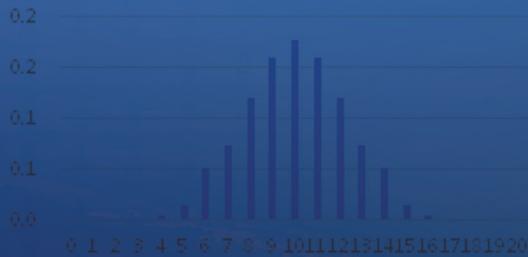
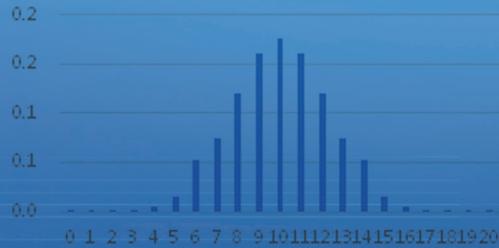


素養導向高級中學數學教材 機率與二項分布的假設檢定



機率與二項分布的假設檢定之素養教材

一、前言

機率的觀念在我們的日常生活中，是一種非常重要且常見的數學想法，可以幫助我們對許多觀察到的現象進行評估。從國小、國中到高中，我們已經接觸過許多有關機率的學習內容，像是古典機率、期望值、條件機率…等等。在這份教材中，我們將連結各位同學過去的機率概念，並搭配實驗操作，讓各位同學能實際體驗機率的完整數學模型：猜測→修正→實驗→檢定→下結論。

各小節名稱

第一節 世界盃足球賽的預測

第二節 蜂巢硬幣的猜想

第一節

世界盃足球賽的預測

前情提要

阿笠博士和少年偵探隊柯南、灰原、步美、元太、光彥，正滿心期待的準備觀賞「世界盃足球賽」。

比賽開始前，阿笠博士靈機一動，提議大家來預測本屆世足賽的冠軍隊，答對的人將有阿笠博士準備的神秘小禮物。



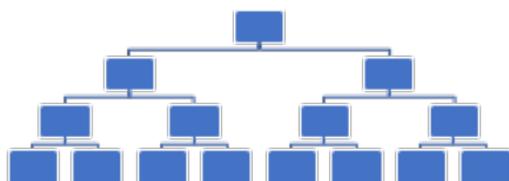
活動 1

阿笠博士說：「目前世足賽前32強已經出爐，小組賽抽籤結果如下表。」

FIFA WORLD CUP RUSSIA 2018		FINAL DRAW	DRAW RESULTS	
GROUP A	RUSSIA SAUDI ARABIA EGYPT URUGUAY	GROUP B	PORTUGAL SPAIN MOROCCO IR IRAN	GROUP C
				FRANCE AUSTRALIA PERU DENMARK
				GROUP D
				ARGENTINA ICELAND CROATIA NIGERIA
GROUP E	BRAZIL SWITZERLAND COSTA RICA SERBIA	GROUP F	GERMANY MEXICO SWEDEN KOREA REPUBLIC	GROUP G
				BELGIUM PANAMA TUNISIA ENGLAND
				GROUP H
				POLAND SENEGAL COLOMBIA JAPAN

討論 1

由於將32隊隊伍分組的賽程表較龐大且複雜，我們先嘗試將「8隊隊伍」分組，賽程表如下，請問賽程表有幾種？

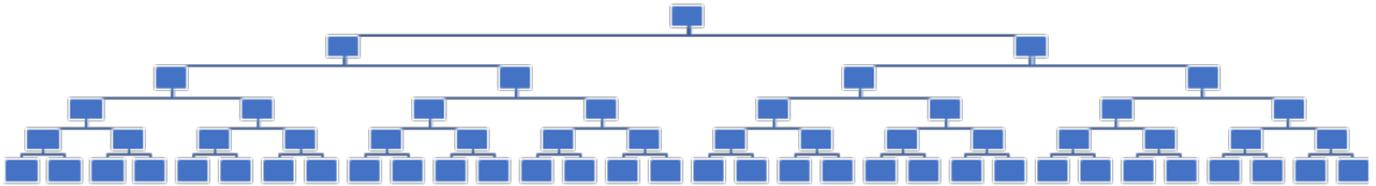


【解】

討論 2

請問將這前32強國家隊伍以抽籤方式分組，賽程表如下，若不考慮Group A、Group B、⋯、Group H的組別名稱差異，出現這個賽程表結果的機率是多少？

請搭配使用科學型計算機，以科學記號表示，並取3位有效數字。



【解】

討論 3

少年偵探隊花了不少時間，總算把出現這種賽程表的機率算出來。

柯南說：「我們利用『**古典機率**』算出出現這種賽程表的機率。」

請問：什麼是「**古典機率**」呢？

【解】

活動2 猜猜奪冠熱門隊？

討論1

阿笠博士問：「你們覺得德國隊衛冕的機率有多高？」

【解】

討論2

每個人都有一套模式，來計算「德國隊衛冕的機率」。

步美好奇想知道歷屆的世界盃得獎隊伍，因此搜尋前幾屆的得獎隊伍，資料如下：

【2014世界盃足球賽】

冠軍： 德國
亞軍： 阿根廷
季軍： 荷蘭
殿軍： 巴西

【2010世界盃足球賽】

冠軍： 西班牙
亞軍： 荷蘭
季軍： 德國
殿軍： 烏拉圭

【2006世界盃足球賽】

冠軍： 義大利
亞軍： 法國
季軍： 德國
殿軍： 葡萄牙

【2002世界盃足球賽】

冠軍： 巴西
亞軍： 德國
季軍： 土耳其
殿軍： 韓國

【1998世界盃足球賽】

冠軍： 法國
亞軍： 巴西
季軍： 克羅埃西亞
殿軍： 荷蘭

【1994世界盃足球賽】

冠軍： 巴西
亞軍： 義大利
季軍： 瑞典
殿軍： 保加利亞

步美說：「上屆冠軍德國隊，還有巴西、西班牙、阿根廷、法國隊，都是奪冠的熱門。」

柯南說：「世界盃足球賽分組抽籤結果出爐，各大博奕公司馬上公布32強奪冠賠率。大家可以參考看看這些資料。」

32強奪冠賠率前10熱門			
球隊	台灣運彩	日博bet365	立博Lodbrokes
巴西	4.25	5	5
德國	4.75	5.5	5.5
法國	6	7.5	7
西班牙	7.5	7	7
阿根廷	8.5	10	10
比利時	11	12	11
英格蘭	16	17	15
葡萄牙	22	26	26
烏拉圭	28	29	26
克羅埃西亞	28	34	34

【註】賠率隨時變動，以官方網站為準。若以台灣運彩，預測巴西奪冠為例，賠率4.25表示若押中，押100元可拿回425元，淨賺325元。

柯南說：「世界盃足球賽這32支隊伍，曾5度奪冠的巴西依舊是冠軍大熱門；上屆冠軍德國，看好度也高居第二。法國、西班牙、阿根廷等傳統強權，也都有機會踢進最後4強。」

阿笠博士問：「你們現在覺得德國隊衛冕的機率是否需要調整呢？」

【解】

活動3 賭盤玄機

經過激烈的比賽，呼聲很高的德國隊竟然意外出局！接著，進入前8強的爭奪戰…

前16強	比數	前8強
 法國 v.s.  阿根廷	4 : 3	 法國
 烏拉圭 v.s.  葡萄牙	2 : 1	 烏拉圭
 西班牙 v.s.  俄羅斯	1 : 1 pk賽3 : 4	 俄羅斯
 克羅埃西亞 v.s.  丹麥	1 : 1 pk賽3 : 2	 克羅埃西亞
 巴西 v.s.  墨西哥	2 : 0	 巴西
 比利時 v.s.  日本	3 : 2	 比利時
 瑞典 v.s.  瑞士	1 : 0	 瑞典
 哥倫比亞 v.s.  英格蘭	1 : 1 pk賽3 : 4	 英格蘭

元太說：「哇！巴西隊似乎很強，一路過關挺進前8強了。」

討論1

阿笠博士說：「世界杯足球賽進入最後關頭，除了全世界的球迷為之瘋狂外，賭盤也熱鬧非凡。『足厲害』運彩公司公布了『世足賽前八強奪冠賠率』，如下表。」

世足賽前八強奪冠賠率								
國家	法國	烏拉圭	俄羅斯	克羅埃西亞	巴西	比利時	瑞典	英格蘭
								
賠率	1賠3.7	1賠12	1賠18	1賠6	1賠3.1	1賠5.2	1賠22	1賠4.3

光彥說：「到底賭盤賠率是怎麼算出來的？」

灰原說：「賠率的計算，簡單地說就是：賠率 = $\frac{1}{\text{奪冠機率}}$ 。」

光彥說：「『奪冠機率』又是如何產生的？」

灰原說：「『奪冠機率』是從很多個下注者（博弈者）的主觀機率統計出來的。」

阿笠博士說：「大家依據奪冠賠率，換算出各國家代表隊的奪冠機率。」

（四捨五入約到百分位）

【解】已知賠率，則奪冠機率 = $\frac{1}{\text{賠率}}$

世足賽前八強奪冠賠率								
國家	法國	烏拉圭	俄羅斯	克羅埃西亞	巴西	比利時	瑞典	英格蘭
								
賠率	1賠3.7	1賠12	1賠18	1賠6	1賠3.1	1賠5.2	1賠22	1賠4.3
奪冠 機率								

討論 2

光彥說：「好奇怪喔！八隊奪冠機率的總和大於1呢！」

步美說：「我想根據剛算出的奪冠機率，按照比例同時下注，應該可以賺大錢吧！」

請幫他們想一想是否合理？

【解】

活動4

世界杯足球賽吸引著全世界球迷的目光，各國也出現了出色的球星。

步美說：「克羅埃西亞的表現出乎意料，我最喜歡隊長莫德里奇（Luka Modric）了！」

元太說：「眾多球星，你為什麼最喜歡莫德里奇？」

步美說：「莫德里奇的『傳球成功率』很高，實在太帥了！」

元太說：「所謂的『傳球成功率』是怎麼算出來的呀？」



討論1

克羅埃西亞隊長莫德里奇在世界盃表現出色，成為金球獎得主。

根據賽後資料統計，本屆世界盃莫德里奇的傳球情況

世界盃比賽	莫德里奇的傳球情況
前32強~對戰 <u>奈及利亞</u> 之役	全場完成63次傳球，成功傳球54次。
前8強~對戰 <u>俄羅斯</u> 之役	全場完成102次傳球，成功傳球89次。
前4強~對戰 <u>英格蘭</u> 之役	全場完成71次傳球，成功傳球63次。

阿笠博士問：「根據賽後資料，請算看看這三場比賽，莫德里奇的傳球成功率分別是多少？」（四捨五入約到千分位）

【解】

世界盃比賽	莫德里奇的傳球情況	傳球成功率
前32強~對戰 <u>奈及利亞</u> 之役	全場完成63次傳球，成功傳球54次。	
前8強~對戰 <u>俄羅斯</u> 之役	全場完成102次傳球，成功傳球87次。	
前4強~對戰 <u>英格蘭</u> 之役	全場完成71次傳球，成功傳球63次。	

討論 2

柯南說：「我們根據賽後資料，藉由過去事件發生的成功次數與總次數比，所計算出來的傳球成功率就是『頻率機率』。」

灰原說：「當觀測的次數越多，機率值也就越準確。」

阿笠博士問：「我們將這三場的比賽資料合併，莫德里奇的傳球成功率是多少？」

【解】

討論 3

步美說：「若進一步直接計算三場成功率的平均值，我得到成功率為86.6%，哪一種算法較合理呢？」

【解】

後記：

少年偵探隊熱情參與阿笠博士的預測「世界盃足球賽」遊戲，過程中學習到日常生活的機率分為「主觀機率」與「客觀機率」，而「客觀機率」又分為「古典機率」與「頻率機率」。

阿笠博士開心地宣布神秘禮物是「拉脫維亞之旅」，決定帶少年偵探隊到拉脫維亞旅行，希望在享受異國風情的同時，順便尋找創造發明的新點子。

然而，柯南心中卻存著疑慮，深知真實生活中處處充滿不確定性，當每個人做出機率的猜測後，又該怎麼判斷這個猜測是否合理呢？也許在未來的旅程中，可以找到答案吧！

第二節

蜂巢硬幣的猜想

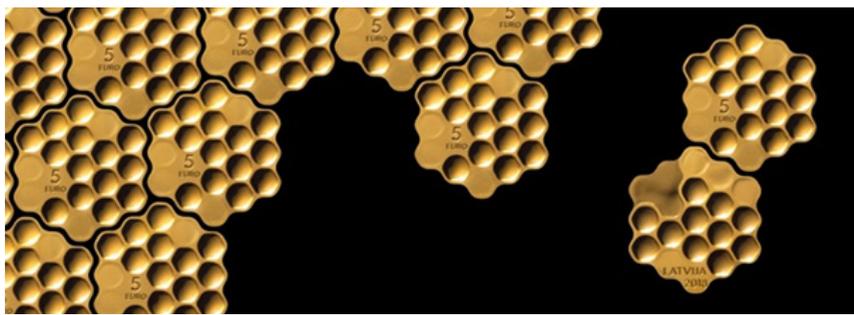
阿笠博士和少年偵探隊柯南、灰原、步美、元太、光彥一行人，興高采烈地開啟「拉脫維亞之旅」。拉脫維亞（Latvija）是位於波羅的海東岸的北歐國家，首都里加（Riga）是北歐地區波羅的海國家中最大、最繁忙的城市。

阿笠博士等人在里加（Riga）欣賞著北歐城市的風情。此時，柯南意外發現2018年發行的紀念幣「蜂巢硬幣」。



活動1 蜂巢硬幣的猜想

柯南手裡拿著奇特的硬幣說：「這款蜂巢形狀的硬幣可以拼圖耶！」



步美不禁大喊：「哇！好特別喔！」

灰原好奇的觀察蜂巢硬幣，驚呼：「硬幣正反兩面的設計，也富有巧思與創意！」



硬幣正面

蜂巢格子組成了拉脫維亞國土輪廓以及首都里加海灣的外形。硬幣銘文“LATVIJA”印製在硬幣左下方，最底部則印有發行年份2018。



硬幣背面

同樣為蜂巢格圖案，其中5個蜂巢格被覆蓋，象徵著硬幣面值5歐元。面值5同樣印在左下方，最下方則印有貨幣單位“euro（歐元）”。

討論 1

正當大家驚奇的欣賞著這特別的蜂巢硬幣時，

柯南拿著一枚硬幣說：「你們猜看看，投擲一枚蜂巢硬幣出現正面的機率是多少？」

【解】

討論 2

元太說：「兩面看起來差不多啦！我猜正反兩面的機率各占 $\frac{1}{2}$ 。」

光彥說：「才怪，兩面的蜂巢格數目不同，正面有11個蜂巢格，反面有14個蜂巢格。

我覺得正面的機率是 $\frac{11}{25}$ 。」

步美說：「蜂巢格分布的位置不同，可能會影響擲出正面的機率呀！」

每個人都有自己的看法與論點，正當大家爭論不休時~

阿笠博士說：「我們來動手試驗看看，分工合作投擲一枚蜂巢硬幣20、30、40次，觀察出現正面的次數，並算出出現正面的頻率！」

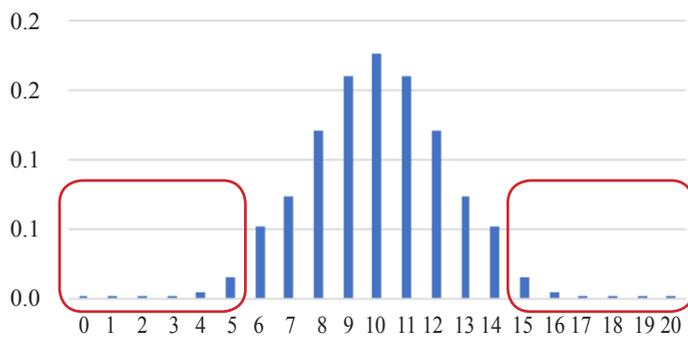
【解】

	20次	30次	40次
擲出正面的次數			
正面的機率			

將機率分布圖畫出如下：

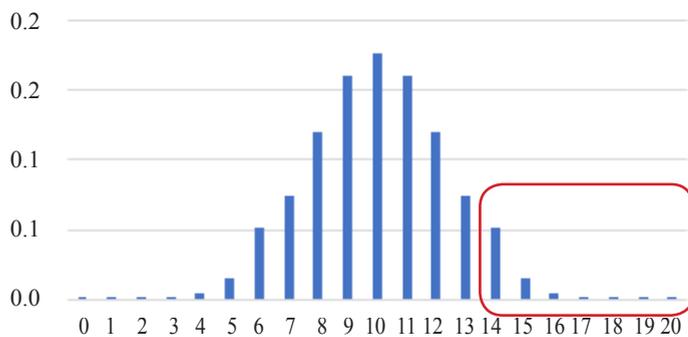
(3) 接下來，請為此次隨機試驗設定拒絕假設的機率 α ，並決定拒絕假設的區域。
 依據問題可以選單尾 $\{X \geq k\}$ 、 $\{X \leq k\}$ 或雙尾 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為合適的拒絕區域，
 且拒絕區域範圍內的機率總和恰為設定拒絕假設的機率 α 。

連連看：請將機率分布圖與拒絕區域，左右配對！



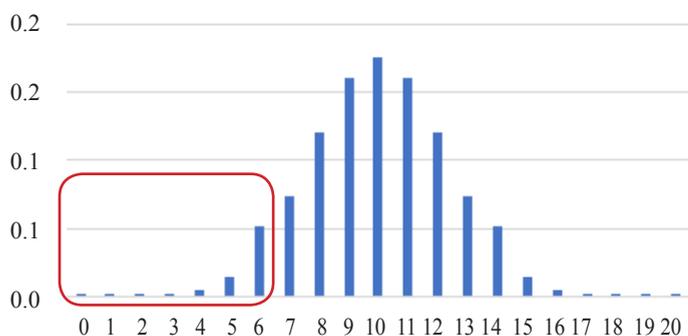
單尾 $\{X \geq k\}$

變數在群體間的變化方向是單方向的。在語句中有「是否高於？」、「是否優於？」等。



單尾 $\{X \leq k\}$

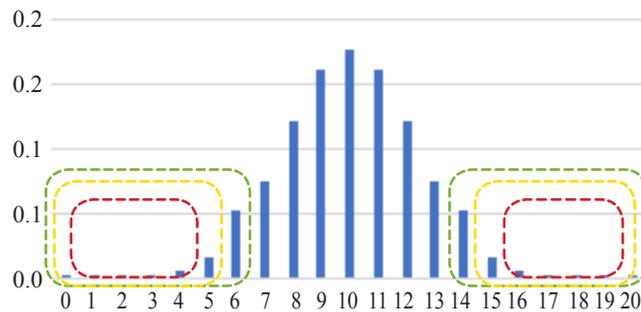
變數在群體間的變化方向是單方向的。在語句中有「是否低於？」、「是否劣於？」等。



單尾 $\{X \leq k_1 \vee X \leq k_2\}$

變數在群體間的變化方向，可能是雙方向的。在語句中使用兩者「有何區別？」、「有何不同？」

(4)阿笠博士說：「如果設定拒絕假設的機率 α 為0.1。現在想檢驗『擲出正面的機率為0.5』的假設，所以選取雙尾 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為拒絕區域。並且拒絕區域範圍內的機率總和恰為設定拒絕假設的機率 $\alpha=0.1$ 。」

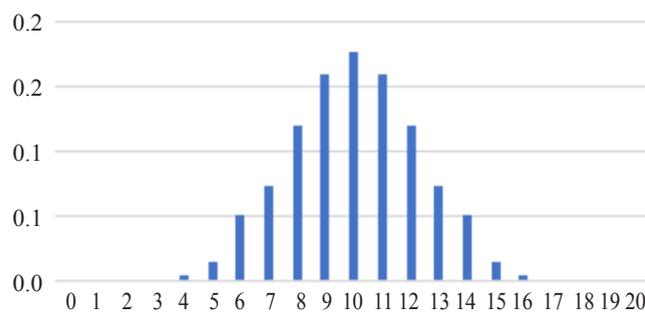


若元太投擲一枚蜂巢硬幣20次，擲出6次正面，且拒絕假設的機率 $\alpha = 0.1$ 。請在機率分布圖上，畫出雙尾的拒絕區域！

【解】

設定拒絕假設的機率 $\alpha = 0.1$ ，且選取雙尾 $\{X \geq k_1 \vee X \leq k_2\}$ 作為拒絕區域。

所以，拒絕區域為_____，拒絕區域如下圖：



(5)根據機率分布圖上所畫出的**拒絕區域**，請問元太擲出6次正面，是否拒絕假設呢？

如果灰原的猜想、試驗次數、拒絕機率 α 與拒絕區域類型都和元太相同，但是灰原擲出5次正面，是否拒絕假設呢？

【解】

設定拒絕假設的機率 $\alpha = 0.1$ ，且選取雙尾作為拒絕區域。

所以，拒絕區域為_____

因此，元太擲出6次正面，（在、不在）拒絕區域，則（拒絕、不拒絕）假設。

而灰原擲出5次正面，（在、不在）拒絕區域，則（拒絕、不拒絕）假設。

作出 X 的機率分布圖～

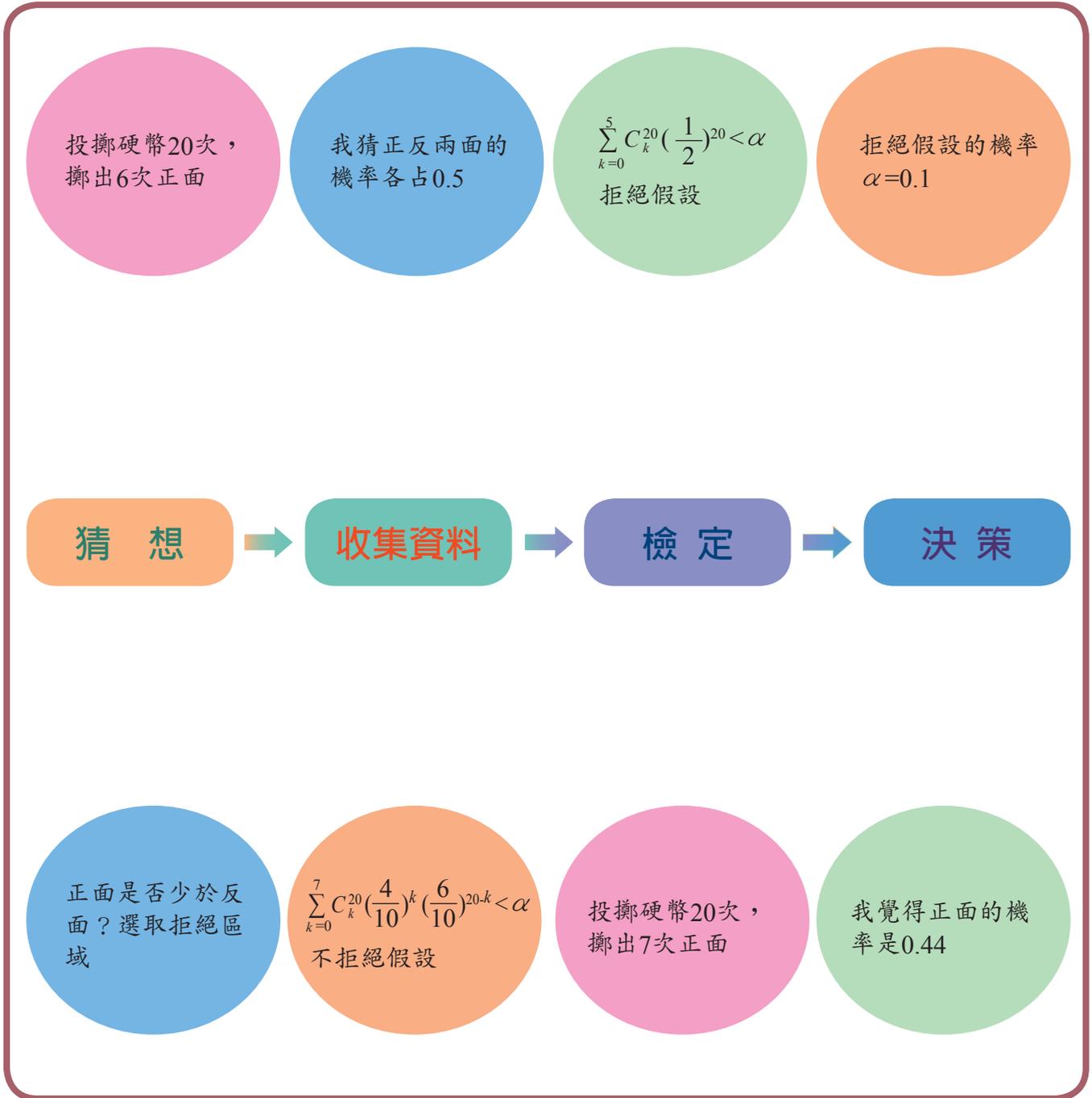
4. 設定**拒絕假設的機率** $\alpha =$ _____，並決定**拒絕假設的區域**為_____。

5. 請做出決策，說明是否拒絕你的假設呢？

活動2

假設檢定的四個步驟：**猜想**→**收集資料**→**檢定**→**決策**。

連連看：請將蜂巢硬幣的試驗過程與『假設檢定』的流程做對照與比較。



活動3

某天，步美拿著兩袋不同顏色的球，混合倒入一個桶子中，突然驚呼「啊！我剛忘記先數數看兩種顏色的球分別各有幾顆了！」

灰原拿著裝著兩種顏色球的桶子說：「沒關係！正好可以來玩『神預測』遊戲，看誰預測能力較準喔！」



討論1

請猜猜看，黃色球佔全部球個數的比例是多少呢？

【解】

我猜黃色球佔全部球個數的比例是_____。

討論2

柯南說：「利用『**假設檢定**』的方法，來檢驗是否拒絕自己的假設呢？」

(1)從桶子中，每次取一球，取後觀察顏色後**放回**，重複取 n 次，算出此試驗取出黃球的次數？

【解】

重複取_____次球，其中取出黃球有次_____。

此試驗取出黃球的樣本比例是_____。

討論3

(1)令隨機變數 X 表示黃球的球數，則 $X \sim B(n, p)$ ，請寫出 X 的機率質量函數？並作出 X 的機率分布圖。

【解】

令隨機變數 X 表示出現正面的次數，則 $X \sim B(\text{_____}, \text{_____})$ ，

$P(X=k)$ 表示恰有 k 次成功的機率，即 $P(X=k)=\text{_____}$ ，

則隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k)=\text{_____}$ ，其中 $k=0, 1, 2, \dots, \text{_____}$ 。

成功 次數 k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率											
成功 次數 k											
機率											

作出 X 的機率分布圖～

(2)請為此次隨機試驗設定拒絕假設的機率 α ，並且決定拒絕假設的區域。

【解】

設定拒絕假設的機率 α 為_____，且決定拒絕假設的區域為_____。

(3)請繼續將檢定過程記錄下來，並做決策是否拒絕假設呢？

【解】

討論4

灰原說：「現在我們實際數看看球桶中，黃色球佔全部球個數的比例是多少！」

請各組分別數出球桶中，黃色球佔全部球個數的比例，並驗證看看與假設檢定結果的差異。

【解】

～課後練習活動～

★真的好神！

阿笠博士和少年偵探隊等一行人來到美麗的寶島「台灣」。他們一行人來到「好神廟」裡祈求好運氣，恰巧廟裡舉辦擲「好神筊」送「好神氣球」活動。

「好神廟」擲「好神筊」活動

比賽辦法：每組10人，投擲「好神筊」20次，

擲出「聖筊」次數最多者獲勝，

就可以將「好神氣球」帶回家。

元太直呼：「好神筊的形狀好像月亮呀！但是兩面不同，一面是凸的，另一面卻是平的耶！」

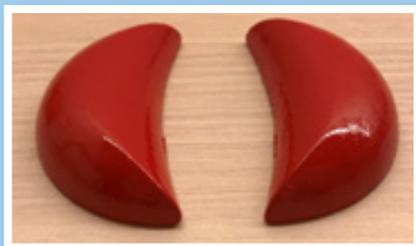
步美說：「好神筊擲出『聖筊』的機率是多少？」

柯南說：「我們可以先『猜想』，再利用『假設檢定』來判斷是否拒絕猜想呀！」

聖筊



陰筊



笑筊



討論 1

請「猜想」好神筊擲出「聖筊」的機率，並投擲「好神筊」20次。依照假設檢定的流程：「猜想→收集資料→檢定→決策」，來判斷是否拒絕猜想？並將過程記錄下來。

【解答】

1. 猜想

若猜測好神筊擲出「聖筊」的機率是_____。

2. 收集資料

投擲「好神筊」20次，觀察出現「聖筊」有_____次。

此試驗擲出「聖筊」的機率是_____。

3. 檢定

猜測好神筊擲出「聖筊」的機率是_____，且投擲「好神筊」20次，則 $X \sim B(20, \text{_____})$ 。

若 $P(X=k)$ 表示恰有 k 次成功的機率，即 $P(X=k) = \text{_____}$

則隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k) = \text{_____}$ ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, 20$ ，

成功 次數 k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
機率											
成功 次數 k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
機率											

將機率分布圖畫出如下：

若設定拒絕假設的機率 $\alpha = \text{_____}$ ，且選取_____作為拒絕範圍區域。

所以，拒絕區域為_____

4. 決策

素養導向數學教材 / 單維彰 主編

— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院，2019.12

1. 數學教育
2. 中學數學
3. 教材與教法

發行人：郭工賓

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

召集人：單維彰

副召集人：林碧珍、鄭章華（依姓氏筆劃順序排列）

編輯小組：施羿如、晏向田、許曉芸、陳宗賢、陳彥霖、陳維民、陸昱任、曾明德、
曾俊雄、歐志昌、鄧家駿、簡秀純（依姓氏筆劃順序排列）

作者：施羿如、歐志昌（依姓氏筆劃順序排列）

執行編輯：江增成、張淑娟、梁雅婷、蔡敏冲、盧培春
（依姓氏筆劃順序排列）

出版年月：108年12月

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

本書經雙向匿名審查通過

（請遵創用 CC 授權「姓名標示－非商業性－相同方式分享」規定，歡迎使用）

