

教師手冊

素養導向國民小學
數學教材

比與比值



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

一 封面

★ 單元名稱：比與比值

★ 單元目標：

「比與比值」為六年級教學活動，對應之能力指標為 6-n-07 認識比和比值，並解決生活中的問題。本教學設計之目標為：

1. 認識比與比值、比的符號與意義、比值的意義、比的前項與後項。
2. 發現相等的比。
3. 探索生活中有關比的問題。

二 教材設計理念

數學上的「比」探討的是兩數量間的對等關係，為了讓學生瞭解比與比值的意義並產生使用的需求，本活動以循序引導的方式取代宣告，並依據教學目標將課程劃分為兩大主題：主題一透過果凍製作認識「比與比值」；主題二藉由竿影的測量進行「比與比值的應用」。

主題一的教學，由觀察果凍成品的差異揭開序幕。在探討果凍成品差異的過程中，引導學生思考水、果凍粉的量與果凍口感的關係。待學生察覺水與果凍粉的不變關係後，再逐步介紹比的表示方式、比值的意義，並安排情境討論前項、後項的關係，而後進入相等的比的探討，希望能在環環相扣的情境問題中，建立「比與比值」的概念。

主題二結合自然領域以及數學歷史故事，探討竿長與影長的關係，並運用比與比值的概念，推測出大樹、旗竿甚至金字塔等不易實測的物品高度。

為使比、比值、相等的比三者間的關係緊密連結，本活動採單一情境（果凍製作）進行教學與討論。待學生概念建立後，我們加入擴散性思考的問話，引導學生進行相關連結與擴充，並在附件中提供各種不同情境、不同數字難度的問題，讓孩子延伸學習。同時，附上素養試題（附件3），供教學者依教學時數及學生學習情形，斟酌使用，進行加深加廣活動。

根據教學想法，我們設計兩大主題活動：果凍製作、立竿見影。在果凍製作活動中，透過引導讓學生認識比、比值與相等的比。接著，連結孩子五年級自然課程學習經驗，設計情境讓孩子察覺竿長與影長的關係，並應用比的相關概念進行解題。

教學架構、學習者先備能力與未來相關學習彙整如下：

先備經驗：

1. 了解約分、擴分並能應用
2. 理解比率與百分率
3. 認識最簡分數
4. 能解決分數、小數乘、除法的問題



本單元教學：

主題一：果凍製作（認識比與比值）【4 節】

- ★ 活動一：水、果凍粉與果凍口感的關係
- ★ 活動二：經驗比與比值的意義
- ★ 活動三：認識比的符號與意義、比值的意義、前項與後項、相等的比
- ★ 活動四：應用與練習

主題二：立竿見影（比與比值的應用）【2 節】

- ★ 活動一：觀察竿長與影長
- ★ 活動二：同一時間竿長與影長的關係
- ★ 活動三：不同時間竿長與影長的關係
- ★ 活動四：細思泰利斯測量竿影的策略



未來教學：

1. 了解成正比的現象，並應用此關係解決相關問題（六年級）
2. 了解縮圖、放大圖的意義、了解比例尺（六年級）
3. 了解比的性質、比值的意義，熟練比值的求法（國中）
4. 熟練比例式的基本運算、理解並熟練連比例（國中）

四 核 心 素 養 指 標

數－E－A2 能執行基本的算術操作，能指認基本的形體與相對關係，並在日常生活的情境中，用數學表述與解決問題。

數－E－B1 能熟練地在日常語言與數字、算術符號之間轉換，認識日常使用之度量衡時間並熟練地操作，認識日常經驗中的幾何形體，能以符號表示公式。

五 教 學 活 動 安 排

★ 主題一：果凍製作（認識比與比值）

孩子在中、低年級自然或生活課程中，曾有製作果凍、布丁的經驗，為了讓孩子察覺其中的數學，我們由成品的觀察引入。

果凍製作

快樂國小將舉行校慶園遊會，向悅決定製作果凍義賣。為了製作口感絕佳的果凍，她買了一大包果凍粉回家做實驗。向悅嘗試了好幾次，分別調合水與果凍粉成果凍液，而後將果凍液倒入布丁杯中，放進冰箱冷藏2小時，最後扣出盛於盤中如下圖：



成品 A

成品 B

成品 C

成品 D

★ 活動一：水、果凍粉與果凍口感（1 節）

透過①、②引導學生觀察果凍成品的差異，學生可能發現四個成品的形狀有異、顏色深淺不同、胖瘦高矮不同、軟硬不同等。

而後，請學生思考其成因，引出果凍成分（水與果凍粉）的比例會影響果凍的成品。此問話試圖引導學生說出「水越多、粉越少，做出來的果凍會越軟」，或者「水越少、粉越多，做出來的果凍會越硬」。若教學時學生未出現此結果，教師可補追問：「猜猜看，水 100 公克、果凍粉 20 公克製作出的果凍，與水 150 公克、果凍粉 20 公克製作出的果凍，哪一個比較硬？為什麼？」

③延續前一活動，討論水與果凍粉的分量對果凍成品的影響。為解決此問題，學生需同時比對前頁的成品及本頁的數據，學生可能出現以下策略：

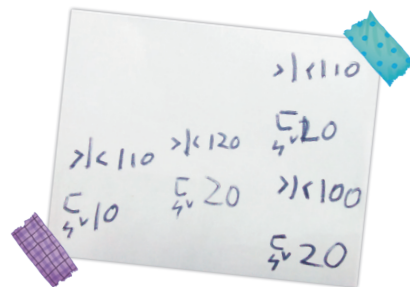
- 策略一：憑直覺判斷。
- 策略二：計算差量作判斷。
- 策略三：忽略果凍粉，先依水判斷，遇水量相同時再比較果凍粉重量。
- 策略四：先判斷果凍粉的量，再判斷水量。選出果凍粉最少的（第 2 組數據），接著判斷其水量與其他各組數據差異不大，故決定第二組數據為成品 A，之後的三組果凍粉分量都一樣，故水越少越堅挺。
- 策略五：先找出水最少、果凍粉最多的為成品 B；而後挑出果凍粉最少的為成品 A，剩下兩個再依水量判斷。
- 策略六：先找出水最少、果凍粉最多的為成品 B；而後比較三組數據發現第二組數據與第四組數據做出來的果凍都比第三組數據做出來的軟，所以第三組數據為成品 C，而後判斷第二及第四組。
- 策略七：水的重量除以粉的重量，算出 1 公克的果凍粉配多少水，水越多越軟。（已含有比值的概念）
- 策略八：水的重量除以粉的重量，算出水是果凍粉的幾倍，算出的值就是果凍的軟度，數值越大越軟。（已含有比值的概念）
- 策略九：使用相等比策略。將第 2 組數據中，10 公克的果凍粉增為 20 公克，水則增為 220。固定果凍粉的量後，再進行水量的比較。（使用相等的比）

使用策略七、八、九的學生雖然還沒有學習「比」，但已應用相關概念進行解題，但教學發現，大部分的學生還是習慣用差量來進行比較。此活動目標為促使學生發現當影響因素不只一個時，無法只使用差量來進行思考。本活動透過開放解題，讓孩子進行解題策略的交流，引出使用「比」來解決問題的需求。此題無法直接判斷的是第二組與第四組數據，且兩者水與果凍粉的差量均為 100 公克，學生勢必尋找其他比較策略，改用倍數、比率或者比來處理問題。此時 尚未正式介紹「比」，僅讓學生經驗即可。

① 說說看，這4個果凍成品各有什麼不同？

② 想一想，什麼原因造成各成品的不同？

③ 製作果凍時，向悅隨手記下水與果凍粉的分量，但她忘了各是哪一次的紀錄，請你幫她想一想，這些紀錄分別屬於哪個成品？並說說看，你是怎麼知道的？



	果凍成品	水 (公克)	果凍粉 (公克)
1	(B)	100	20
2	(A)	110	10
3	(C)	110	20
4	(D)	120	20

★ 活動二：經驗比與比值的意義（1 節）

「若要製作出相同口感的果凍，水與果凍粉需有固定且可類推的倍數關係，也就是兩者的比值固定」。據此目標，我們提出④～⑥供學生探索。

學生進行此活動時可能只觀察到水與果凍粉的共變關係：每做一個果凍，需 100 公克的水，故做兩個果凍時，水的分量為 100 公克的兩倍……；每做一個果凍，需要 20 公克的果凍粉，故做兩個果凍時，果凍粉的分量為 20 公克的兩倍……。為了讓學生發現水與果凍粉的不變關係，且依此關係製作的果凍口感都一致，並列出「水重 = 果凍粉重 \times 5」或者「水重 \div 5 = 果凍粉重」的算式，我們透過「用一個算式表示水與果凍粉的關係」的問話來引導。

④、⑤的目的在於連結學生舊經驗與比的意義，⑥則希望透過「觀察與比較解題策略」的方式強化水與果凍粉的倍數關係。待兩量的倍數對應關係確立後，下一活動即引入比的表示法。

教學若能根據班上孩子的解題進行討論更能引發共鳴與共識。因此，⑥所學之解題策略需依各班實際教學而定，教師可視孩子學習狀況選擇策略供孩子討論。根據⑤，學生可能使用的解題策略包含：

- 分別將水（100 公克）、果凍粉（20 公克）乘以果凍數
- 水逐次加 100，果凍粉逐次加 20
- 先算出水重，水重除以 5 等於粉重
- 先算出水重，水重乘以 $\frac{1}{5}$ 等於粉重
- 先算出粉重，粉重乘以 5 等於水重

「你如何表示水和果凍粉的關係？請用一個算式記下來」學生可能作答如下：

- 水重 + 粉重 = 果凍重量
- 粉重 \times 5 = 水重
- 水重 \times $\frac{1}{5}$ = 粉重
- 水重 \div 粉重 = 5
- 水重 \div 5 = 粉重
- 水重 \div $\frac{1}{5}$ = 粉重（錯誤）
- 粉重 \div 5 = 水重（錯誤）
- 水重 \times 5 = 粉重（錯誤）
- 水重 \times 粉重 = 5（錯誤）

學生完成此部分的討論後，可提供附件一做形成性評量。

經過試吃，大家一致認為成品B的口感最佳，向悅決定以這個果凍作為義賣商品的範本。

④ 如果要製作出和成品B一樣口感的果凍要怎麼做？

⑤ 若要製作相同口感的果凍 2 個、3 個、……，分別需要多少水？多少果凍粉？

果凍個數	1	2	3	4	5	10	20	30
水（公克）	100	200	300	400	500	1000	2000	3000
果凍粉（公克）	20	40	60	80	100	200	400	600
你如何表示水和果凍粉的關係？請用一個算式記下來：								

⑥ 和同學分享記法，說說看你們的記法有何異同？都對嗎？為什麼？

⑦ 完成以上討論後，請試做附件一。

★ 活動三：認識比與比值的意義、相等的比（1 節）

經過一連串活動的鋪陳，學生已有相當經驗，故於此做分段的統整歸納。

首先，引入比的表示法、讀法、寫法與前後項，並用⑧討論前後項的關係，若水：果凍粉 = 100：20，則果凍粉：水 = 20：100，兩者前後項雖不同，但仍保有水是果凍粉的 5 倍，果凍粉是水的五分之一的關係，故仍可製作相同口感的果凍。比的寫法在符號表示時，可用簡記表示為「水：果凍粉」，建議教師於教學時可用更完整的語句「水的重量比果凍粉的重量」來描述，進行口頭說明。⑨試圖引導學生討論比值並開啟相等的比以及最簡單整數比的討論，為後續活動墊步。此題「不足 20 公克」是一個不確定的數量，若考慮學生在討論時會出現困難，可將題目中的「不足 20 公克」改為「只有 15 公克」等相關確定的量，讓學生進行討論。此題希望學生能回答：只要水的重量是果凍粉重量的 5 倍，或者每 1 公克的果凍粉配 5 公克的水，皆可製作出相同口感的果凍。

像這樣，水和果凍粉有固定的對應關係，我們可以用「水：果凍粉 = 100：20」來表示，其中「：」是比的符號，「100：20」讀作「一百比二十」。在「100：20」中，我們稱100是這個比的前項，20是這個比的後項。

- ⑧ 小美用「果凍粉：水 = 20：100」來表示，一樣可以製作出和成品B相同口感的果凍嗎？為什麼？

在數學中，我們常用「比」來表示兩個數量間有固定的對應關係。以成品B來說，水和果凍粉的比是100：20，果凍粉和水的比是20：100。那麼成品A呢？成品C呢？

- ⑨ 小華家的果凍粉不足20公克，他是否有辦法做出相同口感的果凍？請說說你想到的策略。

要製作相同口感的果凍，水與果凍粉必須有固定的比例。以成品B來說，水：果凍粉 = 100：20，將這個比的「前項」除以「後項」，所得到的結果5，就是「100：20」的比值。比值「5」所代表的意義是「水的分量必須是果凍粉的5倍」，或者說，「每一公克的果凍粉需配上5公克的水」。進行下列活動前，請先想一想，什麼時候我們會需要使用比值呢？

⑩、⑪為教學後的練習活動，回頭探討活動一各成品中水與果凍粉的關係，練習比的記法以及比值的計算，並思考比值與果凍口感的關係，連結比、比值的意義與生活情境的應用。

根據⑩，學生可能的回答為：水與果凍粉的比值越大做出來的果凍越軟；水與果凍粉的比值越小做出來的果凍越硬。此時，教師可進一步追問：

①為什麼「水與果凍粉的比值越大，做出來的果凍越軟」？

②反過來說，果凍粉與水的比值越大，做出來的果凍也會越軟嗎？為什麼？

⑪除了檢驗學生對比與比值的理解外，也引出使用比值的需求：進行比較。由於各成品使用的水與果凍粉分量不同，不易直接判斷軟硬口感，學生學過比與比值則可解決此問題。⑫中，水：果凍粉的比值為 5.5，與成品 C 的比值相同。此題除了再次練習，也試圖連結比值與相等的比，透過比值相等口感相同進一步引入相等的比。

- ⑩ 以下是向悅進行果凍製作實驗紀錄表，請你根據數據寫出各成品中，水與果凍粉的比與比值。

	成品 A	成品 B	成品 C	成品 D
水 (公克)	110	100	110	120
果凍粉 (公克)	10	20	20	20
水與果凍粉的比	110 : 10	100 : 20	110 : 20	120 : 20
水與果凍粉的比值	11	5	5.5	6

- ⑪ 觀察各成品水與果凍粉的比值，說說看，比值和果凍的口感有什麼關係？說說你的發現。

- ⑫ 想一想：老師用 616 公克的水、112 公克的果凍粉，做出來的果凍口感會和哪個成品一樣？為什麼？

「616 : 112」的比值是 5.5，「110 : 20」的比值也是 5.5，「616 : 112」與「110 : 20」的比值相等，我們稱它們為「相等的比」，記作 $616 : 112 = 110 : 20$ ，由於這兩個比的比值相等，因此利用這兩個比做出來的果凍口感會一樣。

★ 活動四：應用與練習（1 節）

認識比與比值、相等的比後，能解決什麼樣的問題呢？⑬同時提供六組數據並讓學生自行選擇比較策略。面對此問題，學生可能求出比值再進行比較；也可能透過是否為相等的比來判斷口感是否會一樣。使用相等的比進行判斷時，學生很可能以學生 B 的數據做為參考依據，而將學生 A 的數據轉為水：果凍粉 = 6：1，學生 C 的數據轉為水：果凍粉 = 6：1，學生 D 的數據轉為水：果凍粉 = 12：7……，若發現學生能找出「最簡單整數比」以方便比較，教學者即可趁此機會介紹「最簡單整數比」：當比的前項與後項皆為整數，且沒有 1 以外的公因數，我們就說它是最簡單整數比，例如「4：5」、「7：3」。

此外，學生 E 與學生 F 呈現的是果凍粉：水，用以再次探討前後項與比值的關係。

- 13 下列是 6 位小朋友製作果凍時，水與果凍粉的關係，找找看，哪些小朋友製作的果凍口感一樣？說說看，你怎麼知道的？

水：果凍粉 = 120 : 20



學生 A

水：果凍粉 = 6 : 1



學生 B

水：果凍粉 = 90 : 15



學生 C

水：果凍粉 = 240 : 140



學生 D

果凍粉：水 = 90 : 540



學生 E

果凍粉：水 = 72 : 504



學生 F

⑭再次歸納比值與相等的比，針對此題，學生可能的回答包含：

- 知道比值或者算出相等的比，我們就可以複製出很多相同口感的果凍。
- 知道比值或者算出相等的比，我們就可以比較不同配方的成品。

若教學時，孩子無法順利產出，教師可提以下問題，引導孩子思考。

- ① 比值所代表的意義是什麼？
- ② 若有兩個果凍，它們水：果凍粉的比值相等，那表示什麼呢？

為了活動的統整性，比與比值的建立均在製作果凍情境（組合關係）下建立，學生是否能類推至其他類型的情境問題呢？為了確認，我們在⑮提供學生發想的機會，並在附件二的總結性評量活動中放置各類型問題以及不同數字難度設計供學生嘗試。

⑭ 說說看，算出比值或相等的比有什麼好處？

⑮ 想一想，生活中還有哪些情形也可以應用比與比值來進行比較和計算呢？

⑯ 恭喜你完成比與比值的學習，請完成附件二的挑戰。

★ 主題二：立竿見影（比與比值的應用）

孩子在五年級自然課即與竿影測量活動接觸，當時的學習目標為：發現一天當中，竿影的長度會隨時間而改變，從早晨開始，越接近中午竿影越短，而後，竿影會慢慢變長，且影子的位置與早上不同。此單元延續孩子的舊經驗，擴充探討「同一時間竿長與影長間有固定的倍數關係」以及「竿長與影長的倍數關係會因時間的不同而改變」。由於實測需克服誤差，以下活動所提供的資料，均為實測後微調的數據，若教學時間允許，教學者可實際帶領學生進行實測，而後再根據實測結果進行討論。

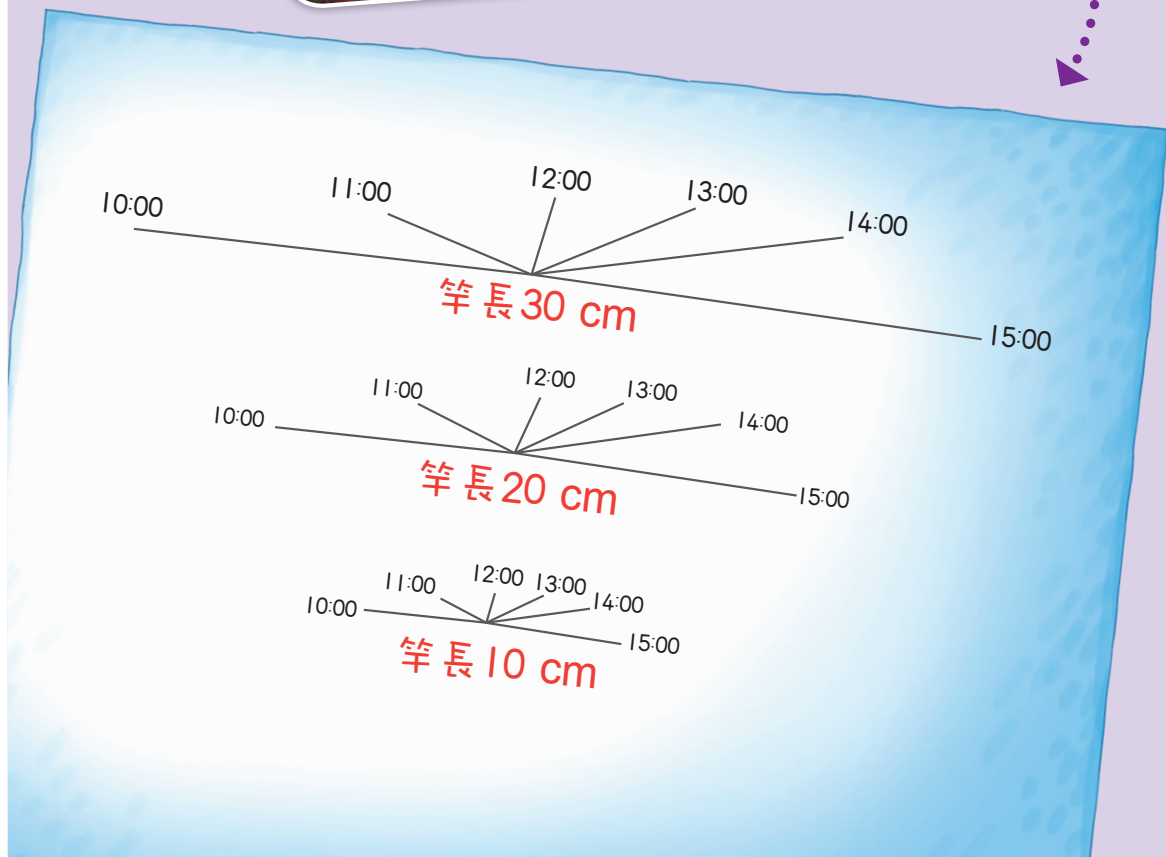
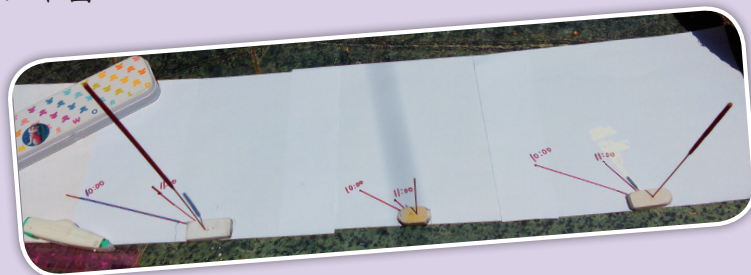
★ 活動一：竿長 v.s. 影長（10 分鐘）

活動一開始，我們呈現三組同時同地測量竿影的結果讓學生進行觀察，並透過①「說說看，你有哪些發現？」引導學生比較竿影的變化。此活動除了引導學生說出舊經驗外，也希望能進一步引導學生發現「竿子的長度會影響影子的長度」、「同一時間，竿子越長，影子也越長」……等。若學生未察覺，教師可追問：「這裡呈現幾種不同長度的竿子？它們的影子都一樣長嗎？」、「影子的長度和竿子的長度有什麼關係？」若要增進孩子對影長變化的了解，亦可使用網路動畫資源進行。網址如下：<http://ggbtu.be/m1355139> 與 <http://edson.tw/earth/sunrise/sunrisetw.html>。

接下來，我們將透過學生的發現進一步從數學的角度探索竿長與影長的關係。

立竿見影

五年喜樂班學生上自然課時，分組進行竿影測量活動。老師請各組小朋友在操場上立好各種長度的竿子，每隔一個小時記錄影子的位置與長度。第一組小朋友利用 10 公分、20 公分、30 公分的竿子進行測量，結果如下圖：



★ 活動二：竿長與影長的關係（一）（30 分鐘）

在同一時間同一地點測量竿影會發現：竿長與影長呈固定的倍數關係。為了讓學生發現此事實，並用比來記錄竿長與影長的關係，我們提供數據讓學生進行觀察與討論。待學生察覺關係後再用比值或者相等的比進行類推解題。

根據②，學生可能的想法有：

- 可以，因為竿子每增加 10 公分，影子就增長 7 公分。
- 可以，因為它們的最簡單整數比都是 10 : 7。
- 可以，因為它們的比值都一樣。
- 可以，因為影長都是竿長的 0.7 倍；竿長都是影長的 $\frac{10}{7}$ 倍。
- 可以，影長都是 7 的倍數，竿長都是 10 的倍數。竿長乘以幾（5）倍，影長也會乘以幾（5）倍。

當學生確認「測量當天早上 10 點，竿長與影長的比是 10 : 7」後，接下來即進行相關解題。

③與④分別為影長未知、竿長未知的問題，學生可利用比值相等，或者相等的比求出。③學生可能的解法如下：

- 應用相等的比，竿長：影長 = 20 公分：14 公分 = 2 公尺：□公尺
2 公尺 = 200 公分； $200 \div 20 = 10$ ； $14 \times 10 = 140$ 公分 = 1.4 公尺
- 應用比值相等，竿長：影長的比值是 $\frac{10}{7}$ ， $2 \div \frac{10}{7} = 1.4$ 公尺
- 應用相等的比（最簡單整數比），竿長：影長 = 10 : 7 = 200 : 140，
140cm = 1.4m。
- 學生除了可以用竿長：影長之外，也可以用影長：竿長來解題。

④學生可能的解法如下：

- 應用相等的比，竿長：影長 = 20 公分：14 公分 = □公尺：0.98 公尺
0.98 公尺 = 98 公分； $98 \div 14 = 7$ ； $20 \times 7 = 140$ 公分 = 1.4 公尺
- 應用比值相等，竿長：影長的比值是 $\frac{10}{7}$ ， $0.98 \times \frac{10}{7} = 1.4$ 公尺
- 應用相等的比（最簡單整數比），竿長：影長 = 10 : 7 = 98 : 140，
140cm = 1.4m。
- 學生除了可以用竿長：影長之外，也可以用影長：竿長來解題。

除了求出缺項外，此部分也加入了分數、小數的計算，以及不同單位的比。因為測量的時間及地點相同，因此 20 公分：14 公分 = 2 公尺：1.4 公尺 = 1.4 公尺：0.98 公尺。若學生出現不透過單位換算，直接用 $20 \div 2 = 10$ ，因此 $14 \div 10 = 1.4$ ，求出 2 公尺竿子在早上 10 點的影長為 1.4 公尺，教師可趁機提出與學生進行討論，並透過比值都是 $\frac{10}{7}$ 建立 20cm : 14cm = 2m : 1.4m，以作為後續比例尺教學的墊步。

① 仔細觀察測量結果，說說看，你有哪些發現？

測量活動結束後，老師蒐集早上 10 點，各組測量的數據，並整理於下表：

竿長（公分）	20	30	50	100
影長（公分）	14	21	35	70

② 根據測量數據想一想，早上 10 點時，竿長和影長的關係可以用比表示嗎？為什麼？

③ 進行竿影測量那一天早上 10 點，第二組小朋友在操場上立了一根 2 公尺長的竿子，說說看它的竿影有多長？為什麼？請提出你的想法。

④ 同一天早上 10 點，第二組小朋友幫文文測量她的影長是 0.98 公尺，你知道文文的身高是多少嗎？說說你的想法。



★ 活動三：竿長與影長的關係（二）（20 分鐘）

為強化「同一時間同一地點竿長與影長有固定的倍數關係」，並引出「竿長與影長的倍數關係會因時間的不同而改變」，我們提供 11 點的測量數據供師生做再次的探討。

有了前次的經驗，學生應能發現早上 11 點時竿長與影長的比值是 $\frac{10}{3}$ ，並延續先前的解題經驗進行解題。根據⑤，學生可能的回答是：

- 可以，因為竿子每增加 10 公分，影子就增長 3 公分。
- 可以，因為它們的最簡單整數比都是 10 : 3。
- 可以，因為它們的比值都一樣。
- 可以，因為影長都是竿長的 0.3 倍；竿長都是影長的 $\frac{10}{3}$ 倍。
- 可以，影長都是 3 的倍數，竿長都是 10 的倍數。竿長乘以幾倍，影長也會乘以幾倍。

此時，學生應已發現時間不同，竿長與影長的比值不同。下一個活動我們將進入此議題的探討。而⑥則為再次練習，教學者可依學生學習狀況更改影長以變化難易度。此題學生可能的解法如下：

- 應用相等的比，竿長：影長 = 20 公分：6 公分 = □公尺：4 公尺
 $4 \text{ 公尺} = 400 \text{ 公分}$ ； $400 \div 6 = \frac{200}{3}$ ； $20 \times \frac{200}{3} = \frac{4000}{3} \text{ 公分} = \frac{40}{3} \text{ 公尺}$
- 應用比值相等，竿長：影長的比值是 $\frac{10}{3}$ ， $4 \times \frac{10}{3} = \frac{40}{3} \text{ 公尺}$
- 應用相等的比（最簡單整數比），竿長：影長 = $10 : 3 = \frac{4000}{3} : 400$ ，
 $\frac{4000}{3} \text{ cm} = \frac{40}{3} \text{ m}$ 。
- 學生除了可以用竿長：影長之外，也可以用影長：竿長來解題。

在之前的活動中學生已分別討論 10 點、11 點的竿長與影長關係，此活動則將兩者並置，請學生進行觀察與比較。學生可能的發現包含：早上 10 點竿長與影長的比值是 $\frac{10}{7}$ ；早上 11 點竿長與影長的比值是 $\frac{10}{3}$ ；兩時間竿長與影長的比值不同；11 點的比值較大；竿長與影長的比值會越來越大，過了 12 點會越來越小……。

⑧承接前一個問話，讓學生說出 12 點的影子會比 11 點時的影子短，竿長與影長的比值也會比 11 點的比值大。

- ⑤ 下表是當天早上 11 點各組測量的數據。想一想，早上 11 點時，竿長和影長的關係也可以用比表示嗎？為什麼？

竿長 (公分)	20	30	50	100
影長 (公分)	6	9	15	30

- ⑥ 操場邊有一棵大王椰子樹，在測量當天早上 11 點時，樹影長度為 4 公尺，那它實際的高度是多少？請做做看。

- ⑦ 檢視早上 10 點與 11 點的紀錄，竿長和影長的比值一樣嗎？說說看，你有什麼發現？

	竿長 20 公分	竿長 30 公分	竿長 50 公分	竿長 100 公分
早上 10 點影長 (公分)	14	21	35	70
早上 11 點影長 (公分)	6	9	15	30

- ⑧ 承上題，當天中午 12 點竿長和影長的比值可能會是多少？為什麼？

★ 活動四：深思與細想（20 分鐘）

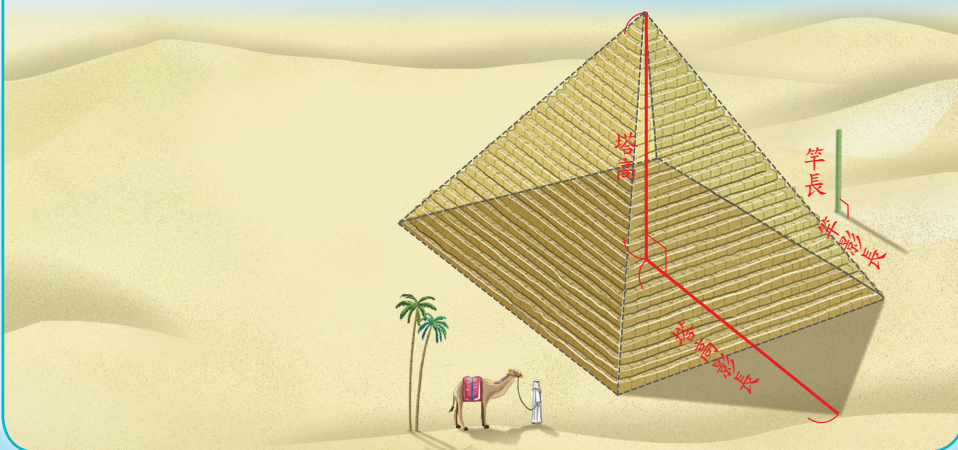
探索了竿長與影長的變化，我們應用泰利斯的故事引導學生進行詮釋整合與比較分析的工作。

測量金字塔的高度

在兩千六百多年前，法老王阿美西斯很想知道怎麼樣才能測得金字塔確實的高度。於是國王命令祭司們去丈量，聰明的祭司們想盡辦法都不能量出塔高。因此，金字塔的高度變成了一個謎。法老王為了解決這個問題，提出鉅額懸賞，徵求天下聰明之士來揭開這個謎題。

就在這個時候，希臘數學家泰利斯（Thales，西元前六、七世紀）在埃及看到了法老王的告示，燃起了挑戰的決心，滿懷希望地揭下告示。但事與願違，泰利斯試了幾次都沒有成功；然而，失敗並沒有使他灰心，泰利斯離開了王宮，沿途思考，他就這麼走下去，當他注意到自己的影子一直跟著自己時，泰利斯無助地想著：「萬能的太陽啊！您能不能給我一些啟示呢？」

泰利斯就這樣走著走著，突然靈機一動、欣喜欲狂，他看著自己的影子，喃喃自語：「在一天中，一定有一個時間，人的身高和影子的長度會相等，這時候，金字塔的高度也必然會和它的影子的長度相等。」泰利斯急急忙忙地回到王宮，將自己的想法告訴法老王及祭司們，法老王知道了這個方法，如獲至寶，高興得不得了，泰利斯終於幫他解決了這個難題。



首先，提出⑨討論比值 1 所代表的意義：竿長與影長相等。而後根據測量數據推論一天中何時竿長與影長的比值可能是 1（⑩），讓學生經驗竿影的連續性。此時，學生不透過微積分，只要利用提供的數據進行判斷說理即可。在此數據中，竿長與影長比值為 1 的時間點為 9 點至 10 點之間與 15 點至 16 點之間。

⑪最後一道題目希望學生能總結以上所學，提出具體策略。事實上，不必等到人的影子和自己的身高一樣時，才能測量金字塔的高度，只要知道當下身高與影長的比值，並測量出金字塔的影長即可計算出金字塔的高度。

看完故事後讓我們想一想：

⑨ 泰利斯發現，一天中某個時間會出現物品高度和影子長度相等的情形。請問當竿長與影長相等時，竿長與影長的比值是多少？

⑩ 若以五年喜樂班上自然課測量竿影那一天的資料來看，你認為大約什麼時候竿長和影長會相等？說說看你的想法。

	8 點	9 點	10 點	11 點	12 點	13 點	14 點	15 點	16 點
竿長 10 公分	16 公分	12 公分	7 公分	3 公分	1.5 公分	3.5 公分	6 公分	8.4 公分	13 公分

⑪ 我們知道泰利斯等到影長和竿長相等時，才測量金字塔的高度。一定要等到影長與竿長相等時，才能測量金字塔的高度嗎？關於這個問題，你有什麼想法？

實力 大挑戰 1

號 姓名：

小朋友，底下有兩個問題，你能獨力解決嗎？試試吧！

- ① 向悅用 100 公克的水與 20 公克的果凍粉製作出風味絕佳的果凍，若要製作相同口感的果凍，分別需要多少水？多少果凍粉？請試著算算看。

水（公克）	100	200	600	800	1200	1500	4500	5000
果凍粉（公克）	20	40	120	160	240	300	900	1000

計 算 區

此題情境與課堂探討題⑤相同，為使學生靈活運用「果凍粉的 5 倍是水的重量」、「水的重量除以 5 是果凍粉的重量」、「每一公克的果凍粉需配 5 公克的水」……來解題，此題刻意不提供果凍數量，並更換未知數的位置。同時，置放計算區供教學者檢視學生想法。

- ② 偉杰用 2 匙蜂蜜配上 500 毫升的水調製蜂蜜水；佩璇用 3 匙蜂蜜配上 600 毫升的水調製蜂蜜水；京婷用 4 匙蜂蜜、700 毫升的水調製蜂蜜水。請問，誰調製的蜂蜜水最甜？

更換情境以檢視學生是否能進行學習遷移。（以下解法僅供參考）

偉杰：每匙蜂蜜配 250 毫升的水

佩璇：每匙蜂蜜配 200 毫升的水

京婷：每匙蜂蜜配 175 毫升的水

京婷調製的蜂蜜水最甜

實力 大挑戰 2

號 姓名：

- ① 云云冷飲店用 2 匙的檸檬原汁加上 5 杯的水，調出一壺好喝的檸檬汁。請問，要怎麼樣才能製作出相同酸度的檸檬汁呢？

組合關係，兩量單位不同，兩量的比值非整數。(以下解法僅供參考)

1. 只要檸檬原汁與水的比值固定即可調製出相同酸度的檸檬汁。
2. 只要找出相等的比就可以製作出相同酸度的檸檬汁。

- ② 承上題，若要製作相同酸度的檸檬汁 2 壺、3 壺、5 壺、10 壺，分別需要多少水？多少檸檬原汁？

	2 壺	3 壺	5 壺	10 壺
檸檬原汁 (匙)	4	6	10	20
水 (杯)	10	15	25	50

- ③ 圖書館舉辦換書活動，每本書都用相同數量的點券兌換，凱翔用 80 張點券換了 12 本書，想想看，如果用 20 張點券可以換幾本書？

兌換關係，兩量單位不同，兩量的比值非整數。(以下解法僅供參考)

$$80 : 12 = 20 : 3$$

- ④ 1 塊重 395 公克的鐵塊，它的體積是 50 立方公分，請用比來表示這種鐵塊的重量和體積的關係。

密度關係，兩量單位不同，兩量的比值非整數。(以下解法僅供參考)

$$395 : 50$$

- ⑤ 承上題，若相同的鐵塊重 711 公克，它的體積有多大呢？

$$395 : 50 = 711 : 90 \text{ (解法僅供參考)}$$

- ⑥ 佑翔用 3 匙檸檬原汁配上 600 毫升的水調製成檸檬汁；凱翔用 4 匙檸檬原汁配上 700 毫升的水調製成檸檬汁；子珊用 5 匙檸檬原汁配上 800 毫升的水調製成檸檬汁。請問，誰調製的檸檬汁比較酸？為什麼？

組合關係，兩量單位不同，多組數據的比較。

此題情境學生於附件一經驗過，再次放置是為了讓學生改用比值或相等的比進行解題與說明。參考答案如下：

佑翔調製的檸檬汁——水：檸檬原汁的比值是 200

凱翔調製的檸檬汁——水：檸檬原汁的比值是 175

子珊調製的檸檬汁——水：檸檬原汁的比值是 160

水越少越酸，故子珊調製的檸檬汁最酸。

實力 大挑戰 3

號 姓名：

Bakery 烘焙坊最暢銷的產品是「胚芽吐司」與「雜糧吐司」，兩種吐司的配方、作法及製作注意事項如下：

胚芽吐司配方

麵粉	1200g
酵母	6g
糖	24g
鹽	2g
鮮奶	712g
胚芽粉	200g

烘焙時間：40 分鐘

烤爐溫度：200 度

此配方為 2 條胚芽吐司的量

雜糧吐司配方

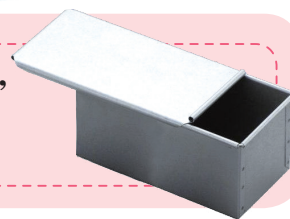
麵粉	1500g
酵母	6g
糖	48g
鹽	6g
鮮奶	900g
雜糧粉	600g

烘焙時間：40 分鐘

烤爐溫度：200 度

此配方為 3 條雜糧吐司的量

注意事項：為使吐司形狀完整，每個烤模均需放滿，製作完整的一條。（無法製作半條、0.2 條……等）



① 若要製作胚芽吐司 7 條，需要的材料有哪些？分別要多少？

麵粉：4200 公克 酵母：21 公克 糖：84 公克
鹽：7 公克 鮮奶：2492 公克 胚芽粉：700 公克

② 若要製作雜糧吐司 7 條，需要的材料有哪些？分別要多少？

麵粉：3500 公克 酵母：14 公克 糖：112 公克
鹽：14 公克 鮮奶：2100 公克 雜糧粉：1400 公克

③ 王奶奶想購買糖份比例較低的吐司，你會建議她選購哪一款？為什麼？

正解：

一條胚芽土司中，糖量：總重量 = 12 : 1072 比值為 $\frac{12}{1072}$

一條雜糧土司中，糖量：總重量 = 16 : 1020 比值為 $\frac{16}{1020} = \frac{4}{255} = \frac{12}{765}$
故，胚芽吐司的糖分較低。

學生可能的解法如下，教師可斟酌給分：

- ▶ 僅考慮總糖量的多寡：雜糧土司中有 48 公克的糖，比胚芽吐司的 24 公克多，故胚芽吐司的糖分較低。
- ▶ 僅考慮一條土司中糖量的多寡：一條雜糧土司中有 16 公克的糖，比一條胚芽吐司的 12 公克多，故胚芽吐司的糖分較低。

④ 王師傅清點庫存，發現剩下的材料如下，若兩種口味的吐司都要做，請問最多可以各做幾條？

庫存材料：

麵粉 3000g	酵母 15g
雜糧粉 600g	胚芽粉 300g
糖 70g	鮮奶 2kg
鹽 1kg	

雜糧粉有 600 公克，最多可以做 3 條雜糧吐司；胚芽粉有 300 公克，最多可以做 3 條胚芽吐司；但若各做 3 條，麵粉及糖量將不足，故其中有一種吐司最多只能做 2 條，就麵粉的量來說，哪種吐司做 2 條都沒有問題，但

再觀察糖量即會發現，若雜糧吐司做 3 條胚芽吐司做 2 條，糖量將不足，故最多可做胚芽吐司 3 條，雜糧吐司 2 條，共 5 條。

	胚芽吐司		雜糧吐司		剩餘材料
	2 條	3 條	2 條	3 條	
麵粉 (公克)	1200	1800	1000	1500	3000
酵母 (公克)	6	9	4	6	15
糖 (公克)	24	36	32	48	70
鹽 (公克)	2	3	4	6	1000
鮮奶 (公克)	712	1068	600	900	2000
胚芽粉 (公克)	200	300	0	0	300
雜糧粉 (公克)	0	0	400	600	600

素養導向數學教材 / 曾世杰 主編

-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

素養導向國民小學數學教材：比與比值 - 教師手冊

主編者：鄭章華

作者：古欣怡、林美曲

(依姓氏筆畫順序排列)

發行人：柯華葳

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組

召集人：曾世杰

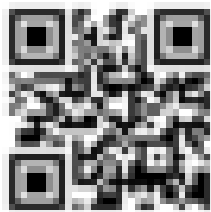
副召集人：單維彰、鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜
陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿

(依姓氏筆畫順序排列)

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
(歡迎使用，請註明出處)