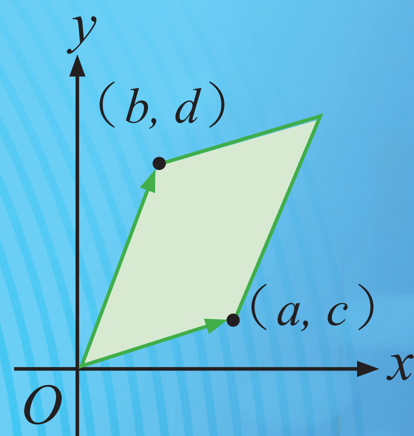
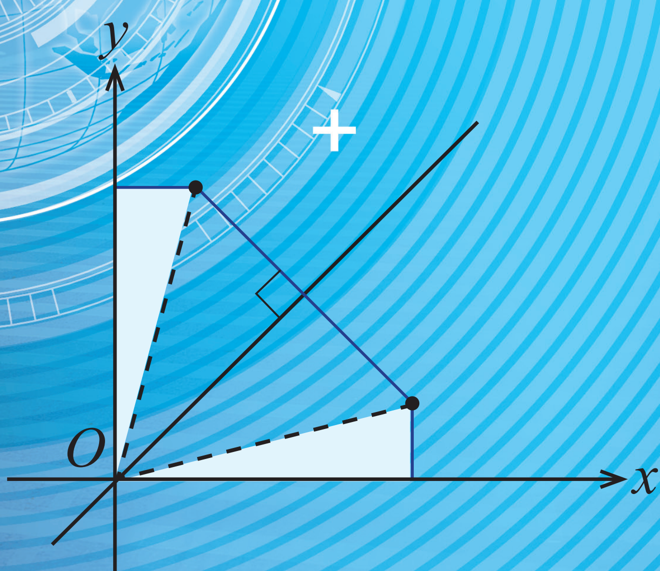
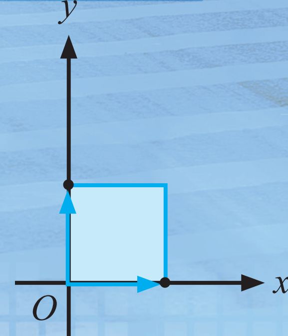
素養導向數學教材

平面上的線性變換

教師手冊







國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

教材設計理念

教材架構

本教材先從歷史的角度切入，希望透過輕鬆的筆調與故事性的方式，介紹矩陣乘法規則的由來，並導入線性變換的概念。並期望學生瞭解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。接著透過一連串的活動，其中有活動引言，希望引起學生學習動機；再透過問題導向的實作與討論，發展概念與程序性的知識；活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論；除了活動、任務之外，編者設計評量問題，希望學生可以透過實際練習深化教材中的概念。

教材設計想法：

1. 簡介現代矩陣理論的開創者，英國數學家凱萊（*Arthur Cayley*，1821～1895）對矩陣乘法規則的建立，並從中引出線性變換一詞與概念。除了希望學生的學習可以更緊密連接線性變換與矩陣的歷史與應用的脈絡之外，也期盼能提升學生數學閱讀的能力。
2. 透過 活動1 與【任務1】的放大與鏡射對稱變換，在這些看似不同的運動變換中，發現變換前後坐標的表示法中卻有著共同的模式：$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$，進而導出「線性變換」的定義；再透過矩陣乘法，引出二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作為線性變換 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 的矩陣表示，也可將它看成是一種坐標平面上的線性變換。
3. 因二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可將點 (x, y) 作線性變換到點 $(x, y)=(ax+by, cx+dy)$。我們將透過 活動2 來讓學生學習“線性變換之點的對應”等基本操作問題。
4. 二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 決定點的變換，反之，如果掌握“點”及其“對應點”，那麼是否可以完全決定 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 呢？我們安排 活動3 來探討“線性變換矩陣的決定”問題。
5. 活動4 藉由引言「海水運動是線性變換嗎？」，希望刺激學生思索線性變換更深層的意義，來對線性變換的幾何性質：保持共線與保持點之間距離的比例關係等，作學習與探討。

6. 目前高中教材對線性變換的代數性質：

(1) $A(\alpha\vec{u})=\alpha A(\vec{u})$，　(2) $A(\vec{u}+\vec{v})=A(\vec{u})+A(\vec{v})$。

並不強調，這是連結大學線性代數的重要基礎，於是我們安排了活動 5 ，透過之前學過的矩陣加法、係數積、乘法等運算規則，體會線性變換有「保持線性組合」效果，所以它被稱作「線性」變換。

7. 坐標平面上圖形的伸縮的變換可考慮水平伸縮與鉛垂伸縮，透過 活動 6 來探討“以原點為中心，沿著 x 軸、y 軸的伸縮變換”的問題。

8. 活動 7 由利用活動 3 線性變換矩陣的決定，掌握將坐標軸上的單位點 $(1，0)$ 與 $(0，1)$ 以原點為中心，逆時針旋轉 θ 角度後的坐標，即可決定此旋轉變換方陣，更進一步探討旋轉變換與有向角的關係。

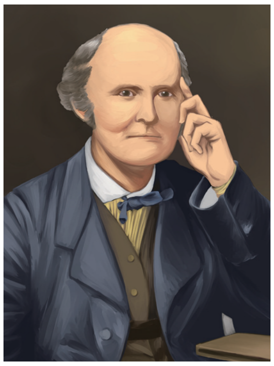
9. 活動 8 由利用 活動 3 線性變換矩陣的決定，掌握將坐標軸上的單位點 $(1，0)$ 與 $(0，1)$ 對過原點且與 x 軸正向夾角 θ 的直線作鏡射變換後的坐標，即可決定此鏡射變換方陣。直線 $y=x$、x 軸與 y 軸是探討對稱時常討論的三條直線，也同時呈現它們的鏡射變換方陣。更進一步探討鏡射變換與有向角的關係。

10. 在坐標平面上，若點 $p(x，y)$ 的縱坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍，是將點 $p(x，y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍的推移變換，我們將透過 活動 9 來讓學生學習“沿 x 軸推移 y 坐標 k 倍的線性變換”等基本操作問題。

11. 坐標平面上的線性變換，它將點作線性變換到新的點，若坐標平面上的三角形經線性變換後它的面積會作怎樣的變化呢？我們利用 活動 10 來探討坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

12. 我們將透過 活動 11 來探討坐標平面上的一個三角形經旋轉，鏡射，伸縮或推移變換後，所得新三角形的面積 Δ' 與原三角形的面積 Δ 的關係為何，作一總整理與結尾。

壹、歷史 （矩陣的乘法規則是怎麼定義出來的）



1857年，英國數學家凱萊（*Arthur Cayley*，1821～1895）發表一篇被公認為近代矩陣理論和線性代數基石的論文〈 矩陣理論備忘錄 〉（*A Memoir on the Theory of Matrices*），他將矩陣從行列式抽離出來，視之為另一個數學物件，並且定義完備的矩陣代數運算。

而將矩陣以「 *Matrix* 」命名的是英國數學家西爾維斯特（*James Joseph Sylvester*，1814～1897），「 *Matrix* 」有「 母體、基礎 」的意思，西爾維斯特可能意指 *matrix* 是行列式的「 母體、基礎 」，但他並未定義矩陣乘法。

凱萊曾經道出他研究方陣的動機，是為了簡化「 線性變換 」：

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

的描述和書寫。前面這個看起來很像二元一次聯立方程式的式子，其意義是把平面上的點 $(x，y)$「 變換 」成另一個點 $(x'，y')$。令：

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}，$$

凱萊將上述的線性變換簡記成 A，A 後來被稱為是該線性變換的矩陣表示。

1855年某日，凱萊考慮兩個「 線性變換 」①與②，其中

$$①：\begin{cases} x'=px+qy \\ y'=rx+sy \end{cases} \qquad ②：\begin{cases} x''=a\,x'+b\,y' \\ y''=c\,x'+d\,y' \end{cases}$$

如果將平面上的點 (x, y) 先經過①的變換，再經過②的變換後成另一個點 $(x''，y'')$ 時，整理 $(x''，y'')$ 與 (x, y) 的關係，

得到 $\begin{cases} x''=a\,x'+b\,y'=a(px+qy)+b(rx+sy)=(ap+br)x+(aq+bs)y \\ y''=c\,x'+d\,y'=c(px+qy)+d(rx+sy)=(cp+dr)x+(cq+ds)y \end{cases}$，

即 $\begin{cases} x''=(ap+br)x+(aq+bs)y \\ y''=(cp+dr)x+(cq+ds)y \end{cases}$

才氣洋溢的凱萊大膽構思，令

$$F=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}，G=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}，H=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$

將上述的變換過程以矩陣 F 和 G「 乘開 」等於 H 表示，他興奮地寫下：

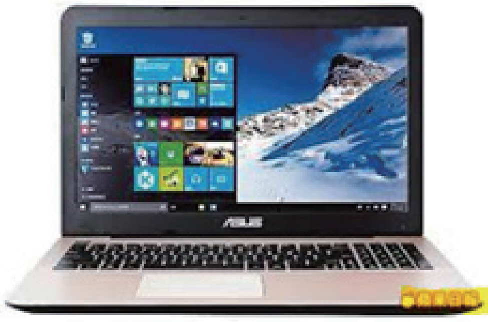
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$

頓時矩陣乘法的運算規則誕生了！

參考資料

1. *Arthur Cayley*，1821～1895相片
（*http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Cayley_5.jpeg*）
2. 單維彰（2010, 10）。〈「 矩陣 」為什麼要相乘？〉。科學月刊，490期。
3. 線性代數的第一堂課——矩陣乘法的定義
（*https://ccjou.wordpress.com/*2010/06/18/*%e7%b7%9a%e6%80%a7%e4%bb%a3%e6%95%b8%e7%9a%84%e7%ac%ac%e4%b8%80%e5%a0%82%e8%aa%b2-%e7%9f%a9%e9%99%a3%e4%b9%98%e6%b3%95%e7%9a%84%e5%ae%9a%e7%be%a9/*）
4. 單維彰（2011,09）。矩陣的故事（*The Story of Matrices*）。科學*Online* — 科技部高瞻自然科學教學資源平台。（*http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=*32410）

貳、生活　（*Google* 搜尋引擎的秘密）



圖片出處來自網路

由於資訊科技的進步，手機、電玩、電腦動畫的發展也一日千里。生動逼真、立體感十足的畫面，搭配優質的音效，帶給人們全新的生活感受！在這些影像處理中，是將電腦螢幕看作為一個坐標平面，透過在預定的坐標位置上打上各種顏色的光點，就可以在螢幕上顯示所需的靜態圖案；但要展現動態畫面時，便需要一步步地變換圖案的位置、角度及大小，這裡面應用了許多數學知識，牽涉到線性變換的概念。

除此之外，線性變換在數學、物理、統計、金融等自然科學與社會科學中都是常用的工具，具有廣泛的用途！例如，在現代物理學量子場論（*Quantum field theory*）中線性變換扮演重要的角色；而著名的馬克夫過程（*Markov process*）就是連續重複操作特定線性變換的過程，已廣泛應用到不同學科的研究。例如：從描述自然界中懸浮微粒子的布朗運動，到通訊網路中的排隊理論，或是在生物學上幫助模擬生物增殖過程的建模與基因預測，或是經濟學家對國家經濟發展的預測，或是應用在棒球比賽的決策上，甚至著名的*Google*搜尋引擎的計算法則，網頁排序演算法（*PageRank*）最原始的概念也來自於此。

參考資料

1. 馬可夫鏈
（*http://www.wikiwand.com/zh-tw/%E9%A9%AC%E5%B0%94%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E9%93%BE*）
2. 李中傑（2011, 11）。〈 棒球比賽宛如是一個馬可夫過程 〉。科學教育月刊，344期。
（*http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/*100（336-345）*/344-PDF/*03-99045-*%E6%A3%92%E7%90%83%E6%AF%94%E8%B3%BD%E5%AE%9B%E5%A6%82%E4%B8%80%E5%80%8B%E9%A6%AC%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E9%81%8E%E7%A8%8B(%E6%9C%88%E5%88%8A).pdf*）
3. 林倉億（2014,01）。轉移矩陣的穩定狀態與*Google*搜尋引擎（*The Stationary of a Transition Matrix, and Google Search*）。科學*Online* - 科技部高瞻自然科學教學資源平台。

教學 活動安排

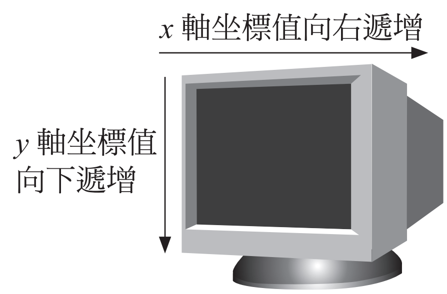
1. 老師請同學回答矩陣乘法的規則，詢問是否曾思考為什麼要如此定義？進行動機引起。
2. 老師導讀與解說歷史與生活部分，讓學生瞭解「 數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識 」。摘自數學傳播十六卷三期民 81 年 9 月 *P*2，數學史在數學教育中的重要性，楊淑芬
3. 老師講解矩陣乘法發明的過程。
4. 老師可強調說明大家常用的*Google*的搜尋引擎的演算法其實背後需要線性變換的知識。期能引發學生興趣。
5. 老師可安排作業，請學生蒐集線性變換的在各個學科與科技生活上的應用資料。

教學 注意事項

1. 不要忽略歷史與生活部分而不教學。學習數學之目的不只在於訓練學生的思考能力，也要讓學生認識數學與生活的關係，及知道數學的來龍去脈，貫古通今，希望有助於提高學生的學習興趣。
2. 提醒學生注意矩陣 F 與 G 於乘法時的順序是 FG 而非 GF。

補充 教材

螢幕 X Y 坐標系統



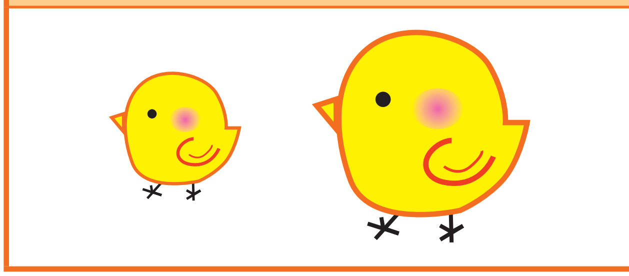
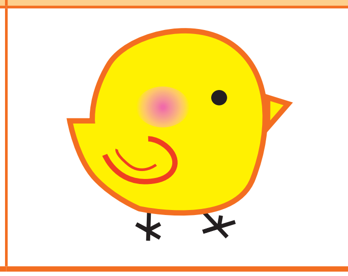
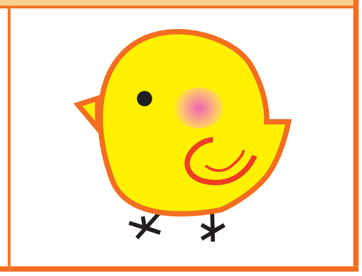
螢幕坐標和數學上的*XY*坐標系統有所不同，也是日後動畫在電腦螢幕上呈線的真正坐標系統。它的*Y*坐標值是向下遞增的，*XY* 坐標如果為為負值的話，它會位在螢幕外的坐標系統中。

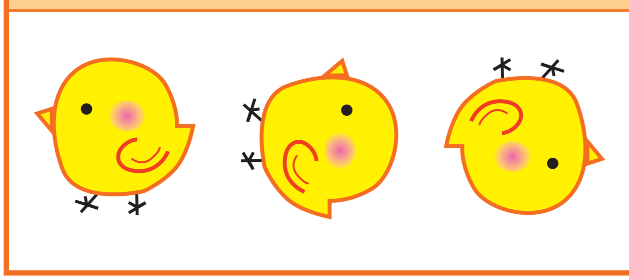
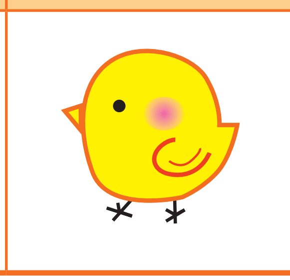
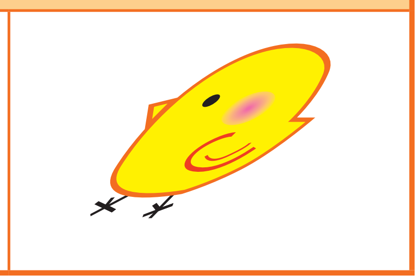
至於螢幕坐標系統的大小，由螢幕的解析度來決定，而解析度的高低取決於顯示卡或螢幕設備的支援能力，常見的螢幕顯像解析度有「640×480」、「800×600」及「1024×768」。例如「640×480」是指*X*坐標軸上有640個像素點 (*Pixel*)、*Y*坐標軸上有480個像素點。

參、平面上的線性變換

如圖所示，「 放大 」、「 左右或上下鏡射 」、「 旋轉 」或是「 拉扯變形(即推移)」，這些看似不同的運動變換，卻有著共同的數學概念——平面上的線性變換 。

我們先以兩個特殊的變換：活動1 的放大變換與【 任務1 】的鏡射對稱變換為例來說明，大家一起來學習吧！

放大	鏡射	
		

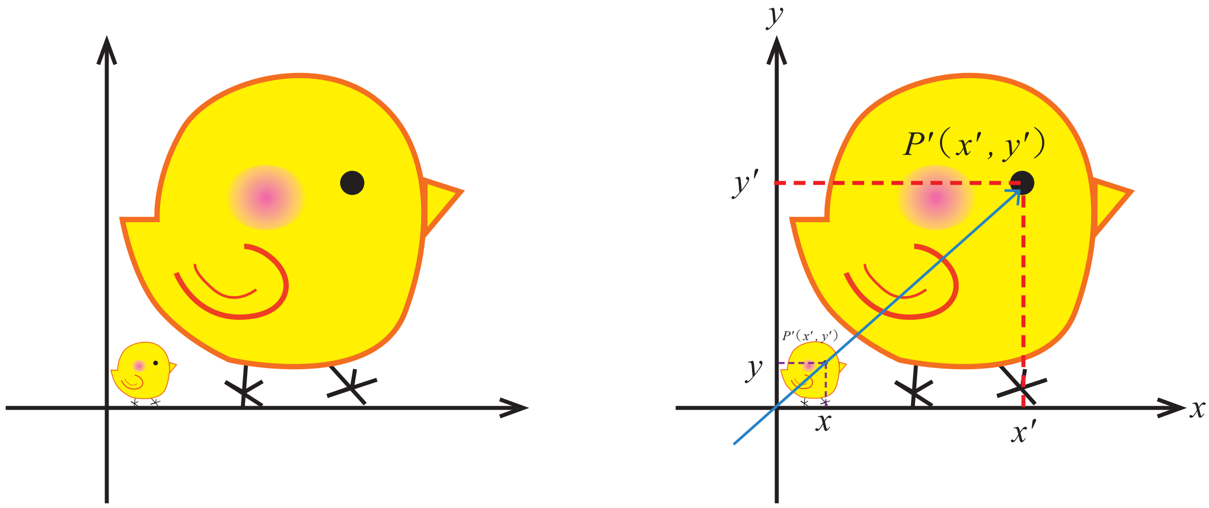
旋轉	拉扯變形(即推移)	
		

在學習平面上的線性變換之前，我們將對相關符號的數學意義作些說明，就是2×1階的矩陣$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$可以表示點 $P(x,y)$，也可以表示點 P 對應的位置向量 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$。

即：2×1階的矩陣$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$、點 $P(x,y)$ 與向量$\overrightarrow{OP}=(x,y)$三者都可互相表示！

$$2\times 1 \text{ 階的矩陣}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \text{點}P(x,y) \leftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP}=(x,y)$$

活動1 如何將圖形「以原點為中心放大5倍」?

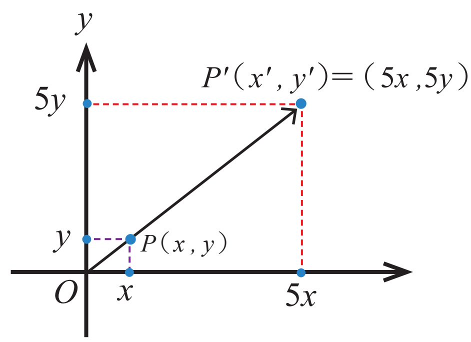


坐標平面上，將圖形Ω以「以原點 O 為中心放大5倍」時，假設Ω上的點 $P(x，y)$ 移動改變到點 $P'(x', y')$，試以點 P 的坐標表示 P' 的坐標。

【活動解答】

(1)若點 $P(x, y)$ 以「以原點 O 為中心放大5倍」移動改變到點 $P'(x', y')$，則 $\overrightarrow{OP'}=5\overrightarrow{OP}$，得 $(x', y')=(5x, 5y)$，即坐標關係式為 $\begin{cases} x'=5x \\ y'=5y \end{cases}$。

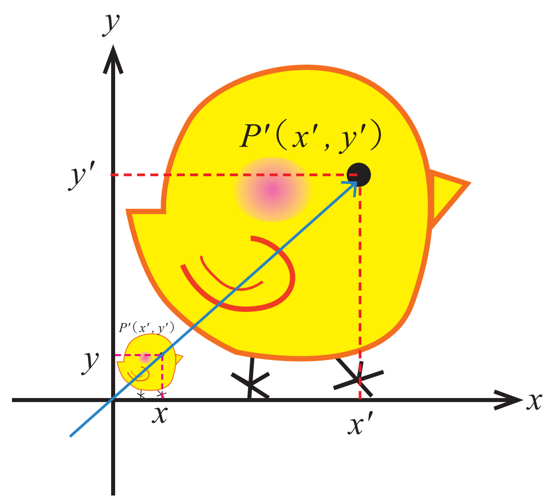
所以將Ω上的點 (x, y) 移動改變至點 $(5x, 5y)$，可得Ω「以原點 O 為中心放大5倍」的圖形。



(2) $\begin{cases} x'=5x \\ y'=5y \end{cases}$ 可改寫為 $\begin{cases} x'=5x+0y \\ y'=0x+5y \end{cases}$，

而這關係式可用矩陣乘法表示為

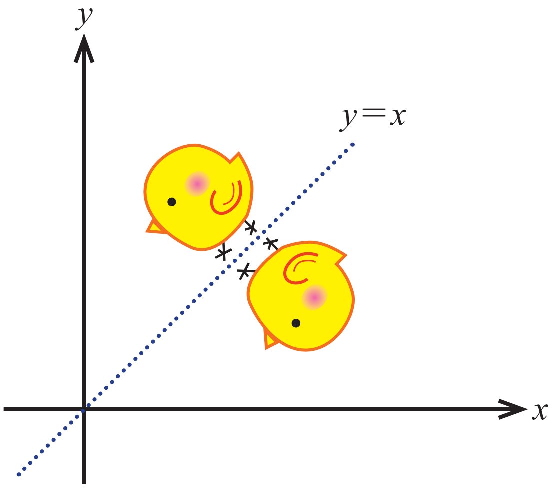
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

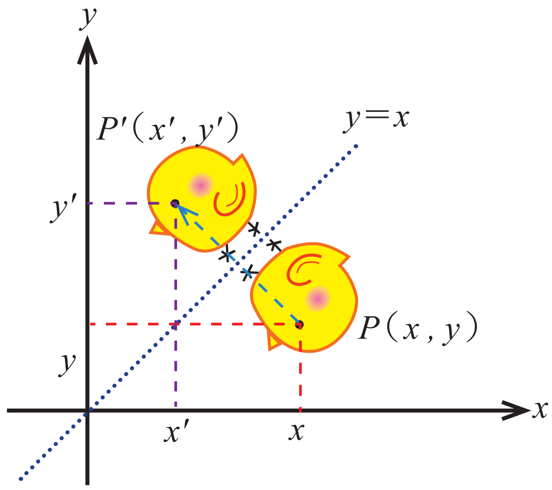


學生手冊 $P7$

【 任務1】如何將圖形「 以直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射 」?

坐標平面上，將圖形Ω以「 直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射 」時，假設Ω上的點 $P(x，y)$ 移動改變到點 $P'(x',y')$，試以點 P 的坐標表示 P' 的坐標。



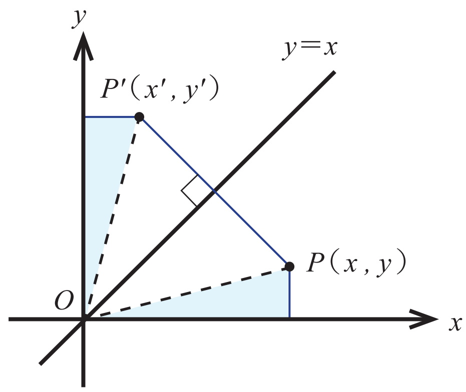


【 活動解答 】

(1)若點 $P(x,y)$「 以直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射 」移動改變到點 $P'(x',y')$，如圖所示，利用三角形的全等可得 $(x',y')=(y,x)$，

即坐標關係式為 $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$。

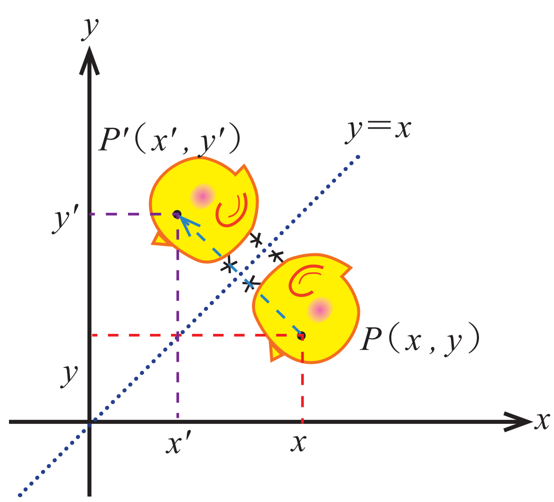
所以，將Ω上的點 (x,y) 移動改變至點 (y,x) 時，可得Ω「 以直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射 」的圖形。



(2) $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$ 可改寫為 $\begin{cases} x'=0x+y \\ y'=x+0y \end{cases}$。

這關係式可用矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



學生手冊 P8

結論：

1. 活動1 與【任務1】的結果中，點$P(x, y)$移動改變成另一個點$P'(x', y')$的規則，都可寫成如下的統一形式：

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a，b，c，d\text{ 是實數})\cdots\cdots(*)$$

此式的特色是：x' 與 y' 都表示成 x，y 的一次式且沒有常數項（即為x，y 的線性組合），因此坐標關係式$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$可利用矩陣乘法表示為$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。在活動5 中我們將透過矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$說明這種形式的變換具有「保持線性組合」效果，所以我們稱這個關係式$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$為坐標平面上的線性變換。

2. 當坐標平面上的圖形依照（$*$）式的規則被移動改變時，該移動改變就稱為線性變換。

所以活動1 的“將圖形「以原點為中心放大5倍」”與【任務1】的“將圖形「以直線$y=x$ 為對稱軸作鏡射」”都是線性變換。

3. 由於平面上每一個“線性變換”$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$都有唯一的一個“二階方陣”$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$與之對應，因此線性變換的模型是由二階方陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$所決定，我們稱二階方陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$為線性變換$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$的矩陣表示。

活動1 中，將圖形以原點為中心放大5倍的線性變換$\begin{cases} x'=5x+0y \\ y'=0x+5y \end{cases}$，其矩陣表示為$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。

【任務1】中，將圖形作對稱於直線$y=x$的線性變換$\begin{cases} x'=0x+y \\ y'=x+0y \end{cases}$，其矩陣表示為$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。

【任務2】辨認是否為線性變換

下列哪些是線性變換？如果是線性變換，請寫出它的矩陣表示。

(1)$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=3x+4y \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x'=x\sin\theta+y\cos\theta \\ y'=x\cos\theta-y\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 為實數） (3)$\begin{cases} x'=x+2y+5 \\ y'=3x+4y+6 \end{cases}$ (4)$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=xy \end{cases}$

解答：(1)$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=3x+4y \end{cases}$是線性變換，其矩陣表示為$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。

(2)$\begin{cases} x'=x\sin\theta+y\cos\theta \\ y'=x\cos\theta-y\sin\theta \end{cases}$是線性變換，其矩陣表示為$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$。

(3)(4) 都不是線性變換，其中$x+2y+5$，$3x+4y+6$，xy 都不是x，y 的線性組合。

學生手冊 P9

【 教學活動安排 】

(1)教師引導學生透過放大變換建立 x'，y' 與 x，y 的坐標聯立關係式。

(2)教師引導試著將坐標聯立關係式，寫成矩陣乘法的形式，為後面講解鋪路。

(3)教師引導學生做任務1重複上述(1)(2)的程序。

(4)講解活動1 與【 任務1 】的結果中所歸納演繹的結論，尤其 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 為何稱為線性變換。

(5)透過【 任務2 】檢核學生是否能辨識線性變換。

【 教學注意事項 】

(1)若學生忘記，請老師複習伸縮與鏡射的相關知識。

(2)在結論中要清楚說明，$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ 的形式是 x' 與 y' 都表示成 x，y 的一次齊次函數，即 x，y 的線性組合。

(3)雖然平面上的線性變換，是平面上的點之間彼此對應的函數關係，但依據課綱，此時教材不引入符號 f：$R^2\to R^2$ 與 $f(x,y)=(\varphi(x,y)，\varphi(x,y))$。

(4)平面上的點與點之間的對應關係若構成一函數時，習慣以“映射”或“變換”稱呼之。

活動 2 引言

平面上的線性變換 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$，可用矩陣的乘積表示成 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。因此二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 成為線性變換的矩陣表示，這對線性變換的探究方便不少。

往後我們直接將二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 看成是一種坐標平面上的線性變換：

平面上的每一點 (x, y)，在與矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 相乘之後都可以產生唯一的對應點 $(x', y')=(ax+by, cx+dy)$，即

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

這個關係式類似以前所學過的一次函數 $y=ax$。

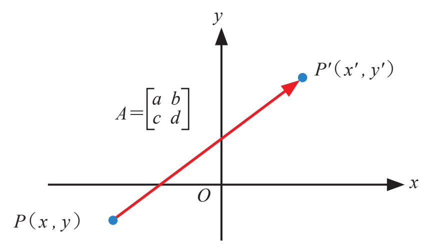
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$(\ y\ )=(\ a\ )(\ x\ )$$

線性變換之點的對應

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

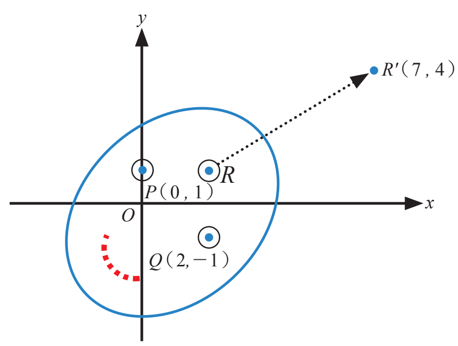


我們將透過活動 2 來學習“線性變換之點的對應”問題。

活動 2 線性變換之點的對應

假設在「三眼蛋頭怪獸」的圖像處理上，

以二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 作為平面上圖形的線性變換，



(1) 求點 $P(0, 1)$ 與 $Q(2, -1)$ 所在的兩眼，經過 A 變換後之新位置為何？

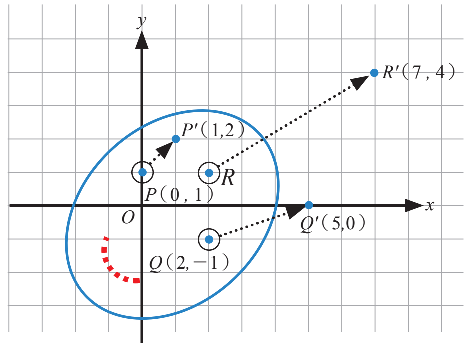
(2) 若第三隻眼所在的 R 點，經過 A 變換後之新位置為 $R'(7, 4)$，則 R 點的坐標為何？

(3) [思考與討論]：平面上是否有其他的點經由 A 變換之後，它的對應點也是 $R'(7, 4)$？

(4) [思考與討論]：若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為相異兩點，則經 A 變換後它們的對應點是否也相異？

學生手冊 *P*10

【 解答 】



設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$ 將點 (x, y) 變換到點 (x', y')，

則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x'=3x+y\\y'=x+2y\end{cases}$。

(1) $P(0, 1)$ 的對應點求法：

(方法一) 直接代入

$\begin{cases}x'=3\times0+1=1\\y'=0+2\times1=2\end{cases}$。

(方法二) 矩陣乘法

$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。所以點 $P(0, 1)$ 之對應點 P' 的坐標為 $(1, 2)$。

$Q(2, -1)$ 的對應點求法：

(方法一) 直接代入

$\begin{cases}x'=3\times2-1=5\\y'=2+2\times(-1)=0\end{cases}$。

(方法二) 矩陣乘法

$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$。所以點 $Q(2, -1)$ 之對應點 Q' 的坐標為 $(5, 0)$。

(2) **(方法一)** 解聯立方程組

$\begin{cases}x'=3x+y=7\\y'=x+2y=4\end{cases}$，得 $x=2$，$y=1$。

(方法二) 矩陣乘法

$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$。所以 R 點坐標為 $(2, 1)$。

(3) 若有一點 (x, y) 經由 A 變換之後，它的對應點也是 $R'(7, 4)$，則 x, y 必滿足聯立方程組

$\begin{cases}x'=3x+y=7\\y'=x+2y=4\end{cases}$，得 $x=2$，$y=1$，所以只有唯一的一點 $R(2, 1)$ 之對應點為 $R'(7, 4)$。

(4) 可利用反證法，證明更一般性的結果，若點 $P_1(x_1, y_1)$ 與點 $P_2(x_2, y_2)$，經由 A 變換後對應到同一點，則點 P_1 與 P_2 必為同一點。理由如下：

若 $\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$，因為 $det\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}=5\neq0$，$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}$ 存在，

兩邊同乘 $\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}$，由 $\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$，

所以點 P_1 與 P_2 必為同一點。

故，若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為相異兩點，則它們經由 A 變換後的對應點也不同。

活動2 的結果可推論至一般的情形：

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且**det $A\neq 0$**，

1. 每一點 $P(x, y)$ 經過 A 變換後都可對應至唯一的一點 $P'(ax+by, cx+dy)$。

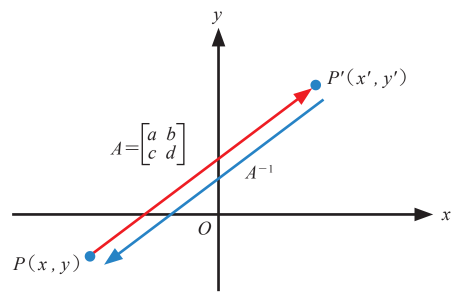
2. 對於任一點 $Q'(x', y')$，都存在唯一的一點 $Q(x, y)$，使得 Q 經 A 變換後對應至Q'。

理由：因為 A^{-1} 存在，若 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

當$det\ A\neq 0$，則 A 是可逆的，

此時，若 A 將 $P(x, y)$ 變換到 $P'(x', y')$，

那麼 A^{-1} 將 $P'(x', y')$ 變換回到 $P(x, y)$。



例如，活動2 (2)中因為 A 是可逆的，將 $(2, 1)$ 變換到 $(7, 4)$，則 A^{-1} 將 $(7, 4)$ 變換到 $(2, 1)$。

3. 若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為相異兩點，則它們經 A 變換後的對應點也一定不同。

理由：利用反證法，

若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$，經 A 變換後對應到同一點，即 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，

因為 A^{-1} 存在，則 $A^{-1}A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=A^{-1}A\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，即 $I_2\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=I_2\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，

因此 P_1 與 P_2 必為同一點。

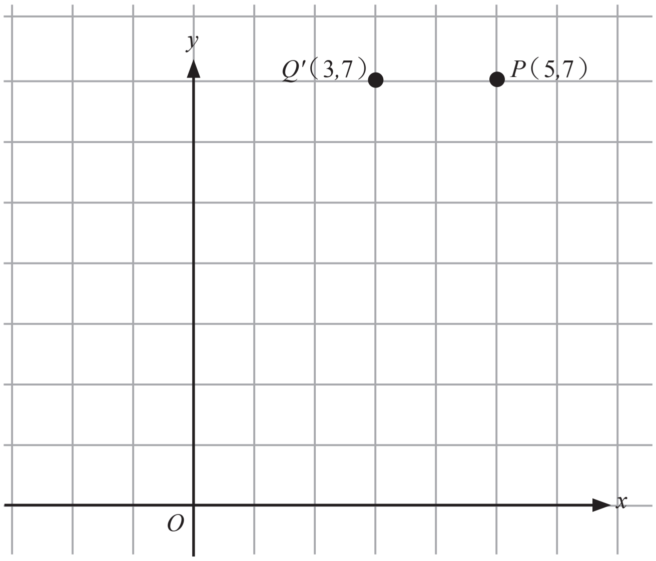
學生手冊 P11

【 任務3】

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{bmatrix}$

(1) 求點 $P(5, 7)$ 經過 A 作線性變換後所對應之點 P' 的坐標。

(2) 求一點 Q，使得它經過 A 作線性變換後的對應點為 $Q'(3, 7)$。



【 解答 】

(1) 因為

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},$$

所以點 $P(5, 7)$經過 A 作線性變換後的對應點為 $P'(3, 4)$。

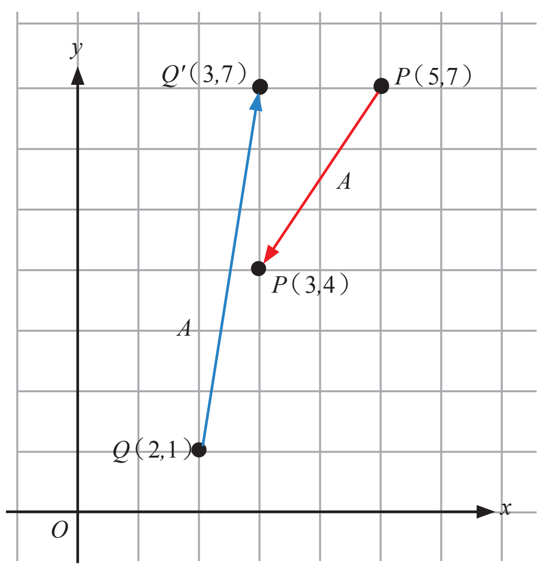
(2) 設 Q 的坐標為 (x, y)，因為

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-3 & 1\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

故 Q 的坐標為 $(2, 1)$。



學生手冊 $P12$

【教學活動安排】

(1)教師引導學生將二階方陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$看成是一種坐標平面上的線性變換，使學生了解$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$不只是代表矩陣相乘，而能領略$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$有函數的作用，將點$(x, y)$變換到點$(x', y')$。

(2)教師引導學生進行活動2“線性變換之點的對應”操作，可讓學生以不同的方法，透過坐標聯立式或是矩陣乘法求對應點，並在坐標平面上標示位置。

(3)教師引導學生進行[思考與討論]，當 $det\ A \neq 0$，線性變換 A 有一對一的效果。並帶領學生討論這性質在影像處理上的意義。

(4)教師引導學生進行活動2結論的一般化與統整。

(5)教師引導學生進行【任務3】的類似題演練，可請學生上台演練講解，確認學生熟悉解題程序。

【教學注意事項】

(1)若學生忘記，請老師複習反矩陣的求法。

(2)老師提醒學生$det\ A \neq 0$時有唯一的對應點，與聯立方程組時$\Delta \neq 0$恰有唯一解之關聯。

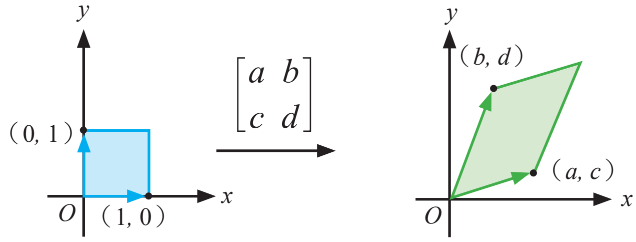
(3)不要只有求出點坐標，而且要在坐標平面上標示對應點，讓學生感受線性變換是平面上的點與點之間，彼此對應的函數關係。

活動3 引言

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為一平面上的線性變換，則

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$



所以

(1) x軸上的單位點 $(1, 0)$ 經 A 變換後對應至 A 之第1行“行矩陣”所代表的點 (a, c)。

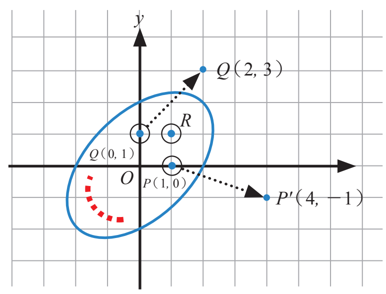
(2) y軸上的單位點 $(0, 1)$ 經 A 變換後對應至 A 之第2行“行矩陣”所代表的點 (b, d)。

反之，如果掌握“坐標軸上單位點”及其“對應點”，那麼是否可以完全決定 A 呢？以及是否有還有其他的條件也可以完全決定 A 呢？

我們將透過 活動3 來探討“線性變換矩陣的決定”問題。

活動3 消失的矩陣（線性變換矩陣的決定）

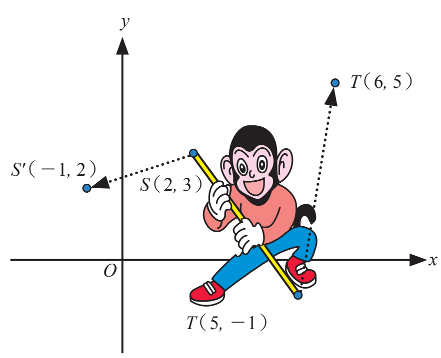
1. 糊塗的動畫工程師柯南忘記是以哪個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作為「 三眼蛋頭怪獸 」圖像的線性變換，目前的線索只看到圖像上顯示的兩眼位置點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過 A 的變換後之對應的點分別為 $P'(4, -1)$ 與 $Q'(2, 3)$，請問：



(1)能否求出二階方陣 A？

(2)第三隻眼 R 點的位置 $(1, 1)$ 經 A 變換後的位置為何？

2. 已知「 孫悟空的金箍棒 」兩端點的位置為點 $S(2, 3)$ 與 $T(5, -1)$，經過二階方陣 B 作線性變換後所對應的點分別為 $S'(-1, 2)$ 與 $T'(6, 5)$，那麼二階方陣 B 為何？



學生手冊 P13

【活動解答】

1. 設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，由 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$，

   此兩式可合併寫成一式如下：

   $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，故 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$。

2. 由 $B\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$，$B\begin{bmatrix}5\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$，此兩式可合併寫成 $B\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，

   因為 $\det\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}=-17(\neq 0)$，$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$有反方陣 $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{-1}{17}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，

   所以 $B=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{-1}{17}\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\dfrac{-1}{17}\begin{bmatrix}-17 & 17\\ -17 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，

   故 $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

活動3 的結果可以一般化，整理如下：

給予兩點及其對應點可決定一個線性變換

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\xrightarrow{A}\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}\end{cases}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

1. 點$(1, 0)$與$(0, 1)$經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為(a, c)與(b, d)的充分必要條件是 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。

2. 若點(x_1, y_1)與(x_2, y_2)經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為(x'_1, y'_1)與(x'_2, y'_2)，

   即 $A\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1\\ y'_1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_2\\ y'_2\end{bmatrix}$，此兩式可合併寫成：$A\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1 & x'_2\\ y'_1 & y'_2\end{bmatrix}$，

   則當$x_1 y_2-x_2 y_1\neq 0$，即 $det\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{bmatrix}\neq 0$ 時，$A=\begin{bmatrix}x'_1 & x'_2\\ y'_1 & y'_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{bmatrix}^{-1}$。

【任務4】

已知點 $P(1, 2)$與 $Q(0, -1)$經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(3, 7)$與 $Q'(-2, -3)$，求二階方陣 A。

學生手冊 P14

【解答】

設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，依題意，可得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}。$$

將上列2式合併寫成

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}。$$

故二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\cdot\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$。

【教學活動安排】

⑴教師先拋出問題：點 $(1，0)$、$(0，1)$ 經 A 變換後對應點為何？讓學生自己發現：結果分別為 A 之第1行與第2行“行矩陣”所代表的點。

⑵接著繼續提問：「反之，如果掌握“坐標軸上單位點”及其“對應點”，那麼是否可以完全決定 A 呢？」「是否有還有其他的條件也可以完全決定 A 呢？」引導學生進行活動3的探索。

⑶教師引導學生進行活動3，能讀懂題目，列式解題。

⑷教師引導學生進行【任務4】的類似題演練，可請學生上台演練講解，確認學生熟悉解題程序。

【教學注意事項】

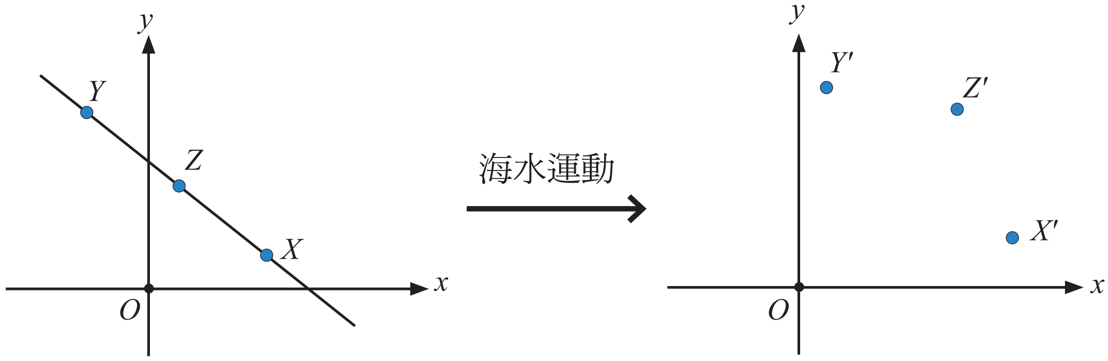
⑴若學生忘記，請老師再次複習反矩陣的求法。

⑵強調 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$，可合併寫成：$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}$，並說明理由。

⑶本活動是強調給予兩點及其對應點可決定一個線性變換。

活動4 引言　海水運動是線性變換嗎？

我們看海面上水的質點，考慮一分鐘以後這些質點的新位置。如圖中X, Y, Z原來是共線，但一分鐘後的新位置中X, Y, Z若不再共線，這是平面上的一個運動，但它算不算是一種線性變換呢？

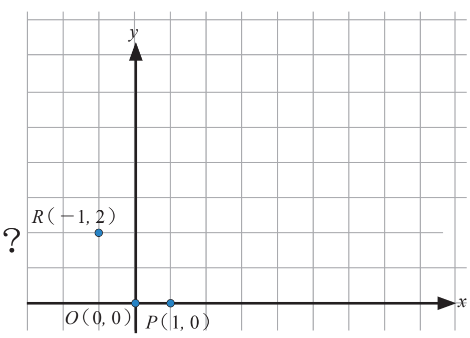


我們將透過活動4 進行線性變換的幾何性質探討！

活動4

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換分別將 $O(0, 0)$，$P(1, 0)$，$R(-1, 2)$ 對應到 O'，P'，R' 三點，請回答下列問題：

(1)原點O經由A變換之對應點 O' 仍然是原點嗎？



(2)在線段 $\overline{PR}$ 上找一點Q，使得$\overline{PQ}：\overline{QR}=1：1$，則

①點 Q 坐標為何？

②點 Q 經由 A 變換之後所對應的點 Q' 坐標為何？

③已知 $\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PQ}$，請問 $\overrightarrow{P'R'}=2\overrightarrow{P'Q'}$是否仍然成立？

(3)①“直線 PR”經由A變換後會是“直線$P'R'$”嗎？

②“線段 $\overline{PR}$”經由 A 變換後會是“線段 $\overline{P'R'}$ 嗎？

學生手冊 $P15$

【 活動解答 】

(1)由$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，所以原點 O 經由 A 變換後的對應點 O' 仍然是原點。

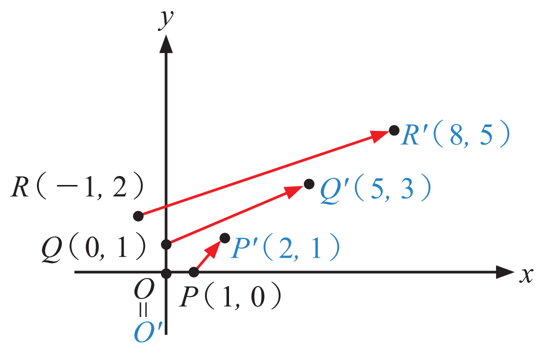
(2)由$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$，故得 $P'(2,1)$，$R'(8,5)$。

①因為 Q 為 $\overline{PR}$ 的中點，所以 Q 的坐標為$\left(\dfrac{1+(-1)}{2}，\dfrac{0+2}{2}\right)=(0，1)$

②因為$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$，所以點 Q 經由 A 變換後的對應點為 $Q'(5,3)$

③由 $P'(2,1)$，$Q'(5,3)$，$R'(8,5)$ 三點，

得 $\overrightarrow{P'Q'}=(3,2)$，$\overrightarrow{P'R'}=(6,4)$，所以 $\overrightarrow{P'R'}=2\overrightarrow{P'Q'}$ 也成立。



(3)設點 $T(x,y)$ 滿足

$$\begin{cases}x=t\cdot(-1)+(1-t)\cdot 1\\ y=t\cdot 2+(1-t)\cdot 0\end{cases}\cdots\cdots(*)\quad 即\begin{cases}x=1+(-1-1)t\\ y=0+(2-0)t\end{cases}$$

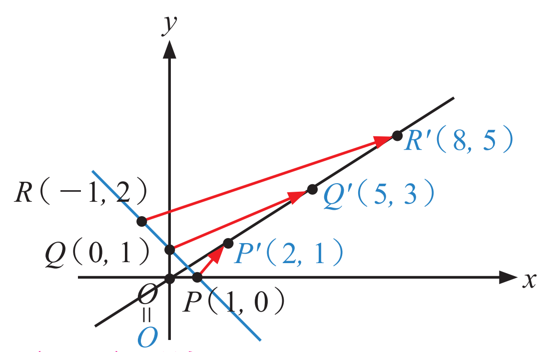
由直線的參數式知:

當 t 為任意實數時，所有 T 點形成直線 PR;

當 $0\le t\le 1$ 時，所有 T 點形成線段 $\overline{PR}$。

將參數式$(*)$用矩陣表示為：

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}。$$



若點 $T(x,y)$ 經二階方陣 A 線性變換後的對應點為 $T'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\left\{t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=t\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=t\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

由上式得知，點$P'(2,1)$與$R'(8,5)$分別為點 $P(1,0)$與 $R(-1,2)$的對應點，而且此線性變換 A 將直線 PR 變換成直線 $P'R'$；將線段 $\overline{PR}$ 變換成線段 $\overline{P'R'}$。

從 活動4 可知二階方陣 A 在線性變換的意義下具有以下三個性質：

($LG1$)將原點對應至原點。〔也就是說原點是平面上的一個固定點(*fixed point*)〕。

($LG2$)將共線三點 P，Q，R，經過線性變換後所對應的三點 P'，Q'，R' 也共線。

且若 $\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$，則 $\overrightarrow{P'R'}=k\overrightarrow{P'Q'}$(即保持任兩點間距離的比例關係)。

($LG3$)將直線變換成直線；將線段變換成線段。

這個結論可推廣至一般情形，就是

> 對於每一個“可逆的二階方陣”在線性變換的意義下具有
> ($LG1$)、($LG2$)、($LG3$)這三個性質。

因此前面所提的海水運動是沒有保持運動後的三點共線，所以不是一種線性變換！

由上述的性質，我們知道：

> 要決定一多邊形在線性變換下的圖形，我們只要將頂點的對應點求出，再以線段依次連結即可，而不用每一個點都得逐一求出它的對應點。

這將會方便我們在 活動6 及其之後，去描繪各種線性變換下的多邊形圖形。

而平面上的直線在可逆的二階方陣的線性變換下，不會彎曲，仍為一直線，透過 [任務5] 我們來學習如何求得變換後的圖形方程式。

【任務5】

> 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$ 及一直線 L：$2x+3y=4$，試求 L 經過 A 的變換後所得的圖形方程式。

學生手冊 $P16$

【 解答 】

設點 (x', y') 為點 (x, y) 經過方陣 A 變換後的點，即 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$。

可得 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x'-y'\\-5x'+2y'\end{bmatrix}$，

即 $\begin{cases}x=3x'-y'\\y=-5x'+2y'\end{cases}$，因為 (x, y) 為 $L：2x+3y=4$ 上的動點，

所以 $2(3x'-y')+3(-5x'+2y')=4$，整理得 $9x'-4y'+4=0$，

故直線 L 經過方陣 A 變換後的直線方程式為 $9x-4y+4=0$。

[另解] 也可以從直線 L 上任取相異兩點，再將這兩點經過方陣 A 變換後，所得的兩相異對應點皆會在直線 L 經過方陣 A 變換後所得的直線上，再透過兩點式即可求出該直線的方程式。

【 教學活動安排 】

(1) 教師先拋出問題：“海水運動是線性變換嗎？”引起動機，為引導學生進行 活動4 線性變換幾何性質的探索做準備。

(2) 活動4 的三個問題將對應 $(LG1)$、$(LG2)$、$(LG3)$ 三個性質，可透過師生對話討論方式，逐步引導產生結論。

(3)【 任務5 】可以一題多解方式進行，鼓勵學生發表想法或上台演練講解。

【 教學注意事項 】

(1) 若學生忘記，請老師複習直線的參數式。

(2) “線性變換 A 將直線 PR 變換成直線 $P'R'$；將線段 $\overline{PR}$ 變換成線段 $\overline{P'R'}$ ”的推導過程，可能對有些學生較為困難，老師可放慢教學速度，注意學生反應，耐心講解引導。

活動5 引言　線性變換為什麼被稱作「線性」變換呢？

對平面上任一點 $P(x, y)$，由於矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

所以想要求點 $P(x, y)$ 經 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 變換後的對應點 $P'(x', y')$ 時，

我們有另外一種觀點與方法：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=x(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$A(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$
$$=x(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

由上面的式子，我們獲得兩件重要的訊息：

(1) $A(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=x(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ 告訴我們：

「**點 (1, 0) 與 (0, 1) 線性組合的對應點**」與「**點 (1, 0) 與 (0, 1) 對應點的線性組合**」相同。

也就是變換 A 有「保持線性組合」效果，所以它被稱作「線性」變換。

(2) 對應點 $P'(x', y')$ 的另一種求法，可藉由「**點 (1, 0) 與 (0, 1) 對應點的線性組合**」求得！

我們將透過下面的活動來強化這些概念的學習。

活動5

已知點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 經二階方陣 A 作線性變換的對應點分別為 $(2, -1)$，$(1, 1)$，請問：

(1) A 將點 $P(4, 3)$ 變換到哪一個點？

(2) 能否在不求出 A 的情形下，而得出點 P 的對應點？

【活動解答】

(1) 因 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，兩式合併可寫成 $A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

得 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。所以 $A\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$，

即點 $P(4, 3)$ 經過 A 之變換後的對應點為 $P'(11, -1)$。

(2) 對於平面上的點 $R(4, 3)$，因為矩陣 $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

而 $A\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=A(4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=4(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})+3(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=4\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$，

所以點 $P(4, 3)$ 經過 A 之變換後的對應點為 $P'(11, -1)$。

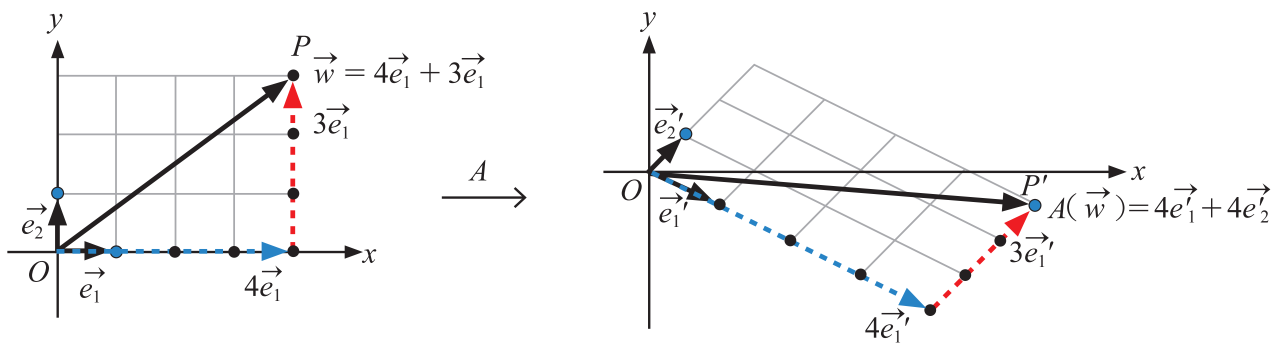
學生手冊 P17

「保持線性組合」的好處

點 $P(4, 3)$ 的對應點 P' 的位置，可依下列方法找尋：

因 $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，而 $A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=A\left(4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=4\left(A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+3\left(A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=4\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$。

設向量 $\overrightarrow{e_1}=(1, 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0, 1)$ 以及它們經 A 變換後的向量分別為 $\overrightarrow{e'_1}=(2, -1)$，$\overrightarrow{e'_2}=(1, 1)$，則如圖所示，$P'$ 的位置可沿向量 $\overrightarrow{e'_1}=(2, -1)$ 走其 4 倍的距離，再沿向量 $\overrightarrow{e'_2}=(1, 1)$ 走其3倍的距離。此時停步，即為 P 經 A 變換後的新位置 P'。



由 活動3、活動4 與 活動5 可得以下重要的結論：

1. 二階方陣 A 所表示的線性變換，可由點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 的對應點所唯一確定！
2. 二階方陣A會滿足下列兩個條件：

   (1) $A(P+Q)=AP+AQ$。(2) $A(tP)=t(AP)$。

   其中 P，Q 是 (2×1) 階矩陣，t 為實數。

   而(1)與(2)合稱為“線性條件”，是**大學**端定義線性變換的**核心概念**。

   這兩個條件對於「線性」的定義缺一不可。

【任務6】

已知點 $(1, 0)$ 與點 $(0, 1)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $(3, 5)$，$(-1, -3)$，則

(1) A 將點 $P(2, 3)$ 變換到哪一個點？

(2) A 將點 $Q(x, y)$ 變換到哪一個點？

學生手冊 $P18$

【 解答 】

(1)因 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，

而 $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=A(2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=2A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，

所以 A 將點 $P(2, 3)$ 變換到點 $(3, 1)$。

(2)因 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，

而 $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=A(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=xA\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+yA\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-y\\5x-3y\end{bmatrix}$，

所以 將點 $Q(x, y)$ 變換到點 $(3x-y,\ 5x-3y)$。

【 教學活動安排 】

(1)教師先將點 $P(x, y)$，以2×1階矩陣表示 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，利用矩陣的運算性質將 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 寫成 $x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，再透過矩陣乘法性質得 $A(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=x(A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$。

(2)接著說明從 $A(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=x(A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})+y(A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$ 所獲得的訊息：

①A 有「 保持線性組合 」效果。

②對應點 $P'(x', y')$ 的另一種求法。

(3)透過 活動5 強化概念的理解與應用。

(4)透過圖形讓學生感受「 **保持線性組合** 」**的意義**。

(5)【 **任務6** 】可以一題多解方式進行，鼓勵學生發表想法或上台演練講解。

【 教學注意事項 】

(1)這裡需要複習矩陣乘法性質：

① $A(tB)=t(AB)$。

② $A(B+C)=AB+AC$。

其中 A 為二階方陣，B、C 為 (2×1) 階矩陣，t 為實數。

它們是此活動性質背後的重要推手。

(2)只要點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$（基底的概念）的對應點確定，線性變換就確定！

補充教材：

1. 考慮兩個平面變換的坐標關係式 $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=3x+4y \end{cases}$ …(1)，與 $\begin{cases} x'=x+2y+5 \\ y'=3x+4y+6 \end{cases}$ …(2)

   請分別利用矩陣表示關係式(1)與(2)，並解釋它們在平面變換之間的關係。

2. 請檢驗「點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 的線性組合的對應點」與「點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 對應點的線性組合」經坐標關係式(2)的變換後是否相同？

3. 坐標關係式(2)是否為坐標平面上的線性變換？

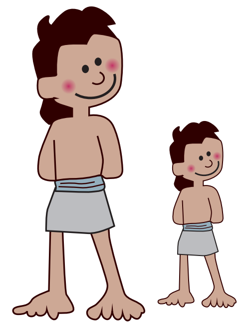
肆、重要的線性變換

本單元我們將介紹四種重要的線性變換：**伸縮**、**旋轉**、**鏡射**與**推移**。

活動6 引言

㈠伸縮

　　生活中，很多相機具有變焦伸縮鏡頭，能夠把景物拉近而放大，或推遠而縮小。卡通常見同一個圖案放大與縮小的安排。利用水平伸縮或鉛直伸縮來表現，在美工上設計也是常用的方式。首先，來介紹平面圖形的伸縮變換。右圖1是水平鉛直等比例伸縮，下圖2是電腦螢幕依不同解析度出現的鉛垂伸縮與水平伸縮。



▲圖1

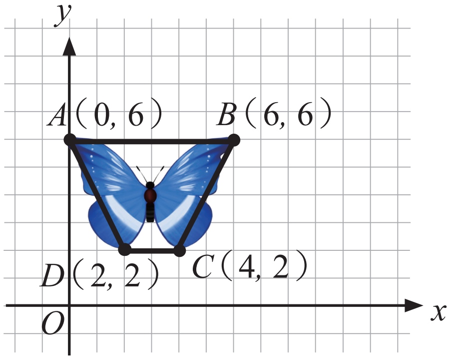
我們將透過 活動6 探討“以原點為中心，沿著 x 軸、y 軸的伸縮變換”問題。

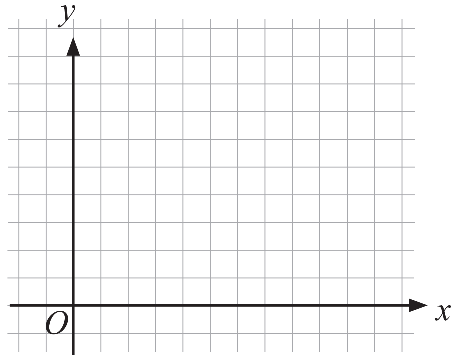
▲圖2

學生手冊 *P*19

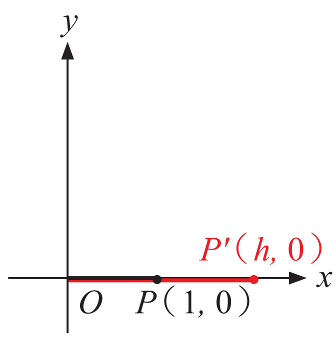
活動6 將圖形「以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 軸方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍」，該怎麼辦？

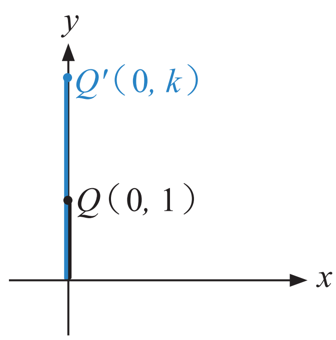
(1) 蝴蝶的一對翅膀置於坐標平面上，翅膀的四個角形成的四邊形，其坐標為 $A(1, 6)$，$B(6, 6)$，$C(5, 2)$，$D(2, 2)$。將圖形「以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍」請在坐標平面上畫出變換後的新的圖形。





(2) 試利用坐標軸上的單位點及對應點，寫出以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 h 倍 $(h>0)$，沿著 y 軸方向伸縮 k 倍 $(k>0)$ 的伸縮矩陣。





活動6

【教學活動安排】

由坐標的變換尋找出伸縮變換矩陣。

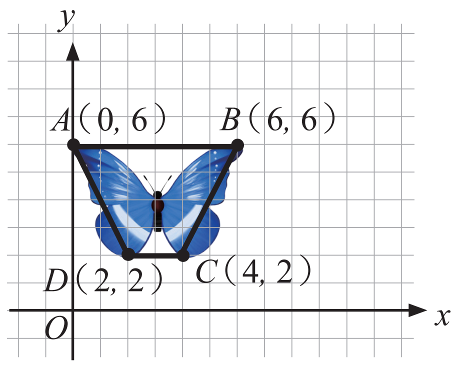
【教學注意事項】

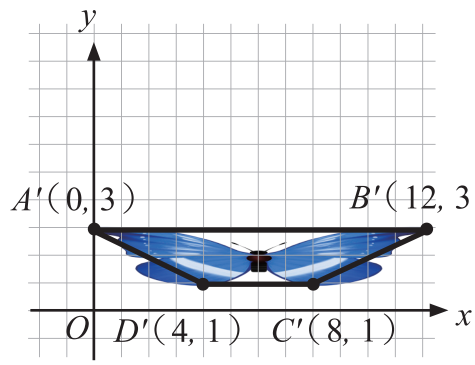
1. 教師可以利用線性變換的幾何性質，說明接下來的**伸縮**、**旋轉**、**鏡射**與**推移**是線性變換。
2. 讓學生在坐標平面上繪製坐標圖。
3. 利用關係式，寫出矩陣表示。

學生手冊 *P*20

【 活動解答 】

(1) $A(1, 6)$，$B(6, 6)$，$C(5, 2)$，$D(2, 2)$「以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍」變化後點座標為 $A'(0, 3)$，$B'(12, 3)$，$C'(8, 1)$，$D'(4, 1)$，座標圖如下圖。





(2) 由坐標軸上的單位點及對應點來決定伸縮矩陣。

設伸縮矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過伸縮矩陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(h, 0)$ 與 $Q'(0, k)$，可列得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$。

由上列 2 式知 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$，

故伸縮矩陣 A 為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$。

由 活動6 以原點為中心，沿著 x 軸、y 軸的伸縮變換整理如下：

伸縮的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 沿著 x 軸方向伸縮 h 倍（$h>0$），沿著 y 軸方向伸縮 k 倍（$k>0$），得點 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 為伸縮矩陣。

【 任務7】

已知直角三角形 OAB 的三頂點坐標為 $O(0, 0)$，$A(6, 0)$，$B(6, 3)$，將此三個頂點分別以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍，沿著 y 軸方向伸縮 2 倍，得 O'，A'，B' 三點，⑴請利用伸縮變換矩陣，寫出 O'，A'，B' 三點坐標 ⑵求 $\Delta O'A'B'$ 的面積。

【 任務7】

【 教學活動安排 】

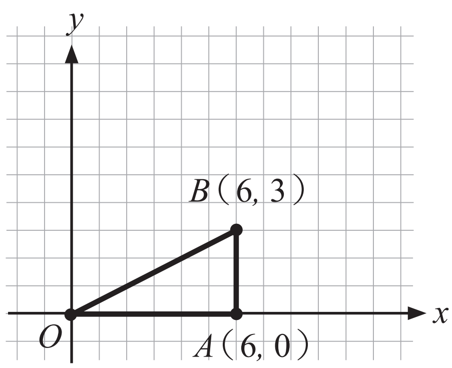
1. 利用伸縮變換矩陣，並寫出變換後的點坐標。
2. 求出求新圖形的面積。

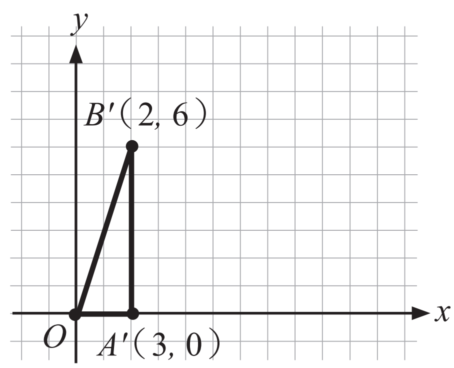
【 教學注意事項 】

請學生觀察原圖形與新圖形面積比值與變換矩陣的關係。

【 解答 】在伸縮的矩陣表示中，代入 $A(6, 0)$，得 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，

即 $A'(2, 0)$，同樣的方法，可得 $B'(2, 6)$，$O'(0, 0)$，





因為 $\Delta O'A'B'$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right| = 6$

學生手冊 *P*21

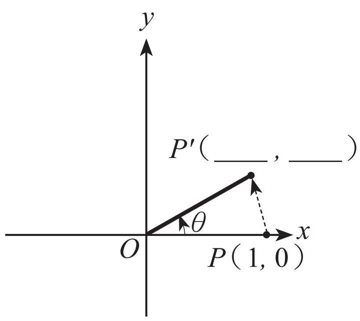
活動7 引言

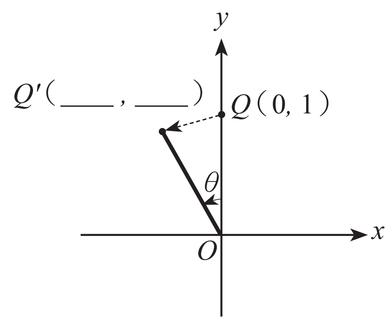
㈡旋轉

幾何圖形圍繞中心，配合螺旋狀旋轉產生有趣的圖案，是美工設計上會出現的表現方式。若將圖案的線條視為點的集合，則我們可以考慮平面上的點以原點的中心的旋轉變換。

活動7 將圖形「以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 」，該怎麼辦？

⑴在坐標平面上，試求將 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$，以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角度後分別為 P' 與 Q' 的坐標。





⑵試寫出以原點 O 為中心，將依逆時針方向旋轉 θ 角的旋轉矩陣。

活動7

【教學活動安排】

1. 讓學生掌握基底的概念，利用 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 的變換找出旋轉變換矩陣。
2. 推論旋轉變換與有向角的關係。
3. 使用三角函數和角公式。

【教學注意事項】

1. 先複習三角函數和角公式。
2. 只要掌握方向角，即可寫出點坐標。

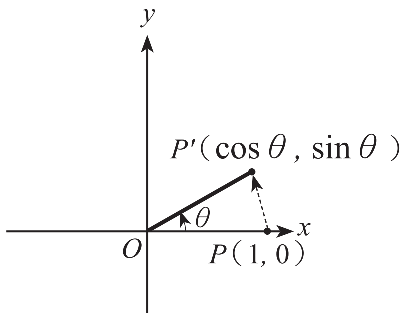
學生手冊 $P22$

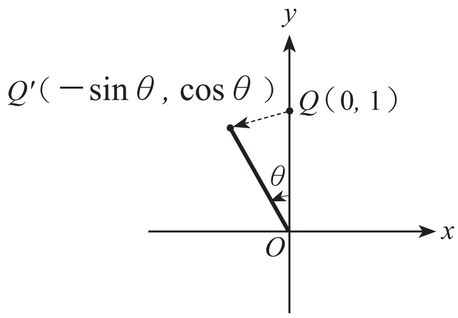
【 活動解答 】

⑴ P' 為單位圓上，有向角 θ 代表的點，則 P' 點坐標為 $(\cos\theta, \sin\theta)$，

Q' 為單位圓上，有向角 $90^\circ+\theta$ 代表的點，則 Q' 點坐標為

$$(\cos(90^\circ+\theta), \sin(90^\circ+\theta))=(-\sin\theta, -\cos\theta)$$





⑵由坐標軸上的單位點及對應點來決定伸縮矩陣。

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過二階方陣 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(\cos\theta, \sin\theta)$ 與 $Q'(-\sin\theta, -\cos\theta)$，可列得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

由上列 2 式知

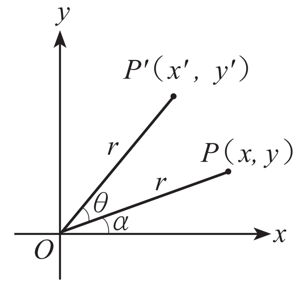
$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

故二階方陣 A 為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。

從 活動 7 推論旋轉變換與有向角的關係

已知點 $P(x,y)$ 滿足 $x=r\cos\alpha$，$x=r\sin\alpha$，$(r>0)$，如圖3所示。

若以原點 O 為中心，將點 P 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x',y')$，則如何用點 P 的坐標表示 P' 的坐標呢？



在坐標平面上，點 $P(x,y)$ 滿足 $x=r\cos\alpha$，$x=r\sin\alpha\,(r>0)$，如3 所示。若以原點 O 為中心，將點 P 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x',y')$，這關係式可用矩陣表示為

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

由矩陣乘法展開，得

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta=r(\cos\alpha\ \cos\theta-\sin\alpha\ \sin\theta) \\ y'=y\cos\theta-x\sin\theta=r(\sin\alpha\ \cos\theta-\cos\alpha\ \sin\theta) \end{cases}。$$

利用和角公式，得

$$\begin{cases} x'=r\cos(\alpha+\theta) \\ y'=r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

即 $\overline{OP'}=r$ 且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為 $\alpha+\theta$。

我們將這個以原點 O 為中心旋轉 θ 角的線性變換整理如下：

旋轉的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x,y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

學生手冊 $P23$

【 任務8】

已知正三角形 二頂點坐標為 $O(0, 0)$，$A(2, 6)$，已知 B 在第二象限，求頂點B 的坐標。

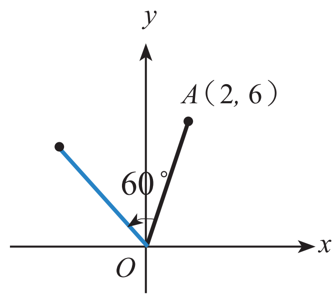
【 任務8】

【 教學活動安排 】

利用旋轉矩陣，並寫出變換後的點坐標。

【 教學注意事項 】

掌握由第一象限旋轉到第二象限是正的有向角。



【 解答 】

由 B 點在第二象限，將 A 以 O 為中心旋轉60°，得點 B。

利用旋轉的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\, 60^\circ & -\sin\theta\, 60^\circ \\ \sin\theta\, 60^\circ & \cos\theta\, 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-3\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

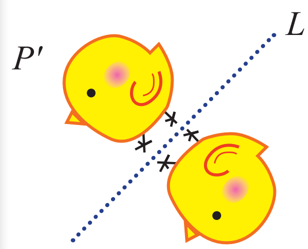
故頂點 B 的坐標為$(1-3\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$。

學生手冊 $P24$

活動8 引言

㈢鏡射

迴清倒影一詞，形容水面清澈見底，可倒映出影像。秀麗的山脈，與清澈的湖面中的清晰的倒影呈現一幅迷的畫面。

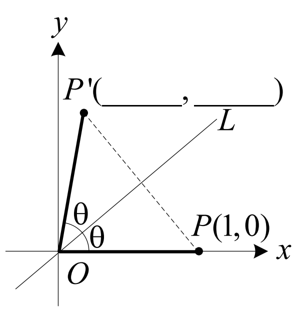


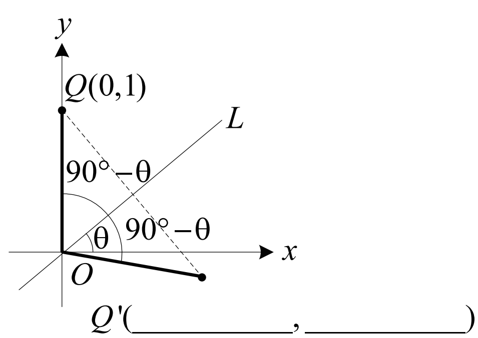
山脈映在清澈的湖面有清晰的倒影，在數學上，點 P 對直線 L 之對稱點 P' 的意思是指：L 是 $\overline{PP'}$ 的中垂線。我們將這種由 P 對應到 P' 的變換，稱為對直線 L 的鏡射，而直線 L 稱為鏡射軸。

活動8 將圖形「 對過原點 O 的直線 L 做鏡射 」，該怎麼辦？

L 過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，

⑴在坐標平面上，試求將 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$，對直線 L 鏡射後分別為 P' 與 Q' 的坐標。





⑵試寫出以過原點 O 的直線 L 為軸的鏡射矩陣。

活動8

【教學活動安排】

1. 讓學生掌握基底的概念，利用(1, 0)與(0, 1)的變換找出鏡射變換矩陣。
2. 推論鏡射變換與直線斜角，與夾角間的關係
3. 再次強化基底變換的概念。
4. 知道特殊射軸的鏡射矩陣。
5. 推論鏡射變換與有向角的關係。

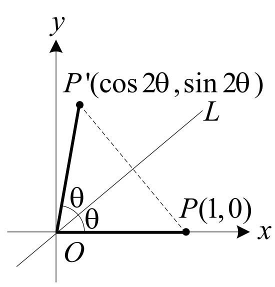
【教學注意事項】

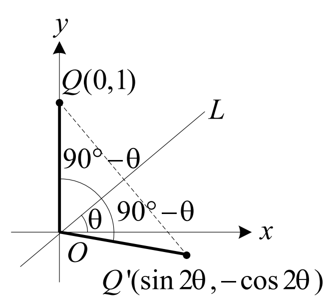
1. 注意夾角間的關係，Q' 的有向角較不易寫出。可由 $\overrightarrow{OQ}$ 與 L 夾 $90^\circ-\theta$，$\overrightarrow{OQ'}$ 與 L 也夾 $90^\circ-\theta$，所以 $\overrightarrow{OQ'}$ 的有向角為 $\theta-(90^\circ-\theta)=2\theta-90^\circ$。
2. 鏡射矩陣的角度是鏡射軸斜角 θ 的2倍。
3. 教師可以提問如果鏡射軸是不通過原點的直線，是否可以使用鏡射矩陣的方法，要如何修正。

【活動解答】

(1)點 $P(1, 0)$ 對直線 L 鏡射得點 P'，由圖可知，P' 為單位圓上，有向角 2θ 代表的點，則 P' 點坐標為 $(\cos2\theta, \sin2\theta)$，

點 $Q(0, 1)$ 對直線 L 鏡射得點 Q'，由圖可知，Q' 為單位圓上，有向角 $2\theta-90^\circ$ 代表的點，則 Q' 點坐標為 $(\cos(2\theta-90^\circ), \sin(2\theta-90^\circ))=(\sin2\theta, \cos2\theta)$。





(2)由坐標軸上的單位點及對應點決定鏡射矩陣

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(\cos2\theta, \sin2\theta)$ 與 $Q'(\sin2\theta, \cos2\theta)$，可列得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos2\theta \\ \sin2\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin2\theta \\ -\cos2\theta \end{bmatrix}。$$

由上列2式知 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos2\theta \\ \sin2\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin2\theta \\ -\cos2\theta \end{bmatrix}$。

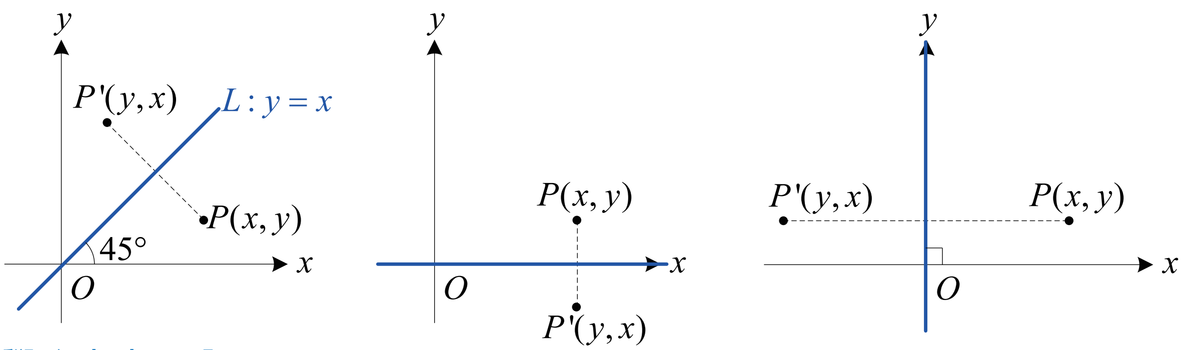
故二階方陣 A 為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}$

在學習直線與圓的單元，直線 $y=x$、x 軸與 y 軸是探討對稱時常討論的三條直線。因為 $y=x$、x 軸與y 軸分別是過原點且 與x 軸正向夾角為 45°，0°與 90° 的直線，我們可以利用矩陣來表示，以上述三種直線為對稱軸的鏡射矩陣。

(1)以直線 $y=x$ 為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。

(2)以 軸為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0 \end{bmatrix}$。

(3)以 軸為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。



【 教學注意事項 】

1. 由學生的學習經驗出發，去體察鏡射矩陣的角度是鏡射軸斜角 θ 的2倍。
2. 另一方向的觀察由數值的鏡射矩陣化成角度的鏡射矩陣，如：以直線 $y=x$ 為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix}$。

從 活動8 推論鏡射變換與有向角的關係

在坐標平面上，點 $P(x,y)$ 滿足 $x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，$(r>0)$，

L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，如圖4所示。若

點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射後得點 $P'(x',y')$，這關係式可用矩陣表示為

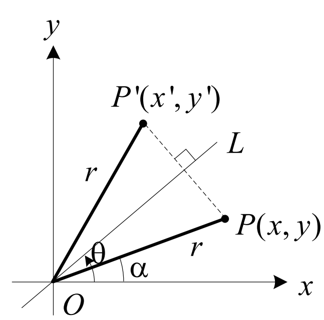
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

利用矩陣乘法展開，得

$$\begin{cases} x'=x\cos 2\theta - y\sin 2\theta = r(\cos 2\theta\ \cos\alpha + \sin 2\theta\ \sin\alpha) \\ y'=y\sin 2\theta - y\cos 2\theta = r(\sin 2\theta\ \cos\theta - \cos 2\theta\ \sin\alpha) \end{cases}。$$

利用和角公式，得 $\begin{cases} x'=x\cos(2\theta-\alpha) \\ y'=y\sin(2\theta-\alpha) \end{cases}$

即 $\overline{OP'}=r$ 且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為 $\theta+(\theta-\alpha)=2\theta-\alpha$。



▲ 圖4

學生手冊 P26

我們將這個對直線鏡射的線性變換整理如下：

鏡射的矩陣表示

在坐標平面上，L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，若點 $P(x, y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x', y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。

【任務9】

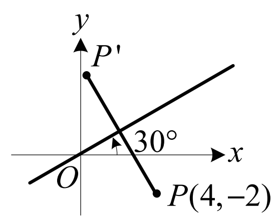
設直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾 30° 的直線，求點 $P(4, -2)$ 對於直線 L 的對稱點 P' 的坐標。

【解答】

因為 L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 30° 的直線，所以利用鏡射的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

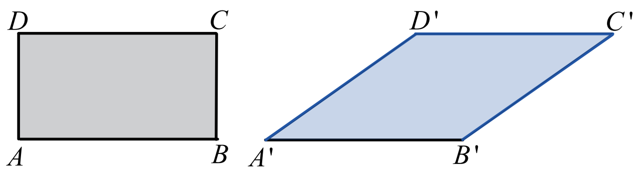


故頂點 B 的坐標為 $(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$。

學生手冊 P27

活動9 引言

㈣ 推移



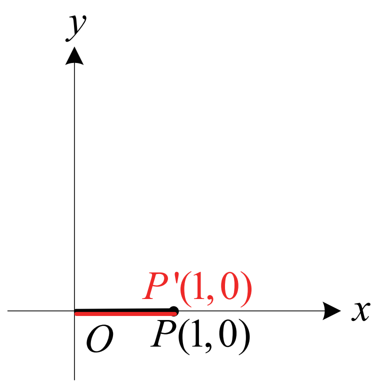
▲ 圖5

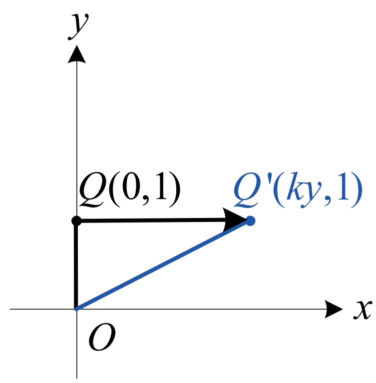
▲ 圖6

圖5，是一副樸克牌平放於桌上的之側面，呈現 $ABCD$ 為一矩形，將矩形下底 $\overline{AB}$ 固定不動，側邊推移使上底 $\overline{CD}$ 向右平行移動（假設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 是具有伸縮彈性的線），得平行四邊形 $ABC'D'$。圖6，是一個笑臉圖，經過影像處理，橫切面的中點依直線變形處理，這就是推移的概念。

活動9 將圖形「對過原點 O 的直線 L 做鏡射」，該怎麼辦？

⑴ 若點 $P(x, y)$ 的縱坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍（k 是一個常數），得點 $P'(x', y')$，試利用坐標軸上的單位點及對應點，寫出此推移矩陣。





⑵ 設矩形 $OABC$ 的四頂點坐標為 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(1, 1)$，$C(0, 1)$。將此四個頂點分別沿 x 軸推移 y 坐標的2倍，得 O'，A'，B'，C'，四點，求四邊形 $O'A'B'C'$ 的面積。

學生手冊 $P28$

活動9

【教學活動安排】

由坐標的變換尋找出推移變換矩陣。

【教學注意事項】

1. 學生較不易掌握推移概念，所以在介紹時可多加強移動的感覺。
2. 利用關係式，寫出矩陣表示。

【解答】

(1)由坐標軸上的單位點及對應點來決定推移矩陣。

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過二階方陣 作線性變換後所對應的點

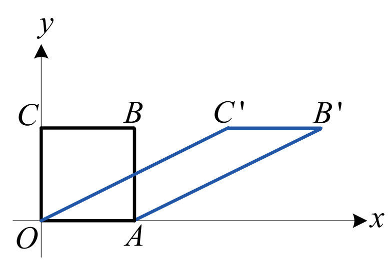
分別為 $P'(1, 0)$ 與 $Q'(ky, 1)$，可列得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ky \\ 1 \end{bmatrix}$

由上列2式知 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ky \\ 1 \end{bmatrix}$

故二階方陣 A 為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & ky \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

這關係式可用矩陣表示為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(2)在推移的矩陣表示中，代入，得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



即 $C''(2, 1)$。同樣的方法，可得

$O'(0, 0)$，$A'(1, 0)$，$B'(3, 1)$，

即 O 與 A 兩點的對應點是自己本身。

因為四邊形 $O'A'B'C'$ 是底為1高為1的平行四邊形，所以其面積為

$$1\times1=1。$$

我們將推移的線性變換整理如下：

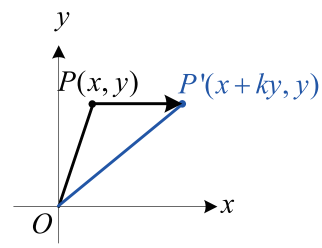
推移的矩陣表示

在坐標平面上

(1)若將點 $P(x, y)$ 縱的坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍（k 是一個常數），得點 $P'(x', y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

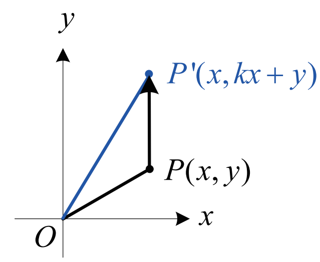
這就是沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍的線性變換。



(2)若點 $P(x, y)$ 的橫坐標保持不變，而將縱坐標增加橫坐標的 k 倍(k 是一個常數），得點 $P'(x', y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

這就是沿 y 軸推移 x 坐標 k 倍的線性變換。



【任務10】

(1)已知長方形 的四頂點坐標為 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(1, 3)$，$C(0, 3)$若 $k>0$，且此長方形經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 推移變換後的圖形為菱形，則 k 的值為何?

(2)線性變換 A：$\begin{cases} x'=x \\ y'=2x+y \end{cases}$ 的幾何意涵為何？若水平直線 $y=k$ 經過此線性變換後的圖形方程式為何？

【任務10】

【教學活動安排】

經推移後，形狀會改變的例子。

學生手冊 *P*29

【 解答 】

⑴在推移的矩陣表示中，代入 $A'(1,0)$，得

$\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}$

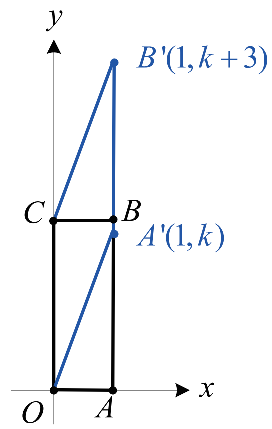
即 $A'(1,k)$。同樣的方法，可得

$O'(0,0)$，$B'(1,k+3)$，$C'(0,3)$，

即 O 與 C 兩點的對應點是自己本身。

因為四邊形 $O'A'B'C'$ 邊長為3的菱形，得 $\overline{O'A'}=3$，因此 $\sqrt{1+k^2}=3$，

所以 $k=2\sqrt{2}$。



⑵$A:\begin{cases}x'=x\\y'=2x+y\end{cases}$

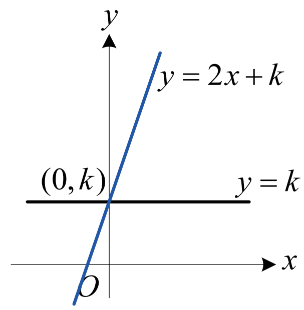
此線性變換可表示為 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

此線性變換的意涵是將平面上每一點 $P(x,y)$，

沿著 y 軸方向推移2倍的 y 坐標。y 軸右半平面$(x>0)$向上推移，

y 軸左半平面$(x<0)$向下推移，而 y 軸上的點保持不動。

水平直線 $y=k$ 變換成斜率為2之直線 $y=2x+k$，其中 y 軸上的點$(0,k)$不動。



我們將四個線性變換矩陣整理如下：

1. 以原點 O 為中心。沿著 x 軸方向伸縮 h 倍$(h>0)$，沿著 軸方向伸縮 k 倍$(k>0)$的伸縮矩陣為$\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}$。

2. 以原點 O 為中心，逆時針旋轉 的旋轉矩陣為$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$。

3. 以過原點 的直線 為軸的鏡射矩陣為$\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}$。

4. ⑴縱坐標保持不變，沿 軸推移 坐標的 倍的推移矩陣為$\begin{bmatrix}1&ky\\0&1\end{bmatrix}$。

⑵橫坐標保持不變，沿 軸推移 坐標的 倍的推移矩陣為$\begin{bmatrix}1&0\\ky&1\end{bmatrix}$。

學生手冊 $P30$

伍、線性變換的面積比

活動10 引言

坐標平面上的線性變換，它將點作線性變換到新的點。由 活動4 知，若線性變換是可逆的二階方陣，線性變換 A 將線段 $\overline{PR}$ 變換到線段 $\overline{P'R'}$。故線性變換 A 將三角形 ΔABC 變換到三角形 $\Delta A'B'C'$。而它的面積會作怎樣的變化呢？我們接著來探討坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

活動10 坐標平面上的三角形經線性變換後，新圖形與原圖形的面積有什麼變化？

已知二階方陣 $M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$，$\Delta ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2,1)$，$B(1,2)$，$C(-2,-2)$，且 ΔABC 經二階方陣 M 線性變換後成 $\Delta A'B'C'$，試問：

(1) $\Delta A'B'C'$ 的面積。

(2) $\Delta A'B'C'$ 與 ΔABC 的面積比與二階方陣 M 之行列式之值的關係。

【任務10】

【教學活動安排】

求出變換前後的三角形面積，觀察變換後的三角形面積為變換前的 $\left|\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right|$。

【解答】

(1)因為向量 $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，所以 ΔABC 的面積為

$$\frac{1}{2}\times\left|\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times|7|=\frac{7}{2}。$$

A，B，C 線性變換為 $A'(4,10)$，$B'(5,11)$，$C'(-6,-14)$。而向量 $\overrightarrow{A'B'}=(1,1)$，$\overrightarrow{A'C'}=(-10,-24)$，所以 $\Delta A'B'C'$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\times\left|\begin{bmatrix}1 & 1\\ -10 & -24\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times|-14|=7。$$

(2) $\Delta A'B'C'$ 與 ΔABC 的面積比為2，二階方陣 M 之行列式 $=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$，兩者互為相反數。

可知 $\Delta A'B'C'$ 的面積為 $=\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|\times\Delta ABC$ 的面積 $=|-2|\times\frac{7}{2}=7$。

學生手冊 $P31$

底下，我們來計算坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

在坐標平面上，設 ΔOAB 的三頂點坐標為 $O(0,0)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且線性變換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 將 ΔOAB 變換成 $\Delta O'A'B'$，其中

$$O'(0,0),\ A'(ax_1+by_1,\ cx_1+dy_1),\ B'(ax_2+by_2,\ cx_2+dy_2)$$

設 ΔOAB 的面積為 Δ，$\Delta A'B'C'$的面積為 Δ'。因為 $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2)$

$$\overrightarrow{OA'}=(ax_1+by_1,\ cx_1+dy_1),\ \overrightarrow{OB'}\ (ax_2+by_2,\ cx_2+dy_2)$$

所以 $\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$，$\Delta'=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} ax_1+by_1, & cx_1+dy_1 \\ ax_2+by_2, & cx_2+dy_2 \end{vmatrix}\right|$。因此

$$\Delta'=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} ax_1+by_1, & cx_1+dy_1 \\ ax_2+by_2, & cx_2+dy_2 \end{vmatrix}\right| \quad =\frac{1}{2}\left|\cancel{\begin{vmatrix} ax_1 & ax_1 \\ ax_2 & cx_2 \end{vmatrix}}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by_1 & cx_1 \\ by_2 & cx_2 \end{vmatrix}+\cancel{\begin{vmatrix} by_1 & dy_1 \\ by_2 & dy_2 \end{vmatrix}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|ad\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \quad =\frac{1}{2}\left|(ad-bc)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|\cdot\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right| \qquad =\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|\cdot\Delta。$$

這結果告訴我們，變換後的三角形面積為變換前的 $\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|$ 倍。

事實上，上述的推導過程中，我們也可以將點 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，變換至點 A'，B' 視作將向量 $\overrightarrow{OA'}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2)$，變換至向量 $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，就可推得 O 不是原點時此結果仍成立，整理如下：

線性變換的面積比公式

在坐標平面上，設 ΔOAC 經線性變換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 後成 $\Delta A'B'C'$。若 ΔABC 的面積為 Δ，$\Delta A'B'C'$ 的面積為 Δ'，則

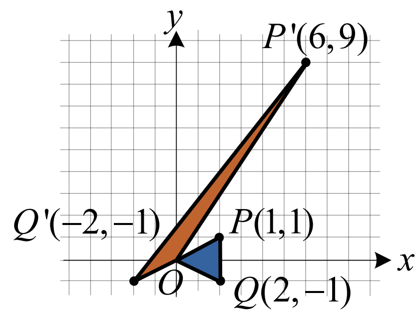
$$\Delta'=\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|\cdot\Delta$$

學生手冊 P32

【 任務11】

已知二階方陣 $M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$，向量 $\overrightarrow{OP}=(2, 1)$，$\overrightarrow{OQ}=(2, -1)$，求以 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 所張出的三角形 ΔOPQ，經二階方陣 M 線性變換後的三角形面積。

【 解答 】



因為向量 $\overrightarrow{OP}=(2, 1)$，$\overrightarrow{OQ}=(2, -1)$，

所以 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 所張出的三角形面積為

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{|-4|}{2}=2\text{。}$$

利用線性變換的面積比公式，得線性變換後的三角形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right|\times 2=6\text{。}$$

活動11 線性變換與面積的關係

請參考第29頁的四個線性變換矩陣整理，討論坐標平面上的一個三角形經伸縮，旋轉，鏡射或推移變換後，所得新三角形的面積 與原三角形的面積 的關係為何？

活動11

【 教學活動安排 】

整理三角形經由四種線性變換，前後三角形面積的關係。

【 解答 】

(1)**伸縮**：因為 $\begin{vmatrix}h & 0\\ 0 & k\end{vmatrix}=hk$，所以 $\Delta'=|hk|\cdot\Delta$，即三角形以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 $h(h>0)$ 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $k(k>0)$ 倍後，**面積為原來的 hk 倍**。

(2)**旋轉**：因為 $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，所以 $\Delta'=\Delta$ 即三角形經旋轉變換後，面積保持不變。

(3)**鏡射**：因為 $\begin{vmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{vmatrix}=-\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=-1$，所以 $\Delta'=|-1|\cdot\Delta=$，即三角形經鏡射變換後，面積保持不變。

(4)**推移**：因為 $\begin{vmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$，所以 $\Delta'=\Delta$，即三角形經推移變換後，**面積保持不變**。

學生手冊 $P33$

評　量

1. 設 $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}$，若 P 點經 A 變換到點 $P'(2, 0)$，試求 P 點坐標。

【解答】

P 點坐標為 $(2,\ 1)$。

因為 $det\,A=\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=2\neq 0$，則 $A^{-1}=2\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}$。

因此，P 點坐標為 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$。

故，點坐標為 $(2, -1)$。

2. 若二階方陣 A 將 $P(2, -1)$ 變換到 $P'(2, 1)$，將 $Q(-1, 4)$ 變換到 $Q'(-1, 3)$，試求矩陣 A。

【解答】

$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$

由題意可知 $A\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

合併此二式為 $A\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}$，

令 $B=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}$，因為 $det\,B=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}=7\neq 0$，則 $B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix}$，

因此 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}(\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix})=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}7&0\\7&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，故矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$。

3. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}-2&1\\3&1\end{bmatrix}$ 與平面上兩點 $P(-1, 2)$，$R(2, -1)$，而點 Q 在線段 $\overline{PR}$ 上，且 $\overline{PQ}:\overline{QR}=1:2$。假設 P，Q，R 三點在 A 的變換下，分別對應到 P'，Q'，R' 三點

(1)試求線段 $\overline{P'R'}$ 的長度。

(2)試求點 Q 坐標。

(3)試求點 Q 經由 A 變換之後所對應的點 Q' 的坐標。

(4)請問：P'，Q'，R' 三點是否共線？

(5)請問：線段間的比例 $\overline{P'Q'}:\overline{O'R'}=1:2$ 是否仍成立？

【解答】

(1)$\sqrt{117}$　(2)點 Q 坐標為 $(0, 1)$　(3)Q' 的坐標為 $(1, 1)$

(4)P'，Q'，R' 三點仍然共線　(5)$\overline{P'Q'}:\overline{O'R'}=1:2$ 仍然成立

學生手冊 P34

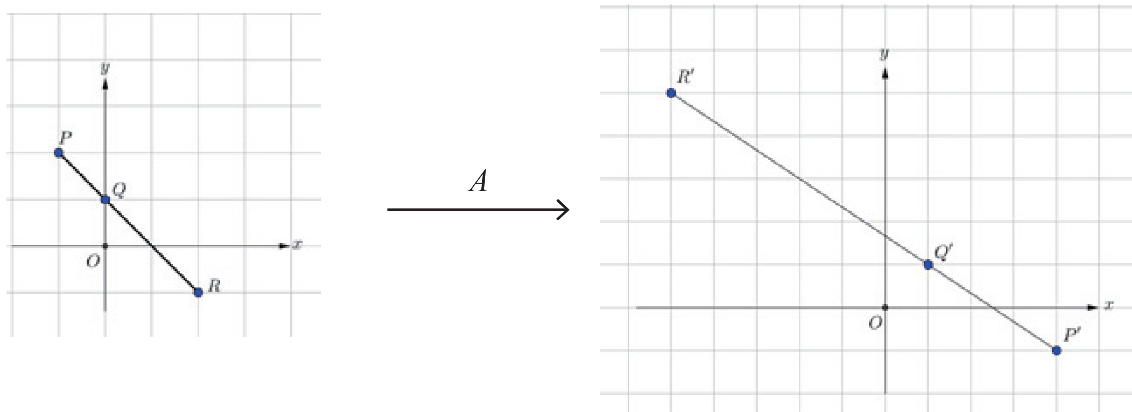
(1) $\because \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix}$，$\therefore P'$ 的坐標為 $(4,-1)$　$\because \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ 5\end{bmatrix}$，$\therefore R'$ 的坐標為 $(-5,5)$

故 $\overline{P'Q'}=\sqrt{(4+5)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{117}$ 。

(2) 由分點公式 $\dfrac{2(-1,2)+(2,-1)}{1+2}=(0,1)$，得點 Q 坐標為 $(0,1)$

(3) $\because \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，$\therefore Q'$ 的坐標為 $(1,1)$

(4)(5) $\because \overrightarrow{P'Q'}=(-3,2)$，$\overrightarrow{Q'R'}=(-6,4)$，$\therefore \overrightarrow{Q'R'}=2\overrightarrow{P'Q'}$，故 P'，Q'，R' 三點共線且 $\overline{P'Q'}:\overline{Q'R'}=1:2$。



4. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 0 & 7\end{bmatrix}$，求直線 $M：x-2y=1$ 經過 A 的線性變換後所得的直線方程式。

【解答】

$x-2y=1$

從直線 $M：x-2y=1$ 上找兩個點 $(1,\ 0)(3,\ 1)$，因為 $A=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 0 & 7\end{bmatrix}$，

得 $A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+12\\ 0+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ 7\end{bmatrix}$，

而點 $(1,\ 0)$，$(15,\ 7)$ 所決定的直線為 $y-0=\dfrac{7-0}{15-1}(x-1)$，$x-2y=1$。

所以直線 $M：x-2y=1$ 經過矩陣 A 的線性變換後所得的直線仍為 M 本身，

$x-2y=1$為所求。

5. 已知 ΔOAB 的三個頂點坐標分別為 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$

試畫出 ΔOAB 經過下列二階方陣作線性變換後所對應的圖形。

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

【解答】

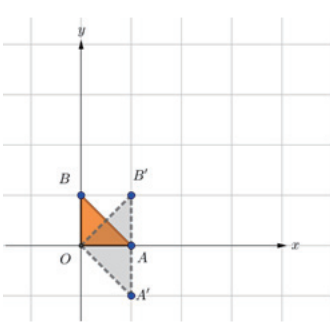
已知原點 O 經二階方陣作線性變換後所對應的仍為原點 O。

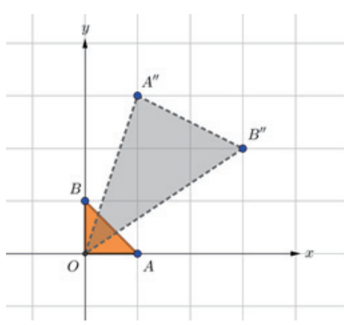
(1) 設 A，B 經 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 作線性變換後所對應的點為 A'，B'

$\because \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，$\therefore A'=(1,\ -1)$

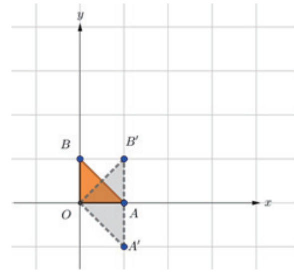
$\because \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，$\therefore B'=(1,\ 1)$

ΔOAB經過二階方陣 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 作線性變換後所對應的圖形為$\Delta OA'B'$，如右圖所示。





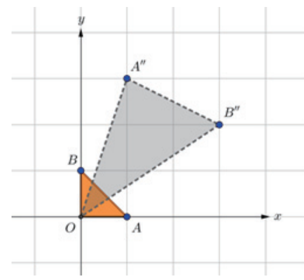
(2) 設 A，B 經 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ 作線性變換後所對應的點為 A'，B'



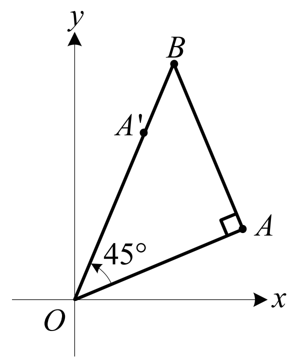
$\because \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$，$\therefore A''=(1, 3)$

$\because \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，$\therefore B''=(3, 2)$

ΔOAB 經過二階方陣 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ 作線性變換後所對應的圖形為 $\Delta OA''B''$，如右圖所示。



6. 在坐標平面上，等腰直角三角形 OAB 滿足 $\angle A=90^\circ$，$O(0, 0)$，$A(5, 2)$，B 在第一象限，求 B 的坐標。



【 解答 】

得 B 的坐標為 $(3, 7)$，。

如右圖，先將 A 以 O 為中心旋轉 45°，得點 A'；再將 A' 以 O 為中心，沿著 x 軸及 y 軸方向皆伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，就可得 B 點。利用旋轉及伸縮的矩陣表示，計算

$\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$，得 B 的坐標為 $(3, 7)$。

7. 下列有五個矩陣：

(1) $\begin{bmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\cos10^\circ & \sin10^\circ\\ \sin10^\circ & -\cos10^\circ\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$。

哪些二階方陣可以使 ΔABC 經該矩陣變換後，面積保持不變?

【 解答 】

(1)(2)(3)(4)

(1) $\left|\begin{vmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30 & \cos30^\circ\end{vmatrix}\right|=|\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ|=1$，

(2) $\left|\begin{vmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30 & \cos30^\circ\end{vmatrix}\right|=|\cos^2 30^\circ+sin^2 30^\circ|=1$，

(3) $\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right|=1$，(4) $\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right|=1$，

(5) $\left|\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\right|=|3+1|=4$

8. 設 ΔOAB 中，O 為原點，$A(3,\ -1)$，B 在第一象限內，且 $\angle AOB=\theta$，若 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，且 $\overline{OB}=5\overline{QA}$，則 B 的坐標為 ______________。

【 解答 】 依題意可知，將 A 點以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ，再沿 x 軸與 y 軸方向伸縮5倍，即得 B 點。

$(13,\ 9)$

$$\tan\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{5}，\cos\theta=\frac{3}{5}$$

$$\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{13}{5}\\\frac{9}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\9\end{bmatrix}$$，故 B 點坐標為 $(13,\ 9)$。

挑 戰 題

9. 已知二階方陣 A 將 $P(2,\ -1)$ 變換到 $P'(2,\ 1)$，將 $Q(-1,\ 4)$ 變換到 $Q'(-1,\ 3)$，請問：若不求先出 A，能否算出點 $S(3,\ 2)$ 經 A 作線性變換後所對應的點？

提示：設矩陣 $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$

【 解答 】

$(3,\ 5)$

對於平面上的點 $S(3，2)$，設矩陣 $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ 則 $\begin{cases}2\alpha-\beta=3\\-\alpha+4\beta=2\end{cases}$，

解得 $\alpha=2$，$\beta=1$

因此 $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$，而 $A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}\right)=2A\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$，

所以點 $S(3,\ 2)$ 經過 A 之變換後的對應點為 $(3,\ 5)$。

【 另解 】若先求出 A：

由題意可知 $A\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$，

合併此二式為 $A\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}$，令 $B=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&4\end{bmatrix}$，因為 $\det B=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&4\end{vmatrix}=7\neq0$，

則 $B^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix}$，因此，$A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\end{bmatrix}\left(\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix}\right)=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}7&0\\7&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$，故矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$。

由 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$，也可得點 $S(3,\ 2)$ 經過 A 之變換後的對應點為 $(3,\ 5)$。

筆記欄

memo

筆記欄

memo

素養導向普通型高級中學數學教材：平面上的線性變換－教師手冊

素養導向數學教材　／　單維彰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

發 行 人：許添明
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組
召 集 人：單維彰
副召集人：鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳姈蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）
作　　者：姚志鴻、曾俊雄（依姓氏筆畫順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過