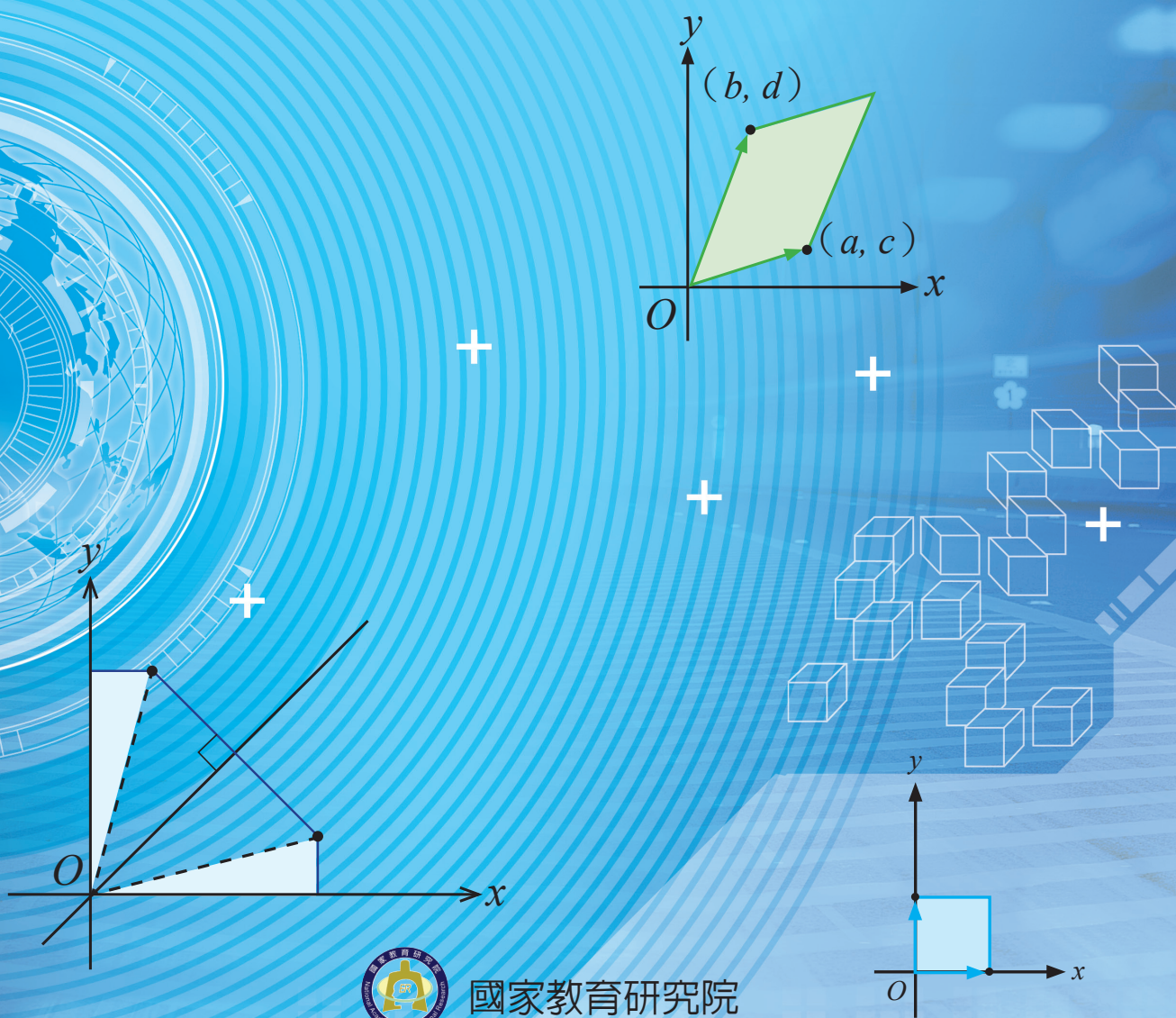


素養導向數學教材

平面上的線性變換



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

教材設計理念

教材 架構

本教材先從歷史的角度切入，希望透過輕鬆的筆調與故事性的方式，介紹矩陣乘法規則的由來，並導入線性變換的概念。並期望學生瞭解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。接著透過一連串的活動，其中有活動引言，希望引起學生學習動機；再透過問題導向的實作與討論，發展概念與程序性的知識；活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論；除了活動、任務之外，編者設計評量問題，希望學生可以透過實際練習深化教材中的概念。

教材設計想法：

1. 簡介現代矩陣理論的開創者，英國數學家凱萊（*Arthur Cayley*，1821~1895）對矩陣乘法規則的建立，並從中引出線性變換一詞與概念。除了希望學生的學習可以更緊密連接線性變換與矩陣的歷史與應用的脈絡之外，也期盼能提升學生數學閱讀的能力。
2. 透過 **活動 1** 與【**任務 1**】的放大與鏡射對稱變換，在這些看似不同的運動變換中，發現變換前後坐標的表示法中卻有著共同的模式： $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ ，進而導出「線性變換」的定義；再透過矩陣乘法，引出二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作為線性變換 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ 的矩陣表示，也可將它看成是一種坐標平面上的線性變換。
3. 因二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可將點 (x, y) 作線性變換到點 $(x', y') = (ax + by, cx + dy)$ 。我們將透過 **活動 2** 來讓學生學習“線性變換之點的對應”等基本操作問題。
4. 二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 決定點的變換，反之，如果掌握“點”及其“對應點”，那麼是否可以完全決定 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 呢？我們安排 **活動 3** 來探討“線性變換矩陣的決定”問題。
5. **活動 4** 藉由引言「海水運動是線性變換嗎？」，希望刺激學生思索線性變換更深層的意義，來對線性變換的幾何性質：保持共線與保持點之間距離的比例關係等，作學習與探討。

6. 目前高中教材對線性變換的代數性質：

$$(1) A(\alpha \vec{u}) = \alpha A(\vec{u}), \quad (2) A(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v}).$$

並不強調，這是連結大學線性代數的重要基礎，於是我們安排了**活動 5**，透過之前學過的矩陣加法、係數積、乘法等運算規則，體會線性變換有「保持線性組合」效果，所以它被稱作「線性」變換。

7. 坐標平面上圖形的伸縮的變換可考慮水平伸縮與鉛垂伸縮，透過**活動 6**來探討“以原點為中心，沿著 x 軸、 y 軸的伸縮變換”的問題。

8. **活動 7** 由利用**活動 3** 線性變換矩陣的決定，掌握將坐標軸上的單位點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 以原點為中心，逆時針旋轉 θ 角度後的坐標，即可決定此旋轉變換方陣，更進一步探討旋轉變換與有向角的關係。

9. **活動 8** 由利用**活動 3** 線性變換矩陣的決定，掌握將坐標軸上的單位點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 對過原點且與 x 軸正向夾角 θ 的直線作鏡射變換後的坐標，即可決定此鏡射變換方陣。直線 $y=x$ 、 x 軸與 y 軸是探討對稱時常討論的三條直線，也同時呈現它們的鏡射變換方陣。更進一步探討鏡射變換與有向角的關係。

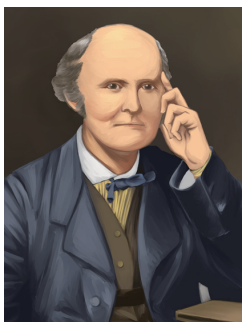
10. 在坐標平面上，若點 $p(x, y)$ 的縱坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍，是將點 $p(x, y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍的推移變換，我們將透過**活動 9**來讓學生學習“沿 x 軸推移 y 坐標 k 倍的線性變換”等基本操作問題。

11. 坐標平面上的線性變換，它將點作線性變換到新的點，若坐標平面上的三角形經線性變換後它的面積會作怎樣的變化呢？我們利用**活動 10**來探討坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

12. 我們將透過**活動 11**來探討坐標平面上的一個三角形經旋轉，鏡射，伸縮或推移變換後，所得新三角形的面積 Δ' 與原三角形的面積 Δ 的關係為何，作一總整理與結尾。

壹、歷史

(矩陣的乘法規則是怎麼定義出來的)



1857年，英國數學家凱萊 (Arthur Cayley, 1821~1895) 發表一篇被公認為近代矩陣理論和線性代數基石的論文〈矩陣理論備忘錄〉 (A Memoir on the Theory of Matrices)，他將矩陣從行列式抽離出來，視之為另一個數學物件，並且定義完備的矩陣代數運算。

而將矩陣以「Matrix」命名的是英國數學家西爾維斯特 (James Joseph Sylvester, 1814~1897)，「Matrix」有「母體、基礎」的意思，西爾維斯特可能意指 matrix 是行列式的「母體、基礎」，但他並未定義矩陣乘法。

凱萊曾經道出他研究方陣的動機，是為了簡化「線性變換」：

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

的描述和書寫。前面這個看起來很像二元一次聯立方程式的式子，其意義是把平面上的點 (x, y) 「變換」成另一個點 (x', y') 。令：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

凱萊將上述的線性變換簡記成 A ， A 後來被稱為是該線性變換的矩陣表示。

1855年某日，凱萊考慮兩個「線性變換」①與②，其中

$$\textcircled{1} : \begin{cases} x' = px + qy \\ y' = rx + sy \end{cases} \quad \textcircled{2} : \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

如果將平面上的點 (x, y) 先經過①的變換，再經過②的變換後成另一個點 (x'', y'') 時，整理 (x'', y'') 與 (x, y) 的關係，

$$\text{得到} \begin{cases} x'' = ax' + by' = a(px + qy) + b(rx + sy) = (ap + br)x + (aq + bs)y \\ y'' = cx' + dy' = c(px + qy) + d(rx + sy) = (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} x'' = (ap + br)x + (aq + bs)y \\ y'' = (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{cases}$$

才氣洋溢的凱萊大膽構思，令

$$F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

將上述的變換過程以矩陣 F 和 G 「乘開」等於 H 表示，他興奮地寫下：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

頓時矩陣乘法的運算規則誕生了！

參考資料

1. *Arthur Cayley*，1821～1895相片
(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Cayley_5.jpeg)
2. 單維彰 (2010, 10)。〈「矩陣」為什麼要相乘？〉。科學月刊，490期。
3. 線性代數的第一堂課——矩陣乘法的定義
(<https://ccjou.wordpress.com/2010/06/18/%e7%b7%9a%e6%80%a7%e4%bb%a3%e6%95%b8%e7%9a%84%e7%ac%ac%e4%b8%80%e5%a0%82%e8%aa%b2-%e7%9f%a9%e9%99%a3%e4%b9%98%e6%b3%95%e7%9a%84%e5%ae%9a%e7%be%a9/>)
4. 單維彰 (2011,09)。矩陣的故事 (*The Story of Matrices*)。科學Online — 科技部高瞻自然科學教學資源平台。(<http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=32410>)

貳、生活

(Google 搜尋引擎的秘密)



圖片出處來自網路

由於資訊科技的進步，手機、電玩、電腦動畫的發展也一日千里。生動逼真、立體感十足的畫面，搭配優質的音效，帶給人們全新的生活感受！在這些影像處理中，是將電腦螢幕看作為一個坐標平面，透過在預定的坐標位置上打上各種顏色的光點，就可以在螢幕上顯示所需的靜態圖案；但要展現動態畫面時，便需要一步步地變換圖案的位置、角度及大小，這裡面應用了許多數學知識，牽涉到線性變換的概念。

除此之外，線性變換在數學、物理、統計、金融等自然科學與社會科學中都是常用的工具，具有廣泛的用途！例如，在現代物理學量子場論 (*Quantum field theory*) 中線性變換扮演重要的角色；而著名的馬克夫過程 (*Markov process*) 就是連續重複操作特定線性變換的過程，已廣泛應用到不同學科的研究。例如：從描述自然界中懸浮微粒子的布朗運動，到通訊網路中的排隊理論，或是在生物學上幫助模擬生物增殖過程的建模與基因預測，或是經濟學家對國家經濟發展的預測，或是應用在棒球比賽的決策上，甚至著名的Google搜尋引擎的計算法則，網頁排序演算法 (*PageRank*) 最原始的概念也來自於此。

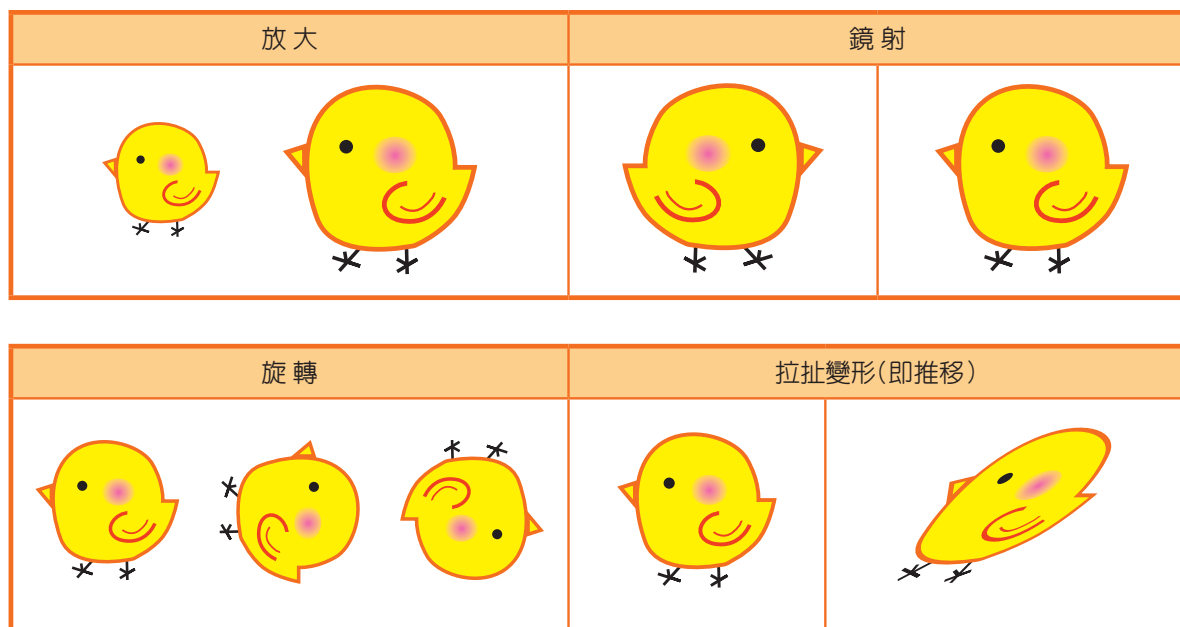
參考資料

1. 馬可夫鏈
(<http://www.wikiwand.com/zh-tw/%E9%A9%AC%E5%B0%94%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E9%93%BE>)
2. 李中傑 (2011, 11)。〈棒球比賽宛如是一個馬可夫過程〉。科學教育月刊，344期。
([http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/100\(336-345\)/344-PDF/03-99045-%E6%A3%92%E7%90%83%E6%AF%94%E8%B3%BD%E5%AE%9B%E5%A6%82%E4%B8%80%E5%80%8B%E9%A6%AC%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E9%81%8E%E7%A8%8B\(%E6%9C%88%E5%88%8A\).pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/100(336-345)/344-PDF/03-99045-%E6%A3%92%E7%90%83%E6%AF%94%E8%B3%BD%E5%AE%9B%E5%A6%82%E4%B8%80%E5%80%8B%E9%A6%AC%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E9%81%8E%E7%A8%8B(%E6%9C%88%E5%88%8A).pdf))
3. 林倉億 (2014,01)。轉移矩陣的穩定狀態與Google搜尋引擎 (*The Stationary of a Transition Matrix, and Google Search*)。科學Online - 科技部高瞻自然科學教學資源平台。

參、平面上的線性變換

如圖所示，「放大」、「左右或上下鏡射」、「旋轉」或是「拉扯變形(即推移)」，這些看似不同的運動變換，卻有著共同的數學概念——**平面上的線性變換**。

我們先以兩個特殊的變換：**活動1**的放大變換與**【任務1】**的鏡射對稱變換為例來說明，大家一起來學習吧！

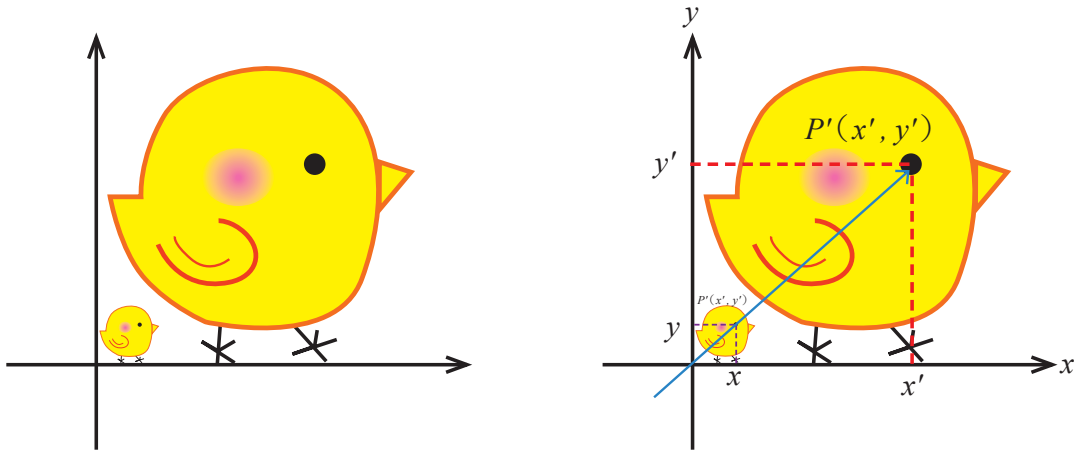


在學習平面上的線性變換之前，我們將對相關符號的數學意義作些說明，就是 2×1 階的矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 可以表示點 $P(x, y)$ ，也可以表示點 P 對應的位置向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 。

即： 2×1 階的矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 、點 $P(x, y)$ 與向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 三者都可互相表示！

$$2 \times 1 \text{ 階的矩陣 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow \text{點 } P(x, y) \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = (x, y)$$

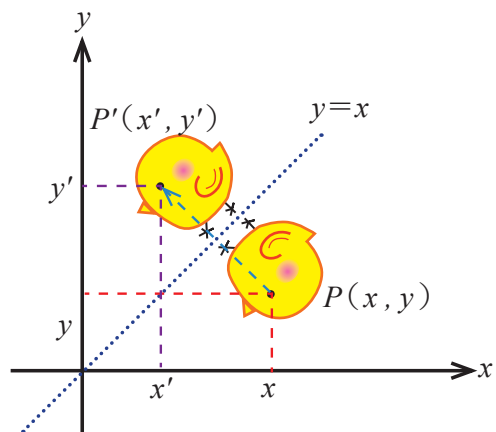
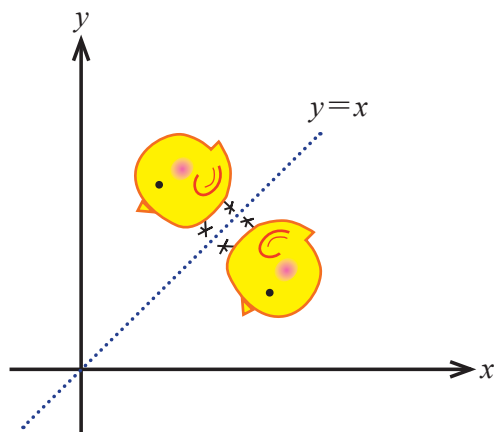
活動1 如何將圖形「以原點為中心放大5倍」?



坐標平面上，將圖形 Ω 以「以原點 O 為中心放大5倍」時，假設 Ω 上的點 $P(x, y)$ 移動改變到點 $P'(x', y')$ ，試以點 P 的坐標表示 P' 的坐標。

【任務1】如何將圖形「以直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射」?

坐標平面上，將圖形 Ω 以「直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射」時，假設 Ω 上的點 $P(x, y)$ 移動改變到點 $P'(x', y')$ ，試以點 P 的坐標表示 P' 的坐標。



結論：

1. **活動1** 與【**任務1**】的結果中，點 $P(x, y)$ 移動改變成另一個點 $P'(x', y')$ 的規則，都可寫成如下的統一形式：

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ 是實數}) \cdots \cdots (*)$$

此式的特色是： x' 與 y' 都表示成 x, y 的一次式且沒有常數項（即為 x, y 的**線性組合**），

因此坐標關係式 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ 可利用矩陣乘法表示為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。在**活動5**中我

們將透過矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 說明這種形式的變換具有「**保持線性組合**」效果，所以我們稱這個

關係式 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ 為坐標平面上的**線性變換**。

2. 當坐標平面上的圖形依照(*)式的規則被移動改變時，該移動改變就稱為**線性變換**。

所以**活動1**的“將圖形「以原點為中心放大5倍」與【**任務1**】的“將圖形「以直線 $y=x$ 為對稱軸作鏡射」都是**線性變換**。

3. 由於平面上每一個“**線性變換**” $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ 都有唯一的一個“**二階方陣**” $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 與之對應，因此**線性變換**的模型是由**二階方陣** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所決定，我們稱**二階方陣** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為**線性變換** $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ 的**矩陣表示**。

活動1中，將圖形以原點為中心放大5倍的**線性變換** $\begin{cases} x' = 5x + 0y \\ y' = 0x + 5y \end{cases}$ ，其矩陣表示為 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。

【**任務1**】中，將圖形作對稱於直線 $y=x$ 的**線性變換** $\begin{cases} x' = 0x + y \\ y' = x + 0y \end{cases}$ ，其矩陣表示為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

【**任務2**】辨認是否為**線性變換**

下列哪些是**線性變換**？如果是**線性變換**，請寫出它的**矩陣表示**。

$$(1) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x' = x \sin\theta + y \cos\theta \\ y' = x \cos\theta - y \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 為實數}) \quad (3) \begin{cases} x' = x + 2y + 5 \\ y' = 3x + 4y + 6 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x y \end{cases}$$

活動2 引言

平面上的線性變換 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ ，可用矩陣的乘積表示成 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。因此

二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 成為線性變換的矩陣表示，這對線性變換的探究方便不少。

往後我們直接將二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 看成是一種坐標平面上的線性變換：

平面上的每一點 (x, y) ，在與矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 相乘之後都可以產生唯一的對應點

$(x', y') = (ax + by, cx + dy)$ ，即

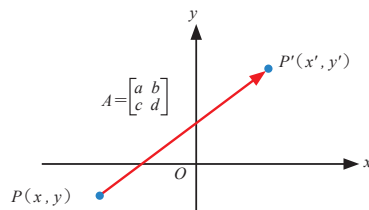
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \updownarrow \\ (y') = (a)(x)$$

這個關係式類似以前所學過的一次函數 $y = ax$ 。

線性變換之點的對應

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$



我們將透過**活動2**來學習“線性變換之點的對應”問題。

活動2 線性變換之點的對應

假設在「三眼蛋頭怪獸」的圖像處理上，

以二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 作為平面上圖形的線性變換，

(1) 求點 $P(0, 1)$ 與 $Q(2, -1)$ 所在的兩眼，

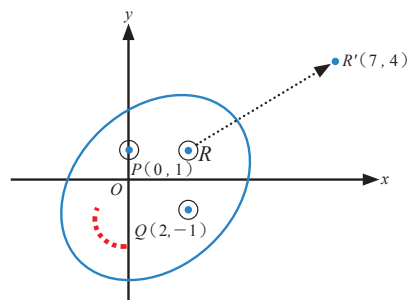
經過 A 變換後之新位置為何？

(2) 若第三隻眼所在的 R 點，經過 A 變換後之新位置為

$R'(7, 4)$ ，則 R 點的坐標為何？

(3) [思考與討論]：平面上是否有其他的點經由 A 變換之後，它的對應點也是 $R'(7, 4)$ ？

(4) [思考與討論]：若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為相異兩點，則經 A 變換後它們的對應點是否也相異？



活動2的結果可推論至一般的情形：

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $\det A \neq 0$ ，

1. 每一點 $P(x, y)$ 經過 A 變換後都可對應至唯一的一點 $P'(ax+by, cx+dy)$ 。

2. 對於任一點 $Q'(x', y')$ ，都存在唯一的一點 $Q(x, y)$ ，使得 Q 經 A 變換後對應至 Q' 。

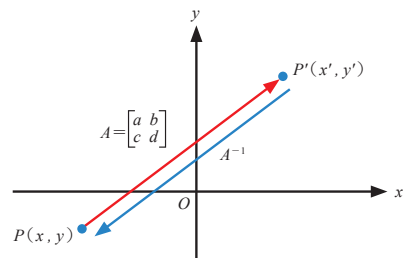
理由：因為 A^{-1} 存在，若 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ，則 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 。

當 $\det A \neq 0$ ，則 A 是可逆的，

此時，若 A 將 $P(x, y)$ 變換到 $P'(x', y')$ ，

那麼 A^{-1} 將 $P'(x', y')$ 變換回到 $P(x, y)$ 。

例如，**活動2** (2)中因為 A 是可逆的，將 $(2, 1)$ 變換到 $(7, 4)$ ，則 A^{-1} 將 $(7, 4)$ 變換到 $(2, 1)$ 。



3. 若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 為相異兩點，則它們經 A 變換後的對應點也一定不同。

理由：利用反證法，

若 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ ，經 A 變換後對應到同一點，即 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ，

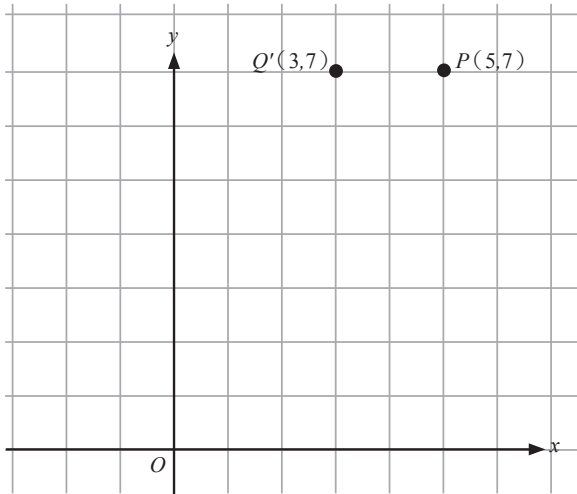
因為 A^{-1} 存在，則 $A^{-1} A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A^{-1} A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ，即 $I_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ，所以 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ，

因此 P_1 與 P_2 必為同一點。

【任務3】

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

- (1) 求點 $P(5, 7)$ 經過 A 作線性變換後所對應之點 P' 的坐標。
- (2) 求一點 Q ，使得它經過 A 作線性變換後的對應點為 $Q'(3, 7)$ 。



活動3 引言

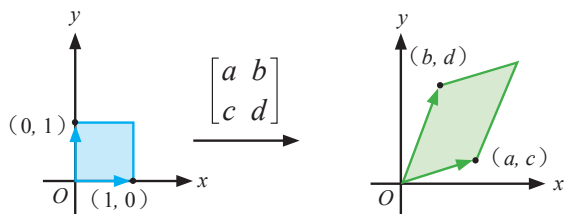
設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為一平面上的線性變換，則

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

所以

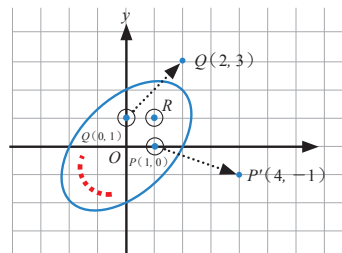
- (1) x 軸上的單位點 $(1, 0)$ 經 A 變換後對應至 A 之第1行“行矩陣”所代表的點 (a, c) 。
 - (2) y 軸上的單位點 $(0, 1)$ 經 A 變換後對應至 A 之第2行“行矩陣”所代表的點 (b, d) 。
- 反之，如果掌握“坐標軸上單位點”及其“對應點”，那麼是否可以完全決定 A 呢？
以及是否有還有其他的條件也可以完全決定 A 呢？



我們將透過 **活動3** 來探討“線性變換矩陣的決定”問題。

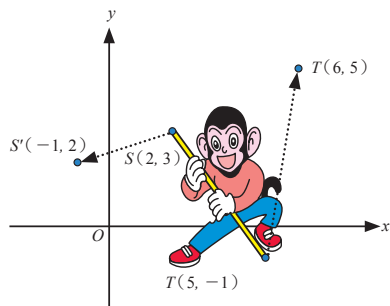
活動3 消失的矩陣（線性變換矩陣的決定）

1. 糊塗的動畫工程師柯南忘記是以哪個二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作為「三眼蛋頭怪獸」圖像的線性變換，目前的線索只看到圖像上顯示的兩眼位置點 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ 經過 A 的變換後之對應的點分別為 $P'(4, -1)$ 與 $Q'(2, 3)$ ，請問：



- (1) 能否求出二階方陣 A ？
- (2) 第三隻眼 R 點的位置 $(1, 1)$ 經 A 變換後的位置為何？

2. 已知「孫悟空的金箍棒」兩端點的位置為點 $S(2, 3)$ 與 $T(5, -1)$ ，經過二階方陣 B 作線性變換後所對應的點分別為 $S'(-1, 2)$ 與 $T'(6, 5)$ ，那麼二階方陣 B 為何？



活動3 的結果可以一般化，整理如下：

給予兩點及其對應點可決定一個線性變換

1. 點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 (a, c) 與 (b, d) 的充分必要條件是 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2. 若點 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 (x'_1, y'_1) 與 (x'_2, y'_2) ，

$$\text{即 } A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}, \text{ 此兩式可合併寫成：} A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix},$$

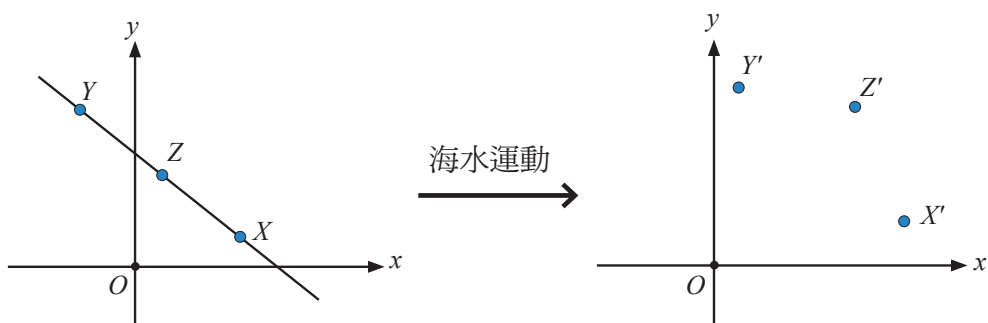
$$\text{則當 } x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0, \text{ 即 } \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ 時, } A = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

【任務4】

已知點 $P(1, 2)$ 與 $Q(0, -1)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(3, 7)$ 與 $Q'(-2, -3)$ ，求二階方陣 A 。

活動4 引言 海水運動是線性變換嗎？

我們看海面上水的質點，考慮一分鐘以後這些質點的新位置。如圖中 X, Y, Z 原來是共線，但一分鐘後的新位置中 X, Y, Z 若不再共線，這是平面上的一個運動，但它算不算是一種線性變換呢？

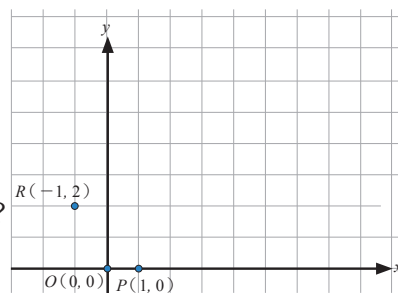


我們將透過**活動4**進行線性變換的幾何性質探討！

活動4

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換分別將 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $R(-1, 2)$ 對應到 O', P', R' 三點，請回答下列問題：

- (1) 原點 O 經由 A 變換之對應點 O' 仍然是原點嗎？
- (2) 在線段 \overline{PR} 上找一點 Q ，使得 $\overline{PQ} : \overline{QR} = 1 : 1$ ，則
 - ① 點 Q 坐標為何？
 - ② 點 Q 經由 A 變換之後所對應的點 Q' 坐標為何？
 - ③ 已知 $\overline{PR} = 2 \overline{PQ}$ ，請問 $\overline{P'R'} = 2 \overline{P'Q'}$ 是否仍然成立？
- (3) ① “直線 PR ” 經由 A 變換後會是 “直線 $P'R'$ ” 嗎？
 - ② “線段 \overline{PR} ” 經由 A 變換後會是 “線段 $\overline{P'R'}$ ” 嗎？



從 **活動4** 可知二階方陣 A 在線性變換的意義下具有以下三個性質：

(LG1) 將原點對應至原點。〔也就是說原點是平面上的一個固定點 (*fixed point*)〕。

(LG2) 將共線三點 P, Q, R ，經過線性變換後所對應的三點 P', Q', R' 也共線。

且若 $\overrightarrow{PR} = k \overrightarrow{PQ}$ ，則 $\overrightarrow{P'R'} = k \overrightarrow{P'Q'}$ (即保持任兩點間距離的比例關係)。

(LG3) 將直線變換成直線；將線段變換成線段。

這個結論可推廣至一般情形，就是

對於每一個“**可逆的二階方陣**”在線性變換的意義下具有
(LG1)、(LG2)、(LG3) 這三個性質。

因此前面所提的海水運動是沒有保持運動後的三點共線，所以**不是一種線性變換**！

由上述的性質，我們知道：

要決定一多邊形在線性變換下的圖形，我們只要將頂點的對應點求出，再以線段依次連結即可，而不用每一個點都得逐一求出它的對應點。

這將會方便我們在 **活動6** 及其之後，去描繪各種線性變換下的多邊形圖形。

而平面上的直線在可逆的二階方陣的線性變換下，不會彎曲，仍為一直線，透過 [任務5] 我們來學習如何求得變換後的圖形方程式。

【任務5】

已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 及一直線 $L: 2x + 3y = 4$ ，試求 L 經過 A 的變換後所得的圖形方程式。

活動5 引言 線性變換為什麼被稱作「線性」變換呢？

對平面上任一點 $P(x, y)$ ，由於矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

所以想要求點 $P(x, y)$ 經 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 變換後的對應點 $P'(x', y')$ 時，

我們有另外一種觀點與方法：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + y \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} & A \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + y \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

由上面的式子，我們獲得兩件重要的訊息：

(1) $A \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = x \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + y \left(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ 告訴我們：

「點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 線性組合的對應點」與「點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 對應點的線性組合」相同。

也就是變換 A 有「保持線性組合」效果，所以它被稱作「線性」變換。

(2) 對應點 $P'(x', y')$ 的另一種求法，可藉由「點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 對應點的線性組合」求得！

我們將透過下面的活動來強化這些概念的學習。

活動5

已知點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 經二階方陣 A 作線性變換的對應點分別為 $(2, -1)$ ， $(1, 1)$ ，請問：

- (1) A 將點 $P(4, 3)$ 變換到哪一個點？
- (2) 能否在不求出 A 的情形下，而得出點 P 的對應點？

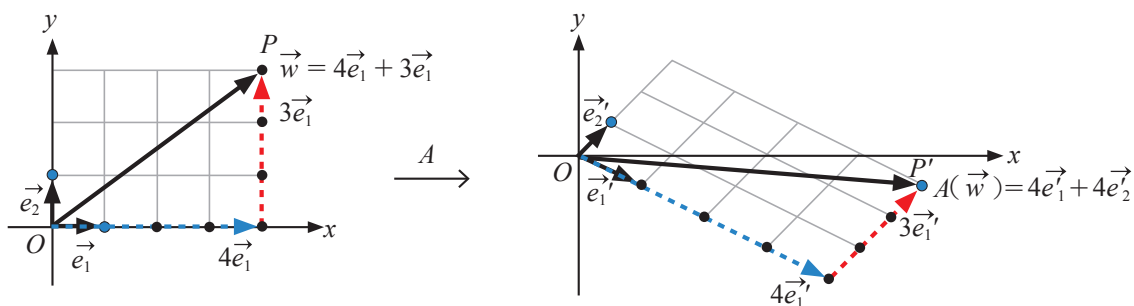
「保持線性組合」的好處

點 $P(4, 3)$ 的對應點 P' 的位置，可依下列方法找尋：

$$\text{因 } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } A \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = A(4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = 4(A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + 3(A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

設向量 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ 以及它們經 A 變換後的向量分別為 $\vec{e}'_1 = (2, -1)$,

$\vec{e}'_2 = (1, 1)$ ，則如圖所示， P' 的位置可沿向量 $\vec{e}'_1 = (2, -1)$ 走其 4 倍的距離，再沿向量 $\vec{e}'_2 = (1, 1)$ 走其 3 倍的距離。此時停步，即為 P 經 A 變換後的新位置 P' 。



由 **活動3**、**活動4** 與 **活動5** 可得以下重要的結論：

1. 二階方陣 A 所表示的線性變換，可由點 $(1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 的對應點所唯一確定！
2. 二階方陣 A 會滿足下列兩個條件：

$$(1) A(P+Q) = AP + AQ \quad (2) A(tP) = t(AP)。$$

其中 P, Q 是 (2×1) 階矩陣， t 為實數。

而(1)與(2)合稱為“線性條件”，是大學端定義線性變換的**核心概念**。

這兩個條件對於「線性」的定義缺一不可。

【任務6】

已知點 $(1, 0)$ 與點 $(0, 1)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $(3, 5)$, $(-1, -3)$ ，則

- (1) A 將點 $P(2, 3)$ 變換到哪一個點？
- (2) A 將點 $Q(x, y)$ 變換到哪一個點？

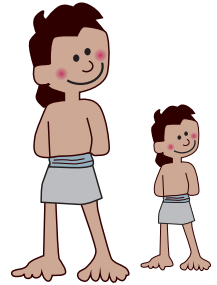
肆、重要的線性變換

本單元我們將介紹四種重要的線性變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移。

活動6 引言

(一) 伸縮

生活中，很多相機具有變焦伸縮鏡頭，能夠把景物拉近而放大，或推遠而縮小。卡通常見同一個圖案放大與縮小的安排。利用水平伸縮或鉛直伸縮來表現，在美工上設計也是常用的方式。首先，來介紹平面圖形的伸縮變換。右圖1是水平鉛直等比例伸縮，下圖2是電腦螢幕依不同解析度出現的鉛垂伸縮與水平伸縮。

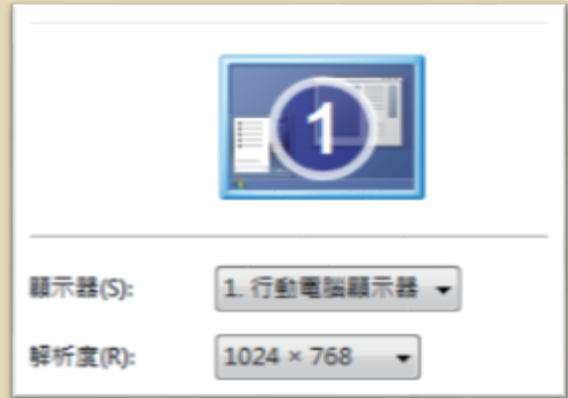


▲ 圖1

我們將透過 **活動6** 探討“以原點為中心，沿著 x 軸、 y 軸的伸縮變換”問題。



(1)



(2)



(3)

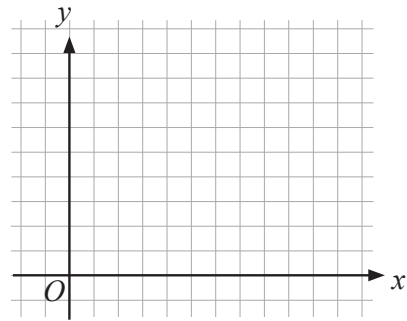
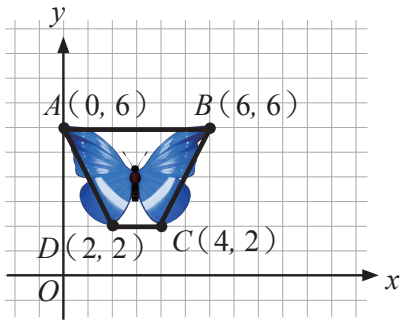


(4)

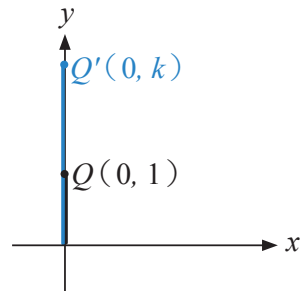
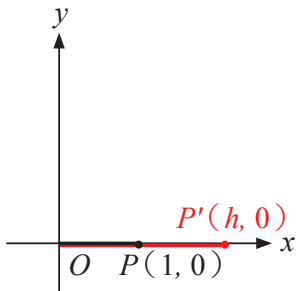
▲ 圖2

活動6 將圖形「以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍」，該怎麼辦？

- (1) 蝴蝶的一對翅膀置於坐標平面上，翅膀的四個角形成的四邊形，其坐標為 $A(1, 6)$ ， $B(6, 6)$ ， $C(5, 2)$ ， $D(2, 2)$ 。將圖形「以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 2 倍，沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍」請在坐標平面上畫出變換後的新的圖形。



- (2) 試利用坐標軸上的單位點及對應點，寫出以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 h 倍 ($h > 0$)，沿著 y 軸方向伸縮 k 倍 ($k > 0$) 的伸縮矩陣。



由 **活動6** 以原點為中心，沿著 x 軸、 y 軸的伸縮變換整理如下：

伸縮的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 沿著 x 軸方向伸縮 h 倍 ($h > 0$)，沿著 y 軸方向伸縮 k 倍 ($k > 0$)，得點 $P'(x', y')$ ，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 為伸縮矩陣。

【任務7】

已知直角三角形 OAB 的三頂點坐標為 $O(0, 0)$ ， $A(6, 0)$ ， $B(6, 3)$ ，將此三個頂點分別以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍，沿著 y 軸方向伸縮 2 倍，得 O' ， A' ， B' 三點，(1)請利用伸縮變換矩陣，寫出 O' ， A' ， B' 三點坐標 (2)求 $\triangle O'A'B'$ 的面積。

活動7 引言

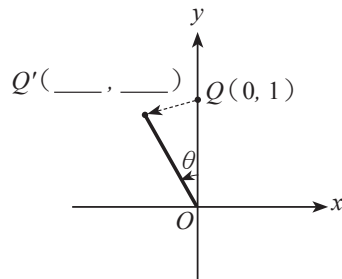
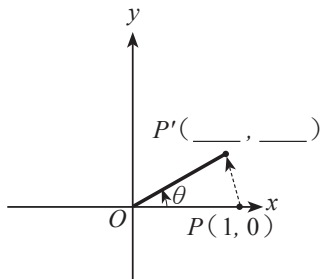
(二) 旋轉

幾何圖形圍繞中心，配合螺旋狀旋轉產生有趣的圖案，是美工設計上會出現的表現方式。若將圖案的線條視為點的集合，則我們可以考慮平面上的點以原點的中心的旋轉變換。



活動7 將圖形「以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 」，該怎麼辦？

- (1) 在坐標平面上，試求將 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ ，以原點 O 為中心，逆時針旋轉 θ 角度後分別為 P' 與 Q' 的坐標。



- (2) 試寫出以原點 O 為中心，將依逆時針方向旋轉 θ 角的旋轉矩陣。

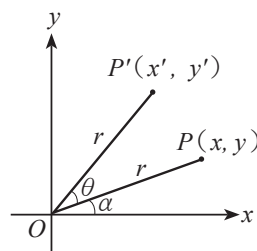
從 **活動7** 推論旋轉變換與有向角的關係

已知點 $P(x, y)$ 滿足 $x=r \cos \alpha$ ， $y=r \sin \alpha$ ， $(r>0)$ ，如圖3所示。

若以原點 O 為中心，將點 P 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$ ，則如何用點 P 的坐標表示 P' 的坐標呢？

在坐標平面上，點 $P(x, y)$ 滿足 $x=r \cos \alpha$ ， $y=r \sin \alpha$ $(r>0)$ ，

如圖3所示。若以原點 O 為中心，將點 P 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$ ，這關係式可用矩陣表示為



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

由矩陣乘法展開，得

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) \\ y' = y \cos \theta + x \sin \theta = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \end{cases}。$$

利用和角公式，得

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

即 $\overline{OP'} = r$ 且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為 $\alpha + \theta$ 。

我們將這個以原點 O 為中心旋轉 θ 角的線性變換整理如下：

旋轉的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x', y')$ ，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

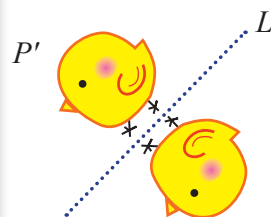
【任務8】

已知正三角形二頂點坐標為 $O(0, 0)$, $A(2, 6)$, 已知 B 在第二象限, 求頂點 B 的坐標。

活動8 引言

(三) 鏡射

迴清倒影一詞，形容水面清澈見底，可倒映出影像。秀麗的山脈，與清澈的湖面中的清晰的倒影呈現一幅迷的畫面。

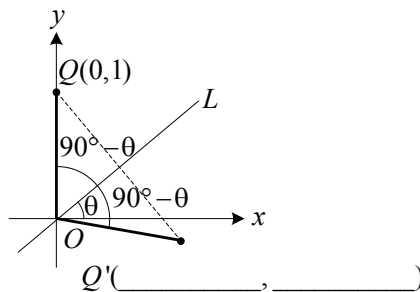
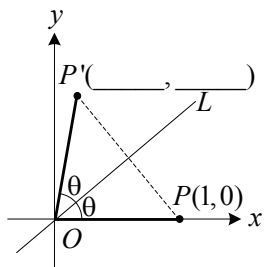


山脈映在清澈的湖面有清晰的倒影，在數學上，點 P 對直線 L 之對稱點 P' 的意思是指： L 是 $\overline{PP'}$ 的中垂線。我們將這種由 P 對應到 P' 的變換，稱為對直線 L 的鏡射，而直線 L 稱為鏡射軸。

活動8 將圖形「對過原點 O 的直線 L 做鏡射」，該怎麼辦？

L 過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，

(1) 在坐標平面上，試求將 $P(1, 0)$ 與 $Q(0, 1)$ ，對直線 L 鏡射後分別為 P' 與 Q' 的坐標。



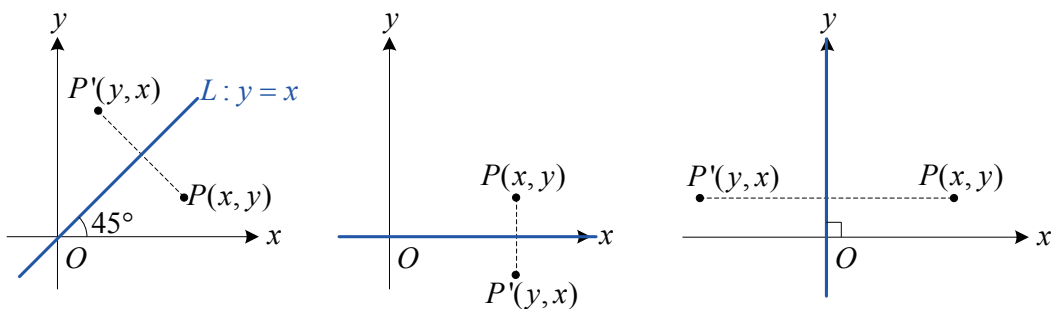
(2) 試寫出以過原點 O 的直線 L 為軸的鏡射矩陣。

在學習直線與圓的單元，直線 $y=x$ 、 x 軸與 y 軸是探討對稱時常討論的三條直線。因為 $y=x$ 、 x 軸與 y 軸分別是過原點且與 x 軸正向夾角為 45° 、 0° 與 90° 的直線，我們可以利用矩陣來表示，以上述三種直線為對稱軸的鏡射矩陣。

(1) 以直線 $y=x$ 為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(2) 以 x 軸為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

(3) 以 y 軸為鏡射軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。



活動8 推論鏡射變換與有向角的關係

在坐標平面上，點 $P(x, y)$ 滿足 $x=r \cos \alpha$ ， $y=r \sin \alpha$ ($r>0$)，

L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，如圖4所示。若

點 $P(x, y)$ 對直線 L 鏡射後得點 $P'(x', y')$ ，這關係式可用矩陣表示為

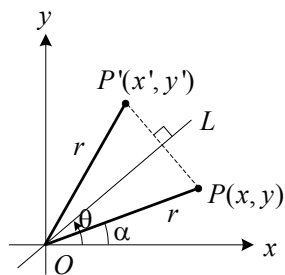
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

利用矩陣乘法展開，得

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\theta - y \sin 2\theta = r(\cos 2\theta \cos \alpha + \sin 2\theta \sin \alpha) \\ y' = y \sin 2\theta - x \cos 2\theta = r(\sin 2\theta \cos \alpha - \cos 2\theta \sin \alpha) \end{cases}。$$

利用和角公式，得 $\begin{cases} x' = x \cos(2\theta - \alpha) \\ y' = y \sin(2\theta - \alpha) \end{cases}$

即 $\overline{OP'} = r$ 且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為 $\theta + (\theta - \alpha) = 2\theta - \alpha$ 。



▲ 圖4

我們將這個對直線鏡射的線性變換整理如下：

鏡射的矩陣表示

在坐標平面上， L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，若點 $P(x, y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x', y')$ ，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

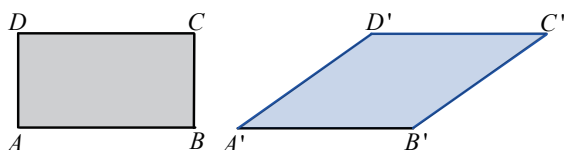
並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。

【任務9】

設直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾 30° 的直線，求點 $P(4, -2)$ 對於直線 L 的對稱點 P' 的坐標。

活動9 引言

(四) 推移



▲ 圖5

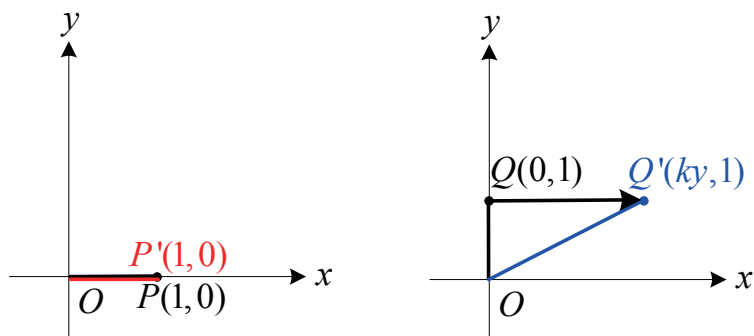


▲ 圖6

圖5，是一副撲克牌平放於桌上的之側面，呈現 $ABCD$ 為一矩形，將矩形下底 \overline{AB} 固定不動，側邊推移使上底 \overline{CD} 向右平行移動（假設 \overline{BC} 與 \overline{AD} 是具有伸縮彈性的線），得平行四邊形 $ABC'D'$ 。圖6，是一個笑臉圖，經過影像處理，橫切面的中點依直線變形處理，這就是推移的概念。

活動9 將圖形「對過原點 O 的直線 L 做鏡射」，該怎麼辦？

- (1) 若點 $P(x, y)$ 的縱坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍（ k 是一個常數），得點 $P'(x', y')$ ，試利用坐標軸上的單位點及對應點，寫出此推移矩陣。



- (2) 設矩形 $OABC$ 的四頂點坐標為 $O(0, 0)$ ， $A(1, 0)$ ， $B(1, 1)$ ， $C(0, 1)$ 。將此四個頂點分別沿 x 軸推移 y 坐標的2倍，得 O' ， A' ， B' ， C' ，四點，求四邊形 $O'A'B'C'$ 的面積。

我們將推移的線性變換整理如下：

推移的矩陣表示

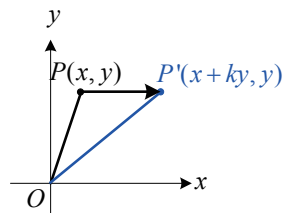
在坐標平面上

(1) 若將點 $P(x, y)$ 縱的坐標保持不變，而將橫坐標增加縱坐標的 k 倍 (k 是一個常數)，

得點 $P'(x', y')$ ，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

這就是沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍的線性變換。

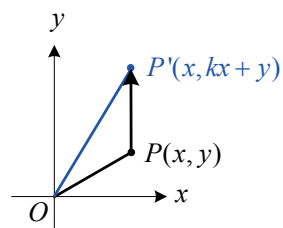


(2) 若點 $P(x, y)$ 的橫坐標保持不變，而將縱坐標增加橫坐標的 k 倍 (k 是一個常數)，

得點 $P'(x', y')$ ，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

這就是沿 y 軸推移 x 坐標 k 倍的線性變換。



【任務10】

(1) 已知長方形的四頂點坐標為 $O(0, 0)$ ， $A(1, 0)$ ， $B(1, 3)$ ， $C(0, 3)$ 若 $k > 0$ ，且此長方形經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 推移變換後的圖形為菱形，則 k 的值為何？

(2) 線性變換 $A : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y \end{cases}$ 的幾何意涵為何？若水平直線 $y = k$ 經過此線性變換後的圖形方程式為何？

我們將四個線性變換矩陣整理如下：

1. 以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 h 倍 ($h > 0$)，沿著 y 軸方向伸縮 k 倍 ($k > 0$) 的伸縮矩陣為 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 。

2. 以原點 O 為中心，逆時針旋轉的旋轉矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 。

3. 以過原點的直線為軸的鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 。

4. (1) 縱坐標保持不變，沿 x 軸推移坐標的 ky 倍的推移矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & ky \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(2) 橫坐標保持不變，沿 y 軸推移坐標的 ky 倍的推移矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ky & 1 \end{bmatrix}$ 。

伍、線性變換的面積比

活動10 引言

坐標平面上的線性變換，它將點作線性變換到新的點。由 **活動4** 知，若線性變換是可逆的二階方陣，線性變換 A 將線段 \overline{PR} 變換到線段 $\overline{P'R'}$ 。故線性變換 A 將三角形 $\triangle ABC$ 變換到三角形 $\triangle A'B'C'$ 。而它的面積會作怎樣的變化呢？我們接著來探討坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

活動10 坐標平面上的三角形經線性變換後，新圖形與原圖形的面積有什麼變化？

已知二階方陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ ， $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2, 1)$ ， $B(1, 2)$ ， $C(-2, -2)$ ，且

$\triangle ABC$ 經二階方陣 M 線性變換後成 $\triangle A'B'C'$ ，試問：

- (1) $\triangle A'B'C'$ 的面積。
- (2) $\triangle A'B'C'$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比與二階方陣 M 之行列式之值的關係。

底下，我們來計算坐標平面上的三角形經線性變換後新圖形與原圖形的面積比。

在坐標平面上，設 $\triangle OAB$ 的三頂點坐標為 $O(0, 0)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，且線性變換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 將 $\triangle OAB$ 變換成 $\triangle O'A'B'$ ，其中

$$O'(0, 0), A'(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1), B'(ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2)$$

設 $\triangle OAB$ 的面積為 Δ ， $\triangle A'B'C'$ 的面積為 Δ' 。因為 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ ， $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

$$\overrightarrow{OA'} = (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1), \overrightarrow{OB'} = (ax_2 + by_2, cx_2 + dy_2)$$

所以 $\Delta = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right|$ ， $\Delta' = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & cx_1 + dy_1 \\ ax_2 + by_2 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} \right|$ 。因此

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & cx_1 + dy_1 \\ ax_2 + by_2 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} ax_1 & ax_1 \\ ax_2 & ax_2 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} by_1 & cx_1 \\ by_2 & cx_2 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} by_1 & dy_1 \\ by_2 & dy_2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| ad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(ad - bc)| \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| \cdot \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta \end{aligned}$$

這結果告訴我們，變換後的三角形面積為變換前的 $\left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$ 倍。

事實上，上述的推導過程中，我們也可以將點 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，變換至點 A' ， B' 視作將向量 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ ， $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ ，變換至向量 $\overrightarrow{OA'}$ ， $\overrightarrow{OB'}$ ，就可推得 O 不是原點時此結果仍成立，整理如下：

線性變換的面積比公式

在坐標平面上，設 $\triangle OAC$ 經線性變換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 後成 $\triangle A'B'C'$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 Δ ， $\triangle A'B'C'$ 的面積為 Δ' ，則

$$\Delta' = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta$$

【任務11】

已知二階方陣 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ ，向量 $\overrightarrow{OP} = (2, 1)$ ， $\overrightarrow{OQ} = (2, -1)$ ，求以 \overrightarrow{OP} ， \overrightarrow{OQ} 所張出的三角形 $\triangle OPQ$ ，經二階方陣 M 線性變換後的三角形面積。

活動11 線性變換與面積的關係

請參考第29頁的四個線性變換矩陣整理，討論坐標平面上的一個三角形經伸縮，旋轉，鏡射或推移變換後，所得新三角形的面積與原三角形的面積的關係為何？

評 量

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若 P 點經 A 變換到點 $P'(2, 0)$ ，試求 P 點坐標。

【解答】

P 點坐標為 $(2, 1)$ 。

2. 若二階方陣 A 將 $P(2, -1)$ 變換到 $P'(2, 1)$ ，將 $Q(-1, 4)$ 變換到 $Q'(-1, 3)$ ，試求矩陣 A 。

【解答】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 與平面上兩點 $P(-1, 2)$ ， $R(2, -1)$ ，而點 Q 在線段 \overline{PR} 上，且 $\overline{PQ} : \overline{QR} = 1 : 2$ 。假設 P, Q, R 三點在 A 的變換下，分別對應到 P', Q', R' 三點

(1) 試求線段 $\overline{P'R'}$ 的長度。

(2) 試求點 Q 坐標。

(3) 試求點 Q 經由 A 變換之後所對應的點 Q' 的坐標。

(4) 請問： P', Q', R' 三點是否共線？

(5) 請問：線段間的比例 $\overline{P'Q'} : \overline{Q'R'} = 1 : 2$ 是否仍成立？

【解答】

(1) $\sqrt{117}$ (2) 點 Q 坐標為 $(0, 1)$ (3) Q' 的坐標為 $(1, 1)$

(4) P', Q', R' 三點仍然共線 (5) $\overline{P'Q'} : \overline{Q'R'} = 1 : 2$ 仍然成立

4. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ，求直線 $M: x - 2y = 1$ 經過 A 的線性變換後所得的直線方程式。

【解答】

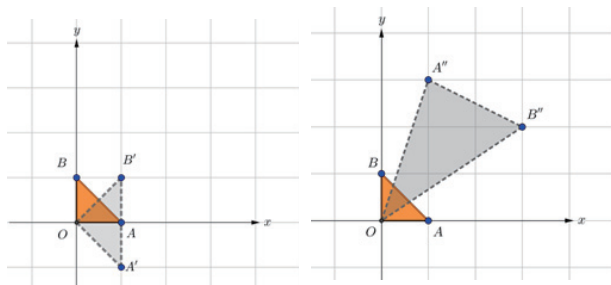
$$x - 2y = 1$$

5. 已知 $\triangle OAB$ 的三個頂點坐標分別為 $O(0, 0)$ 、 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 1)$

試畫出 $\triangle OAB$ 經過下列二階方陣作線性變換後所對應的圖形。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

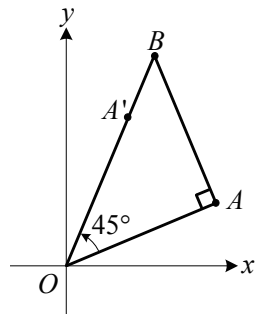
【解答】



6. 在坐標平面上，等腰直角三角形 OAB 滿足 $\angle A=90^\circ$ ， $O(0, 0)$ ， $A(5, 2)$ ， B 在第一象限，求 B 的坐標。

【解答】

得 B 的坐標為 $(3, 7)$ 。



7. 下列有五個矩陣：

$$(1) \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \cos 10^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & -\cos 10^\circ \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

哪些二階方陣可以使 $\triangle ABC$ 經該矩陣變換後，面積保持不變？

【解答】

(1)(2)(3)(4)

8. 設 $\triangle OAB$ 中， O 為原點， $A(3, -1)$ ， B 在第一象限內，且 $\angle AOB = \theta$ ，若 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，且 $\overline{OB} = 5\overline{QA}$ ，則 B 的坐標為 _____。

【解答】

(13, 9)

挑戰題

9. 已知二階方陣 A 將 $P(2, -1)$ 變換到 $P'(2, 1)$ ，將 $Q(-1, 4)$ 變換到 $Q'(-1, 3)$ ，請問：若不求先出 A ，能否算出點 $S(3, 2)$ 經 A 作線性變換後所對應的點？

提示：設矩陣 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

【解答】

(3, 5)

素養導向數學教材 / 單維彰 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

召集人：單維彰

副召集人：鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳始蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）

作者：姚志鴻、曾俊雄（依姓氏筆畫順序排列）

執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）

