

單元

直角三角形的三角比

75%的險升坡



1 / 75%險升坡

在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論：



阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤？」

小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」

阿文：「真的是寫 75% 不是 7.5%，附上 *google* 地圖的連結，可以看到 *google* 上面的照片」。(連結如下)

<https://www.google.com.tw/maps/@22.182002,120.874778,3a,15y,270.23h,86.48t/data=!3m6!1e1!3m4!1srtOK3IviAhDW2F6TcesPcw!2e0!7i13312!8i6656?hl=zh-TW>

任務 1

請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。

後面的討論串，又有了以下對話。

阿文：「75%，指的是75度嗎？」

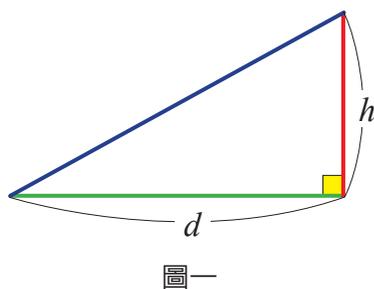
小堅：「不是的，75%是指每前進100公尺會上升75公尺。登山都沒這麼陡，是否有人故意塗掉小數點？」

我們來看看他們對話中談到的「75%」是指什麼？

如圖一，坡度的意義和表示方式：

以坡面上兩點間的**高度差**除以兩點間的**水平距離**。
離。即

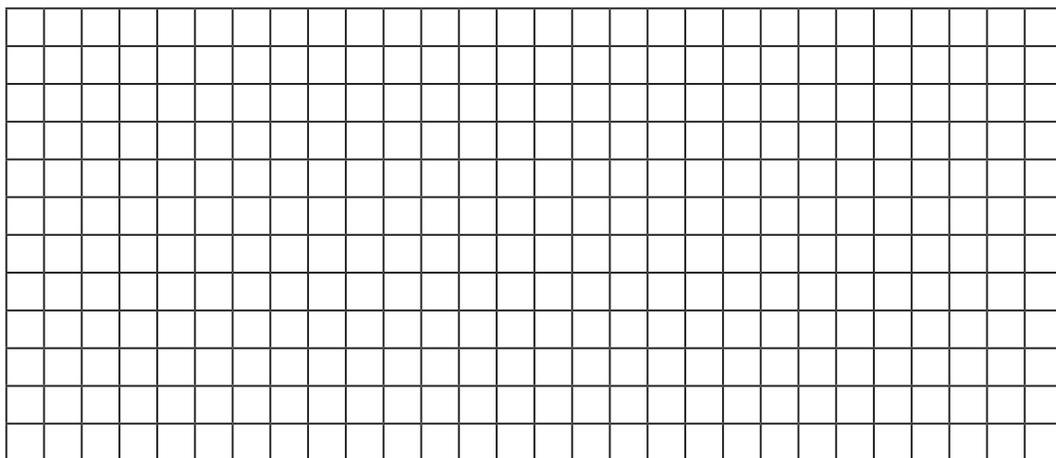
$$T(\text{坡度}) = \frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}} = \frac{h}{d}$$



其中 h 表示高度差， d 表示水平距離。坡度在道路上的標示常以「百分率」的形式出現。

任務 2

請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出坡度為 75%、7.5%的兩個直角三角形，並試著用量角器測量所繪製的兩個直角三角形的角度，並將角度標示上去。



(單位長 0.5 公分)

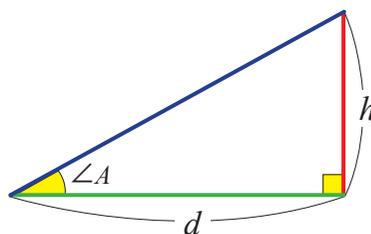
坡度為 75%、7.5%，指的就是 $\frac{h}{d}$ 分別為 $\frac{75}{100}$ 、 $\frac{7.5}{100}$ 的直角三角形，經過化簡可以得到：

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, 7.5\% = \frac{7.5}{100} = \frac{3}{40}。$$

小堅：「75%的坡度，角度約 37 度，大概要坦克車才能開的上去，即使一般轎車，爬坡也可能會有問題。」

如圖二，對於坡度 T ，是指用高度差 h 與水平距離 d 所組成的直角三角形；可以測量出 h 的對角。

例如，坡度 75%是指 $\angle A$ 對面的股(h)與相鄰的股(d)比值為 75%(即 $\frac{3}{4}$)的直角三角形， $\angle A$ 的角度大約 37 度。



圖二

任務 3

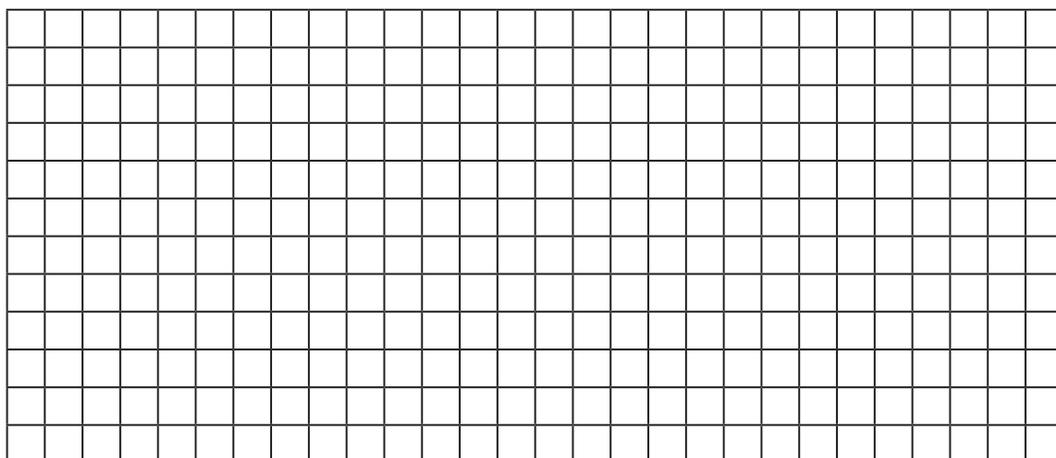
請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，繪製一個 $\angle A = 75$ 度的直角三角形。請問你可以利用哪些數據，來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？

2 / 坡度與角度

任務 4

從以下三個角度中挑選其中一個，當做 $\angle A$ 的度數，在附件二的方格紙（單位長 1 公分）上畫出直角三角形，並計算這個直角三角形的坡度是多少？

- (1) 60 度
- (2) 45 度
- (3) 55 度



（單位長 0.5 公分）

請跟你選擇同樣 $\angle A$ 度數的同學一起比較，你們所畫的直角三角形是否一樣大？

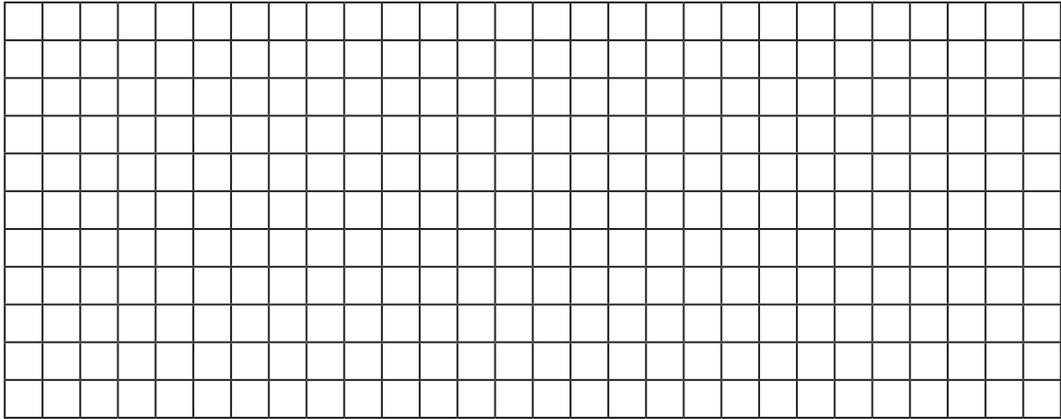
若是不一樣大，請檢查一下，你們所得到的坡度是否一樣呢？

請根據你們所得到的結論，試著與同組同學分享為何會得到如此的結論呢？

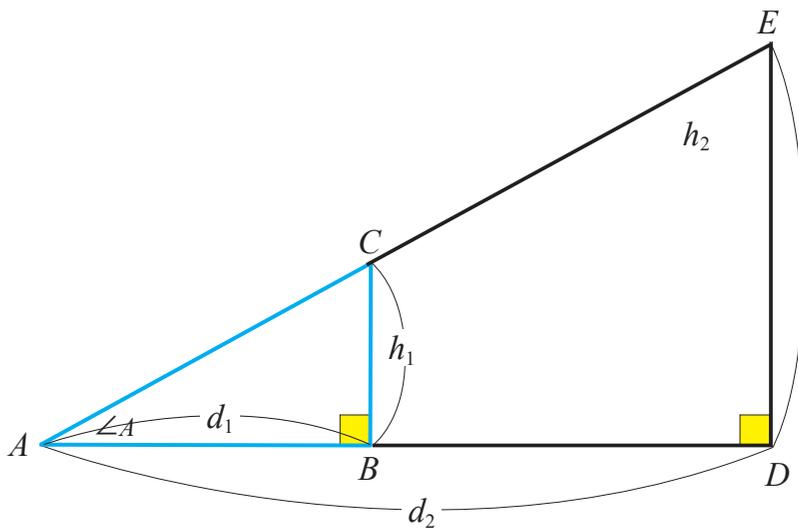
當 $\frac{h}{d}$ 值固定的直角三角形，所繪製不同的三角形它們的對應角有什麼關係呢？

任務 5

請在附件三的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出 $\frac{h}{d}$ 值是 $\frac{4}{3}$ ，但是大小不同的直角三角形。並試著用量角器測量該兩個三角形的 $\angle A$ 。說說看，你發現甚麼？



(單位長 0.5 公分)



由任務 4、任務 5 可以發現：

兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其 $\frac{h}{d}$ 的比值也會相等。

同樣地，兩個直角三角形，當它們 $\frac{h}{d}$ 的比值相等時， h 的對角角度也會相等。

前面所提的坡度($\frac{h}{d}$)常用來標記山坡、屋頂和道路的斜坡坡度有多大，並以直角三角形來協助觀察與描述，因此 $\frac{h}{d}$ 這個數值，在數學上也可以用 $\tan\angle A$ 或 $\tan A$ 表示，即 $\tan A = \frac{h}{d}$ 。($0^\circ < \angle A < 90^\circ$)

3 / $\tan A$ 的討論

任務 6

- (1) 請問 $\tan 30^\circ$ 的值為多少？
- (2) 若某道路坡度為「 $\tan 30^\circ$ 」，則請問每前進 100 公尺大概會上升多少公尺呢？

任務 7

有個山坡地，被標示坡度為 100%，請計算或測量一下這個山坡地坡度所對應的 $\angle A$ 為幾度。

4 / 直角三角比

依據前面的討論，在一個直角三角形 ABC 中，兩股分別為 7、24。我們也可以看成水平方向的距離為 7，鉛垂方向的距離為 24。

如此，可以得到 $\tan A = \frac{24}{7}$ 。

同時，注意這個直角三角形的斜邊是可以算出來的。如圖三，直角三角形 ABC 中， \overline{AC} 為斜邊，

對 $\angle A$ 而言， \overline{AB} 為 $\angle A$ 的鄰邊， \overline{BC} 為 $\angle A$ 的對邊。

如果，我們將 $\tan A = \frac{24}{7}$ ，

看成是 $\frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}}$ ，那麼另兩組比值，

$\frac{24}{25}$ ($\frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}}$)、 $\frac{7}{25}$ ($\frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}$) 就分別用 $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$ 、 $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}$ 來表示。

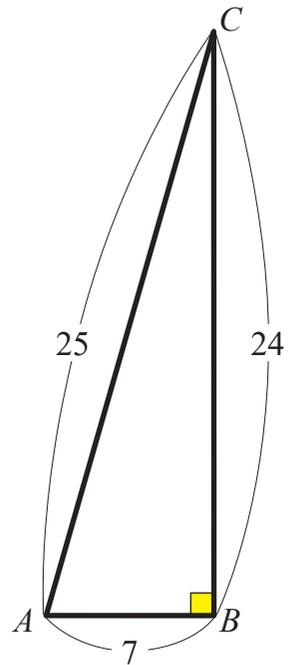
我們進一步將直角三角形三個邊長的兩兩比值，所表示的名稱整理如下：

$$\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$

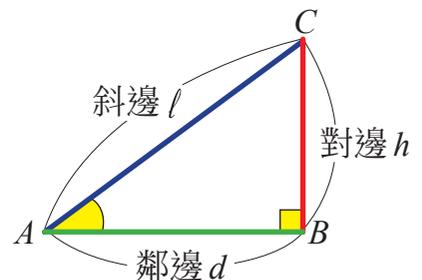
$$\sin A = \frac{h}{l} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \quad (\text{此處用 } \sin A \text{ 表示 } \sin \angle A)$$

$$\cos A = \frac{d}{l} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \quad (\text{此處用 } \cos A \text{ 表示 } \cos \angle A)$$

稱為 $\angle A$ 的直角三角比。

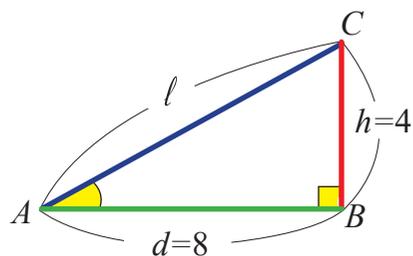


圖三



任務 8

如圖，有一直角三角形 ABC ，已知 $h=4$ 、 $d=8$ ，
求斜邊 l 、 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值。



5/ 特殊角度的 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$

當 $\angle A$ 是某些特殊角度時，可以先描繪一個直角三角形，先計算出各邊長度關係，製作表格供之後使用。

任務 9

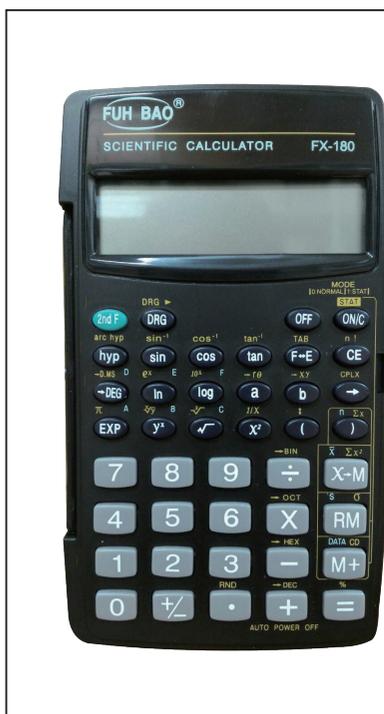
試著完成下表。

$\angle A$	$\tan A$	$\sin A$	$\cos A$
30 度			
45 度			
60 度			

6 / 計算機的使用

當我們遇到 $\angle A$ 的度數不是上述的特殊角時，我們可以使用如圖的計算機，算出 $\angle A$ 的 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值。

首先，我們先來看看如何使用計算機。



- 1 先按 **ON/C**，打開螢幕，並檢視螢幕左邊上方是否出現 *DEG* (表示 *degree* 度數)。
- 2 若左邊螢幕上方沒出現 *DEG*，而是出現 *RAD*、或 *GRAD*，可以按 **DRG** 數次，來切換到 *DEG* 模式。
- 3 接著按 $\angle A$ 的度數，例如 45 (指的是 45°)，再按 **tan**，就會得到 1 (即 $\tan 45^\circ$ 的值)。
- 4 若要求 $\sin A$ 或 $\cos A$ 的值，也可以依同樣的方式操作。

任務 10

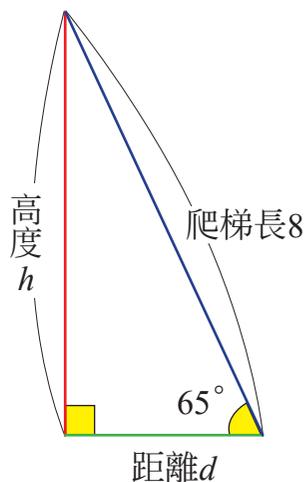
利用計算機，當 $\angle A = 55^\circ$ 時， $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值為何？

7 生活中的應用

任務 11

考量油漆工人在放置爬梯的安全，如果一座爬梯長度為 8 公尺，靠著牆面置放與地面接合角度為 65° ，這樣的架設是比較穩固的。

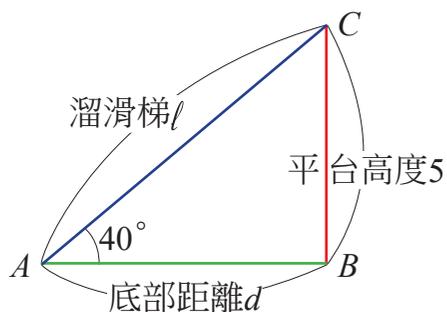
- (1) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子底部離牆面有多遠呢？
- (2) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子頂部離地面有多高呢？



任務 12

校園規劃溜滑梯從 5 公尺的高度滑下，依規定溜滑梯的角度不可以超過 40° 。

- (1) 請問溜滑梯的平台底部要保留多少公尺的水平距離來架設滑梯？
- (2) 這個溜滑梯的長度是多少公尺？

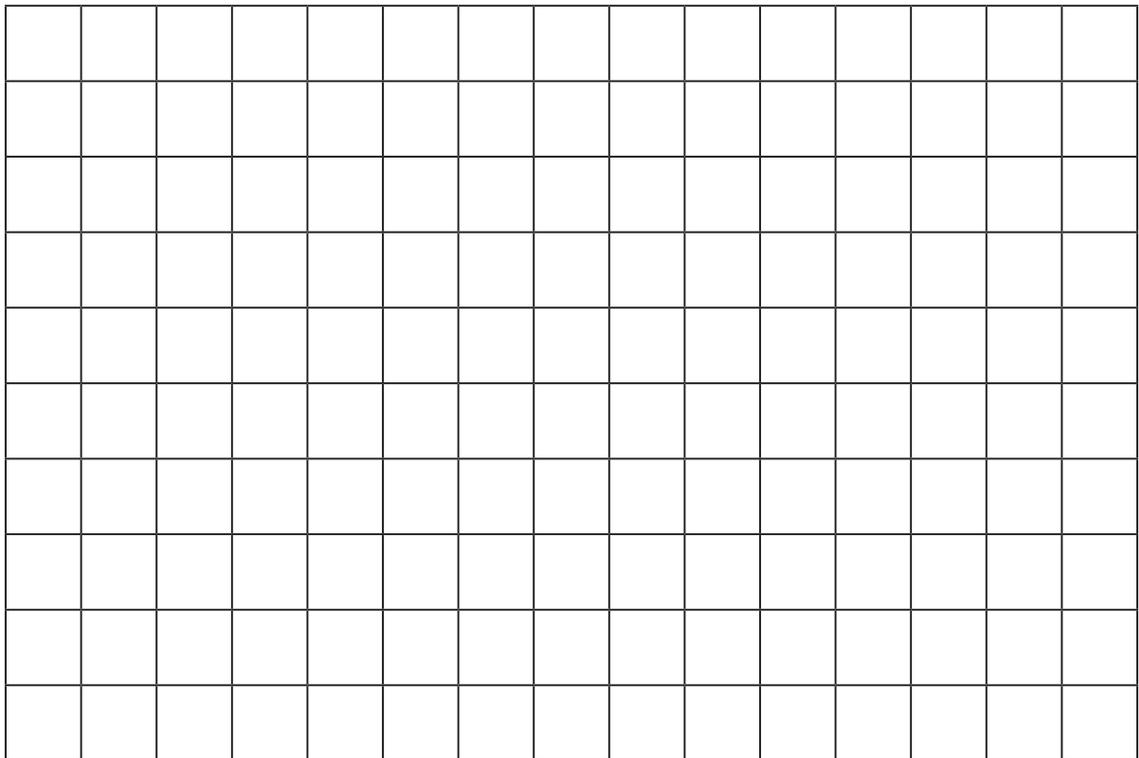


素養評量

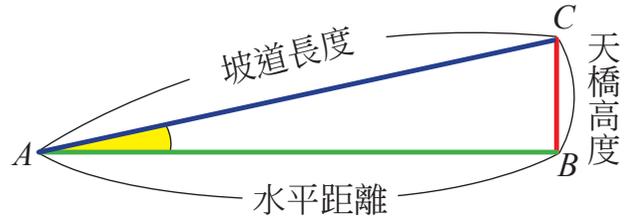
(下列各題的運算結果，皆四捨五入到小數點後第 2 位)

- 1 根據內政部營建署公布的市區道路及附屬工程設計標準中，提到「人行天橋及人行地下道之出入口為斜坡式坡道者，其坡度不得大於百分之十二。」、「無障礙通行空間設置坡道者，坡道斜率不得大於一比十二。」等與坡度有關的規範。

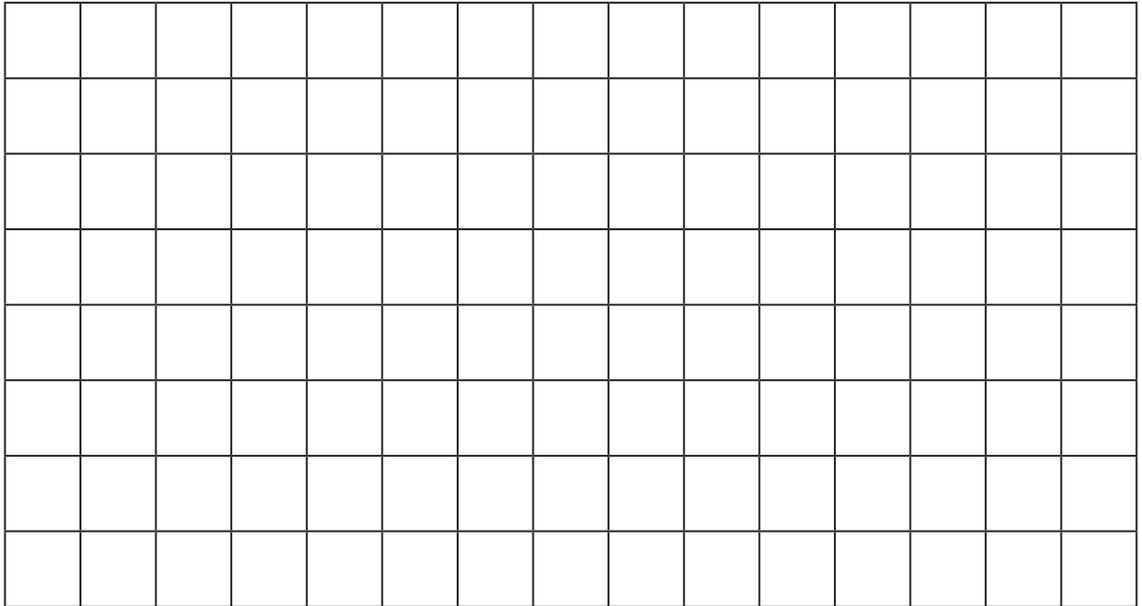
(1)請在方格紙(單位長1公分)繪製「坡面與水平面夾角 12 度」、「坡度 12%」、「坡道斜率 1 : 12」三種直角三角形。並比較這三種坡度描述的直角三角形，哪一個比較陡？



- (2) 學校外面規劃人行天橋的設置，天橋高度 3 公尺，若依內政部法規，需要預備多長的水平距離來建置斜坡式坡道(坡道坡 12%)。(四捨五入到小數點後第 2 位)



- 2 請畫一個直角三角形在下方的方格紙上。將你指定的銳角 $\angle A$ 的度數及各邊的長度測量出來。



(1) 請計算 $\tan A$ 的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

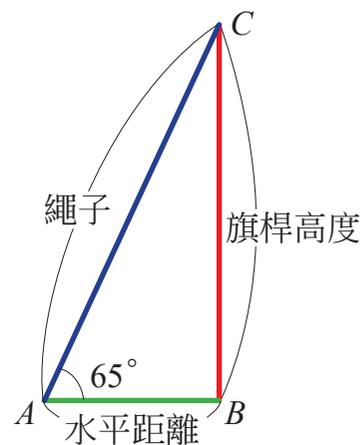
(2) 請計算 $\sin A$ 的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

(3) 請計算 $\cos A$ 的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

3 一直角三角形 ABC 中，設 $\overline{AC} = 13$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 5$ ，試求 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 的值。（可以畫出三角形，須確定斜邊與直角位置）

4 利用計算機，當 $\angle A = 70^\circ$ 時， $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值為何？
（四捨五入到小數點後第 2 位）

- 5 如圖，旗桿頂垂下一條比旗桿長的繩子，小子將繩子一端拉住，往水平方向走了 10 公尺，拉直繩子，且繩子與地面的夾角為 65 度，求旗桿的高度與繩子的長度。（請利用計算機作答，並四捨五入到小數點後第 2 位）



- 6 哈里發塔(阿拉伯語：خليفة برج，拉丁話：burj khalifah，英文：Burj Khalifa)，又譯哈利法塔，是位於阿拉伯聯合大公國首都杜拜境內的摩天大樓，為當前世界第一高樓與人工構造物，高度為 828 公尺，樓層總數 169 層。

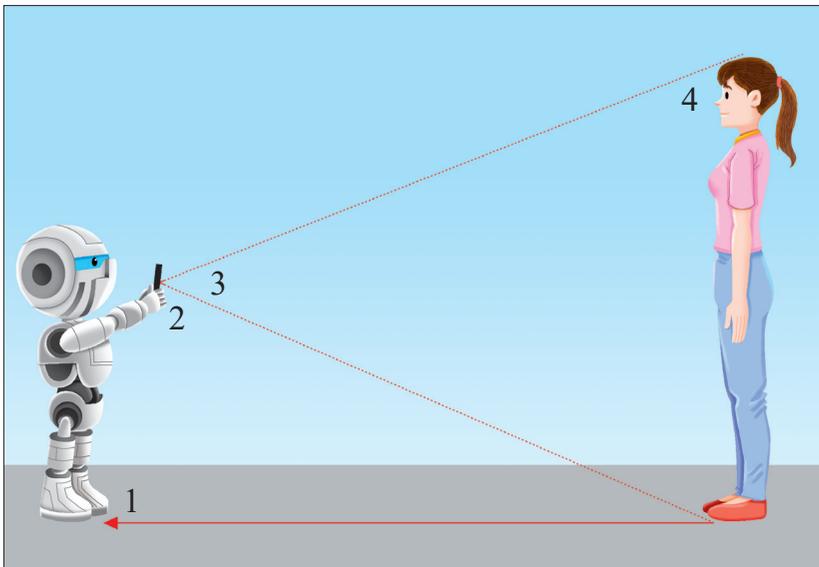
政府欲在哈里發塔附近 5 公里內設置機場，且假設飛機離開跑道開始起飛時，維持 13 度，起飛點距離哈里發塔約 4000 公尺，這架飛機會不會直接撞到該建築物呢？



- 7 有使用過手機中的 *APP* 軟體嗎？透過手中的智慧型手機再配合《*Smart Measure*》軟體，你也可以立即知道任何物件的大概高度。

【附註】除了 *smart measure* 之外，尚有 *easy measure*、*Remote Height Meter*(遠距高度測量儀)等各類 *APP* 程式具有相同的原理與功能，本教材僅利用其中一種詳細說明，教師或同學可視下載狀況、是否收費、軟體穩定性來決定採用哪些 *APP* 程式。

- (1) 使用此手機軟體，唯一需要輸入的數值是你手持手機時的高度，即大約將身高減去 30 公分。假定你使用手機測量自己與對面那位女生的距離，該軟體利用手機中內建的陀螺儀(方向感測器)，可用來測量鉛直、水平，或者是兩面(邊)之間的夾角。請在下圖中，指出該軟體需量出哪一個角度，即可以透過手持手機時的高度計算出你與該位女生的距離。



- (A) $\angle 1$ (B) $\angle 2$ (C) $\angle 3$ (D) $\angle 4$

(2) **步驟 1** 首先立正站定用手機向偵測物件的底部拍下一張照片，可以獲得測量物件與你的距離。

步驟 2 保持相同姿勢，再把手機相機鏡頭指向測量物件的最高點，然後按下【樹林鍵】，便可立即獲得此物件的高度。

請依據上述此軟體的操作步驟，寫下或畫圖說他是如何利用手機測量的角度，得到該女生的身高。

(3)《*Smart Measure*》是一款手機軟體，並不是專業測量工具，根據實地測試，利用《*Smart Measure*》來量度家中的大門和圍牆高度頗準確，但當測量電腦螢幕時卻顯示有 1.2 公尺長，所以評估使用該軟體測量大型物件會有較佳的表現。請試著用數學理由說明為何測量大型物件會比小型物件有較佳的表現。

