

素養導向數學教材

直角三角比



國家教育研究院

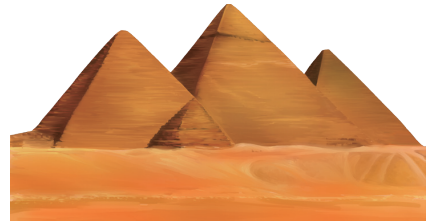
十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

壹 金字塔高測量之謎

學前能力 已學過三角形全等或是相似性質。

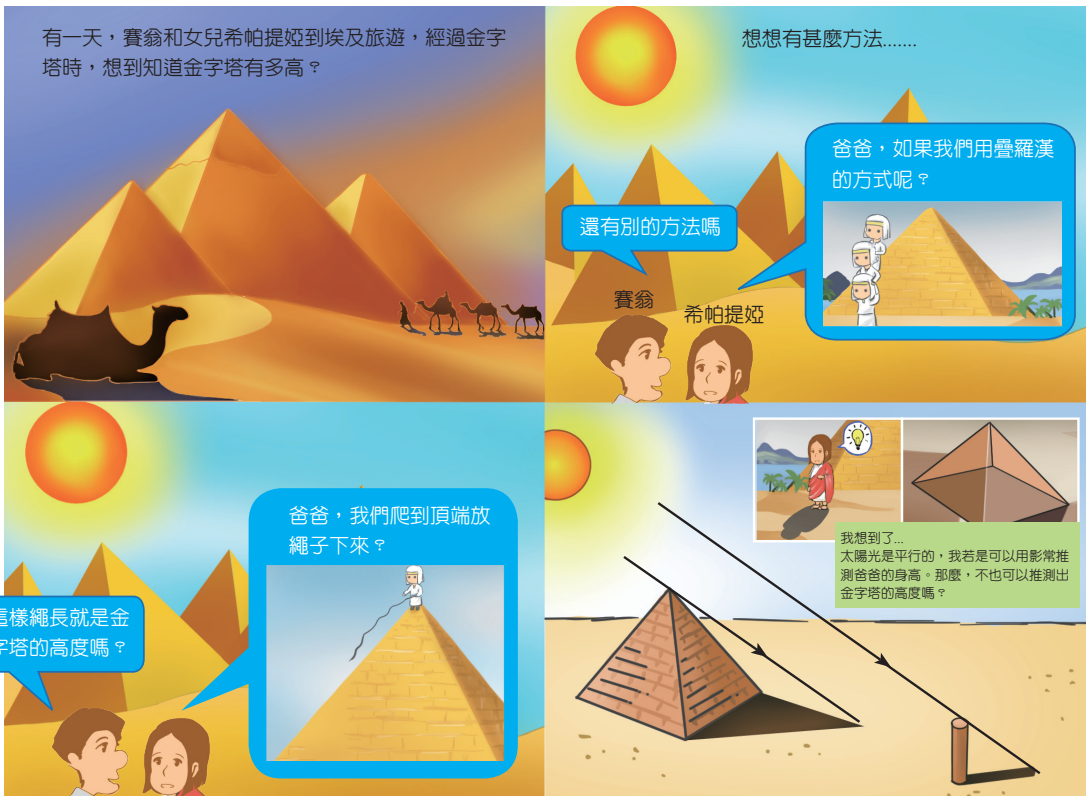
學習目標 會使用三角形全等或是相似性質進行間接測量。

古埃及所有金字塔中最大的一座，是第四王朝法老古夫王的金字塔。在西元1888年巴黎埃菲爾鐵塔完成前，它一直是世界上最高的建築物。你知道金字塔的高度要如何測量嗎？



我們先閱讀一個關於希臘數學家和金字塔的故事。

希臘女數學家希帕提婭【*H.ypatia*，約西元370~415】，父親席翁【*Theon*】是當時一位知名的學者、數學教授。她協助父親完成了歐幾里得〈幾何原本〉的評註與修訂。有一次，席翁刻意啟發女兒怎樣利用他們兩個人的影子來測量建築物的高度，並提議去金字塔所在地測量金字塔的高度。當席翁和希帕提婭騎駱駝向著金字塔前進時，席翁眼見駱駝背上的希帕提婭一副不安的樣子，知道希帕提婭還沒有想出測量金字塔的辦法。

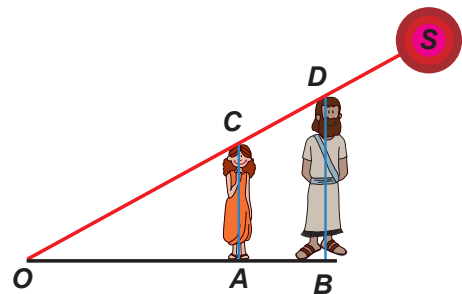


黃昏時，夕陽將他們的影子拉得長長的，希帕提婭跳下駱駝跟著父親一前一後向金字塔走去。希帕提婭回頭看見自己的身影和父親的身影重合在一起，發現此時夕陽剛好與他們的頭頂在一條直線上，想起可以用前幾天學過的相似三角形對應邊成比例來計算金字塔的高度（如圖一）。她把這突然想到的方法講給父親聽，席翁聽後欣慰地笑了。希帕提婭意會到這種辦法是對的，高興得朝著金字塔方向飛奔而去。

活動 1

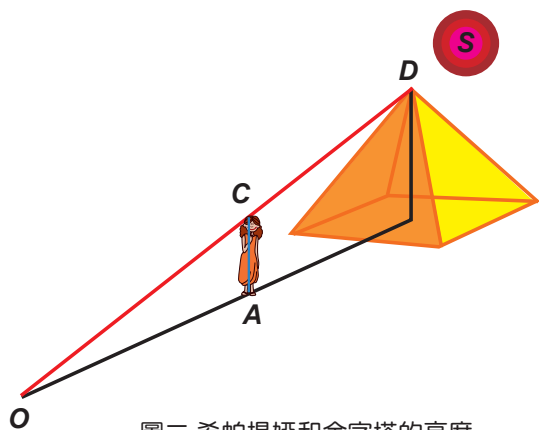
若已知希帕提婭的身高

步驟 1 請利用圖1 說明希臘女數學家希帕提婭如何測量父親的身高？



圖一 希帕提婭和父親的身高

步驟 2 請利用圖2 說明希臘女數學家希帕提婭如何測量金字塔的高度？



圖二 希帕提婭和金字塔的高度

希帕提婭（希臘文：Ἥπατία；370年－415年），又譯作海芭夏、海帕西婭，著名的希臘化古埃及新柏拉圖主義學者，是當時名重一時、廣受歡迎的女性哲學家、數學家、天文學家、占星學家以及教師，她居住在希臘化時代古埃及的亞歷山卓，對該城的知識社群做出了極大貢獻。根據後世資料顯示，她曾對丟番圖的《算術》



（*Arithmetica*）、阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》（*Conics*）以及托勒密的作品做過評註，但均未留存。從她的學生辛奈西斯（*Synesius of Cyrene*）寫給她的信中，可以看出她的知識背景：她屬柏拉圖學派——雖然我們只能假設她曾採納普羅提諾的學說（普羅提諾為公元三世紀時的柏拉圖門人，也是新柏拉圖學派的創始者）。另外有少許證據顯示，希帕提婭在科學上最知名的貢獻，為發明了天體觀測儀以及比重計。她最後被暴徒迫害殺死。2009年其生平被改編成西班牙電影《城市廣場》搬上銀幕。

資料來源：[維基百科 https://zh.wikipedia.org/wiki/希帕提婭](https://zh.wikipedia.org/wiki/希帕提婭)

泰勒斯（希臘語：Θαλῆς, *Thalês*，英語：*Thales*，約公元前624年 --- 公元前546年），又譯為泰利斯，公元前7至6世紀的古希臘時期的思想家、科學家、哲學家，希臘最早的哲學學派——米利都學派（也稱愛奧尼亞學派）的創始人。「科學和哲學之祖」，泰勒斯是古希臘及西方第一個有記載有名字留下來的自然科學家和哲學家。據說，埃及的大金字塔修成一千多年後，還沒有人能夠準確的測出它的高度。有不少人作過很多努力，但都沒有成功。

一年春天，泰勒斯來到埃及，人們想試探一下他的能力，就問他是否能解決這個難題。泰勒斯很有把握的說可以，但有一個條件——法老必須在場。第二天，法老如約而至，金字塔周圍也聚集了不少圍觀的老百姓。泰勒斯來到金字塔前，陽光把他的影子投在地面上。每過一會兒，他就讓別人測量他影子的長度，當測量值與他的身高完全吻合時，他立刻在大金字塔在地面的投影處作一記號，然後再丈量金字塔底到投影尖頂的距離。這樣，他就報出了金字塔確切的高度。在法老的請求下，他向大家講解了如何從「影長等於身長」推到「塔影等於塔高」的原理。也就是今天所說的相似三角形定理。

資料來源：<https://www.youtube.com/watch?v=cOIG80kBRVU>

貳 影長和物體高度比值與角度-應用直角三角比 \tan 值

學前能力 已會使用三角形全等或是相似性質進行間接測量。

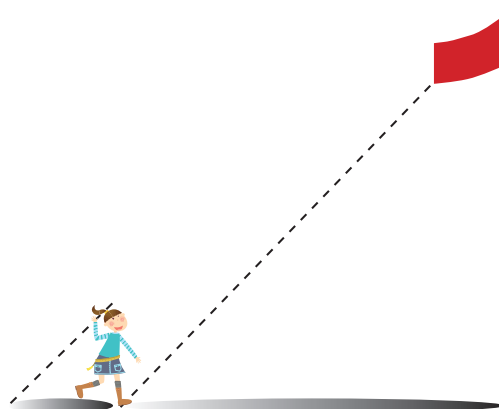
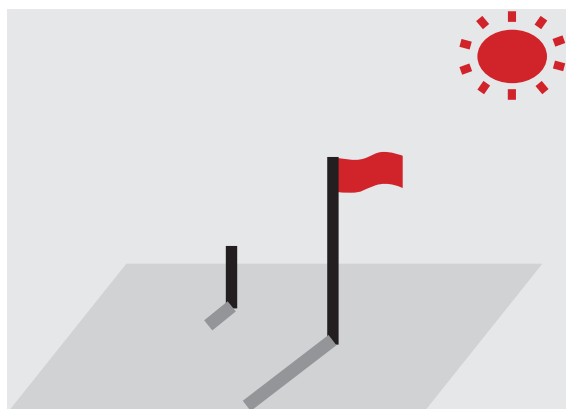
學習目標 使用直角三角比 \tan 值進行間接測量。



看圖想想看：太陽光線在同一時間地點照射到物體所產生的影子會有什麼關係？

上面的故事中，如果夕陽不是剛好與他們的頭頂在一條直線上，是否有方法，測量金字塔的高度呢？

看看下圖，想想看，在同一時刻、同一地區，兩個物體的高度與其影子之間的關係為何？



活動 1

影長與物體高度比值與角度

工具：直尺、量角器、計算機

請使用老師提供長度規格相同的蠟筆、彩色筆、白板筆，進行接下來的測量活動。

指引：請四~五人一組到走廊、窗台或操場等光源充足的地方進行筆長與影長的測量活動。

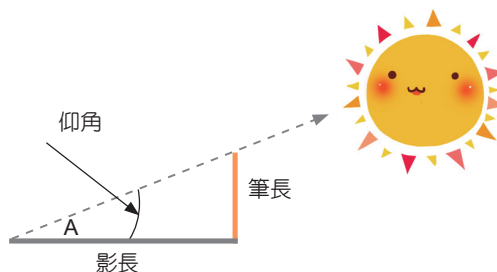
步驟1 在同一時刻、同一地點，將測量結果紀錄於下面表格，並觀察筆長與影長的比值關係為何？

種類	筆長	影長	筆長和影長的比值
蠟筆	5.8公分		
彩色筆	10.2公分		
白板筆	14.1公分		

步驟2 小學時，我們已經學過如何測量仰角，如下圖，請將三種筆的筆長和影長的比值及仰角填入表格，並說明筆長與影長的比值與仰角的關係。

(仰角請取最接近的整數值)

種類	筆長和影長的比值	仰角
蠟筆		
彩色筆		
白板筆		



關鍵概念

太陽光為平行光線，在同一時刻、同一地區，

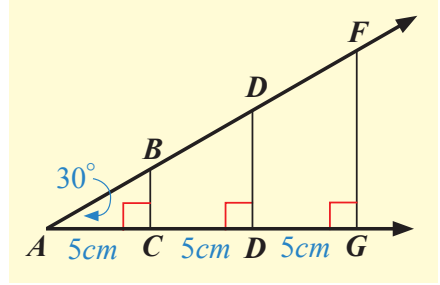
- 兩個物體的影子長度與它們的高度會成比例。
- 所形成的不同大小的直角三角形的高度，其仰角皆會相等。
- 所形成的不同大小的直角三角形皆為相似三角形。

活動 2

直角三角比 \tan 值

工具：直尺、量角器、計算機

步驟 1 畫一個 30° 角並在其底邊每五公分處標出一個點，共標三個點 C 、 E 、 G ，並過此三點繪製垂直線段。



步驟 2 測量每個直角三角形的邊，並完成表格。

直角三角形	鄰邊	對邊	$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$
$\triangle ABC$	$\overline{AC} = 5$ 公分	$\overline{BC} =$ _____	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =$ _____
$\triangle ADE$	$\overline{AE} = 10$ 公分	$\overline{DE} =$ _____	$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} =$ _____
$\triangle AFG$	$\overline{AG} = 15$ 公分	$\overline{FG} =$ _____	$\frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} =$ _____

步驟 3 解釋 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 、 $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$ 、 $\frac{\overline{FG}}{\overline{AG}}$ 三個值的關係，以及為何具有這樣的關係？

步驟 4 對直角三角形中邊長的比例進行推測。用不同的銳角來測試你的猜想。

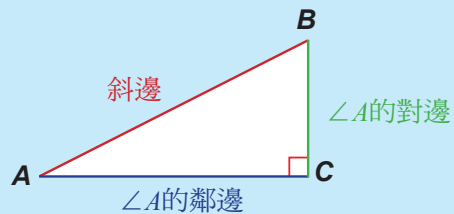
直角三角比是直角三角形中兩邊長的比例。可使用三角比例來查找直角三角形中的邊長或銳角的角度。對於給定的角度測量，直角三角形中邊長的長度比是恆定的，該比率稱為該角度的 \tan 值（讀音 *tangent*）。

關鍵概念

直角三角比 $\tan A$

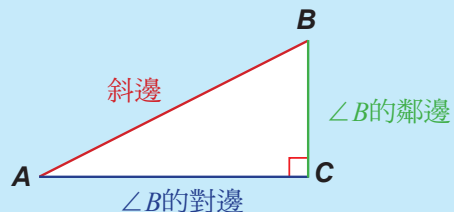
$\triangle ABC$ 是一個 $\angle A$ 為銳角的直角三角形， $\angle A$ 的 \tan 值（記作 $\tan A$ ）定義如下：

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊長度}}{\angle A \text{ 的鄰邊長度}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$



餘角

在直角三角形中， $\angle A$ 和 $\angle B$ 互為餘角，所以可以用同一個圖形找到 $\tan A$ 及 $\tan B$ 。請特別注意 $\angle A$ 的鄰邊會是 $\angle B$ 的對邊， $\angle A$ 的對邊會是 $\angle B$ 的鄰邊。



活動 3

用不同的銳角來測試你的猜想

工具：直尺、量角器、計算機

步驟 1 計算對於直角三角形 ABC ，不同角度的 \tan 值

$\angle A$	15度	20度	50度
$\angle A$ 對邊			
$\angle A$ 斜邊			
$\tan A$			

步驟 2 下圖為1公分的方格紙，請利用直尺與量角器試著畫畫看三角形，並填入將結果填入上表。



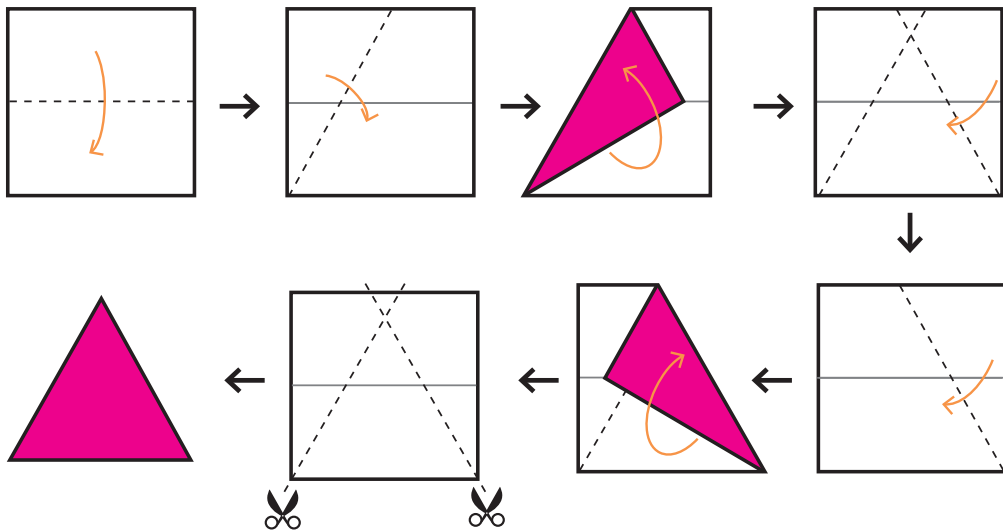
活動 4

使用特殊直角三角形求 \tan 值

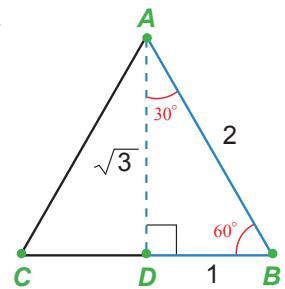
工具：色紙、直尺、量角器、計算機

步驟 1 請用正方形色紙摺出正三角形

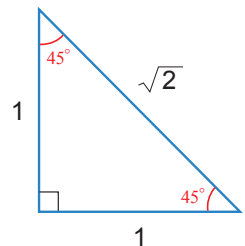
正方形色紙摺出正三角形



步驟 2 對摺正三角形色紙，我們可以得到 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 直角三角形。而所有的 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 直角三角形都是相似形，所以可以選擇 1 當作最短邊的長度來簡化計算，請利用它們的邊長比例關係，找出 $\tan 30^\circ$ 及 $\tan 60^\circ$ 的值為多少？

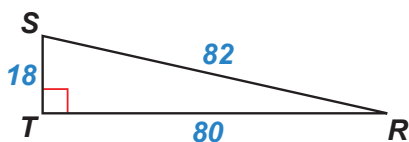


步驟 3 將正方形色紙對摺可得到 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 直角三角形。所有的 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 直角三角形亦都是相似形，選擇 1 當作最短邊的長度來簡化計算，利用它們的邊長比例關係，找出 $\tan 45^\circ =$ _____



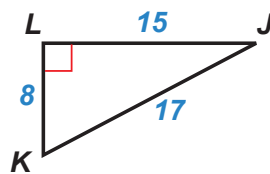
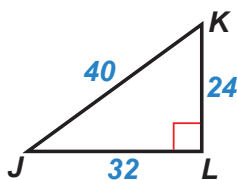
練習 1

求 $\tan S$ 與 $\tan R$ 。將答案寫成分數並算出其近似值（四捨五入至小數點第三位）。



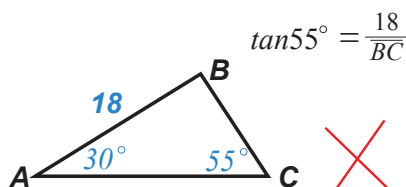
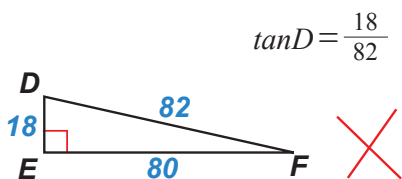
練習 2

求 $\tan J$ 與 $\tan K$ 。將答案寫成分數並將其算出其近似值（四捨五入至小數點第三位）。



練習 3

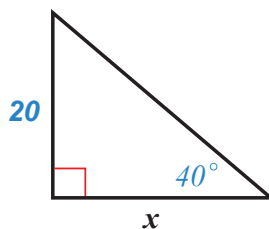
下面是兩位同學批改試題的狀況，請確認其是否批改正確，若批改正確，請說明正確答案為何？若批改錯誤，請指出錯誤之處。



練習 4

下列哪一個選項可表示圖示直角三角形中的 x 值。

- (A) $x = 20 \cdot \tan 40^\circ$ (B) $x = \frac{\tan 40^\circ}{20}$
(C) $x = \frac{20}{\tan 40^\circ}$ (D) $x = \frac{20}{\tan 50^\circ}$



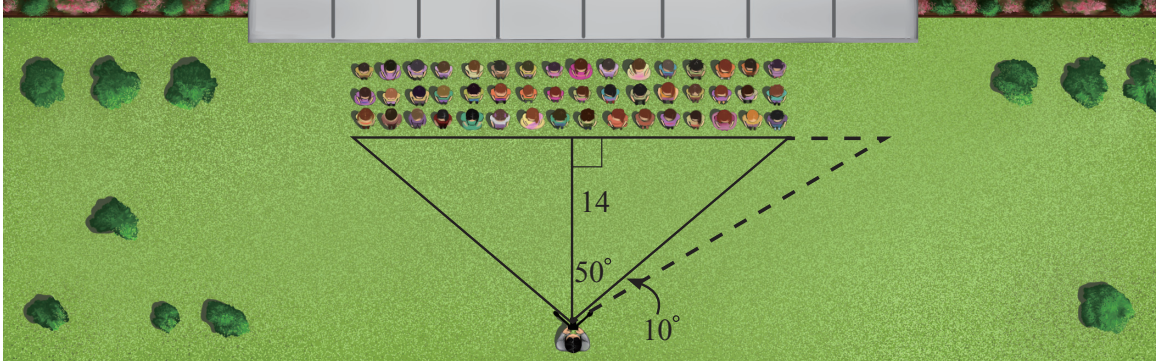
練習 5

小貝在離學校旗桿 20 公尺的點 A 處，測出旗桿頂端的仰角為 36° ，請計算旗桿的高度。（已知 $\tan 36^\circ \approx 0.7265$ ）

練習 6

班上正在草坪上拍照。攝影師位於距離班級隊伍中心14公尺處。

如果她必須右轉 50° 才能看到最後一個學生。



1. 請問從班級隊伍中心點到排尾的距離有多長？
2. 請問整個班級隊伍的距離有多長？(從排頭到排尾)
3. 若攝影師發現她必須再右轉 10° 才看到後方建築物的最左端，則隊伍中心點到後方建築物最左端的距離是多少？
4. 如果每個學生需要0.5公尺的空間，那麼在第一行可以排幾個學生？解釋你的推理過程。

參 直角三角形的其他邊長比例關係-直角三角比 \sin, \cos 值

學前能力 已會使用直角三角比 \tan 值進行間接測量。

學習目標 會使用直角三角比 \sin, \cos 值進行間接測量。

活動 1

直角三角比 \sin, \cos 值

工具：直尺、量角器、計算機

步驟 1 請利用下方方格紙，做出兩個不同大小的直角三角形，且其兩股的比值皆為 $\frac{3}{4}$ ，並以兩股中，股長較長者為鄰邊，股長較短者為對邊，並將各邊長紀錄於表格中

步驟 2 記錄兩直角三角形的鄰邊跟對邊，並計算出斜邊長。
(提示：斜邊可以利用畢氏定理算出)

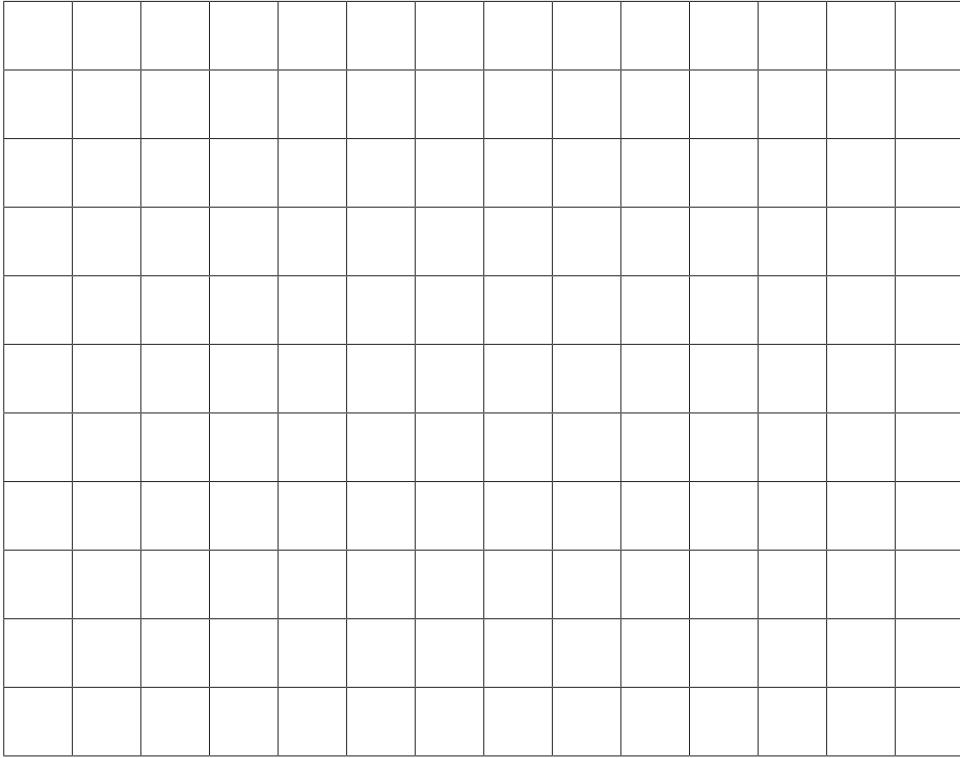
直角三角形	鄰邊	對邊	斜邊
甲三角形			
乙三角形			

步驟 3 觀察斜邊長與對邊、鄰邊的比值，並記錄於表格中。

直角三角形	$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$	$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$
甲三角形		
乙三角形		

步驟 4 對直角三角形中邊長的比例進行推測。用不同的銳角來測試你的猜想。

請依 **步驟1** 指示畫出兩個指定的直角三角形，並測量其邊長。



在 **任務 1** 的表格中有哪些發現?

由活動1，我們發現：

如上圖，若一直角三角形 ABC ，其中 $\angle C=90^\circ$ ，且其兩股的比值皆為 $\frac{3}{4}$ ，則 $\angle A$ 的對邊與斜邊的比值為 $\frac{3}{5}$ ， $\angle A$ 的鄰邊與斜邊的比值為 $\frac{4}{5}$ 。

因此，我們發現在直角三角形中有其他邊長比例關係，如：

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{3}{5},$$

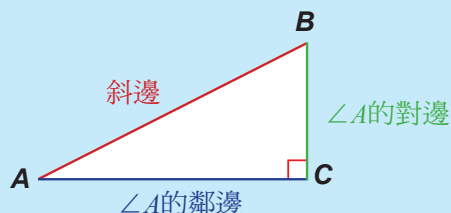
$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{4}{5},$$

關鍵概念

直角三角比 $\sin A$

$\triangle ABC$ 是一個 $\angle A$ 為銳角的直角三角形， $\angle A$ 的 \sin 值(記作 $\sin A$)定義如下：

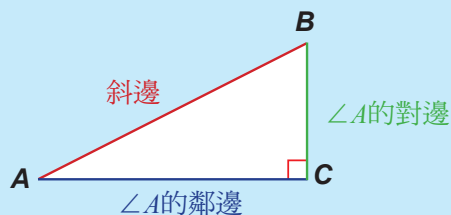
$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊長度}}{\angle A \text{ 的斜邊長度}} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$



直角三角比 $\cos A$

$\triangle ABC$ 是一個 $\angle A$ 為銳角的直角三角形， $\angle A$ 的 \cos 值(記作 $\cos A$)定義如下：

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長度}}{\angle A \text{ 的斜邊長度}} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

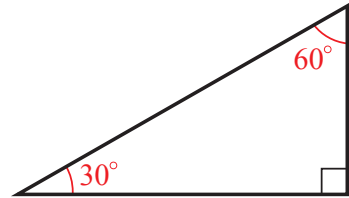


活動 2

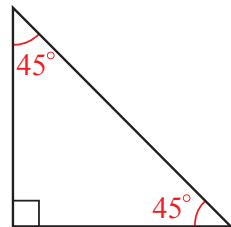
使用特殊直角三角形求 \sin , \cos 值

步驟 1 如圖，試求 $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$ 的值。

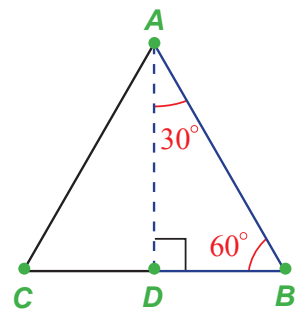
解



步驟 2 試求 $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\tan 45^\circ$ 的值。



步驟 3 試求 $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$ 的值。



練習 1

求下圖的 $\sin D$ 與 $\sin E$ 。將答案寫成分數並算出其近似值（四捨五入至小數點第三位）。

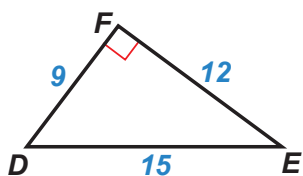


圖1

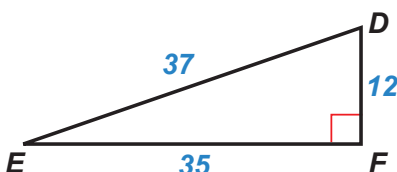


圖2

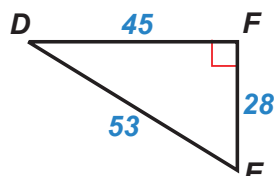


圖3

練習 2

求下圖的 $\cos X$ 與 $\cos Y$ 。將答案寫成分數並算出其近似值（四捨五入至小數點第三位）。

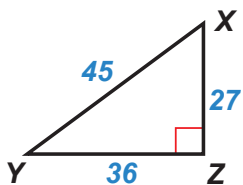


圖1

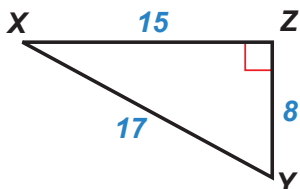


圖2

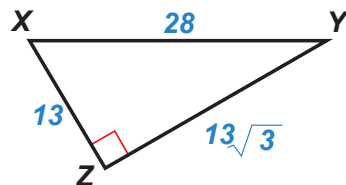
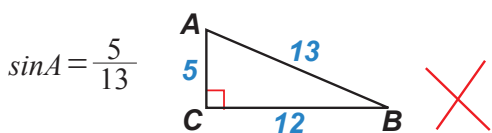


圖3

練習 3

下面是一位同學批改試題的狀況，請確認其是否批改正確，若批改正確，請說明正確答案為何？若批改錯誤，請指出錯誤之處。



練習 4

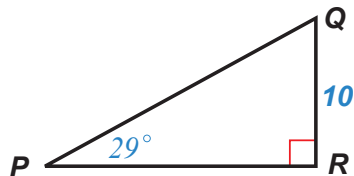
下列哪一個選項可表示圖示直角三角形中 PQ 線段的值。

(A) $10 \cdot \cos 29^\circ$

(B) $10 \cdot \sin 29^\circ$

(C) $\frac{10}{\sin 29^\circ}$

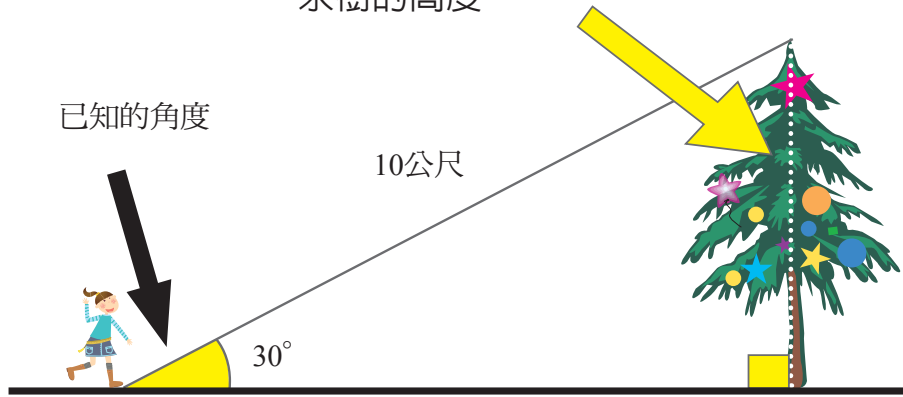
(D) $\frac{10}{\cos 29^\circ}$



練習 5

學校在校園裡裝飾了一棵聖誕樹，小貝由地面測量此樹頂的仰角為 30° ，且從樹頂到仰角所拉出的彩帶長有10公尺，請討論並說明如何利用直角三角比來計算樹的高度。

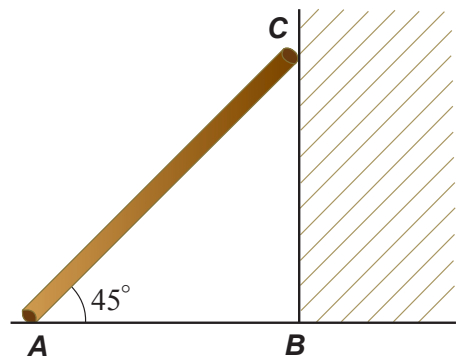
求樹的高度



- (1) 若使用直角三角比，你會使用 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 哪種直角三角比？
- (2) 若彩帶的長度不變，且已知仰角角度為 30° ，則樹高是多少？
- (3) 若彩帶的長度不變，且已知仰角角度為 45° ，則樹高是多少？
- (4) 若彩帶的長度不變，且已知仰角角度為 60° ，則樹高是多少？
- (5) 請問小貝與聖誕樹的距離是多少？

練習 6

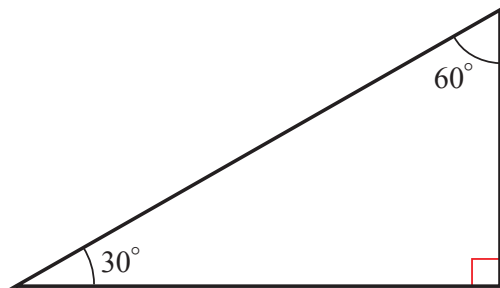
小貝發現一支7公尺的梯子以 45° 角斜放靠在牆上，則梯頂到地面的距離是多少公尺？



練習 7

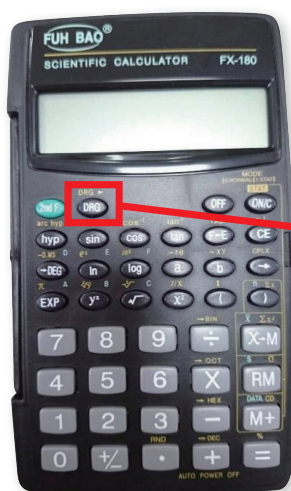
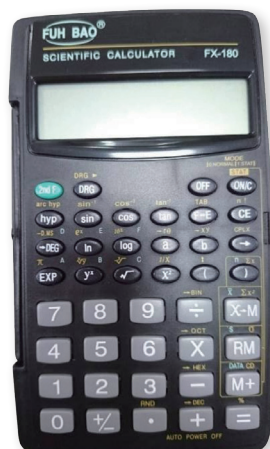
暑假小貝一家人到新竹旅遊，參觀新竹市陽光國小，發現教室二樓末端，設計了七個並排的超大型溜滑梯，小朋友下課之後就可以直接溜到一樓。

爸爸測量出溜滑梯的傾斜角為 30° ，高為3公尺，請問此滑梯的長度為多少公尺？

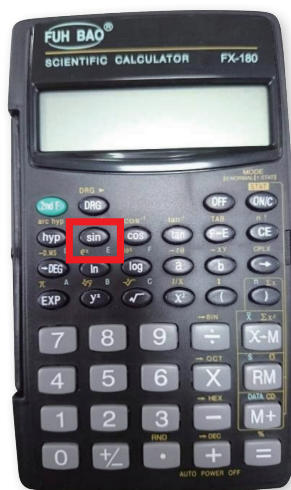


肆 使用計算機計算 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 的值

特殊角的直角三角比可以利用邊長找出其值，但若不是特殊角，我們可以利用計算機很快地計算出其直角三角比 \sin 、 \cos 、 \tan 的值。



用計算機計算時，你必須先把計算機設定在你想要的計算模式，按下計算機上的 DRG ，可切換三種模式， DEG 、 RAD 、 $GRAD$ 。



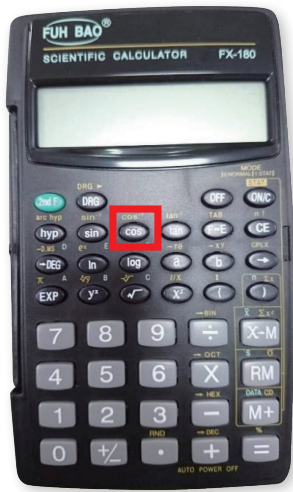
例如：計算 $\sin 30^\circ$

步驟如下：

計算模式： DEG

按鍵順序：30 $\boxed{\sin}$

結果：0.5



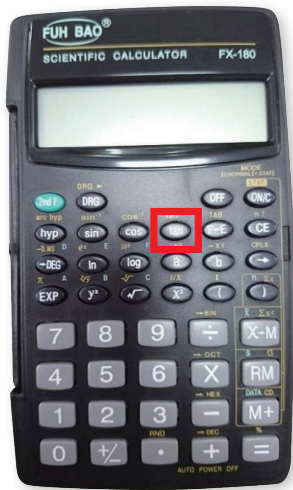
例如：計算 $\cos 53^\circ$

步驟如下：

計算模式：*DEG*

按鍵順序： $53 \boxed{\text{COS}}$

結果：0.601815023



例如：計算 $\tan 15^\circ$

步驟如下：

計算模式：*DEG*

按鍵順序： $15 \boxed{\text{TAN}}$

結果：0.267949192

評量 1

利用計算機計算下列角度的直角三角比（四捨五入到小數點第三位）

角度	25度	58度	75度
$\tan A$			
$\sin A$			
$\cos A$			

評量 2

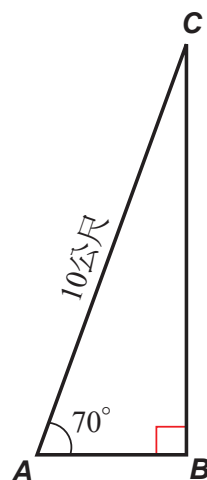
當 $\angle A = 70^\circ$ ，且梯子長為10公尺

$$\cos 70^\circ = \frac{70^\circ\text{之鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{梯底離牆的水平距離}}{\text{梯子長度}}$$

(1) 使用計算機，找出 $\cos 70^\circ$ 、 $\sin 70^\circ$ 的值為多少？(四捨五入到小數點第三位)

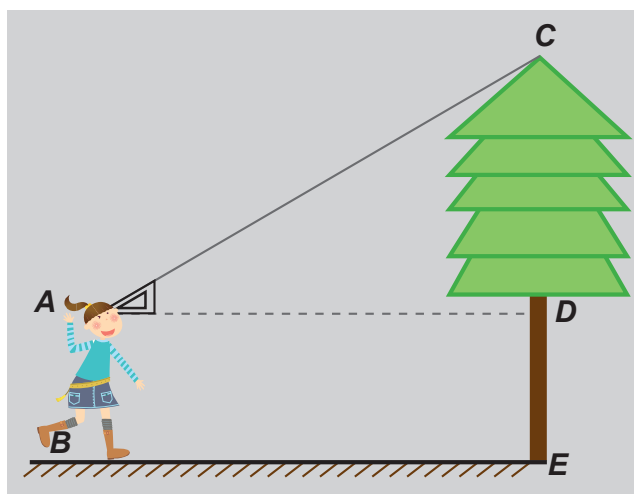
(2) 請使用第(1)小題的結果，算出梯子離牆的距離 \overline{AB} 。

(3) 請使用第(1)小題的結果，算出梯頂到牆角的高度 \overline{BC} 。



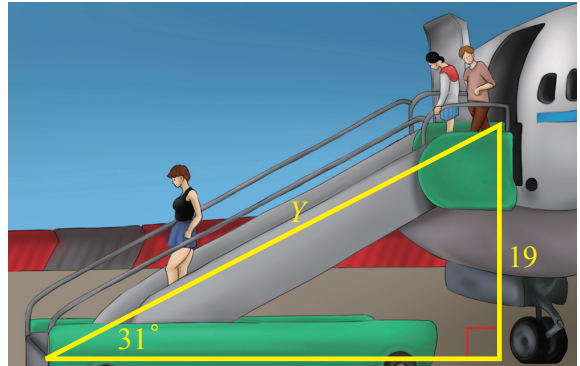
評量 3

身高175公分的小貝用仰角 40° 測量樹的高度，已知她與這棵樹的距離為5公尺，求這棵樹的高度。(請使用計算機，四捨五入到小數點第三位)



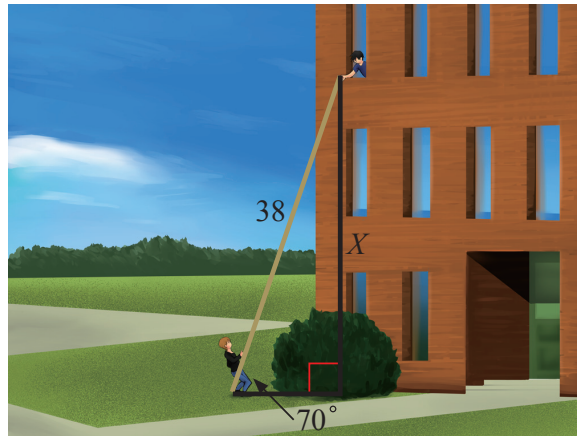
評量 4

飛機艙門到地面的距離為19英尺，飛機活動客梯的傾斜角為 31° ，則其長度為多少英尺？（請使用計算機，四捨五入到小數點第三位）



評量 5

你想從你學校大樓的三樓高處掛一條29公尺的旗幟。你需要知道牆的高度，但有一個大的樹叢擋住了測量的路徑。（請使用計算機，四捨五入到小數點第三位）

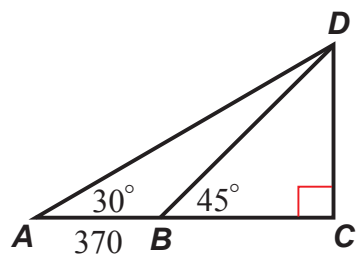


1. 你把38公尺的繩子從窗戶處扔到你的朋友身上。她把它延伸到末端，發現繩子與地面的夾角為 70° ，求三樓窗口的高度。
2. 若樹叢高6公尺，你的旗幟適合佈置在上方嗎？
3. 假設你需要知道你朋友距離學校大樓有多遠。你應該使用哪個三角比？

評量 6

請分組討論，並完成下列問題。

小貝欲測量某大樓的高度，先在地面上 A 點測得樓頂的仰角為 30° ，再朝大樓方向前進 370 公尺到達 B 點，測得樓頂的仰角為 45° ，求此大樓的高度。(特殊三角形，長度以根號表示)

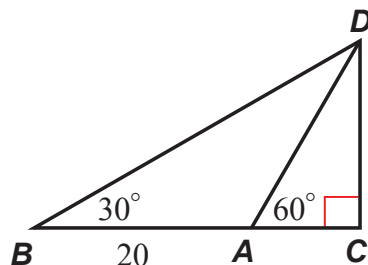


評量 7

大奇想測量新北市政府巨型聖誕樹的高度，首先在與樹頂仰角恰為 60° 的地面 A 點處做上記號，面對著巨型聖誕樹後退到仰角恰為 30° 的 B 點，再測得 A 點和 B 點的距離為 20 公尺。請問巨型聖誕樹的高度為多少公尺？(特殊三角形，長度以根號表示)



↑ 圖片取自網路

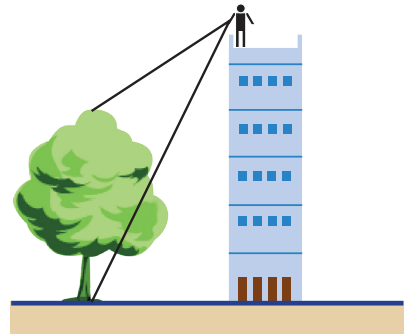


評量 8

如圖所示，小貝站在學校大樓頂樓測量地面的一棵大樹，得樹底的俯角為 60° ，樹頂的俯角為 30° ，若小貝眼睛至地面的距離為21公尺，則

- (1) 大樹和小貝距離多少公尺？
(特殊三角形，長度以根號表示)

- (2) 樹高約多少公尺？



素養導向普通型高級中學數學教材：直角三角比－學生手冊

素養導向數學教材 / 單維彰 主編
— 初版 — 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

發行人：許添明

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養導向教材研發編輯小組

召集人：單維彰

副召集人：鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳始蓉、林美曲、姚志鴻
洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄
蔡佩旻、鄧家駿（依姓氏筆畫順序排列）

作者：吳始蓉、李彥彬、蔡佩旻（依姓氏筆畫順序排列）

執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲（依姓氏筆畫順序排列）

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）

