$，$V=cY+d \rightarrow \mu_U=a\mu_x+b$，$\mu_V=c\mu_y+d$ 且 $\sigma_U=|a|\sigma_X$，$\sigma_V=|c|\sigma_Y$

$$\therefore r_{UV}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\mu_U)(V_i-\mu_V)}{n\times\sigma_U\times\sigma_V}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(aX_i+b-a\mu_X-b)(cY_i+d_i-c\mu_Y-d)}{n\times|a|\sigma_X\times|c|\sigma_Y}$$

$$=\frac{ac}{|ac|}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a_X)(Y_i-\mu_Y)}{n\times\sigma_X\times\sigma_Y}=\frac{ac}{|ac|}\cdot r_{XY}=\begin{cases} r_{XY}, & ac>0 \\ -r_{XY}, & ac<0 \end{cases}$$

(2)V 對 U 的最佳直線斜率為 $r_{UV}\frac{\sigma_V}{\sigma_U}=\frac{ac}{|ac|}\cdot r_{XY}\cdot\frac{|c|\sigma_Y}{|a|\sigma_X}=\frac{c}{a}r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{c}{a}m$

(3)V 對 U 最佳直線會通過點 $(\mu_U,\mu_V)=(a\mu_x+b, c\mu_y+d)$，

又由(2)知 V 對 U 的最佳直線斜率為 $\frac{c}{a}m$，

所以 V 對 U 最佳直線方程式為 $y-(c\mu_y+d)=\frac{c}{a}\times m\times[x-(a\mu_x+b)]$。

教學補充．搭配學生手冊 P19

第 1 題參考解答：

⑴ (A)，(B)，(C)，(D)

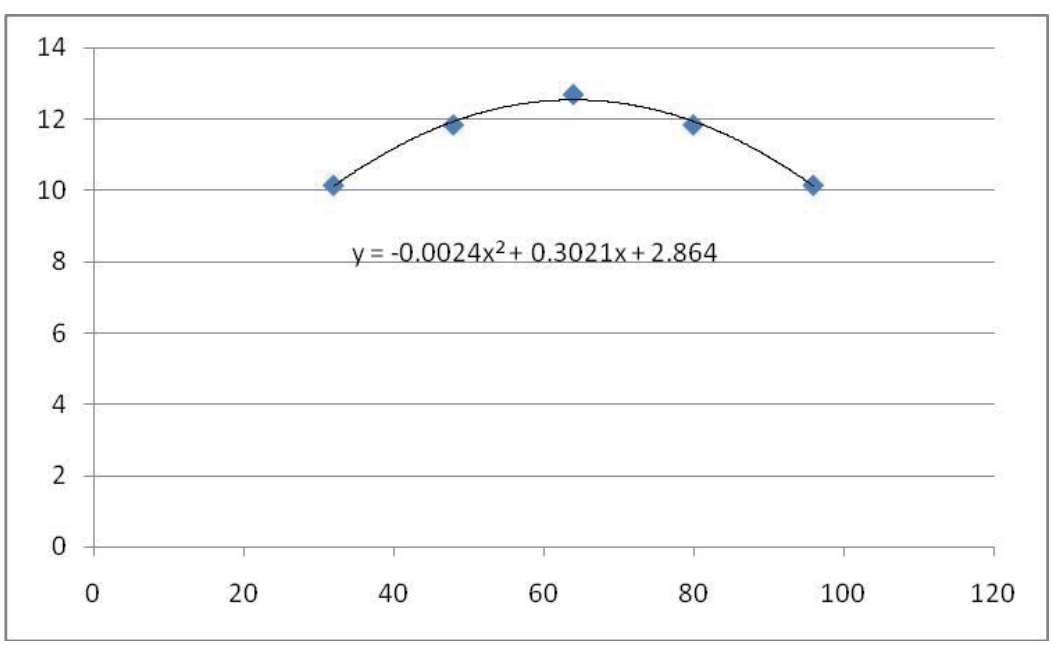
⑵ (B)，(D)，(C)，(A)

第 2 題參考解答：

⑴ 相關係數為 0。

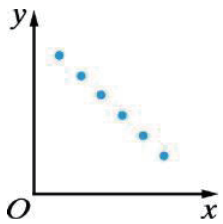
⑵「速度」、「汽油里程」散佈圖的點都在一二次函數圖形上，所以二者的關聯性很強（曲線相關）。

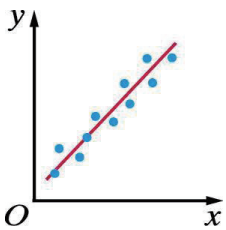
但計算結果相關係數卻為 0，這是因為相關係數 r 值所代表的是直線相關的強度，所以 $r=0$ 只代表沒有「直線相關」，並不表示「速度」和「汽油里程」之間沒有任何關聯。

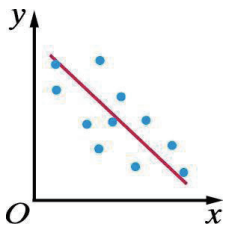


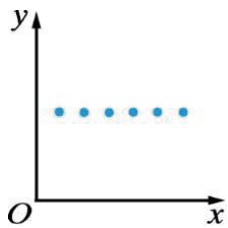
評　量

1.

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(1)請排出上面 4 個散布圖中 x，y 的相關強度的大小次序（由強到弱）。

(2)請排出上面 4 個散布圖中 x，y 的相關係數的大小次序（由大到小）。

2. 汽車每公升汽油跑的公里數在速度增加時會先上升再下降，假設這種關聯相當規則，汽車行駛的速度（每小時公里數）和汽油里程（每公升公里數）資料所示：

速度	32	48	64	80	96
汽油里程	10.14	11.83	12.68	11.83	10.14

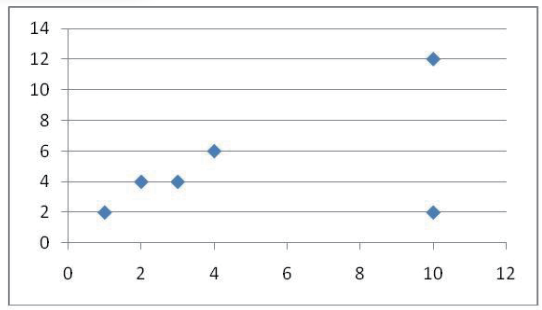
(1)請計算「速度」、「汽油里程」的相關係數。

(2)請解釋為何「速度」、「汽油里程」二者的關聯性很強，但相關係數卻是 0。

教學補充．搭配學生手冊 P20

第 3 題參考解答：

由 x 和 y 的散佈圖知點（10 , 2）為離群值。



計算六筆數據資料的相關係數約為 0.481，但若去除離散點（10 , 2），則相關係數約為 0.993，可知相關係數易受離群值的影響。相關係數計算如下：

六筆數據資料的相關係數 $\mu_x=\frac{30}{6}=5$，$\mu_y=\frac{30}{6}=5$

							總和
x_i	1	2	3	4	10	10	30
y_i	2	4	4	6	2	12	30
$x-\mu_x$	-4	-3	-2	-1	5	5	0
$y-\mu_y$	-3	-1	-1	1	-3	7	0
$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$	12	3	2	-1	-15	35	36
$(x-\mu_x)^2$	16	9	4	1	25	25	80
$(y-\mu_y)^2$	9	1	1	1	9	49	70

$r=\frac{36}{\sqrt{80}\times\sqrt{70}}\fallingdotseq 0.48$

去除離散點（10, 2），剩餘五筆數據資料的相關係數 $\mu_x=\frac{20}{5}=4$，$\mu_y=\frac{28}{5}=5.6$

						總和
x_i	1	2	3	4	10	4
y_i	2	4	4	6	12	5.6
$x-\mu_x$	-3	-2	-1	0	6	0
$y-\mu_y$	-3.6	-1.6	-1.6	0.4	6.4	0
$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$	10.8	3.2	1.6	0	38.4	54
$(x-\mu_x)^2$	9	4	1	0	36	50
$(y-\mu_y)^2$	12.96	2.56	2.56	0.16	40.96	59.2

$r=\frac{54}{\sqrt{50}\times\sqrt{59.2}}\fallingdotseq 0.99$

3. 請利用下面的數據畫一個散布圖。

x	1	2	3	4	10	10
y	2	4	4	6	2	12

計算相關係數的結果大約是 0.5。對這組數據中的大部分的點來說，x 和 y 之間有很強的直線關聯，是什麼因素導致相關係數只有 0.5 左右？

教學補充．搭配學生手冊 P21

第 4 題參考解答：

⑴ $\mu_x=3$，$\mu_y=80$

$x-\mu_x$	-2	1	0	0	1	0	2	1	0	-3
$x-\mu_y$	20	10	10	0	-10	-10	-20	-20	0	20

$$r=\frac{-40+10-10-40-20-60}{\sqrt{4+1+1+4+1+9}\times\sqrt{20^2\times4+10^2\times4}}=\frac{-160}{\sqrt{20}\times\sqrt{2000}}=-0.8$$

⑵因為斜率為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)^2}=\dfrac{-160}{20}=-8$，且直線通過（3，80）

故最佳直線為 $y=-8(x-3)+80$，化簡為 $y=-8x+104$

⑶ $x=10$ 代入最佳直線，得 $y=-8\times10+104=24$（分）

⑷$x=42$ 代入最佳直線，得 $y=-8\times42+104=-232$（分），不合理。

根據《高級中學學生請假實施規定》：

「學生缺課除公假外，全學期缺課達教學總日數（每日以 7 節課計算）2 分之 1 者或學生曠課累積達 42 節，經提學生事務相關會議通過後，應依據學校學生獎懲規定與相關程序輔導及其他適性教育安置（如：由家長或監護人帶回管教、輔導轉學……等）。」

第 5 題參考解答：

$\sum_{i=1}^{5}x_i=135\Rightarrow\mu_x=\dfrac{135}{5}=27$，$\sum_{i=1}^{5}y_i=105\Rightarrow\mu_y=\dfrac{105}{5}=21$

由相關係數公式 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\mu_x^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\cdot\mu_y^2}}$

得 $r=\dfrac{2842-5\times27\times21}{\sqrt{3661-5\times27^2}\sqrt{2209-5\times21^2}}=\dfrac{7}{4\times2}=0.875$

4. 蒐集學生十人（甲、乙、…、癸），記錄期考數學成績與該學期數學課缺課數，如下表所示：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
缺課數	1	4	3	3	4	3	5	4	3	0
成績	100	90	90	80	70	70	60	60	80	100

⑴試求出缺課數與數學成績的相關係數。

⑵設缺課數為 x，數學成績為 y，試求數學成績對缺課數的最佳直線。

⑶若阿杰缺了 10 堂課，根據最佳直線的預測，他的數學成績為多少分？

⑷當缺課數 42 節時，是否仍可以此直線來預測學生的成績？

5. 調查某國家某一年 5 個地區的香煙與肺癌之相關性，所得到的數據為（x_i, y_i），$i=1$、2、3、4、5，其中變數 X 表示每人每年香煙消費量（單位：十包），Y 表示每十萬人死於肺癌的人數。

若已計算出下列數值

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 135,\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 3661,\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2842,\ \sum_{i=1}^{5} y_i = 105,\ \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 2209,$$

求 X 與 Y 的相關係數。

6. 高爾頓（*Galton*）當時曾研究過肘長與身高的相關性，我們可以找幾位同學，測量其肘長與身高，畫出散布圖。

並判定肘長與身高兩數據資料是正相關或是負相關？

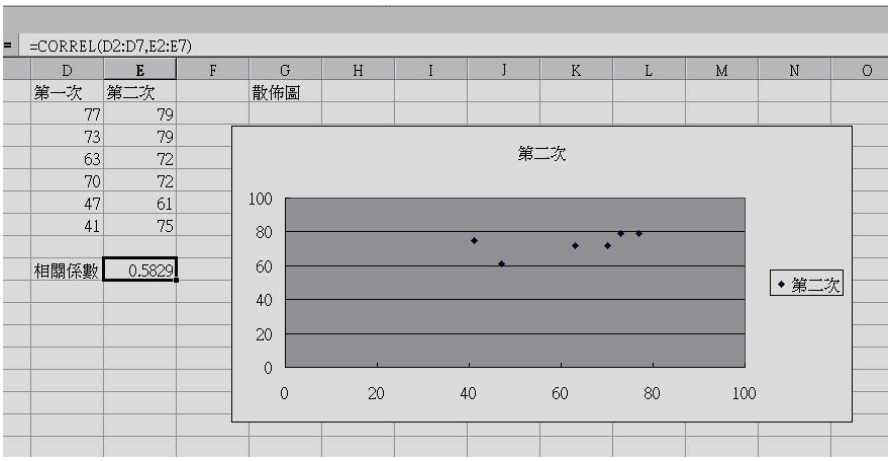
計算相關係數與求身高（y）對肘長（x）的最佳直線，並利用預測同學身高看看準不準？

建議教師鼓勵同學可以在生活上或其他學科中尋找自己想要探討的兩個變數，進行相關性、相關係數與最佳直線等方面的探討與應用。

教學補充．搭配學生手冊 P22

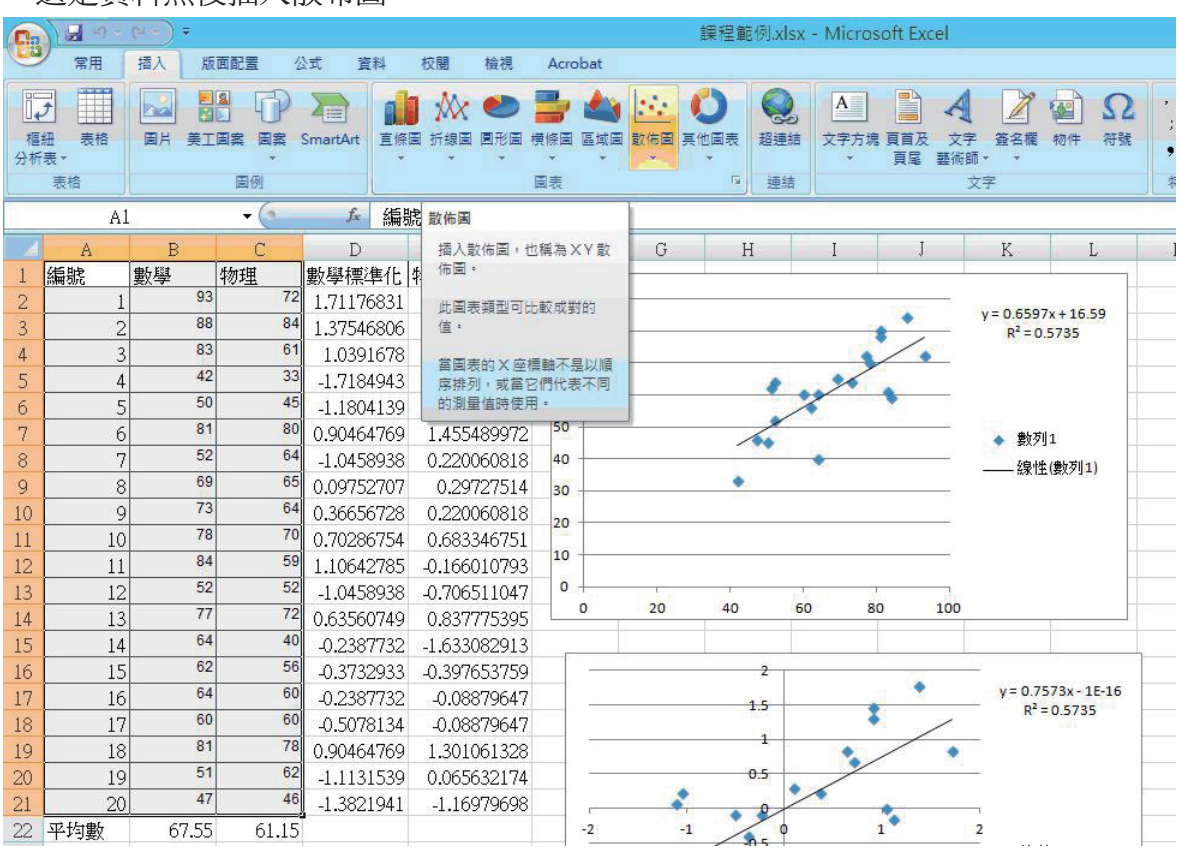
附錄一

1. 用 *Excel* 計算相關係數：



2. 利用 *Excel* 畫散布圖

選定資料然後插入散布圖



教學補充．搭配學生手冊 P23

3. 利用 *Excel* 求最佳直線：

(1)指令：*LINEST*

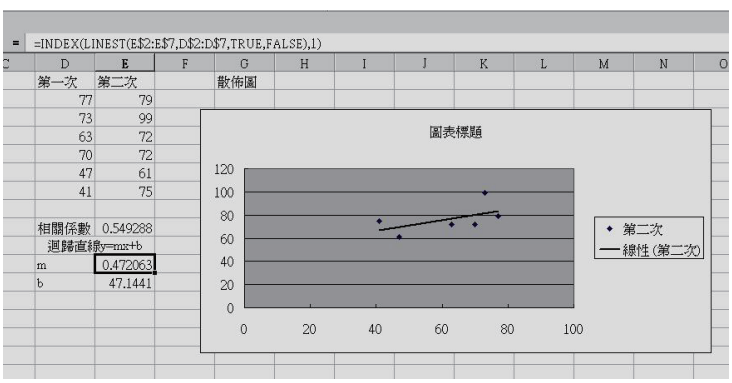
功用：使用最小平方法計算最適合於觀測資料組的迴歸直線公式，並傳回該直線公式的陣列。由於此函數傳回陣列值，所以必須輸入為陣列公式。

語法：LINEST（known_y's,known_x's,const,stats）

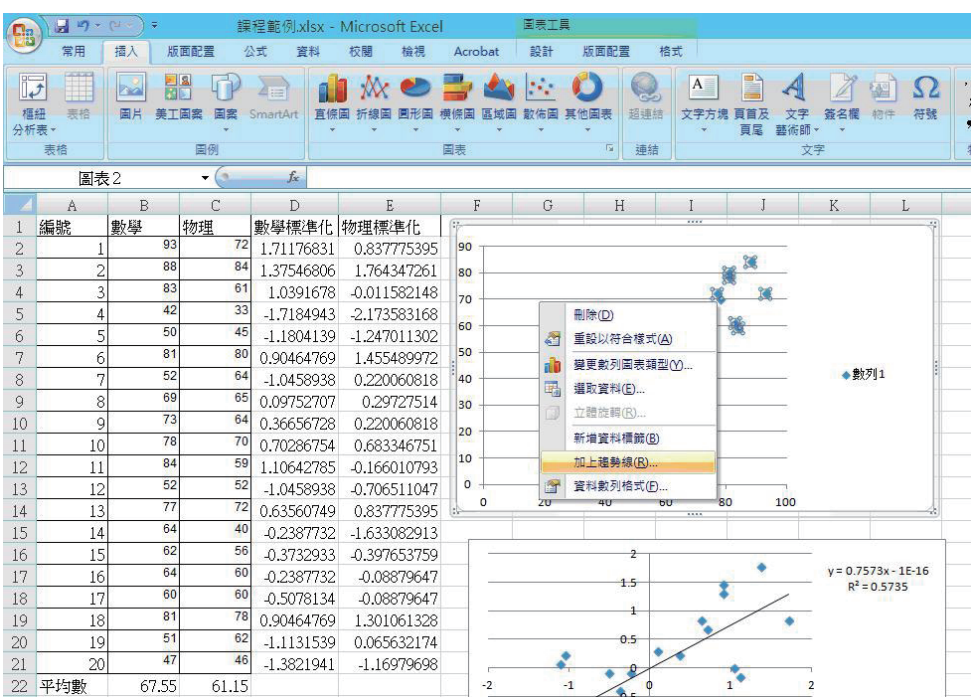
最佳直線：$y=mx+b$

m 的計算：*INDEX（LINEST（known_y's,known_x's,const,stats）,1）*

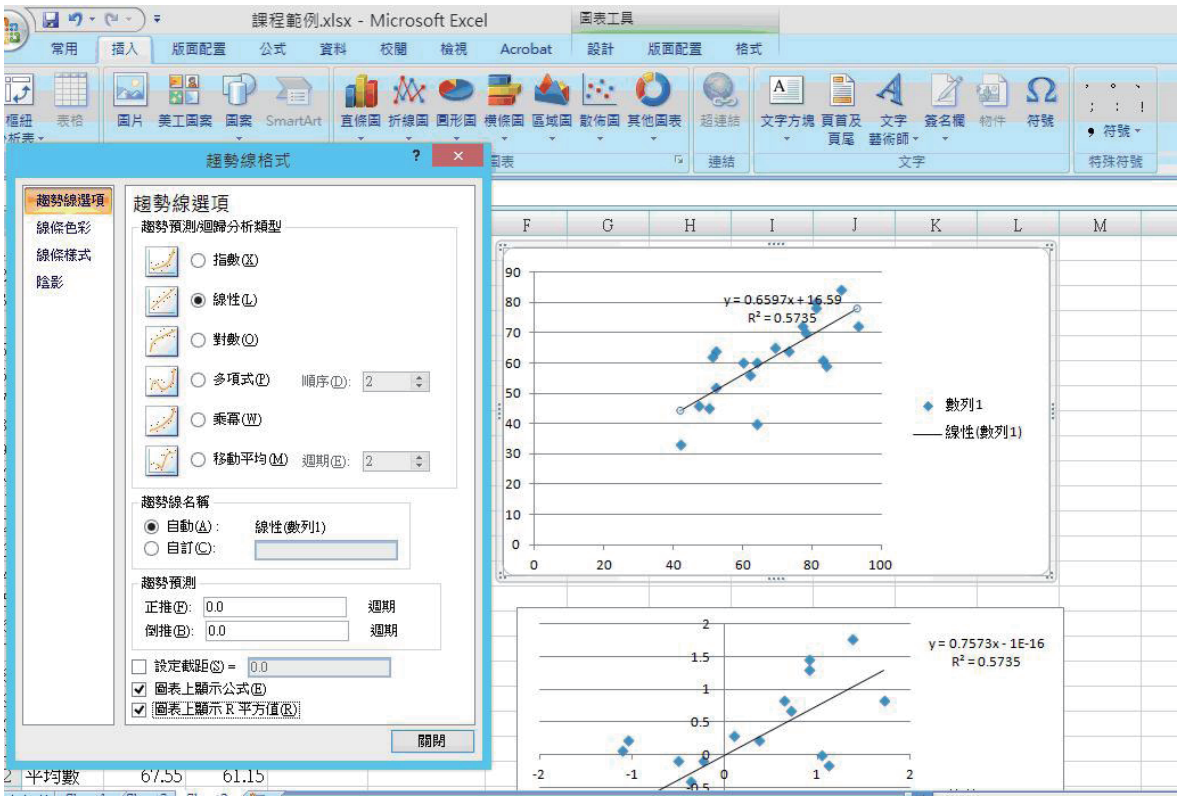
b 的計算： *INDEX（LINEST（known_y's,known_x's,const,stats）,2）*



(2)選定樣本點，然後按滑鼠右鍵再選加入趨勢線，再選單中選取線性，並且選圖表上顯示公式與 *R* 平方值 即可得到最佳直線與相關係數平方值。



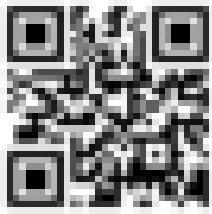
學生手冊 P23


課程範例.xlsx - Microsoft Excel
圖表工具
趨勢線格式
趨勢線選項
線條色彩
線條樣式
陰影
趨勢線選項
趨勢預測/迴歸分析類型
指數(X)
線性(L)
對數(O)
多項式(P)
順序(D):
乘冪(W)
移動平均(M)
週期(E):
趨勢線名稱
自動(A):
線性(數列1)
自訂(C):
趨勢預測
正推(F):
倒推(B):
週期
設定截距(S) =
圖表上顯示公式(E)
圖表上顯示 R 平方值(R)
關閉
y = 0.6597x + 16.59
R² = 0.5735
數列1
線性(數列1)
y = 0.7573x - 1E-16
R² = 0.5735
平均數
67.55
61.15

素養導向數學教材 / 曾世杰 主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

素養導向普通型高級中學數學教材：相關係數與最佳直線-教師手冊
主 編 者：單維彰
作　　者：林信安、曾俊雄
（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組
召 集 人：曾世杰
副召集人：單維彰、鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜
陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿
（依姓氏筆畫順序排列）
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用



本書經雙向匿名審查通過