

素養導向數學教材 科學記號與10的冪次

教師手冊



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

科學記號與10的冪次

背景

107課綱將科學記號的運算從國中移到高中，指對數中的「10的冪次」、「認識常用對數的符號」與「計算機的使用」皆在高中課程中第一次出現。

設計理念

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以107課綱將其移至高一上學期第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『(高一)先建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學(高二介紹指對數函數)再進入形式運思，也就是抽象概念與公式使用的部分』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數感，是科學素養的一部分。本教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，以達到符合數學素養教材的目標。

教材架構

以太陽系行星的大小、與太陽的距離，進行探索的活動，進而熟悉科學記號的四則運算。再安排萬有引力、乾冰、密度、 ppm …等情境問題，讓學生操作。

使用 pH 值濃度問題，引出 10 的冪次符號。實驗室中，混和溶液濃度的計算需使用到科學記號的運算，配合計算器的使用，計算其 pH 值，再連結到常用對數 \log 符號的意義。最後安排自然科學中放射性物質、龍捲風現象、沙灘傾斜程度…等自然現象中的數學，作為練習。

課程的前半段目標為科學記號的四則運算，後半段為由 $10^x = a$ 到 $x = \log_{10} a$ ，藉由活動理解到符號使用的需求，進而認識並操作之。

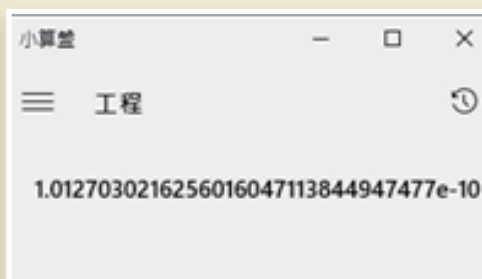
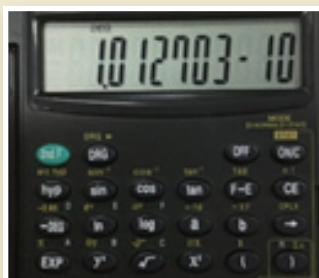
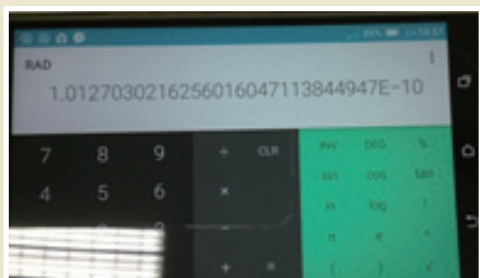
壹、科學記號

小丁閒來無事，把玩手機中的計算機，亂亂按之後，出現了奇怪的結果：

$$1.012703e-10$$

$$5.79066054e12$$

怎麼會這樣呢？



相信不少同學已有這個經驗，使用計算機運算時，若答案很小或很大的時候，就會有這種結果。但它們各代表甚麼意思呢？

活動 1

請以計算機輸入以下各式，紀錄結果：

(1) $4120000000 + 5982300000 =$ _____

(2) $5200000000 - 800000 =$ _____

(3) $30000 \times 900000000000 =$ _____

(4) $2 \div 5000000000 =$ _____

【教學活動安排】

從手邊就有的計算機不尋常的顯示結果，引起好奇心，引入國中學過的科學記號。

【教學注意事項】

1. 此處附上三種計算工具的畫面截圖，圖一為手機計算機，圖二為上課提供的簡易型工程用計算機，圖三為電腦的小算盤，其科學記號法的表示會稍有不同，請授課教師視上課使用工具說明。
2. 若是人手一機不普遍的學校，建議的教具可以使用 $Window$ 內建之“小算盤”附屬應用程式來進行演示，其“工程型”輸入鍵靠滑鼠點選、整體型式與工程型計算機相似，且無10位數格位限制（有些手機有10位數格位限制），可運用於本教材中所有之數字運算、可作為教師教學演算時之教學工具。

活動1

【教學活動安排】

1. 讓學生實際操作計算器，安排例題涵蓋四則運算，也有10的負冪次方表示，由此活動引入。
2. 也說明若無計算機如何使用指數律來計算。

【教學注意事項】

1. 教師可以**活動1**後，請學生猜想及解釋，計算機顯示的結果是甚麼意思，為什麼會是這種表示法，藉此複習或注意是否有學生在科學記號的學習有困難。
2. 答案的表示法也許會因使用計算器不同而有稍微差異。

【活動1 解答】

(1) $1.01023 e10$

(2) 5199200000

(3) $2.7 e16$

(4) $4 e-10$

國中的時候，我們曾學習過將數以科學記號表示，

比如說(3)「 $30000 \times 900000000000$ 」與(4)「 $2 \div 5000000000$ 」可改寫為

$$(3 \times 10^4) \times (9 \times 10^{11})$$

與 $2 \div (5 \times 10^9)$

若沒有計算機的幫助，要如何計算科學記號運算的結果？

因為 $3 \times 9 = 27$ ， $10^4 \times 10^{11} = 10^{15}$

由乘法的性質可得 $(3 \times 10^4) \times (9 \times 10^{11}) = 27 \times 10^{15} = 2.7 \times 10^{16}$

而 $2 \div (5 \times 10^9) = 2 \div 5 \div 10^9 = 0.4 \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-1} \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-10}$

再回頭看看前一頁計算機顯示的結果：

$$30000 \times 90000000000 = 2.7e16$$

$$2 \div 5000000000 = 4e-10$$

$e16$ 表示 $\times 10^{16}$

$e-12$ 表示 $\times 10^{-12}$

e 是英文 *exponent* 指數之意。

原來，計算機顯示很大或很小的數時，使用的是科學記號。

$$2.7 e16 = 2.7 \times 10^{16} \quad 4 e-12 = 4 \times 10^{-12}$$

科學記號 $a \times 10^m$ 其中 $1 \leq a < 10$ 稱為科學記號中的係數， m 為整數。

但使用計算機計算上列式子時，最不方便的是要數出有幾個0，若以科學記號表示則會簡便許多，可惜對某些計算機輸入時，反而不方便使用科學記號，所以在許多情況，例如計算莫耳分子數量，萬有引力大小…時，我們還是需要學習如何使用科學記號紙筆運算來進行科學記號的加減乘除。

活動2：

請計算下列各題，並以科學記號法回答：

(1) $5 \times 10^6 + 7 \times 10^6 =$ _____ (2) $3.1 \times 10^3 + 5.21 \times 10^2 =$ _____

(3) $2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} =$ _____ (4) $(2.25 \times 10^{-24}) \times (7 \times 10^{-13}) =$ _____

(5) $\frac{1}{5 \times 10^4} =$ _____ (6) $\frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} =$ _____

活動2：

【教學活動安排】

此處安排使用指數律計算，不規定是否使用計算機，因為在使用計算機輸入時，必須將數字還原為一般表示法，或使用指數律並同時使用計算機…。待學生以各種不同方式計算出來之後，教師再領導學生討論，並學習不用計算機時的計算方式，呼應前面的教學。

【教學注意事項】

1. 注意學生是否嫻熟指數律，可以透過走動觀察學生表現。
2. 學生可能會注意到第(2)小題，可以將 10^6 視為一個單位，僅計算 $5+7$ ，再進位即可。所以加減法時，可以使用「提出公因數」的策略，而乘法可使用交換律及指數律，除法則使用「將分母擴分為僅有10的幕次」策略。
3. 中後段學生的困難點為：
 - (1) 先能看出欲加減的兩個科學記號可以提出的10的相同次方後，再能正確的操作係數部分的小數點移動位數，然後進行加減。
 - (2) 進行除法不必到最簡分數，而是要將分母化為單項的 10^m 形式，再寫成「分子 $\times 10^{-m}$ 」。
4. 以往國中7年級就須學習科學記號的運算，現在高中10年級才學習，學生對數字運算的處理經驗增加，應該可以比較容易吸收。

【活動2 解答】

- (1) $5 \times 10^6 + 7 \times 10^6 = 12 \times 10^6 = 1.2 \times 10^7$
- (2) $3.1 \times 10^3 + 5.21 \times 10^2 = 3.1 \times 10^3 + 0.521 \times 10^3 = 3.621 \times 10^3$
- (3) $2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-2} + 0.3 \times 10^{-2} = 2.3 \times 10^{-2}$
- (4) $(2.25 \times 10^{-24}) \times (7 \times 10^{-13}) = (2.25 \times 7) \times (10^{-24} \times 10^{-13}) = 15.75 \times 10^{-24-13}$
 $= 15.75 \times 10^{-37} = 1.575 \times 10^{-36}$
- (5) $\frac{1}{5 \times 10^4} = \frac{1}{5} \times 10^{-4} = 0.2 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-5}$
- (6) $\frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} = \frac{5}{2} \times 10^{-7-(-4)} = 2.5 \times 10^{-3}$

【任務1】

(1) $8 \times 10^{-6} + 9 \times 10^{-6} =$ _____ (2) $6.02 \times 10^{23} + 6.02 \times 10^{24} =$ _____

(3) $2.4 \times 10^{83} + 3 \times 10^{82} =$ _____ (4) $(8 \times 10^{-6}) \times (9 \times 10^{-6}) =$ _____

(5) $\frac{1}{2.5 \times 10^{36}} =$ _____ (6) $\frac{3 \times 10^{-27}}{8 \times 10^{-13}} =$ _____

活動3：

(一)、請跟老師一起欣賞附件一的內容，並實際操作其中摺紙的部分。請動動手摺出太陽系（請看附件一）摺完之後，你是否感到疑惑，真的是這樣嗎？不妨參照一下附件一中的太陽系示意圖，你是否可以感覺到遠近的比例呢？

(二)、上網查行星資料，其資料如下：

水星的小檔案： 平均日距 57,909,100公里

金星的小檔案： 平均日距 108,208,000km

地球的小檔案： 平均日距 149,597,887.5 km

火星的小檔案： 平均日距 227,936,640 km

木星的小檔案： 平均日距 778,547,200 km

土星的小檔案： 平均日距 1,433,449,370 km

天王星的小檔案：平均日距2,876,679,082 km

海王星的小檔案：平均日距 4,503,443,661 km

冥王星的小檔案：平均日距 5,913,520,000 km

參考資料：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%B7%E7%8E%8B%E6%98%9F>

增加了上面的這些距離的資料，能幫助你很快地感覺到這些距離之間的遠近，或是比例關係嗎？

【任務1解答】

- (1) 1.7×10^{-5} (2) 6.622×10^{24} (3) 2.7×10^{83}
(4) 7.2×10^{-11} (5) 4×10^{-37} (6) 3.75×10^{-15}

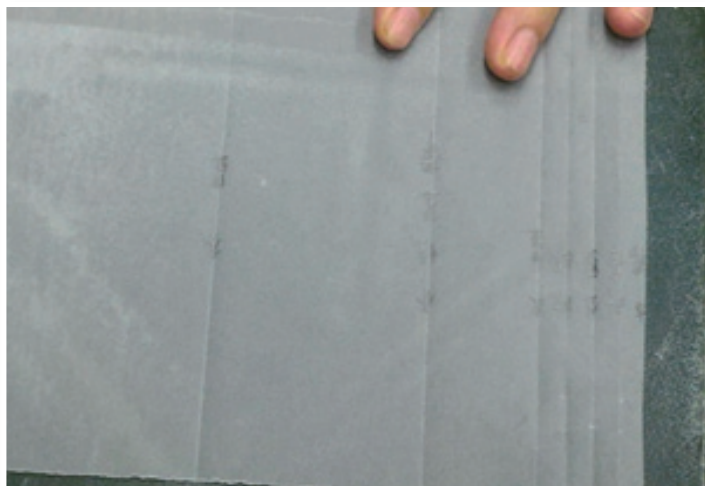
活動3

【教學活動安排】

1. **活動3** 剛開始，可以請老師朗讀或請學生先閱讀再引導，文章中有一些關於太陽系相關的有趣資訊，以及作者發現的一個摺紙方式，可以描述太陽系各行星之間的距離。
2. 接著，發給學生紙張（可使用透明描圖紙來摺），請他們跟著附件中第三頁的文字敘述，此處老師可以請學生再讀一次這一段內容，參照最後的附圖，摺出每一個太陽系行星位置，做上記號。
3. 完成後，可以提問：這樣摺出來的位置真的很準嗎？作者說蠻準的，真的嗎？我們可以算算看嗎？需要哪些資料？
4. 提示學生，學習單第四頁上有各行星到太陽平均距離的數據，再接續 **活動3** 的第二部分。

【教學注意事項】

1. 建議採用透明描圖紙 A3 大小，讓同學自行決定如何裁切，再連接成一長條。描圖紙適合多次摺疊，若採一般學校考試用紙也可以。
2. 學生利用描圖紙繪製行星位置，照片如下：



(1) 請根據行星的平均日距製作行星距離表，將太陽系各行星軌道至太陽中心的距離 d 以科學記號法表示 ($a \times 10^n$ ， a 四捨五入到小數點後第二位，就是取三位有效數字的意思)

太陽系各行星軌道至太陽中心的距離 d ：

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
d (公里)									

小幫手：有效數字

當一個數值以科學記號表示時，如 4.02×10^{16} ，則係數 4.02 中有效數字為 3 位，

如 4.2×10^{16} ，則係數 4.2 中有效數字為 2 位，

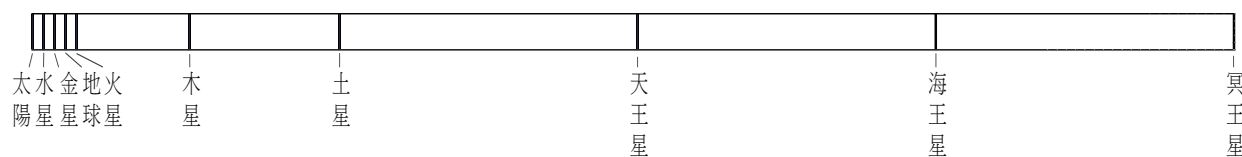
如 4.0×10^{16} ，則係數 4.0 中有效數字為 2 位。

又如 $50426 = 5.0426 \times 10^4$ 取 2 位有效數字後為 5.0×10^4 (四捨五入時 4 捨去)

$50726 = 5.0726 \times 10^4$ 取 2 位有效數字後為 5.1×10^4 (四捨五入時 7 進位)

有效位數在科學上，可以幫助溝通在測量時，使用的最小度量單位。

(2) 在你所摺的紙上，如果將冥王星到太陽的距離視為 1，則海王星到太陽的距離為何？



【教學活動安排】

1. 以引導式的小題，發展「摺紙上的行星距離比例是否與真正的距離比例相符合？」的探索請學生兩人一組合作討論，並完成學習單，最後由教師請一些同學發表。
2. 摺紙完成後，可以請同學發表其摺紙成品。
3. 將摺紙描圖行星位置融入教學活動中，實際體會太陽系星球之相對距離遠近，除了加深學生的學習效果，也可以引發學生對於天文學的興趣。

【教學注意事項】

1. 有效數字的定義請參酌網頁內容：
 國家教育院環境科學大辭典 <http://terms.naer.edu.tw/detail/1317134/>
 師大高中物理網站 <http://enjoy.phy.ntnu.edu.tw/mod/resource/view.php?id=20248>
2. 對於有效數字的認識，預設物理科已進行教學，若學生尚有不懂，老師可透過走動觀察隨時給予協助。
3. 有少部分同學無法讀懂附件中摺紙的最後一個步驟，教師可以從旁協助，或請已經完成的組別來幫助有困難的同學。

【活動3 解答】

(1)

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
d (公里)	5.79×10^7	1.08×10^8	1.50×10^8	2.28×10^8	7.79×10^8	1.43×10^9	2.88×10^9	4.50×10^9	5.91×10^9

(2) $\frac{3}{4} = 0.75$

(3) 在摺紙上，若將太陽坐標設為0，冥王星為1，請檢視其他行星的坐標是否如下表？

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
坐標	$\frac{1}{128}$ =0.0078125	$\frac{1}{64}$ =0.015625	$\frac{3}{128}$ =0.0234375	$\frac{1}{32}$ =0.03125	$\frac{1}{8}$ =0.125	$\frac{1}{4}$ =0.25	$\frac{1}{2}$ =0.5	$\frac{3}{4}$ =0.75	1

(4) 請根據第4頁的資料，驗證真實宇宙中，利用計算機求海王星到太陽的距離與冥王星到太陽的距離的比值為多少？(請取有效數字二位)

(5) 根據第4頁的資料，計算各行星到太陽的距離與冥王星到太陽的距離比值，得到下表，請任選一個驗證是否正確。(四捨五入到小數點後第四位)

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
比值	0.0098	0.0183	0.0254	0.0386	0.1318	0.2420	0.4873	0.7614	1

(6) 比較一下(4)與(5)的結果，你覺得這個摺紙的方法準不準呢？說一說你的看法。

【教學活動安排】

第(3)小題也可將表格空白，讓學生自己填出數據，可依據學生程度給予不同強度的設計。因應此題設計並不是要大量計算，所以決定將數據呈現，讓學生做驗證即可。

【活動3 解答】

- (3) 皆正確
- (4) 0.76
- (5) 皆正確
- (6) 沒有一定答案，讓學生各自表述。

【任務2】

小丁為了營造社團晚會氣氛，購買了一箱固體乾冰，廠商將乾冰切成每一小塊正立方體，邊長為 3cm 。回到家後，小丁決定拿其中一部分來調配乾冰汽水，他想知道，每一小塊固體乾冰裡，有多少個 CO_2 分子呢？

(1) 化學上有一個數量單位：任何物質含有 6.02×10^{23} 個粒子均稱為 1 莫耳，請計算 9.03×10^{22} 個碳原子為多少莫耳？

小幫手：

6.02×10^{23} 被稱為
亞佛加厥數

(2) 二氧化碳的分子量為 44，表示一莫耳的 CO_2 重量為 44 公克，一莫耳物質中含有約 6×10^{23} 個粒子，已知乾冰密度為 1.56g/cm^3 ，請問每一小塊固體乾冰裡，

- ① 重量為多少？
- ② 有多少莫耳的 CO_2 ？
- ③ 有多少個 CO_2 分子？

活動4

當小丁拿出乾冰時，才發現外包裝有下列警語：

“在低濃度時，二氧化碳氣體是無味的，但在較高濃度時會使人感到刺痛甚至窒息。這是因為當吸入濃度比大氣層平常濃度（二氧化碳約占 350ppm ）高很多的二氧化碳時，氣體溶解在黏膜和唾液中，產生了碳酸，所以會有酸的味道且鼻子和喉嚨會產生刺痛感。

研究發現，二氧化碳高於 $5,000\text{ppm}$ 的時候，會影響健康，而高於約 $50,000\text{ppm}$ 的濃度（相當於空氣中5%的體積）被認為是有危險性的。”

小丁想：糟糕，我買了這麼多乾冰（10公斤！），而晚會場地為密閉空間，如果全部使用完，那會不會造成危險呢？

【任務2】

【教學活動安排】

1. 藉由生活中的情境問題，讓學生增加處理科學記號的乘除運算的機會。
2. 此題接續 **活動4**，作為引導。

【教學注意事項】

第(2)小題中的體積、密度、重量之間，與重量、分子量、莫耳數之間的關係，是中下程度學生學習理化時理解困難之處，建議教師以數學比例的觀點，讓同學重新學習，並運用在學習單的情境中。

【任務2解答】

- (1) $9.03 \times 10^{22} \div (6.02 \times 10^{23}) = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15 \text{ mole}$
- (2) ① $(3 \times 3 \times 3) \times 1.56 = 42.12$ 公克
② $42.12 \div 44 = 0.9572 \sim 0.957$ 莫耳
③ 約為 $0.957 \times (6.02 \times 10^{23}) \sim 5.76 \times 10^{23}$ 個分子

我們來幫忙想想，要怎麼回答這個問題 …

首先，因為現在乾冰的量是固定的10公斤，二氧化碳的濃度高於 5000ppm 時會有危險，所以可以計算晚會場地至少要多少立方公尺，才不會影響健康。

想法：二氧化碳濃度 (單位 ppm) $\leq 5000\text{ppm}$

目標：當 10 公斤的乾冰，全部成為氣體時，其體積為多少微升 ($\mu\text{l} = 10^{-3}\text{ml}$) 呢？

因為 10 公斤的乾冰，全部成為氣體時，其莫耳數與體積皆不改變，所以：

(1) 計算10公斤的二氧化碳是多少莫耳？接著再換算為多少公升：

小幫手：

1. 一公升 ($L = 10^3\text{ml}$) 的氣體溶液中有一微升 ($\mu\text{l} = 10^{-3}\text{ml}$) 的某物質，某物質含量即為 1ppm 。
2. 常溫常壓下，1莫耳氣體的體積為 24.5公升。

(2) 若不計空氣中原有的 CO_2 的濃度，10 公斤乾冰全部變成二氧化碳氣體，請計算晚會場地的體積至少要多少立方公尺，才不會影響健康？

(3) 動動腦，估計一下你們現在的教室，體積大約是多少立方公尺？

小丁的場地至少要幾間教室呢？又學校裡，那些室內場所可以做為晚會地點呢？

活動4

【教學活動安排】

1. 希望透過此題讓不愛理化的學生也能理解知識的需要性，提升學習的興趣。
2. 關於場地大小，那些場地適合或不適合，此處可開放讓學生討論。

【教學注意事項】

1. 第二小題中的體積、密度、重量之間，與重量、分子量、莫耳數之間的關係，是中下程度學生學習理化時理解困難之處，建議教師以數學比例的觀點，讓同學重新學習，並運用在學習單的情境中。
2. 計算教室的長寬大小可以真的用捲尺來量，或地面上現有的格子數量，高則可使用目測黑板高度的若干倍，再測量黑板高度而得知；或請班上最高的同學站在牆邊，同學目測教室高度約為此同學的幾倍...，可以全班同學腦力激盪。

【活動4 解答】

- (1) $10 \times 1000 \div 44 = 227.27$ 莫耳， $227.27 \times 24.5 = 5568.115 \approx 5568$ 公升
- (2) 因為 1 公升 = 10 微升，且 x 立方公尺換算得 $1000x$ 公升，故解不等式

$$\frac{5568 \times 10^6}{x \times 1000} \leq 5000 \text{ 得 } x \geq 1113.6 \text{ 立方公尺。}$$

- (3) 依各教室而有不同的估計值。

貳、10的冪次

活動5

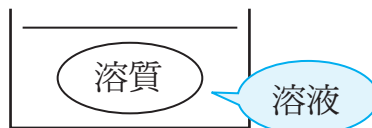
阿丁在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，一瓶內含 pH 值為 3 的鹽酸1公升，另一瓶內含 pH 值為 4 的鹽酸1公升，他將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少？

小幫手：

將溶液中的 $[H^+]$ 濃度表示為 10^{-x} ，則 pH 值定為 x 。

計算：

莫耳濃度的公式為 $\frac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積(公升)}}$



若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\frac{x}{1} \text{ mole / 公升}$ ，
反過來，若溶液的莫耳濃度為 $x \text{ mole / 公升}$ ，

則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、… 依此類推
所以 pH 值為 3 表示這瓶溶液的 H^+ 濃度為 $10^{-3} \text{ mole / 公升}$ 。

今此溶液為1公升，其中含有 10^{-3} mole 的 H^+

另一瓶 pH 值為 4 表示這瓶溶液的 H^+ 濃度為 $10^{-4} \text{ mole / 公升}$ 。

同理可知，此1公升溶液中含有 10^{-4} mole 的 H^+

因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3} + 10^{-4}) \text{ mole}$ 的 H^+

由上述公式可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3} + 10^{-4}}{2} = \frac{10 \times 10^{-4} + 1 \times 10^{-4}}{2} = \frac{11 \times 10^{-4}}{2} = 5.5 \times 10^{-4}$$

【討論】：

因為 $10^{-4} < 5.5 \times 10^{-4} < 10 \times 10^{-4} = 10^{-3}$ ，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？

活動5

【教學活動安排】

1. 藉由配置溶液的問題，引入 pH 值與濃度計算的問題，以線性直觀的迷思，來探討5.5是10的幾次方？
2. 先以迷思引入，再來破迷思，但要如何找到 x 值，以此引起動機。
3. 將證明： $10^x = 5.5$ 中的 x 為無理數收至附件(二)。

【教學注意事項】

1. 莫耳濃度是國中理化的內容，對中下程度學生來說，是困難的觀念，所以學習單中以類比的方式解釋每公升中含多少莫耳溶質，理解其比例關係，最後計算濃度的過程中，剛好使用了先前所教的科學記號的運算，呼應前面的學習內容。
2. 此處舉例為避免水的解離效應，所以舉例要與 pH 值 7 差 2。
3. 討論時老師可多觀察，並讓學生提出策略,讓學生能思考。
4. 同學會發現：不可能剛好會是 5.5，這是因為 $10^x = 5.5$ 中的 x 為無理數，所以請取近似值到小數第二位，使得答案最接近 5.5 即可。

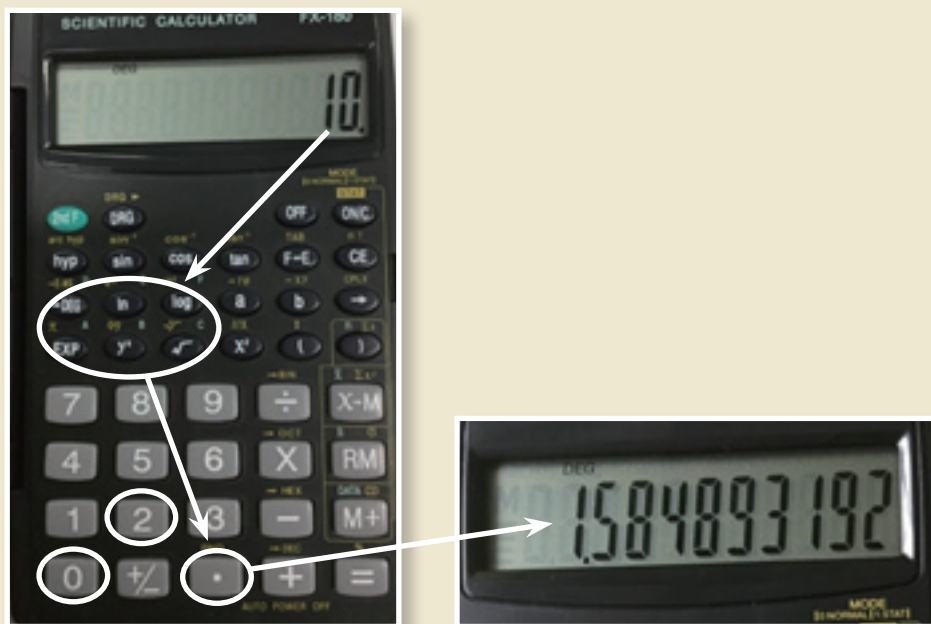
那我們不妨用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5？

利用 y^x 鍵學習輸入計算 $10^{0.2}$

輸入10 → 按下 y^x 鍵 輸入0.2 → 顯示

小幫手：

證明： $10^x=5.5$ 中的 x 為無理數。
(請見附件(二))。



例：計算溶液的 pH 值

$$[H^+] = 5.5 \times 10^{-4}, \text{ 因為 } 5.5 \approx 10^{0.74}$$

$$\text{所以 } 5.5 \times 10^{-4} \approx 10^{0.74} \times 10^{-4} = 10^{-3.26} \Rightarrow [H^+] = 10^{-3.26} \Rightarrow pH \text{ 值為 } 3.26$$

由計算機顯示的結果，我們取 0.74 使 $10^{0.74}$ 為 5.5 的近似值，因此正確的寫法應為

$$10^{0.74} \approx 5.5$$

為了符號使用上的方便，所以使用以下寫法取代 $10^{0.74} \approx 5.5$ ，就像 $\sqrt{2} = 1.414$ 表示 1.414 是 $\sqrt{2}$ 的近似值、 $\pi = 3.1415$ 是 π 的近似值... 等一樣的意思。

$$10^{0.74} \approx 5.5$$

【教學活動安排】

由「10的幾次方會是5.5？」的問題，學習使用計算機的 x^y 鍵來計算。因為需要配合估計的能力，才能得到 $5.5 \approx 10^{0.74}$ ，在過程中讓學生熟悉10的幕次（小數次方）有遞增的性質。

【教學注意事項】

因為計算機鍵盤上還有一個log鍵，旁邊有 10^x 記號，有一些學生會利用此鍵，發現可以直接得到 $5.5 \approx 10^{0.74}$ ，老師可以藉此說明本堂課的目的，就是最後會認識這個鍵的作用，仍不會影響後面的教學。同時， x^y 鍵可以計算任何底數，但log鍵只能處理以10為底數的問題。

【附件二】

證明 $10^x=5.5$ 中的 x 為無理數。

設 $10^x=5.5$ 中的 x 為有理數，則 x 可表示為 $x = \frac{q}{p}$ ， p, q 為非零整數

$$\text{則 } 10^{\frac{p}{q}}=5.5 \Rightarrow (10^{\frac{p}{q}})^q=5.5^q \Rightarrow 10^p=5.5^q \Rightarrow 2^p \times 5^p=11^q \times 2^{-q} \Rightarrow 2^{p+q} \times 11^q$$

但 p, q 為非零整數，故上式無解，得到矛盾。

因此假設錯誤， x 應為無理數，得證。

【任務3】

(1) 將 pH 值分別為 9 與 10 的強鹼溶液各 1 公升混，若不考慮其他因素，請問這個混合過的溶液 pH 值為多少？

(2) 將 pH 值為 3 的鹽酸與 pH 值為 4 的鹽酸，取體積分別為 1 公升與 3 公升，將兩溶液混合，若不考慮其他因素，請問混合溶液的 pH 值為多少？

利用計算機得到 $10^{0.51} = 3.25$ ， $3.25 \times 10^{-4} = 10^{0.51} \times 10^{-4} = 10^{-3.49}$ ，所以 $pH = 3.49$

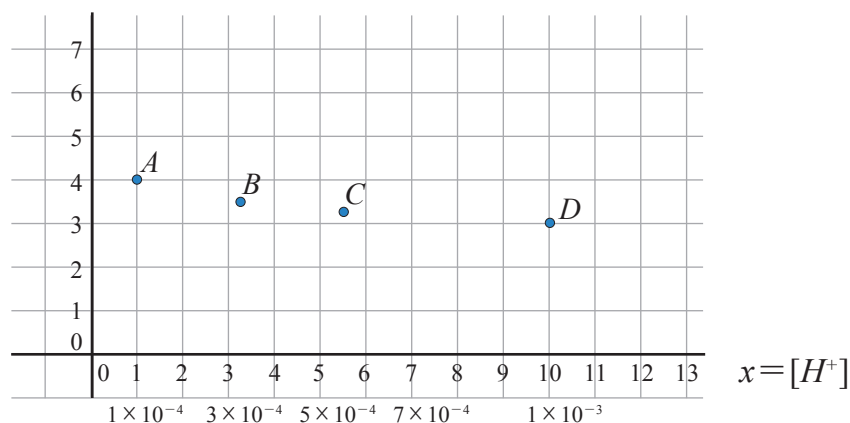
由上述計算氫離子濃度與 pH 值得到的結果，我們可以將其中 4 個資料製成一個表格：

$[H^+]$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	5.5×10^{-4}	3.25×10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	5.5×10^{-10}	10^{-10}
pH	1	2	3	3.26	3.49	4	5	6	7	8	9	9.26	10

如果將這些資料，畫在一個橫軸為 $[H^+]$ ，縱軸為 pH 值的坐標軸上，則上面這些資料點是否符合「 $[H^+]$ 與 pH 值為線性關係」？

下圖為氫離子濃度與 pH 值的關係圖，可以發現這些點並不在一直線上：

$y = pH$ 值



$A(1 \times 10^{-4}, 4)$
 $B(3.25 \times 10^{-4}, 3.49)$
 $C(5.5 \times 10^{-4}, 3.26)$
 $D(1 \times 10^{-3}, 3)$

【任務3】

【教學注意事項】

(1)與(2)題皆為酸鹼溶液混合的題目，實際情境中要考慮相對之酸鹼強度以決定酸鹼中和之機制，惟此處題意簡化，僅限制 pH 值改變是由溶液混合後之體積改變所致，雖於學生手冊第 8 頁已預作說明，但於計算例時宜再度強調，以避免學生觀念混淆。

【任務3解答】

$$(1) \frac{10^{-9} + 10^{-10}}{2} = 5.5 \times 10^{-10} \approx 10^{0.74-10} = 10^{-9.26} \Rightarrow [H^+] = 9.26$$

$$(2) \frac{10^{-3} + 3 \times 10^{-4}}{2} = 3.25 \times 10^{-4} \approx 10^{0.51-4} = 10^{-3.49} \Rightarrow [H^+] = 3.49$$

【教學活動安排】

將學習單上已經得到的幾個濃度與 pH 的關係，描繪在關係圖上，澄清活動五中線性關係的迷思。

【教學注意事項】

因為高一學生還沒有對數函數觀念，所以本圖故意不以曲線連接，而只呈現這幾個點的關係，讓學生體會即可。

【任務4】

試試看使用計算機得出下列各值的近似值（取整數）

(1) $10^{0.3010} =$ _____ ; $10^{1.3010} =$ _____ ; $10^{3.3010} =$ _____

(2) $10^{0.4771} =$ _____ ; $10^{2.4771} =$ _____ ; $10^{4.4771} =$ _____

(3) $10^{0.3010+0.4771} =$ _____ ; $10^{0.3010-0.4771} =$ _____

【任務5】

若已知 $10^{0.3010} = 2$, $10^{0.4771} = 3$, 不使用計算機, 想一想:

(1) 10的幾次方會是4?

(2) 10的幾次方會是6?

(3) 10的幾次方會是15?

(4) $10^{(\text{—————})} = 0.003$

(5) $10^{8.3010} = (\text{—————})$

(6) $10^{-8.3010} = (\text{—————})$

由上可知, 在沒有計算機的情況下, 若能知道一些10的幕次的值(如 $10^{0.3010} = 2$, $10^{0.4771} = 3$), 便可使用指數律估計其他一些10的幕次值的大小。

例如: $10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2$ 而且 $10^{0.30} \approx 2$, $10^{0.48} \approx 3$

$$\text{所以 } 10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2 > 10^{0.30} \times 10^2 \approx 2 \times 10^2 = 200$$

$$10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2 < 10^{0.48} \times 10^2 \approx 3 \times 10^2 = 300$$

可以推估 $10^{2.33}$ 為一個三位數, 介於 200 與 300 之間, 因此最高位數為 2。

又如, $10^{-5.53} = 10^{0.47+(-6)} = 10^{0.47} \times 10^{-6}$ 而 $10^{0.47} \approx 3$,

$$\text{所以 } 10^{-5.53} = 10^{0.47} \times 10^{-6} \approx 3 \times 10^{-6} = 0.000003$$

得 0.000003 為 $10^{-5.53}$ 的近似值。

【任務4】

【教學活動安排】

1. 透過任務4讓學生建立 $10^x = a$ 的概念，此處不特別強調，僅以簡單認識 $10^{0.3010} = 2$ ， $10^{0.4771} = 3$ 。
2. 感受指數律的存在，並引入任務5。
3. 透過使用計算機直接得到值，再引入任務5，需要直接紙筆運算，讓學生比較思考。

【教學注意事項】

第(2)小題的 $10^{4.4771}$ 透由計算機得 29998.5318 所以近似值為 29999。

【任務4解答】

- (1) 2 ; 20 ; 2000
- (2) 3 ; 300 ; 29999
- (3) 6 ; $\frac{3}{2}$

【任務5】

【教學活動安排】

不使用計算機，利用指數律來思考，建立學生由10的冪次方來建立連結。

【任務5解答】

- (1) $10^x = 4 = 2^2 = (10^{0.3010})^2 = 10^{0.6020} \Rightarrow x = 0.6020$
- (2) $10^x = 6 = 2 \times 3 = 10^{0.3010} \times 10^{0.4771} = 10^{0.3010+0.4771} = 10^{0.7781} \Rightarrow x = 0.7781$
- (3) $10^x = 15 = \frac{3 \times 10}{2} = \frac{10^{0.4771} \times 10}{10^{0.3010}} = 10^{0.4771+1-0.3010} = 10^{1.1761} \Rightarrow x = 1.1761$
- (4) $10^x = 0.003 = 3 \times 10^{-3} = 10^{0.4771} \times 10^{-3} = 10^{0.4771-3} = 10^{2.5229} \Rightarrow x = 2.5229$
- (5) $10^{8.3010} = 10^8 \times 10^{0.3010} = 3 \times 10^8$
- (6) $10^{-8.3010} = 10^{-8-0.3010} = 10^{-8} \div 10^{0.3010} = \frac{10^{-8}}{2} = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

活動6

請提出你的策略來估計 2^{3000} 是多大的數？

【任務6】

2016年新聞報導：『上一個質數是在2013年同樣被 *GIMPS* 計畫發現,是 2 的 57,885,161 次方減 1 ($2^{57,885,161} - 1$)，而這次新發現的質數 2 的 74,207,281 次方減 1 ($2^{74,207,281} - 1$)，……』

請問這次新發現的質數 $2^{74,207,281}$ 是多大的數？

【任務7】

將一張厚度為 0.1mm (毫米) 的紙，對摺再對摺，一直對摺多少次之後，它的厚度會超過 1 公里呢？

活動6

【教學活動安排】

不限定方法，學生通常會先使用計算機，再使用徒手計算，目的在讓學生熟練如何估計極大數。

【教學注意事項】

在使用簡易計算機時會發現無法計算，各家廠牌手機也有各種不同的結果，有一些顯示 *Error*，有一些以科學記號顯示正確答案。教師再以 10 的冪次計算後，可與計算機的答案相互比較，最後再將科學記號化為數字，以 0 補上位數，想像若將此數印出來，會是怎樣的景象讓學生感受到這個大數的大。'

【活動6 解答】

計算機結果： $1.23e+903$ 徒手計算結果： $2^{30000} \approx (10^{0.3010})^{30000} = 1 \times 10^{9030}$

【任務6】

【教學活動安排】

引用新聞資料，了解目前發現最大質數，讓數學與生活結合。

【教學注意事項】

因為 $\log_2 = 0.3010$ 是近似值，而 0.3010×74207281 與 $0.301029995664 \times 74207281$ 乘出來的值會有差異，可以利用此機會跟學生介紹。

【解答】

計算機結果： ∞ 或 *error*

徒手計算結果： $2^{74207281} \approx (10^{0.3010})^{74207281} = 10^{22336391.58}$ ，所以 $2^{74207281} - 1$ 為 22336392 位數。

新聞資料：<http://www.ithome.com.tw/news/103388>

【任務7】

【教學活動安排】

延續活動六，但將問題改為不等式。

【教學注意事項】

教師可以摺紙示範，為何對折一次後，厚度為原來的2倍。實際的摺紙，最多連續 6 至 7 次便無法施力，網站上有「用液壓機摺鋁箔紙」的影片：

<https://www.youtube.com/watch?v=loODgaussY>，可供分享。

【解答】

$0.1\text{mm} = 10^{-1}\text{mm} = 10^{-4}\text{m}$ ，1公里 = 1000m

每次對摺後，厚度變為原來的 2 倍，所以對摺 n 次後，厚度為原來的 2^n 倍。

$10^{-4} \times 2^n > 1000 \Rightarrow 2^n > 10^7$

因為 $10^{0.30} \approx 2$ ，所以 $2^n \approx (10^{0.30})^n > 10^7 \Rightarrow 10^{0.30n} > 10^7 \Rightarrow 0.30 \times \underline{23} = 6.9 < 7$

$0.30 \times \underline{24} = 7.2 > 7$ ，所以對摺 24 次即可。

參、符號 \log

計算機有沒有功能可以直接求出 x ，使得 $10^x=2$ ？

試試看：輸入 2 → 按下 \log 鍵 → 顯示？



【討論】：

(1) 符號 $\log 2 = 0.3010$ 表示甚麼呢？

(2) 你能再求出 $\log 4$ 與 $\log 5.5$ 嗎？

【教學活動安排】

認識 \log 鍵的功用，與 10^x 鍵連結，讓學生自己發現 $10^{\log x} = x$ 。也無形中感受到對所有的正數 x ，必存在實數 a ，使 $10^a = x$ 。

【教學注意事項】

由於計算機會產生誤差，學生紀錄時又取近似值，所以在 $10^{\log x}$ 一欄中的結果，往往會是非常接近 x 欄的數值，多數學生會因此覺得疑惑，但到了 $x = 10$ 的那一列，便可推論出 $10^{\log x} = x$ 。教師在學生完成後可以提問：為何 $10^{\log x}$ 一欄中的結果，會有這樣的誤差？學生在之前活動的經驗中，便可知道這是計算機取近似值的結果。

在最後結論「對所有的正數 x ，必存在實數 a ，使 $10^a = x$ 」中，”對所有正數”的觀念，可由教師再提問：今天所給的表格有限，怎麼它說”對所有正數”都可以呢？程度好一點的學生可以連結到指數律，教師再加以解釋即可。其實因為所有正數也包含無理數，若時間許可，教師可以增加 $x = \sqrt{2}$ 、 $x = \pi$ 等例子，請學生試試，但計算機的結果無法顯示出無理數，所以仍然為近似值。

活動8

(1) 利用計算機完成下列表格：(四捨五入到小數第四位)

x	$\log x$	$10 \log x$
2		
3		
4		
5		
5.5		
7		
8		
9		
10		
20		
21		
38		
520		
1314		
100000		
0.01		
0.0002		

(2) 有沒有甚麼發現呢？你能解釋為什麼嗎？

【活動8 解答】

此處答案學生會有些微差異，老師視情況說明。

參考解答：

x	$\log x$	$10 \log x$
2	0.3010	2
3	0.4774	3
4	0.6020	4
5	0.6990	5
5.5	0.7404	5.5
7	0.8451	7
8	0.9030	8
9	0.9542	9
10	1	10
20	1.3010	20
21	1.3222	21
38	1.5798	38
520	2.7160	520
1314	3.1186	1314
100000	5	10000
0.01	-2	0.01
0.0002	-3.6990	0.0002

原來 $10^{\log x} = x$ ！對所有的正數 x ，必存在實數 a ，使 $10^a = x$ 。因此，我們得到

對數的定義： a 為實數，若 $10^a = x$ ，則 $a = \log x, x > 0$

從定義可以知道，因為 10^a 必為正數，因此 $\log x$ 中的 x 必為正數。

受限於計算機的顯示，我們只能找到 $\log x$ 的近似值，不過，當 $x = 10^1, 10^2, 10^4, 10^{-3}, \dots$ 時（為10的整數幕次），它的值就會是整數（也就是這個幕次方的大小）。

【任務7】

- (1) 想一想： $\log 200$ 大約是多少？你怎麼得到這個結果的？
- (2) 想一想： $\log 56789$ 的值，整數部分是多少？你怎麼得到這個結果的？
- (3) 想一想： $\log 0.000001 = ?$

【任務7】

【教學活動安排】

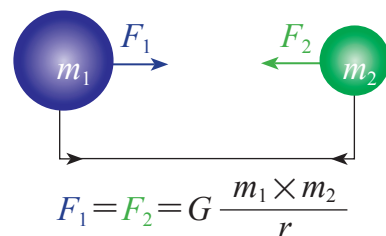
提供學生根據剛才的探索，看到 $\log 200$ 能想到 $10^{(\quad)} = 200$ ，進而熟悉符號。

【解答】

- (1) 介於 2~3 的數、2.3010 等回答皆可
- (2) $10000 < 56789 < 100000$ ，所以整數部分為 4
- (3) -6

課 後 習 題

1. 3.56×10^8 是一個幾位數的整數？
2. 將 7.34×10^{-6} 寫成小數形式，則其小數點後第五位數字為多少？
3. 1 微米 = 10^{-6} 米，1 奈米 = 10^{-9} 米，那麼 0.8 微米是 20 奈米的幾倍？
4. 1 公尺對折幾次可達到奈米 (1 奈米 = 10^{-9} 公尺) 的長？
5. 以科學記號表示 $5.32 \times 10^{10} - 7 \times 10^8$ 的值。
6. 以科學記號表示 $7.09 \times 10^{12} + 2.1 \times 10^{11} - 4 \times 10^{10}$ 的值。
7. 以科學記號表示 $\frac{8.4 \times 10^9}{7 \times 10^{-6}}$ 的值。
8. 在比例尺為 1 : 100000 的地圖中，1 公分的長相當於實際的 100000 公分，若地圖中，甲乙兩地相距 10 公分那麼實際距離為 10^n 公尺， $n = ?$
9. 已知 $a = 1.6 \times 10^9$ ， $b = 4 \times 10^3$ ，以科學記號表示 $\frac{a^2}{2b}$ 的值。
10. 地球到太陽的距離是 1.5×10^{11} 公尺，稱為 1 天文單位，而光速為每秒 3×10^8 公尺，若地球到火星的距離是 3 億公里，試回答下列兩題：
 - (1) 地球到火星是幾個天文單位？
(A) 2 (B) 0.2 (C) 5 (D) 0.5
 - (2) 在太陽上爆裂的火光，經地球上接收，馬上傳給火星的太空站，則需費多少分鐘？
(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 50 分鐘
11. 如果液體的酸鹼濃度為 x ，那麼此液體的 pH 值定義為 $-\log x$ ，例如純水的酸鹼濃度為 1×10^{-7} ，因此純水的 pH 值為 $-\log x (1 \times 10^{-7}) = 7$ ，正常人血液的 pH 值約為 7.4 左右，當高於 7.5 或低於 7.3 時，會有昏迷、甚至死亡的危險。設 r 是某人血液酸鹼濃度與純水酸鹼濃度的比值，試檢驗下列哪些值是安全值？
(1) $r = \frac{2}{3}$ (2) $r = \frac{1}{2}$ (3) $r = \frac{2}{5}$ (4) $r = \frac{1}{3}$ (5) $r = \frac{1}{4}$
12. 萬有引力公式如右下， $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ 為重力常數，地球質量為 5.97×10^{24} 公斤。請計算質量為 1 公斤的重物所受到的萬有引力大小。
 - (1) 重物位於赤道 (地球赤道半徑為 $6.38 \times 10^6 \text{ m}$)
 - (2) 重物位於北極 (地球北極半徑為 $6.36 \times 10^6 \text{ m}$)



學生手冊 P16

13. 一個質子的質量約為 $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，一個中子的質量約為 $1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，一個電子的質量約為 $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，請問：

- (1) 一個質子與一個中子的質量相差多少公斤？
- (2) 一個中子與一個電子的質量相差多少公斤？
- (3) 一個質子的質量約為一個電子的多少倍？(四捨五入到整數位)
- (4) 一個中子的質量約為一個電子的多少倍？(四捨五入到整數位)

因為一個原子中，電子的質量比中子和質子小得多，幾乎可以省略，而 1 個中子的質量與 1 個質子的質量差不多，因此原子的質量可以以中子質量 + 質子質量來估計。

14. 不使用計算機，想一想：

- (1) 10 的幾次方會是 5？
- (2) 10 的幾次方會是 12？
- (3) $10^{1.7781} = (\underline{\hspace{2cm}})$
- (4) $10^{-1.4771} = (\underline{\hspace{2cm}})$

15. (1) $\log 263500$ 的值，整數部分是多少？

(2) $\log 0.00001 = ?$

16. 3^{100} 為幾位正整數？

17. 已知沙灘傾斜的程度與其沙粒的平均直徑大小有關，沙粒越粗糙的，沙灘就越陡峭。

其關係式為 $d = 10^{\frac{s-0.159}{0.118}}$ ，其中 s 為沙灘的坡度， d 為沙粒的平均直徑(毫米， cm)。

- (1) 請算出當 $d = 0.25 \text{ cm}$ ， s 為多少？
- (2) 請算出當 $s = 0.3$ ， d 為多少？

18. 大部分的龍捲風至少會持續 1 小時，行進 20 英里，其中心風速 S (英里/小時) 與龍捲風行進的距離 d 有關，其關係式為 $d = 10^{\frac{s-65}{93}}$

1925 年 3 月 18 日，有一個大型龍捲風重創了美國密蘇里州，伊利諾州和印第安州，其中涵蓋的距離為 220 英里，請算出這次龍捲風的中心風速大約為多少？

19. 成年麋鹿的鹿角寬度 a (英吋) 與麋鹿身高 h (英吋) 有關，其關係式為：

$d = 10^{\frac{h+176}{116}} - 40$ ，今有一成年麋鹿其鹿角寬度為 60 英吋，請計算其身高大約多少？

20. 日光會生產放射性的碳 14 (C-14)，它會存在於活著的植物和動物中，一旦植物或動物死掉，他就停止保存碳 14。利用碳 14 的半衰期為5700年，科學家可以根據計算化石的碳14含量來計算這些化石的年份。活著的植物和動物中碳 14 含量為 1，死後 t 年，碳

14 含量為 $C = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$ ，其關係式為

(1) 某一植物化石其碳 14 含量為原來的 $\frac{1}{10}$ ，請問這植物大約多久前死掉？

(2) 某一動物化石其碳 14 含量為原來的 $\frac{1}{8}$ ，請問這動物大約多久前死掉？

【 任務解答 】:

任務1 : (1) 1.7×10^{-5} (2) 6.622×10^{24} (3) 2.7×10^{83}
(4) 7.2×10^{-11} (5) 4×10^{-37} (6) 3.75×10^{-15}

任務2 : (1) $9.03 \times 10^{22} \div (6.02 \times 10^{23}) = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15 \text{ mole}$
(2) : ① $(3 \times 3 \times 3) \times 1.56 = 42.12$ 公克 ② $42.12 \div 11 = 0.9572 \approx 0.957$ 莫耳
③ 約為 $0.957 \times (6.05 \times 10^{23}) \approx 5.76 \times 10^{23}$ 個分子

任務3 : (1) $\frac{10^{-9} + 10^{-10}}{2} = 5.5 \times 10^{-10} \approx 10^{-9.26} \Rightarrow [H^+] = 9.26$
(2) $\frac{10^{-6} + 3 \times 10^{-7}}{4} = 3.25 \times 10^{-7} \approx 10^{0.051 - 7} \Rightarrow [H^+] = 6.49$

任務4 : (1) 2 ; 20 ; 2000 (2) 3 ; 300 ; 29999 (3) 6 ; $\frac{3}{2}$

任務5 : (1) $10^x = 4 = 2^2 = (10^{0.3010})^2 \approx 10^{0.6020} \Rightarrow x = 0.6020$
(2) $10^x = 6 = 2 \times 3 = 10^{0.3010} \times 10^{0.4771} = 10^{0.3010+0.4771} = 10^{0.7781} \Rightarrow x = 0.7781$
(3) $10^x = 6 = 2 \times 3 = 10^{0.3010} \times 10^{0.4771} = 10^{0.3010+0.4771} = 10^{0.7781} \Rightarrow x = 0.7781$
(4) $10^x = 0.003 = 3 \times 10^{-3} = 10^{0.4771} \times 10^{-3} = 10^{0.4771-3} = 10^{2.5229} \Rightarrow x = 2.5229$
(5) $10^x = 0.003 = 3 \times 10^{-3} = 10^{0.4771} \times 10^{-3}$
(6) $10^{-8.3010} = 10^{-8-0.3010} = 10^{-8} \div 10^{0.3010} = \frac{10^{-8}}{2} = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

任務6 : 22336392位數

任務7 : (1) 介於 2~3的數、2.3010等回答皆可
(2) $10000 < 56789 < 100000$, 所以整數部分為 4
(3) -6

【解答】

1. 9

2. 0

3. 40

4. 30

5. 5.25×10^{10}

6. 7.26×10^{12}

7. 1.2×10^{15}

8. 4

9. 53.2×10^{14}

10. (1) *B* (2) *A*

11. (2)(3)(4)

12. (1) 9.783 (2) 9.844

13. (1) 2×10^{-30} (2) 1.674×10^{-27} (3) 1837 (4) 1839

14. (1) 0.6990 (2) 1.0791 (3) 60 (4) $\frac{1}{30}$

15. (1) 5 (2) -5

16. 48 位數

17. (1) 0.09 (2) 15.66 (*cm*)

18. 282 英里 / 小時

19. 56 英吋

20. (1) 18937 (2) 17100

宇宙的大小

2013/06/27

作者：Shane L. Larson

翻譯：Ankh Huang 黃于薇，現為兼職譯者 (ankhmeow@gmail.com)本文原發表於 *Write Science*

很多讀者都知道,對於我自己這輩子做為科學家的抱負和期許,我一向認為是啟蒙於小時候接觸到的《宇宙》(*Cosmos*)節目(譯註:主持人為著名天文學家、天體物理學家與科普作家卡爾薩根 *Carl Sagan*)。在第一集節目開頭的前五分鐘,卡爾就提出了一個非常宏大的想法:「宇宙的大小和規模,遠遠超出一般人類的理解。」

我隨著長大成人,成為科學家,慢慢地也忽略了這麼一個簡單的事實。我學會怎麼書寫表達龐大的數字,學會在需要的時候換算公尺公里和光年,甚至學會使用「瘋狂相對論者的單位」,把距離、時間、能量和質量全部都用公尺來測量(這讓我的學生、父母、還有很多身為天文學家的朋友都感到驚訝又困惑!)。這些事情我做過很多,多到我計算數字的時候馬上就能知道是不是大概沒錯。我們距離本星系群(*Local Group*)中的一個星系有兩百萬光年那麼遠?嗯聽起來差不多。一個類星體(*quasar*)距離我們有750百萬秒差距?當然,我想不會錯。到土星有13億公里遠?就是如此。

科學家的重要技能就是培養出對龐大數字的敏感度,還有判斷數字是否大致正確的能力(對極小的數字也是!),我們花了大量時間訓練自己和學生,以求能夠精通此道。但這卻完全忽視了卡爾的見解——這些龐大無比的數字,意謂著我們在浩瀚宇宙中是何其渺小!

遇到太陽系步道(*Solar System Walks*)的時候,我總會去走走(關於太陽系步道,這裡有 [Wikipedia](#) 的一長串清單;另一份名單來自 [Air & Space](#))。這些比例模型展示了太陽系的星球排列,將星球的位置依照適當的空間比例標示出來,讓你感受一下太陽系究竟該有多大(更別說是宇宙了)。我最喜歡的一條太陽系步道位於阿拉斯加的安克拉治(*Anchorage*),被稱為「光速行星步道(*Lightspeed Planet Walk*)」——如果你用正常速度走在這條步道上,你走到每個行星所花費的時間,就等同於光線抵達該行星所需的時間。這簡直太棒了!如果從地球開始,在你出發前進的同時用一隻雷射筆往海王星照射,你走到海王星所花的時間,就和你那隻雷射筆的微弱綠光抵達真正的海王星所需時間相同!

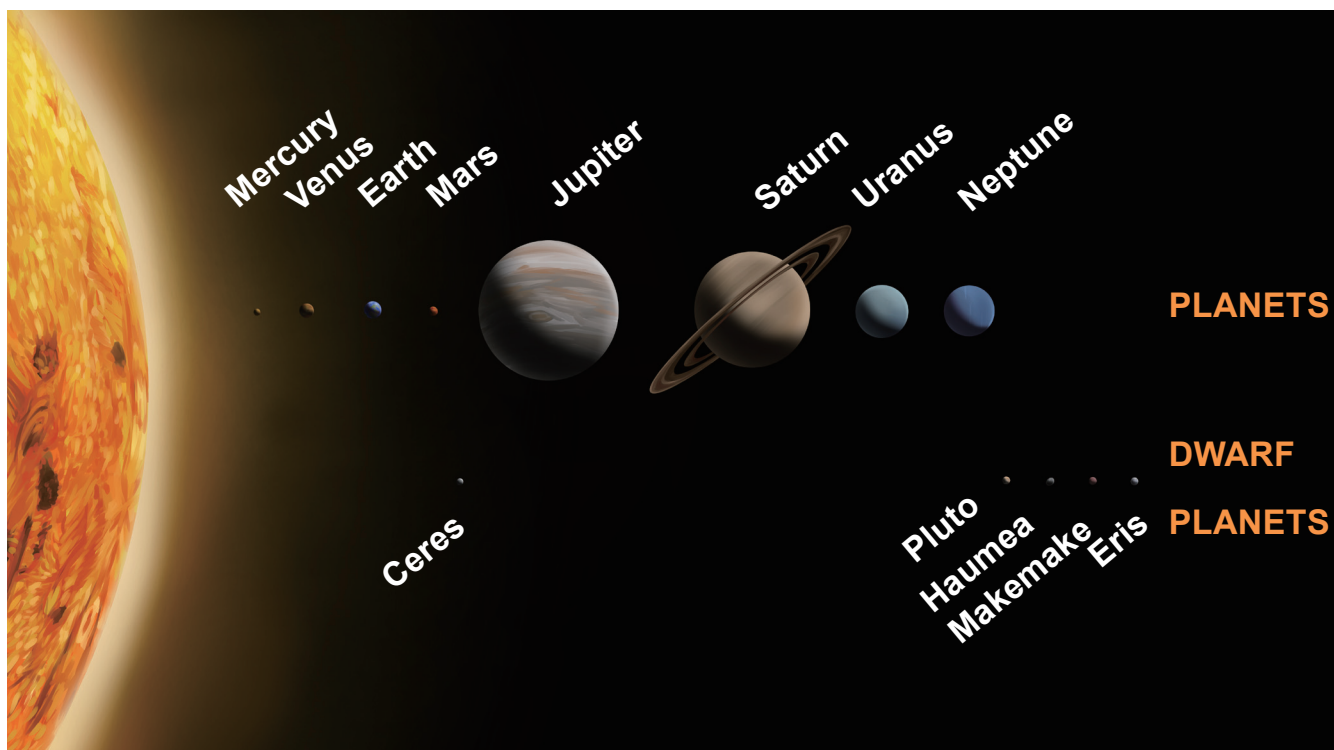


圖片摘自泛科學，感謝提供

▲阿拉斯加安克拉治的光速行星步道 (Lightspeed Planet Walk) 中央，以及太陽的比例模型。

雖然這些模型步道的實體規模都很大，但我還是常會覺得，這些步道並沒有把那樣的浩瀚廣闊用讓我震撼的方式表現出來。我常常在思考這一點，而且猜想可能確實是這樣，因為當我走過這些模型時，感覺十分平常。從火星一路散步到木星的同時，我並沒有真的去思考自己走的距離究竟有多遠。我會分心去聽我女兒嘰嘰呱呱地講說為什麼冥王星還是應該歸類為行星、會邊看鴨子吃水藻，還要閃躲快速經過的登山車車手。

但就在兩周前，一個天文學家朋友給我看了些東西，讓我大為驚奇。這是個非常簡單的示範，你也可以自己在家裡進行，但卻顯現出我在心中描繪的太陽系構圖錯得多麼離譜！（而且我敢打賭你一定也是！）我想我心裡的太陽系構圖之所以有誤，是因為我們總是把整個太陽系家族放一起，好呈現出星球的相對大小，就像下面這張圖片：



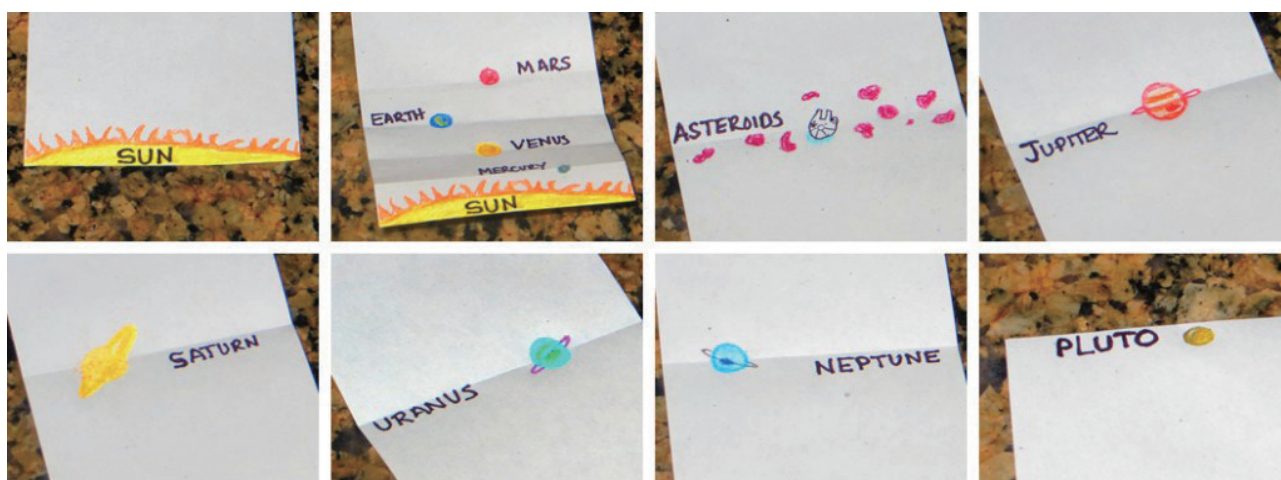
▲太陽系的典型示意圖，常見於書籍、線上參考資料以及大眾傳播媒體。

沒有呈現出來的是天體之間的距離。我們早已掌握星球之間的相對間距,這些距離的推算,是用基本的幾何學知識加上巧妙的觀測(其中有許多觀測方式在你家後院就可以進行),並運用物理定律得出的(尤其是克卜勒運動定律和牛頓的萬有引力定律)。

讓我告訴你我朋友這個小把戲是怎麼玩的。首先拿一條長條的紙片(計算機用紙或其他長條狀的紙都可以),長度約需一公尺。在一端寫下「太陽」,在另一端寫下「冥王星」。現在將紙對折之後再打開。太陽系中位在太陽和冥王星之間的是什麼?是「天王星」;把它寫在對折處。現在把寫著「冥王星」的那一端折到「天王星」。把代表「海王星」軌道的對折處標示出來。這表示什麼呢?這顯示出太陽系外側區域的行星並不多!

現在把寫著「太陽」的那一端折到「天王星」。在新的折痕處寫上「土星」。把「太陽」與「土星」對齊折好,在新的摺痕處標上「木星」。再把「太陽」與「木星」對齊折好,在新的摺痕處標上「小行星」(*Asteroids*)。做到這裡時,你的長紙條有 93% 是在小行星與冥王星之間。太陽系中的這個部分,美其名為「外太陽系」(*The Outer Solar System*),可是太陽系中已知的行星裡面,足足有半數還要擠在「小行星」和「太陽」之間!讓我們繼續進行這部分。

把「太陽」折到「小行星」,然後把折痕處標為「火星」。最後是兩次對折:將「太陽」對齊「火星」折好,然後將對折處與「火星」對齊再折一次。結果會有三個折痕,從「太陽」開始,依序把這三個折痕標上「水星」、「金星」以及「地球」。這整個過程最後的成品,就是一張精準到不可思議的天體間距示意圖(沒錯,我計算過誤差,我實在太知道了!)



圖片摘自泛科學, 感謝提供

現在好好看一下你的間距模型圖。太陽系裡還有有很多空著的地方；靠近地球的星體最容易前往，但還是非常遙遠；到月球的距離在圖上大約和一條鉛筆畫出的直線相同，搭乘阿波羅號的太空人卻花了四天才得以跨越這鴻溝般的距離；搭乘火箭前往火星要花六到八個月，而你看看火星離地球有多近啊！卡西尼號（*Cassini*）太空船則花了將近七年才抵達土星。等到 2015 年新視野號（*New Horizons*）太空船經過冥王星的時候，距離這艘太空船起飛已經有九年半了！太陽系實在非常廣大，而宇宙更是浩瀚無垠。

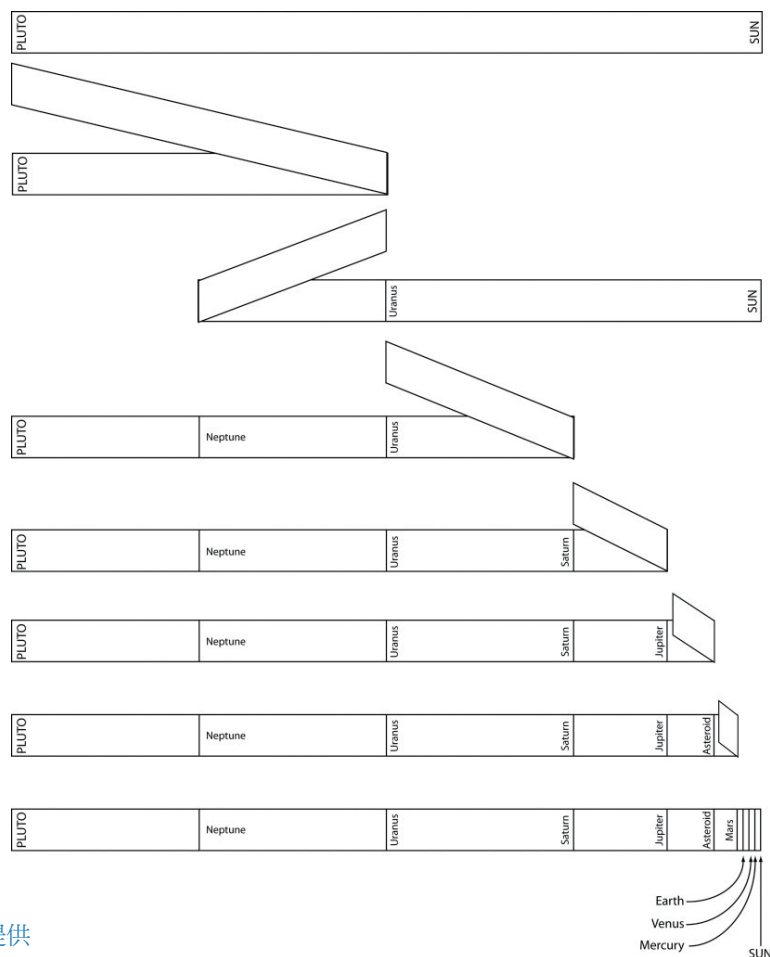
我想這張間距模型圖最讓我驚訝的，就是我以為很遙遠的地方，其實遠比我腦中所想的要近得多。想想看木星，它位在外太陽系，但在圖上，它的距離只有太陽到冥王星的八分之一！哇塞！

「宇宙的大小和規模,遠遠超出一般人類的理解。」也許真是如此；至少這超出了我們日常經驗的範疇。但我們的智力促使大腦去嘗試理解，而像這樣巧妙的示範，就是讓你能夠進一步思考。所以現在就拿出剪刀來，把紙裁好，動手折折看吧！



▲(左圖) 完整長度的太陽系示意圖 (右圖) 自製的版本，旁邊是個典型的地球人。

圖片摘自泛科學，感謝提供



圖片摘自泛科學，感謝提供

在長條紙片上，以折痕做出太陽系中行星軌道之間合理的距離圖示。

附件二：證明 $10^x = 5.5$ 中的 x 為無理數。

設 $10^x = 5.5$ 中的 x 為有理數，則 x 可表示為 $x = \frac{q}{p}$ ， p ， q 為非零整數

則 $10^{\frac{q}{p}} = 5.5 \Rightarrow (10^{\frac{p}{q}})^q = 5.5^q \Rightarrow 10^p = 5.5^q \Rightarrow 2^p \times 5^p = 11^q \times 2^{-q} \Rightarrow 2^{p+q} \times 5^p = 11^q$

但 p ， q 為非零整數，故上式無解，得到矛盾。

因此假設錯誤， x 應為無理數，得證。

素養導向數學教材 / 單維彰 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

召集人：單維彰

副召集人：鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳姸蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）

作者：吳汀菱、洪瑞英（依姓氏筆畫順序排列）

執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）

