

素養導向數學教材

科學記號與10的冪次



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

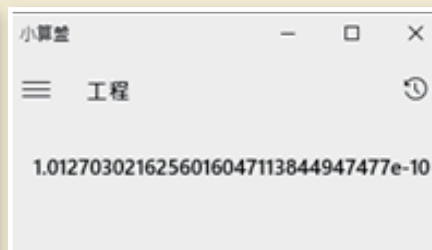
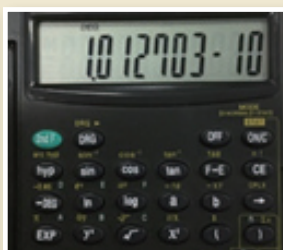
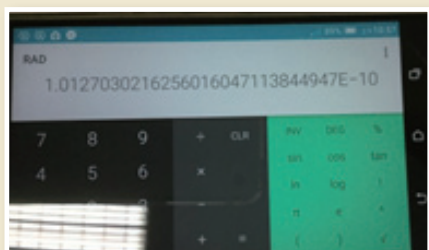
壹、科學記號

小丁閒來無事，把玩手機中的計算機，亂亂按之後，出現了奇怪的結果：

$1.012703e-10$

$5.79066054e12$

怎麼會這樣呢？



相信不少同學已有這個經驗，使用計算機運算時，若答案很小或很大的時候，就會有這種結果。但它們各代表甚麼意思呢？

活動 1

請以計算機輸入以下各式，紀錄結果：

(1) $4120000000 + 5982300000 =$ _____

(2) $5200000000 - 800000 =$ _____

(3) $30000 \times 900000000000 =$ _____

(4) $2 \div 5000000000 =$ _____

國中的時候，我們曾學習過將數以科學記號表示，

比如說(3)「 $30000 \times 900000000000$ 」與(4)「 $2 \div 5000000000$ 」可改寫為

$$(3 \times 10^4) \times (9 \times 10^{11})$$

與 $2 \div (5 \times 10^9)$

若沒有計算機的幫助，要如何計算科學記號運算的結果？

因為 $3 \times 9 = 27$ ， $10^4 \times 10^{11} = 10^{15}$

由乘法的性質可得 $(3 \times 10^4) \times (9 \times 10^{11}) = 27 \times 10^{15} = 2.7 \times 10^{16}$

而 $2 \div (5 \times 10^9) = 2 \div 5 \div 10^9 = 0.4 \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-1} \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-10}$

再回頭看看前一頁計算機顯示的結果：

$$30000 \times 90000000000 = 2.7e16$$

$$2 \div 5000000000 = 4e-10$$

原來，計算機顯示很大或很小的數時，使用的是科學記號。

$$2.7 e16 = 2.7 \times 10^{16} \quad 4 e-12 = 4 \times 10^{-12}$$

科學記號 $a \times 10^m$ 其中 $1 \leq a < 10$ 稱為科學記號中的係數， m 為整數。

但使用計算機計算上列式子時，最不方便的是要數出有幾個0，若以科學記號表示則會簡便許多，可惜對某些計算機輸入時，反而不方便使用科學記號，所以在許多情況，例如計算莫耳分子數量，萬有引力大小…時，我們還是需要學習如何使用科學記號紙筆運算來進行科學記號的加減乘除。

活動2：

請計算下列各題，並以科學記號法回答：

(1) $5 \times 10^6 + 7 \times 10^6 =$ _____ (2) $3.1 \times 10^3 + 5.21 \times 10^2 =$ _____

(3) $2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} =$ _____ (4) $(2.25 \times 10^{-24}) \times (7 \times 10^{-13}) =$ _____

(5) $\frac{1}{5 \times 10^4} =$ _____ (6) $\frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} =$ _____

【任務1】

(1) $8 \times 10^{-6} + 9 \times 10^{-6} =$ _____ (2) $6.02 \times 10^{23} + 6.02 \times 10^{24} =$ _____

(3) $2.4 \times 10^{83} + 3 \times 10^{82} =$ _____ (4) $(8 \times 10^{-6}) \times (9 \times 10^{-6}) =$ _____

(5) $\frac{1}{2.5 \times 10^{36}} =$ _____ (6) $\frac{3 \times 10^{-27}}{8 \times 10^{-13}} =$ _____

活動3：

(一)、請跟老師一起欣賞附件一的內容，並實際操作其中摺紙的部分。請動動手摺出太陽系（請看附件一）摺完之後，你是否感到疑惑，真的是這樣嗎？不妨參照一下附件一中的太陽系示意圖，你是否可以感覺到遠近的比例呢？

(二)、上網查行星資料，其資料如下：

水星的小檔案： 平均日距 57,909,100公里

金星的小檔案： 平均日距 108,208,000km

地球的小檔案： 平均日距 149,597,887.5 km

火星的小檔案： 平均日距 227,936,640 km

木星的小檔案： 平均日距 778,547,200 km

土星的小檔案： 平均日距 1,433,449,370 km

天王星的小檔案：平均日距2,876,679,082 km

海王星的小檔案：平均日距 4,503,443,661 km

冥王星的小檔案：平均日距 5,913,520,000 km

參考資料：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%B7%E7%8E%8B%E6%98%9F>

增加了上面的這些距離的資料，能幫助你很快地感覺到這些距離之間的遠近，或是比例關係嗎？

(1)請根據行星的平均日距製作行星距離表，將太陽系各行星軌道至太陽中心的距離 d 以科學記號法表示 ($a \times 10^n$ ， a 四捨五入到小數點後第二位，就是取三位有效數字的意思)

太陽系各行星軌道至太陽中心的距離 d ：

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
d (公里)									

小幫手：有效數字

當一個數值以科學記號表示時，如 4.02×10^{16} ，則係數 4.02 中有效數字為 3 位，

如 4.2×10^{16} ，則係數 4.2 中有效數字為 2 位，

如 4.0×10^{16} ，則係數 4.0 中有效數字為 2 位。

又如 $50426 = 5.0426 \times 10^4$ 取 2 位有效數字後為 5.0×10^4 (四捨五入時 4 捨去)

$50726 = 5.0726 \times 10^4$ 取 2 位有效數字後為 5.1×10^4 (四捨五入時 7 進位)

有效位數在科學上，可以幫助溝通在測量時，使用的最小度量單位。

(2)在你所摺的紙上，如果將冥王星到太陽的距離視為 1，則海王星到太陽的距離為何？



(3) 在摺紙上，若將太陽坐標設為0，冥王星為1，請檢視其他行星的坐標是否如下表？

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
坐標	$\frac{1}{128}$ =0.0078125	$\frac{1}{64}$ =0.015625	$\frac{3}{128}$ =0.0234375	$\frac{1}{32}$ =0.03125	$\frac{1}{8}$ =0.125	$\frac{1}{4}$ =0.25	$\frac{1}{2}$ =0.5	$\frac{3}{4}$ =0.75	1

(4) 請根據第4頁的資料，驗證真實宇宙中，利用計算機求海王星到太陽的距離與冥王星到太陽的距離的比值為多少？(請取有效數字二位)

(5) 根據第4頁的資料，計算各行星到太陽的距離與冥王星到太陽的距離比值，得到下表，請任選一個驗證是否正確。(四捨五入到小數點後第四位)

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星
比值	0.0098	0.0183	0.0254	0.0386	0.1318	0.2420	0.4873	0.7614	1

(6) 比較一下(4)與(5)的結果，你覺得這個摺紙的方法準不準呢？說一說你的看法。

【任務2】

小丁為了營造社團晚會氣氛，購買了一箱固體乾冰，廠商將乾冰切成每一小塊正立方體，邊長為 3cm 。回到家後，小丁決定拿其中一部分來調配乾冰汽水，他想知道，每一小塊固體乾冰裡，有多少個 CO_2 分子呢？

(1) 化學上有一個數量單位：任何物質含有 6.02×10^{23} 個粒子均稱為 1 莫耳，請計算

9.03×10^{22} 個碳原子為多少莫耳？

小幫手：

6.02×10^{23} 被稱為
亞佛加厥數

(2) 二氧化碳的分子量為 44，表示一莫耳的 CO_2 重量為 44 公克，一莫耳物質中含有約 6×10^{23} 個粒子，已知乾冰密度為 1.56g/cm^3 ，請問每一小塊固體乾冰裡，

① 重量為多少？

② 有多少莫耳的 CO_2 ？

③ 有多少個 CO_2 分子？

活動4

當小丁拿出乾冰時，才發現外包裝有下列警語：

“在低濃度時，二氧化碳氣體是無味的，但在較高濃度時會使人感到刺痛甚至窒息。這是因為當吸入濃度比大氣層平常濃度（二氧化碳約占 350ppm ）高很多的二氧化碳時，氣體溶解在黏膜和唾液中，產生了碳酸，所以會有酸的味道且鼻子和喉嚨會產生刺痛感。

研究發現，二氧化碳高於 $5,000\text{ ppm}$ 的時候，會影響健康，而高於約 $50,000\text{ ppm}$ 的濃度（相當於空氣中 5% 的體積）被認為是有危險性的。”

小丁想：糟糕，我買了這麼多乾冰（10公斤！），而晚會場地為密閉空間，如果全部使用完，那會不會造成危險呢？

我們來幫忙想想，要怎麼回答這個問題 …

首先，因為現在乾冰的量是固定的10公斤，二氧化碳的濃度高於 5000ppm 時會有危險，所以可以計算晚會場地至少要多少立方公尺，才不會影響健康。

想法：二氧化碳濃度(單位 ppm) $\leq 5000\text{ppm}$

目標：當 10 公斤的乾冰，全部成為氣體時，其體積為多少微升 ($\mu\text{l} = 10^{-3}\text{ml}$) 呢？

因為 10 公斤的乾冰，全部成為氣體時，其莫耳數與體積皆不改變，所以：

(1) 計算10公斤的二氧化碳是多少莫耳？接著再換算為多少公升：

小幫手：

1. 一公升 ($L = 10^3\text{ml}$) 的氣體溶液中有一微升 ($\mu\text{l} = 10^{-3}\text{ml}$) 的某物質，某物質含量即為 1ppm 。
2. 常溫常壓下，1莫耳氣體的體積為 24.5公升。

(2) 若不計空氣中原有的 CO_2 的濃度，10 公斤乾冰全部變成二氧化碳氣體，請計算晚會場地的體積至少要多少立方公尺，才不會影響健康？

(3) 動動腦，估計一下你們現在的教室，體積大約是多少立方公尺？

小丁的場地至少要幾間教室呢？又學校裡，那些室內場所可以做為晚會地點呢？

貳、10的冪次

活動5

阿丁在實驗室，發現有兩瓶鹽酸，一瓶內含 pH 值為 3 的鹽酸1公升，另一瓶內含 pH 值為 4 的鹽酸1公升，他將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少？

小幫手：

將溶液中的 $[H^+]$ 濃度表示為 10^{-x} ，則 pH 值定為 x 。

計算：

莫耳濃度的公式為 $\frac{\text{溶質莫耳數}}{\text{溶液體積(公升)}}$



若溶液體積是 1 公升，其中含溶質 x 莫耳，則此溶液的莫耳濃度為 $\frac{x}{1} \text{ mole / 公升}$ ，
反過來，若溶液的莫耳濃度為 $x \text{ mole / 公升}$ ，

則 1 公升的此溶液，內含溶質 x 莫耳、2公升的此溶液，內含溶質 $2x$ 莫耳、... 依此類推
所以 pH 值為 3 表示這瓶溶液的 H^+ 濃度為 $10^{-3} \text{ mole / 公升}$ 。

今此溶液為1公升，其中含有 10^{-3} mole 的 H^+

另一瓶 pH 值為 4 表示這瓶溶液的 H^+ 濃度為 $10^{-4} \text{ mole / 公升}$ 。

同理可知，此1公升溶液中含有 10^{-4} mole 的 H^+

因此混合後的溶液總體積為 2 公升，其中含有 $(10^{-3} + 10^{-4}) \text{ mole}$ 的 H^+

由上述公式可得混合溶液的莫耳濃度為

$$\frac{10^{-3} + 10^{-4}}{2} = \frac{10 \times 10^{-4} + 1 \times 10^{-4}}{2} = \frac{11 \times 10^{-4}}{2} = 5.5 \times 10^{-4}$$

【討論】：

因為 $10^{-4} < 5.5 \times 10^{-4} < 10 \times 10^{-4} = 10^{-3}$ ，所以 pH 值介於 3 到 4 之間，但會是 3.5 嗎？

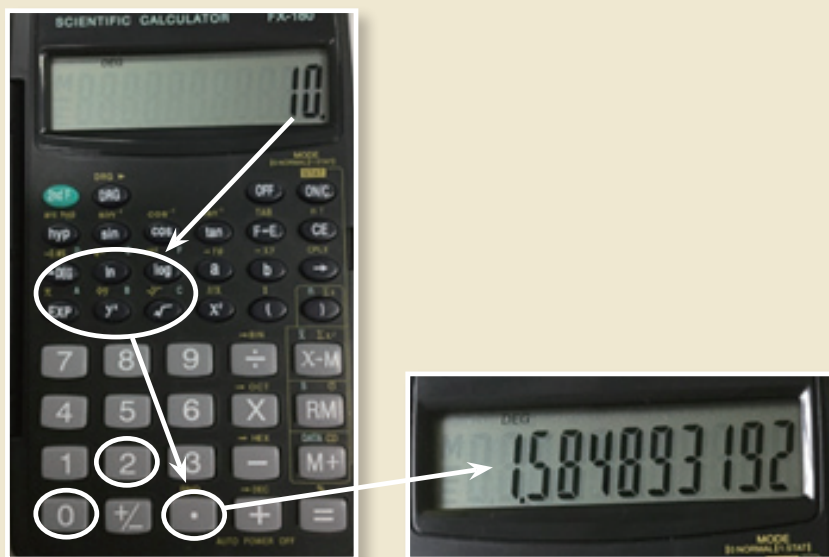
那我們不妨用計算機按按看，10 的幾次方會是 5.5？

利用 y^x 鍵學習輸入計算 $10^{0.2}$

輸入10 → 按下 y^x 鍵 輸入0.2 → 顯示

小幫手：

證明： $10^x=5.5$ 中的 x 為無理數。
(請見附件(二))。



例：計算溶液的 pH 值

$$[H^+] = 5.5 \times 10^{-4}, \text{ 因為 } 5.5 \approx 10^{0.74}$$

$$\text{所以 } 5.5 \times 10^{-4} \approx 10^{0.74} \times 10^{-4} = 10^{-3.26} \Rightarrow [H^+] = 10^{-3.26} \Rightarrow pH \text{ 值為 } 3.26$$

由計算機顯示的結果，我們取 0.74 使 $10^{0.74}$ 為 5.5 的近似值，因此正確的寫法應為

$$10^{0.74} \approx 5.5$$

為了符號使用上的方便，所以使用以下寫法取代 $10^{0.74} \approx 5.5$ ，就像 $\sqrt{2} = 1.414$ 表示 1.414 是 $\sqrt{2}$ 的近似值、 $\pi = 3.1415$ 是 π 的近似值... 等一樣的意思。

$$10^{0.74} \approx 5.5$$

【任務3】

(1) 將 pH 值分別為 9 與 10 的強鹼溶液各 1 公升混，若不考慮其他因素，請問這個混合過的溶液 pH 值為多少？

(2) 將 pH 值為 3 的鹽酸與 pH 值為 4 的鹽酸，取體積分別為 1 公升與 3 公升，將兩溶液混合，若不考慮其他因素，請問混合溶液的 pH 值為多少？

利用計算機得到 $10^{0.51} = 3.25$ ， $3.25 \times 10^{-4} = 10^{0.51} \times 10^{-4} = 10^{-3.49}$ ，所以 $pH = 3.49$

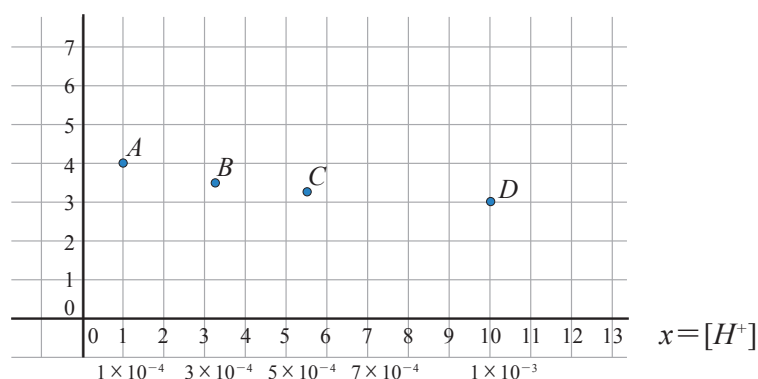
由上述計算氫離子濃度與 pH 值得到的結果，我們可以將其中 4 個資料製成一個表格：

$[H^+]$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	5.5×10^{-4}	3.25×10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	5.5×10^{-10}	10^{-10}
pH	1	2	3	3.26	3.49	4	5	6	7	8	9	9.26	10

如果將這些資料，畫在一個橫軸為 $[H^+]$ ，縱軸為 pH 值的坐標軸上，則上面這些資料點是否符合「 $[H^+]$ 與 pH 值為線性關係」？

下圖為氫離子濃度與 pH 值的關係圖，可以發現這些點並不在一直線上：

$y = pH$ 值



$A(1 \times 10^{-4}, 4)$

$B(3.25 \times 10^{-4}, 3.49)$

$C(5.5 \times 10^{-4}, 3.26)$

$D(10^{-3}, 3)$

【任務4】

試試看使用計算機得出下列各值的近似值（取整數）

(1) $10^{0.3010} =$ _____ ; $10^{1.3010} =$ _____ ; $10^{3.3010} =$ _____

(2) $10^{0.4771} =$ _____ ; $10^{2.4771} =$ _____ ; $10^{4.4771} =$ _____

(3) $10^{0.3010+0.4771} =$ _____ ; $10^{0.3010-0.4771} =$ _____

【任務5】

若已知 $10^{0.3010} = 2$, $10^{0.4771} = 3$, 不使用計算機, 想一想 :

(1) 10的幾次方會是4?

(2) 10的幾次方會是6?

(3) 10的幾次方會是15?

(4) $10^{(\quad)} = 0.003$

(5) $10^{8.3010} = (\quad)$

(6) $10^{-8.3010} = (\quad)$

由上可知, 在沒有計算機的情況下, 若能知道一些10的幕次的值(如 $10^{0.3010} = 2$, $10^{0.4771} = 3$), 便可使用指數律估計其他一些10的幕次值的大小。

例如: $10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2$ 而且 $10^{0.30} \approx 2$, $10^{0.48} \approx 3$

所以 $10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2 > 10^{0.30} \times 10^2 \approx 2 \times 10^2 = 200$

$10^{2.33} = 10^{0.33} \times 10^2 < 10^{0.48} \times 10^2 \approx 3 \times 10^2 = 300$

可以推估 $10^{2.33}$ 為一個三位數, 介於 200 與 300 之間, 因此最高位數為 2。

又如, $10^{-5.53} = 10^{0.47+(-6)} = 10^{0.47} \times 10^{-6}$ 而 $10^{0.47} \approx 3$,

所以 $10^{-5.53} = 10^{0.47} \times 10^{-6} \approx 3 \times 10^{-6} = 0.000003$

得 0.000003 為 $10^{-5.53}$ 的近似值。

活動6

請提出你的策略來估計 2^{3000} 是多大的數？

【任務6】

2016年新聞報導：『上一個質數是在2013年同樣被 *GIMPS* 計畫發現,是 2 的 57,885,161 次方減 1 ($2^{57,885,161} - 1$)，而這次新發現的質數 2 的 74,207,281 次方減 1 ($2^{74,207,281} - 1$)，……』

請問這次新發現的質數 $2^{74,207,281}$ 是多大的數？

【任務7】

將一張厚度為 0.1mm (毫米)的紙，對摺再對摺，一直對摺多少次之後，它的厚度會超過 1 公里呢？

參、符號log

計算機有沒有功能可以直接求出 x ，使得 $10^x=2$ ？

試試看：輸入 2 → 按下 log 鍵 → 顯示？



【討論】：

(1) 符號 $\log 2 = 0.3010$ 表示甚麼呢？

(2) 你能再求出 $\log 4$ 與 $\log 5.5$ 嗎？

活動8

(1) 利用計算機完成下列表格：(四捨五入到小數第四位)

x	$\log x$	$10 \log x$
2		
3		
4		
5		
5.5		
7		
8		
9		
10		
20		
21		
38		
520		
1314		
100000		
0.01		
0.0002		

(2) 有沒有甚麼發現呢？你能解釋為什麼嗎？

原來 $10^{\log x} = x$ ！對所有的正數 x ，必存在實數 a ，使 $10^a = x$ 。因此，我們得到

對數的定義： a 為實數，若 $10^a = x$ ，則 $a = \log x, x > 0$

從定義可以知道，因為 10^a 必為正數，因此 $\log x$ 中的 x 必為正數。

受限於計算機的顯示，我們只能找到 $\log x$ 的近似值，不過，當 $x = 10^1, 10^2, 10^4, 10^{-3}, \dots$ 時（為10的整數幕次），它的值就會是整數（也就是這個幕次方的大小）。

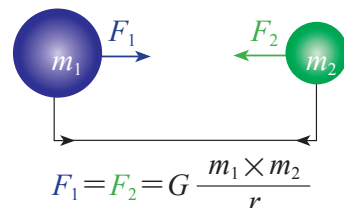
【任務7】

- (1) 想一想： $\log 200$ 大約是多少？你怎麼得到這個結果的？
- (2) 想一想： $\log 56789$ 的值，整數部分是多少？你怎麼得到這個結果的？
- (3) 想一想： $\log 0.000001 = ?$

課 後 習 題

1. 3.56×10^8 是一個幾位數的整數？
2. 將 7.34×10^{-6} 寫成小數形式，則其小數點後第五位數字為多少？
3. 1 微米 = 10^{-6} 米，1 奈米 = 10^{-9} 米，那麼 0.8 微米是 20 奈米的幾倍？
4. 1 公尺對折幾次可達到奈米 (1 奈米 = 10^{-9} 公尺) 的長？
5. 以科學記號表示 $5.32 \times 10^{10} - 7 \times 10^8$ 的值。
6. 以科學記號表示 $7.09 \times 10^{12} + 2.1 \times 10^{11} - 4 \times 10^{10}$ 的值。
7. 以科學記號表示 $\frac{8.4 \times 10^9}{7 \times 10^{-6}}$ 的值。
8. 在比例尺為 1 : 100000 的地圖中，1 公分的長相當於實際的 100000 公分，若地圖中，甲乙兩地相距 10 公分那麼實際距離為 10^n 公尺， $n = ?$
9. 已知 $a = 1.6 \times 10^9$ ， $b = 4 \times 10^3$ ，以科學記號表示 $\frac{a^2}{2b}$ 的值。
10. 地球到太陽的距離是 1.5×10^{11} 公尺，稱為 1 天文單位，而光速為每秒 3×10^8 公尺，若地球到火星的距離是 3 億公里，試回答下列兩題：
 - (1) 地球到火星是幾個天文單位？
(A) 2 (B) 0.2 (C) 5 (D) 0.5
 - (2) 在太陽上爆裂的火光，經地球上接收，馬上傳給火星的太空站，則需費多少分鐘？
(A) 100 (B) 200 (C) 150 (D) 50 分鐘
11. 如果液體的酸鹼濃度為 x ，那麼此液體的 pH 值定義為 $-\log x$ ，例如純水的酸鹼濃度為 1×10^{-7} ，因此純水的 pH 值為 $-\log x (1 \times 10^{-7}) = 7$ ，正常人血液的 pH 值約為 7.4 左右，當高於 7.5 或低於 7.3 時，會有昏迷、甚至死亡的危險。設 r 是某人血液酸鹼濃度與純水酸鹼濃度的比值，試檢驗下列哪些值是安全值？
(1) $r = \frac{2}{3}$ (2) $r = \frac{1}{2}$ (3) $r = \frac{2}{5}$ (4) $r = \frac{1}{3}$ (5) $r = \frac{1}{4}$
12. 萬有引力公式如右下， $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ 為重力常數，地球質量為 5.97×10^{24} 公斤。請計算質量為 1 公斤的重物所受到的萬有引力大小。

- (1) 重物位於赤道 (地球赤道半徑為 $6.38 \times 10^6 \text{ m}$)
- (2) 重物位於北極 (地球北極半徑為 $6.36 \times 10^6 \text{ m}$)



13. 一個質子的質量約為 $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，一個中子的質量約為 $1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，一個電子的質量約為 $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，請問：

- (1) 一個質子與一個中子的質量相差多少公斤？
- (2) 一個中子與一個電子的質量相差多少公斤？
- (3) 一個質子的質量約為一個電子的多少倍？(四捨五入到整數位)
- (4) 一個中子的質量約為一個電子的多少倍？(四捨五入到整數位)

因為一個原子中，電子的質量比中子和質子小得多，幾乎可以省略，而 1 個中子的質量與 1 個質子的質量差不多，因此原子的質量可以以中子質量 + 質子質量來估計。

14. 不使用計算機，想一想：

- (1) 10 的幾次方會是 5？
- (2) 10 的幾次方會是 12？
- (3) $10^{1.7781} = (\text{_____})$
- (4) $10^{-1.4771} = (\text{_____})$

15. (1) $\log 263500$ 的值，整數部分是多少？

(2) $\log 0.00001 = ?$

16. 3^{100} 為幾位正整數？

17. 已知沙灘傾斜的程度與其沙粒的平均直徑大小有關，沙粒越粗糙的，沙灘就越陡峭。

其關係式為 $d = 10^{\frac{s-0.159}{0.118}}$ ，其中 s 為沙灘的坡度， d 為沙粒的平均直徑 (毫米， cm)。

(1) 請算出當 $d = 0.25 \text{ cm}$ ， s 為多少？

(2) 請算出當 $s = 0.3$ ， d 為多少？

18. 大部分的龍捲風至少會持續 1 小時，行進 20 英里，其中心風速 S (英里/小時) 與龍捲風行進的距離 d 有關，其關係式為 $d = 10^{\frac{s-65}{93}}$

1925 年 3 月 18 日，有一個大型龍捲風重創了美國密蘇里州，伊利諾州和印第安州，其中涵蓋的距離為 220 英里，請算出這次龍捲風的中心風速大約為多少？

19. 成年麋鹿的鹿角寬度 a (英吋) 與麋鹿身高 h (英吋) 有關，其關係式為：

$d = 10^{\frac{h+176}{116}} - 40$ ，今有一成年麋鹿其鹿角寬度為 60 英吋，請計算其身高大約多少？

20. 日光會生產放射性的碳 14 (C-14)，它會存在於活著的植物和動物中，一旦植物或動物死掉，他就停止保存碳 14。利用碳 14 的半衰期為5700年，科學家可以根據計算化石的碳14含量來計算這些化石的年份。活著的植物和動物中碳 14 含量為 1，死後 t 年，碳

14 含量為 $C = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$ ，其關係式為

(1) 某一植物化石其碳 14 含量為原來的 $\frac{1}{10}$ ，請問這植物大約多久前死掉？

(2) 某一動物化石其碳 14 含量為原來的 $\frac{1}{8}$ ，請問這動物大約多久前死掉？

【任務解答】：

任務1：(1) 1.7×10^{-5} (2) 6.622×10^{24} (3) 2.7×10^{83}
(4) 7.2×10^{-11} (5) 4×10^{-37} (6) 3.75×10^{-15}

任務2：(1) $9.03 \times 10^{22} \div (6.02 \times 10^{23}) = 1.5 \times 10^{-1} = 0.15 \text{ mole}$
(2)：① $(3 \times 3 \times 3) \times 1.56 = 42.12$ 公克 ② $42.12 \div 11 = 0.9572 \approx 0.957$ 莫耳
③ 約為 $0.957 \times (6.05 \times 10^{23}) \approx 5.76 \times 10^{23}$ 個分子

任務3：(1) $\text{pH} = -\lg 1.5 \times 10^{-10} \approx 9.26$ $[H^+] = 1.5 \times 10^{-10}$
(2) $\text{pH} = -\lg 3.25 \times 10^{-7} \approx 6.49$ $[H^+] = 3.25 \times 10^{-7}$

任務4：(1) 2；20；2000 (2) 3；300；29999 (3) 6；

任務5：(1) $10^x = 4 = 2^2 = (10^{0.3010})^2 \approx 10^{0.6020}$ $x = 0.6020$
(2) $10^x = 6 = 2 \times 3 = 10^{0.3010} \times 10^{0.4771} = 10^{0.3010+0.4771} = 10^{0.7781}$ $x = 0.7781$
(3) $10^x = 6 = 2 \times 3 = 10^{0.3010} \times 10^{0.4771} = 10^{0.3010+0.4771} = 10^{0.7781}$ $x = 0.7781$
(4) $10^x = 0.003 = 3 \times 10^{-3} = 10^{0.4771} \times 10^{-3} = 10^{0.4771-3} = 10^{-2.5229}$ $x = 2.5229$
(5) $10^x = 0.003 = 3 \times 10^{-3} = 10^{0.4771} \times 10^{-3}$
(6) $10^{-8.3010} = 10^{-8-0.3010} = 10^{-8} \div 10^{0.3010} = 10^{-8} \div 2 = 0.5 \times 10^{-8} = 5 \times 10^{-9}$

任務6：22336392位數

任務7：(1) 介於 2~3 的數、2.3010 等回答皆可
(2) $10000 < 56789 < 100000$ ，所以整數部分為 4
(3) -6

【解答】

1. 9
2. 0
3. 40
4. 30
5. 5.25×10^{10}
6. 7.26×10^{12}
7. 1.2×10^{15}
8. 4
9. 53.2×10^{14}
10. (1) *B* (2) *A*
11. (2)(3)(4)
12. (1) 9.783 (2) 9.844
13. (1) 2×10^{-30} (2) 1.674×10^{-27} (3) 1837 (4) 1839
14. (1) 0.6990 (2) 1.0791 (3) 60 (4)
15. (1) 5 (2) -5
16. 48 位數
17. (1) 0.09 (2) 15.66 (*cm*)
18. 282 英里 / 小時
19. 56 英吋
20. (1) 18937 (2) 17100

宇宙的大小

2013/06/27

作者：Shane L. Larson

翻譯：Ankh Huang 黃于薇，現為兼職譯者 (ankhmeow@gmail.com)本文原發表於 *Write Science*

很多讀者都知道,對於我自己這輩子做為科學家的抱負和期許,我一向認為是啟蒙於小時候接觸到的《宇宙》(*Cosmos*)節目(譯註:主持人為著名天文學家、天體物理學家與科普作家卡爾薩根 *Carl Sagan*)。在第一集節目開頭的前五分鐘,卡爾就提出了一個非常宏大的想法:「宇宙的大小和規模,遠遠超出一般人類的理解。」

我隨著長大成人,成為科學家,慢慢地也忽略了這麼一個簡單的事實。我學會怎麼書寫表達龐大的數字,學會在需要的時候換算公尺公里和光年,甚至學會使用「瘋狂相對論者的單位」,把距離、時間、能量和質量全部都用公尺來測量(這讓我的學生、父母、還有很多身為天文學家的朋友都感到驚訝又困惑!)。這些事情我做過很多,多到我計算數字的時候馬上就能知道是不是大概沒錯。我們距離本星系群(*Local Group*)中的一個星系有兩百萬光年那麼遠?嗯聽起來差不多。一個類星體(*quasar*)距離我們有750百萬秒差距?當然,我想不會錯。到土星有13億公里遠?就是如此。

科學家的重要技能就是培養出對龐大數字的敏感度,還有判斷數字是否大致正確的能力(對極小的數字也是!),我們花了大量時間訓練自己和學生,以求能夠精通此道。但這卻完全忽視了卡爾的見解——這些龐大無比的數字,意謂著我們在浩瀚宇宙中是何其渺小!

遇到太陽系步道(*Solar System Walks*)的時候,我總會去走走(關於太陽系步道,這裡有 [Wikipedia](#) 的一長串清單;另一份名單來自 [Air & Space](#))。這些比例模型展示了太陽系的星球排列,將星球的位置依照適當的空間比例標示出來,讓你感受一下太陽系究竟該有多大(更別說是宇宙了)。我最喜歡的一條太陽系步道位於阿拉斯加的安克拉治(*Anchorage*),被稱為「光速行星步道(*Lightspeed Planet Walk*)」——如果你用正常速度走在這條步道上,你走到每個行星所花費的時間,就等同於光線抵達該行星所需的時間。這簡直太棒了!如果從地球開始,在你出發前進的同時用一隻雷射筆往海王星照射,你走到海王星所花的時間,就和你那隻雷射筆的微弱綠光抵達真正的海王星所需時間相同!



圖片摘自泛科學，感謝提供

▲阿拉斯加安克拉治的光速行星步道 (Lightspeed Planet Walk) 中央，以及太陽的比例模型。

雖然這些模型步道的實體規模都很大，但我還是常會覺得，這些步道並沒有把那樣的浩瀚廣闊用讓我震撼的方式表現出來。我常常在思考這一點，而且猜想可能確實是這樣，因為當我走過這些模型時，感覺十分平常。從火星一路散步到木星的同時，我並沒有真的去思考自己走的距離究竟有多遠。我會分心去聽我女兒嘰嘰呱呱地講說為什麼冥王星還是應該歸類為行星、會邊看鴨子吃水藻，還要閃躲快速經過的登山車車手。

但就在兩周前，一個天文學家朋友給我看了些東西，讓我大為驚奇。這是個非常簡單的示範，你也可以自己在家裡進行，但卻顯現出我在心中描繪的太陽系構圖錯得多麼離譜！（而且我敢打賭你一定也是！）我想我心裡的太陽系構圖之所以有誤，是因為我們總是把整個太陽系家族放一起，好呈現出星球的相對大小，就像下面這張圖片：



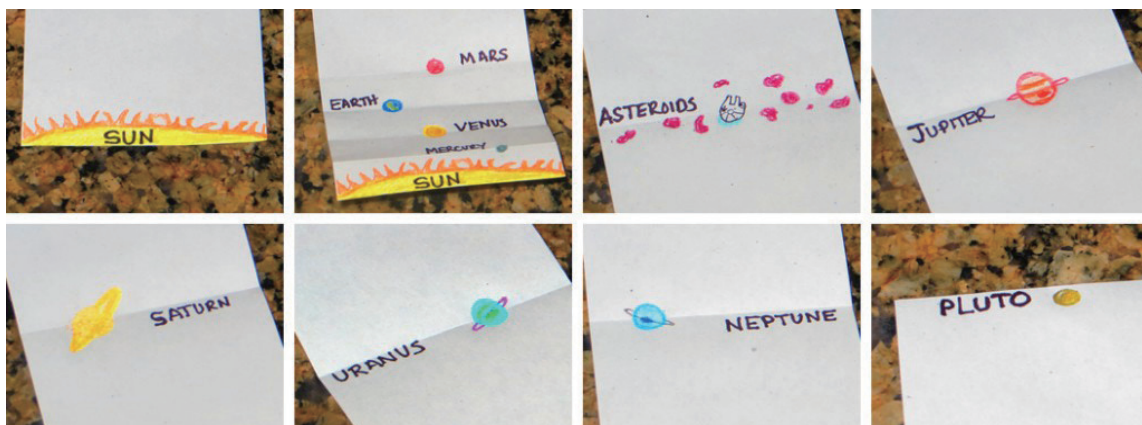
▲太陽系的典型示意圖，常見於書籍、線上參考資料以及大眾傳播媒體。

沒有呈現出來的是天體之間的距離。我們早已掌握星球之間的相對間距,這些距離的推算,是用基本的幾何學知識加上巧妙的觀測(其中有許多觀測方式在你家後院就可以進行),並運用物理定律得出的(尤其是克卜勒運動定律和牛頓的萬有引力定律)。

讓我告訴你我朋友這個小把戲是怎麼玩的。首先拿一條長條的紙片(計算機用紙或其他長條狀的紙都可以),長度約需一公尺。在一端寫下「太陽」,在另一端寫下「冥王星」。現在將紙對折之後再打開。太陽系中位在太陽和冥王星之間的是什麼?是「天王星」;把它寫在對折處。現在把寫著「冥王星」的那一端折到「天王星」。把代表「海王星」軌道的對折處標示出來。這表示什麼呢?這顯示出太陽系外側區域的行星並不多!

現在把寫著「太陽」的那一端折到「天王星」。在新的折痕處寫上「土星」。把「太陽」與「土星」對齊折好,在新的摺痕處標上「木星」。再把「太陽」與「木星」對齊折好,在新的摺痕處標上「小行星」(*Asteroids*)。做到這裡時,你的長紙條有 93% 是在小行星與冥王星之間。太陽系中的這個部分,美其名為「外太陽系」(*The Outer Solar System*),可是太陽系中已知的行星裡面,足足有半數還要擠在「小行星」和「太陽」之間!讓我們繼續進行這部分。

把「太陽」折到「小行星」,然後把折痕處標為「火星」。最後是兩次對折:將「太陽」對齊「火星」折好,然後將對折處與「火星」對齊再折一次。結果會有三個折痕,從「太陽」開始,依序把這三個折痕標上「水星」、「金星」以及「地球」。這整個過程最後的成品,就是一張精準到不可思議的天體間距示意圖(沒錯,我計算過誤差,我實在太知道了!)



圖片摘自泛科學,感謝提供

現在好好看一下你的間距模型圖。太陽系裡還有有很多空著的地方；靠近地球的星體最容易前往，但還是非常遙遠；到月球的距離在圖上大約和一條鉛筆畫出的直線相同，搭乘阿波羅號的太空人卻花了四天才得以跨越這鴻溝般的距離；搭乘火箭前往火星要花六到八個月，而你看看火星離地球有多近啊！卡西尼號（*Cassini*）太空船則花了將近七年才抵達土星。等到 2015 年新視野號（*New Horizons*）太空船經過冥王星的時候，距離這艘太空船起飛已經有九年半了！太陽系實在非常廣大，而宇宙更是浩瀚無垠。

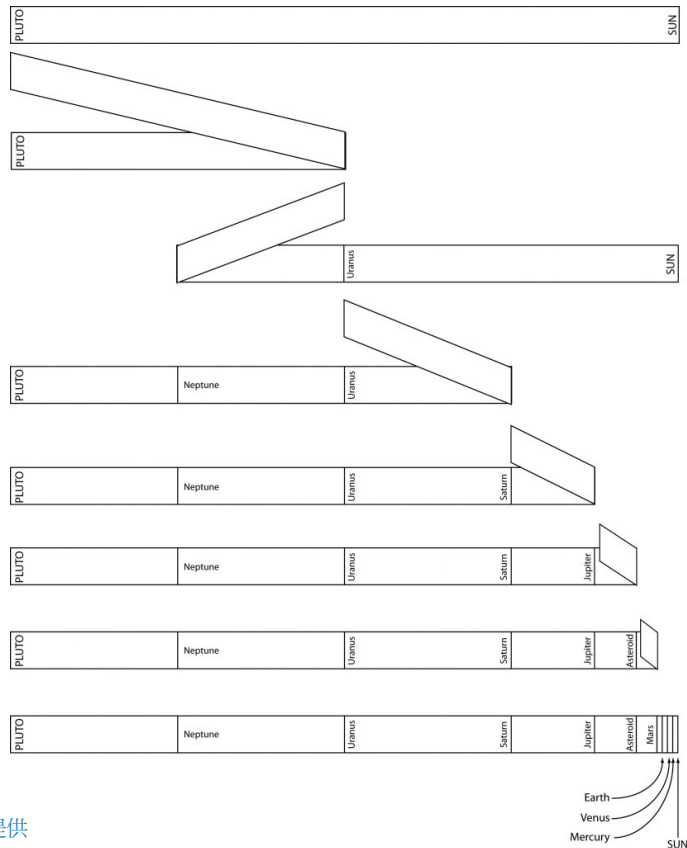
我想這張間距模型圖最讓我驚訝的，就是我以為很遙遠的地方，其實遠比我腦中所想的要近得多。想想看木星，它位在外太陽系，但在圖上，它的距離只有太陽到冥王星的八分之一！哇塞！

「宇宙的大小和規模，遠遠超出一般人類的理解。」也許真是如此；至少這超出了我們日常經驗的範疇。但我們的智力促使大腦去嘗試理解，而像這樣巧妙的示範，就是讓你能夠進一步思考。所以現在就拿出剪刀來，把紙裁好，動手折折看吧！



▲(左圖) 完整長度的太陽系示意圖 (右圖) 自製的版本，旁邊是個典型的地球人。

圖片摘自泛科學，感謝提供



圖片摘自泛科學，感謝提供

在長條紙片上，以折痕做出太陽系中行星軌道之間合理的距離圖示。

附件二：證明 $10^x = 5.5$ 中的 x 為無理數。

設 $10^x = 5.5$ 中的 x 為有理數，則 x 可表示為 $x = \frac{q}{p}$ ， p, q 為非零整數

$$\text{則 } 10^{\frac{q}{p}} = 5.5 \Rightarrow (10^{\frac{p}{q}})^q = 5.5^q \Rightarrow 10^p = 5.5^q \Rightarrow 2^p \times 5^p = 11^q \times 2^{-q} \Rightarrow 2^{p+q} \times 5^p = 11^q$$

但 p, q 為非零整數，故上式無解，得到矛盾。

因此假設錯誤， x 應為無理數，得證。

素養導向數學教材 / 單維彰 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

召集人：單維彰

副召集人：鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳始蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）

作者：吳汀菱、洪瑞英（依姓氏筆畫順序排列）

執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）

